

Estadística

- 1.**
- Población: naranjas de una cosecha; variable estadística: diámetro. Cuantitativa continua.
 - Población: habitantes de un país; variable estadística: edad a la cual acaban sus estudios. Cuantitativa discreta.
 - Población: alumnos de una clase; variable estadística: color favorito. Cualitativa nominal.
 - Población: todos los vecinos de la comunidad; variable estadística: periódico preferido. Cualitativa nominal.

- 2.**
- a) Sobre toda la población, ya que se puede contactar con todos los alumnos de 3.º de ESO de un colegio.
- b) Sobre una muestra, ya que es muy difícil contactar con todos los habitantes de una ciudad.

- 3.** No es representativa, porque los oyentes de la emisora tendrán unos gustos musicales afines.

4.

Número	n_i	f_i (%)	N_i	F_i (%)
1	8	19,05	8	19,05
2	8	19,05	16	38,10
3	5	11,90	21	50,00
4	7	16,67	28	66,67
5	6	14,29	34	80,95
6	8	19,05	42	100
	$\Sigma n_i = 42$	$\Sigma f_i = 100$		

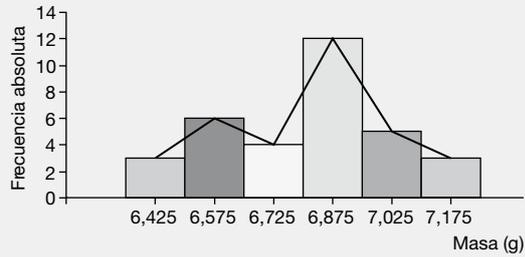
- Los valores más frecuentes son el 1, el 2 y el 6. Los tres resultados aparecen 8 veces.
- El valor menos frecuente es el 3 que aparece 5 veces.

5.

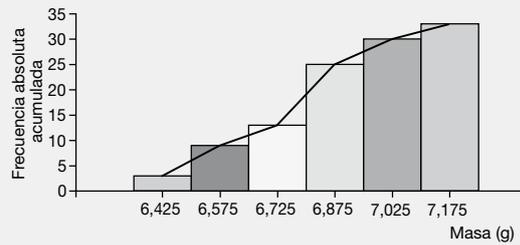
Masa (g)	Marca de clase	n_i	f_i	N_i	F_i
[6,35, 6,50)	6,425	3	0,0909	3	0,0909
[6,50, 6,65)	6,575	6	0,1818	9	0,2727
[6,65, 6,80)	6,725	4	0,1212	13	0,3939
[6,80, 6,95)	6,875	12	0,3636	25	0,7576
[6,95, 7,10)	7,025	5	0,1515	30	0,9091
[7,10, 7,25)	7,175	3	0,0909	33	1
		$\Sigma n_i = 33$	$\Sigma f_i = 1$		

- La marca de clase que presenta mayor frecuencia es la clase 6,875.
- Las marcas de clase que presentan menor frecuencia son las clases 6,425 y 7,175.

- 6.** a) Histograma de frecuencias absolutas.

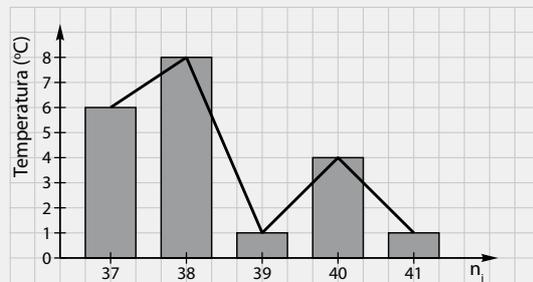


- b) Histograma de frecuencias absolutas acumuladas.



7.

Temperatura (°C)	n_i
37	6
38	8
39	1
40	4
41	1

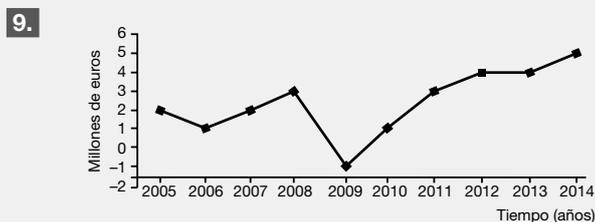


- 8.** Menos de 80 000 €: Andalucía, Castilla-La Mancha y Extremadura.

De 80 000 a 100 000 €: Principado de Asturias, Canarias, Cantabria, Castilla y León, Galicia, Murcia, Comunidad Valenciana, Ceuta y Melilla.

De 100 000 a 120 000 €: Aragón, Baleares, Cataluña y La Rioja.

Más de 120 000 €: Comunidad de Madrid, Navarra y País Vasco.



— Mejor momento: año 2014; peor momento: año 2009.

10. Actividad TIC

11. Tenemos $N = 98$ datos.

$$Q_1 \rightarrow i = \frac{1}{4} \cdot 98 = 24,5 \rightarrow Q_1 = 3$$

$$Q_2 \rightarrow i = \frac{1}{2} \cdot 98 = 49 \rightarrow Q_2 = Me = \frac{4 + 4}{2} = 4$$

$$Q_3 \rightarrow i = \frac{3}{4} \cdot 98 = 73,5 \rightarrow Q_3 = 5$$

12. Hay dos modas: castaño y moreno.

Ca = castaño y Mo = moreno.

13.

x_i	1	3	5	7	9
n_i	25	30	35	20	15
N_i	25	55	90	110	125

Moda:

El valor de la variable con una frecuencia absoluta mayor es 5.

$$Mo = 5$$

Media aritmética:

$$\bar{x} = \frac{1 \cdot 25 + 3 \cdot 30 + 5 \cdot 35 + 7 \cdot 20 + 9 \cdot 15}{125} = 4,52$$

Mediana:

Puesto que hay 125 datos, el dato central es el que ocupa la posición 63.

Las frecuencias absolutas acumuladas nos informan de que:

- los datos del 1 al 25 tienen un valor 1.
- los datos del 26 al 55 tienen un valor 3.
- los datos del 56 al 90 tienen un valor 5.
- los datos del 91 al 110 tienen un valor 7.
- los datos del 111 al 125 tienen un valor 9.

Por lo tanto, el dato que ocupa la posición 63 tiene un valor 5.

$$Me = 5$$

Primer cuartil:

$$i = Q \cdot \frac{N}{4} = 1 \cdot \frac{125}{4} = 31,25$$

Como 31,25 no es un número entero, se redondea al primer entero mayor que 31,25, es decir, 32.

El primer cuartil es el valor del dato que ocupa la posición 32:

$$Q_1 = 3$$

Tercer cuartil:

$$i = Q \cdot \frac{N}{4} = 3 \cdot \frac{125}{4} = 93,75$$

Como 93,75 no es un número entero, se redondea al primer entero mayor que 93,75, es decir, 94.

El tercer cuartil es el valor del dato que ocupa la posición 94:

$$Q_3 = 7$$

b)	Intervalo de clase	[2, 8)	[8, 14)	[14, 20)	[20, 26)
	x_i	5	11	17	23
	n_i	6	14	7	3
	N_i	6	20	27	30

Moda:

El intervalo con mayor frecuencia absoluta es [8, 14); por lo tanto, la moda será su marca de clase.

$$Mo = 11$$

Media aritmética:

$$\bar{x} = \frac{5 \cdot 6 + 11 \cdot 14 + 17 \cdot 7 + 23 \cdot 3}{30} = 12,4$$

Los datos centrales son los que ocupan los lugares 15 y 16. Ambos pertenecen al intervalo [8, 14); por lo tanto, la clase mediana es el intervalo [8, 14).

Como aproximación a la mediana tomamos la marca de clase de dicho intervalo:

Mediana:

$$Me = 11$$

Primer cuartil:

$$i = Q \cdot \frac{N}{4} = 1 \cdot \frac{30}{4} = 7,5$$

Como 7,5 no es un número entero, se redondea al primer entero mayor que 7,5, es decir, 8.

El primer cuartil es el valor del dato que ocupa la posición 8:

$$Q_1 = 11$$

Tercer cuartil:

$$i = Q \cdot \frac{N}{4} = 3 \cdot \frac{30}{4} = 22,5$$

Como 22,5 no es un número entero, se redondea al primer entero mayor que 22,5, es decir, 23.

El tercer cuartil es el valor del dato que ocupa la posición 23:

$$Q_3 = 17$$

14.

x_i	2	3	4	5	8	10	11	12
n_i	3	3	1	1	2	1	1	1
N_i	3	6	7	8	10	11	12	13

$$r = 12 - 2 = 10$$

$$\bar{x} = \frac{2 \cdot 3 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 1 + 5 \cdot 1 + 8 \cdot 2 + 10 \cdot 1 + 11 \cdot 1 + 12 \cdot 1}{13} = 5,615$$

$$d_m = \frac{|2 - 5,615| \cdot 3 + |3 - 5,615| \cdot 3 + |4 - 5,615| \cdot 1 + |5 - 5,615| \cdot 1 + |8 - 5,615| \cdot 2 + |10 - 5,615| \cdot 1 + |11 - 5,615| \cdot 1 + |12 - 5,615| \cdot 1}{13} = 3,219$$

$$\sigma^2 = \frac{|2 - 5,615|^2 \cdot 3 + |3 - 5,615|^2 \cdot 3 + |4 - 5,615|^2 \cdot 1 + |5 - 5,615|^2 \cdot 1 + |8 - 5,615|^2 \cdot 2 + |10 - 5,615|^2 \cdot 1 + |11 - 5,615|^2 \cdot 1 + |12 - 5,615|^2 \cdot 1}{13} = 12,544$$

$$\sigma = \sqrt{12,544} = 3,542$$

$$CV = \frac{3,542}{5,615} = 0,631$$

15. a) $r = 9 - 1 = 8$

$$d_m = \frac{|1 - 4,52| \cdot 25 + |3 - 4,52| \cdot 30 + |5 - 4,52| \cdot 35 + |7 - 4,52| \cdot 20 + |9 - 4,52| \cdot 15}{125} = 2,14$$

$$\sigma^2 = \frac{|1 - 4,52|^2 \cdot 25 + |3 - 4,52|^2 \cdot 30 + |5 - 4,52|^2 \cdot 35 + |7 - 4,52|^2 \cdot 20 + |9 - 4,52|^2 \cdot 15}{125} = 6,49$$

$$\sigma = \sqrt{6,49} = 2,55$$

$$CV = \frac{2,55}{4,52} = 0,56$$

b) $r = 23 - 5 = 18$

$$d_m = \frac{|5 - 12,4| \cdot 6 + |11 - 12,4| \cdot 14 + |17 - 12,4| \cdot 7 + |23 - 12,4| \cdot 3}{30} = \frac{128}{30} = 4,26$$

$$\sigma^2 = \frac{|5 - 12,4|^2 \cdot 6 + |11 - 12,4|^2 \cdot 14 + |17 - 12,4|^2 \cdot 7 + |23 - 12,4|^2 \cdot 3}{30} = \frac{841,2}{30} = 28,04$$

$$\sigma = \sqrt{28,04} = 5,30$$

$$CV = \frac{5,30}{12,4} = 0,43$$

16.

Intervalo de clase	[1, 3)	[3, 5)	[5, 7)	[7, 9)
x_i	2	4	6	8
n_i	12	16	24	11
N_i	12	28	52	63

$$\bar{x} = \frac{2 \cdot 12 + 4 \cdot 16 + 6 \cdot 24 + 8 \cdot 11}{63} = 5,079$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{|2 - 5,079|^2 \cdot 12 + |4 - 5,079|^2 \cdot 16 + |6 - 5,079|^2 \cdot 24 + |8 - 5,079|^2 \cdot 11}{63}} = 1,98$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{2^2 \cdot 12 + 4^2 \cdot 16 + 6^2 \cdot 24 + 8^2 \cdot 11}{63} - 5,079^2} = 1,98$$

17.

Tenemos $N = 20$ datos ordenados.

Calculamos los tres cuartiles:

$$Q_1 \rightarrow i = \frac{1}{4} \cdot 20 = 5 \rightarrow Q_1 = \frac{32 + 35}{2} = 33,5$$

$$Q_2 \rightarrow i = \frac{2}{4} \cdot 20 = 10 \rightarrow Q_2 = Me = \frac{40 + 40}{2} = 40$$

$$Q_3 \rightarrow i = \frac{3}{4} \cdot 20 = 15 \rightarrow Q_3 = \frac{47 + 50}{2} = 48,5$$

Calculamos el rango intercuartílico:

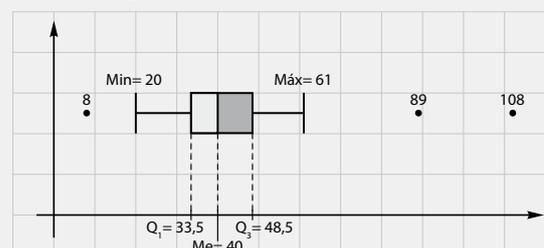
$$IQR = Q_3 - Q_1 = 15$$

Calculamos los límites inferior y superior, y los valores máximo y mínimo:

$$LI = Q_1 - 1,5 \cdot IQR = 11 \rightarrow \text{Min.} = 20$$

$$LS = Q_3 + 1,5 \cdot IQR = 71 \rightarrow \text{Máx.} = 61$$

Con estos parámetros representamos el diagrama de caja y bigotes:



A partir del diagrama podemos extraer las siguientes conclusiones:

- La distribución de datos es bastante simétrica.
- Resultan algunos valores atípicos.
- La longitud de la caja y los bigotes denotan una alta dispersión de los datos.

18. Tenemos $N = 20$ datos desordenados. Lo primero que tenemos que hacer es ordenarlos:

20	23	24	24	24	25	29	31	31	33
34	36	36	37	39	39	40	40	41	45

Calculamos los tres cuartiles:

$$Q_1 \rightarrow i = \frac{1}{4} \cdot 20 = 5 \rightarrow Q_1 = \frac{24 + 25}{2} = 24,5$$

$$Q_2 \rightarrow i = \frac{2}{4} \cdot 20 = 10 \rightarrow Q_2 = Me = \frac{33 + 34}{2} = 33,5$$

$$Q_3 \rightarrow i = \frac{3}{4} \cdot 20 = 15 \rightarrow Q_3 = \frac{39 + 39}{2} = 39$$

Calculamos el rango intercuartílico:

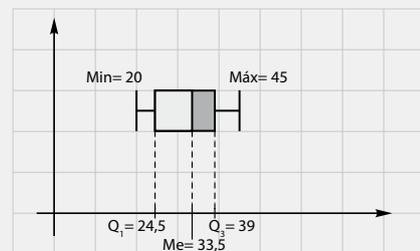
$$IQR = Q_3 - Q_1 = 14,5$$

Calculamos los límites inferior y superior, y los valores máximo y mínimo:

$$LI = Q_1 - 1,5 \cdot IQR = 2,75 \rightarrow \text{Min.} = 20$$

$$LS = Q_3 + 1,5 \cdot IQR = 60,75 \rightarrow \text{Máx.} = 45$$

Con estos parámetros representamos el diagrama de caja y bigotes:



A partir del diagrama podemos extraer las siguientes conclusiones:

- La distribución presenta una asimetría hacia valores grandes.
- No existen valores atípicos.
- La longitud de la caja y los bigotes denotan una baja dispersión de los datos.

19.

x_i	n_i	N_i	$x_i \cdot n_i$	$ x_i - \bar{x} $	$ x_i - \bar{x} \cdot n_i$	$ x_i - \bar{x} ^2$	$ x_i - \bar{x} ^2 \cdot n$
1	12	12	12	3,6216	43,4592	13,1160	157,392
2	15	27	30	2,6216	39,3240	6,8728	103,092
3	9	36	27	1,6216	14,5944	2,6296	23,6664
4	18	54	72	0,6216	11,1888	0,3864	6,9552
5	17	71	85	0,3784	6,4328	0,1432	2,4344
6	15	86	90	1,3784	20,6760	1,9000	28,5
7	11	97	77	2,3784	26,1624	5,6568	62,2248
8	6	103	48	3,3784	20,2704	11,4136	68,4816
9	8	111	72	4,3784	35,0272	19,1704	153,3632
	111		513		217,1352		606,1096

$$Mo = 4$$

$$\frac{N}{2} = \frac{111}{2} = 55,5 \text{ El dato central ocupa el lugar } 56. Me = 5.$$

$$\bar{x} = \frac{513}{111} = 4,62$$

$$r = 9 - 1 = 8$$

$$d_m = \frac{217,1352}{111} = 1,96$$

$$\sigma = \sqrt{5,4604} = 2,34$$

$$\sigma^2 = \frac{606,1096}{111} = 5,46$$

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{2,34}{4,62} = 0,51 \text{ La serie es bastante dispersa, pues el coeficiente de variación es superior al } 50 \%$$

b)

x_i	n_i	N_i	$x_i \cdot n_i$	$ x_i - \bar{x} $	$ x_i - \bar{x} \cdot n_i$	$ x_i - \bar{x} ^2$	$ x_i - \bar{x} ^2 \cdot n$
18	3	3	54	3,6449	10,9347	13,2853	39,8559
19	12	15	228	2,6449	31,7388	6,9955	83,946
20	54	69	1080	1,6449	88,8246	2,7057	146,1078
21	66	135	1386	0,6449	42,5634	0,4159	27,4494
22	57	192	1254	0,3551	20,2407	0,1261	7,1877
23	55	247	1265	1,3551	74,5305	1,8363	100,9965
24	18	265	432	2,3551	42,3918	5,5465	99,837
25	11	276	275	3,3551	36,9061	11,2567	123,8237
	276		5974		348,1306		629,204

$$Mo = 21$$

$$\frac{N}{2} = \frac{276}{2} = 138$$

Los datos centrales ocupan los lugares 138 y 139. Ambos tienen un valor de 22. $Me = 22$.

$$\bar{x} = \frac{5974}{276} = 21,6449 \approx 21,64$$

$$r = 25 - 18 = 7$$

$$d_m = \frac{348,1306}{276} = 1,2613 \approx 1,26$$

$$\sigma^2 = \frac{629,204}{276} = 2,2797 \approx 2,28$$

$$\sigma = \sqrt{2,2797} = 1,51$$

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{1,51}{21,64} = 0,07$$

La serie es poco dispersa, pues el coeficiente de variación es inferior al 10 %.

20. Actividad TIC.

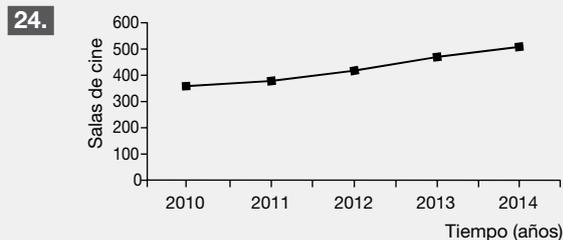
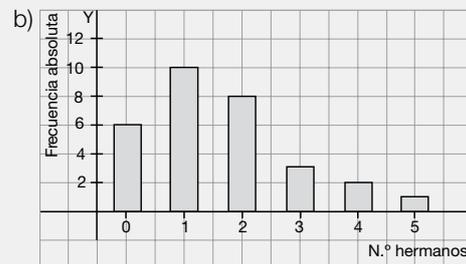
Actividades finales

- 21.** a) Porque recoge, ordena y analiza datos para estudiar el comportamiento de un colectivo.
 b) La población: alumnos de la clase. Variable estadística: puntuación obtenida en el examen.
 c) Suponiendo que el profesor pone notas numéricas, e independientemente de si estas son números enteros o con uno o dos decimales, se trata de una variable cuantitativa discreta.

- 22.** a) Población: total de hogares de la ciudad.
 Muestra: 900 hogares elegidos al azar.
 b) La variable estadística es el número de ordenadores por hogar. Se trata de una variable cuantitativa discreta.

23. a)

Número de hermanos	n_i	f_i	N_i	F_i
0	6	0,20	6	0,20
1	10	0,33	16	0,53
2	8	0,27	24	0,80
3	3	0,10	27	0,90
4	2	0,107	29	0,97
5	1	0,03	30	1
	30	1		



- 25.** a) $N = 3 + 6 + 12 + 15 + 11 + 9 + 6 + 5 + 3 + 2 = 72$

- b) Entre 20 y 30 años hay 18 trabajadores.

$$\frac{18}{72} \cdot 100 = 25 \%$$

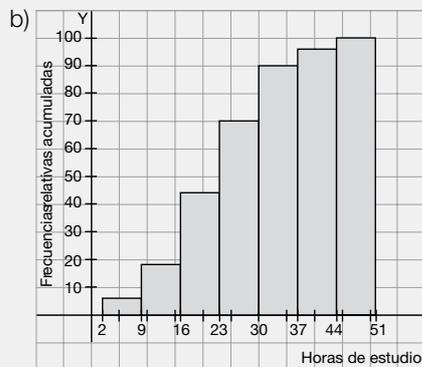
- c) Hay 9 trabajadores que tienen menos de 25 años.

$$\frac{9}{72} \cdot 100 = 12,5 \%$$

- 26.** a) $51 - 2 = 49 \rightarrow \frac{49}{7} = 7$

La amplitud de los intervalos debe ser de 7 unidades.

Horas de estudio	Marca de clase	n_i	f_i (%)	N_i	F_i (%)
[2, 9)	5,5	3	6	3	6
[9, 16)	12,5	6	12	9	18
[16, 23)	19,5	13	26	22	44
[23, 30)	26,5	13	26	35	70
[30, 37)	33,5	10	20	45	90
[37, 44)	40,5	3	6	48	96
[44, 51)	47,5	2	4	50	100
		30	100		



27. a) Para poder responder a la pregunta primero es necesario calcular los porcentajes de cada curso:

1.º curso:

$$P_1 = \frac{11749 - 7315}{11749} = \frac{4434}{11749} \cdot 100 = 37,74 \%$$

$$P_2 = \frac{10888 - 6885}{10888} = \frac{4003}{10888} \cdot 100 = 36,77 \%$$

$$P_3 = \frac{11864 - 7493}{11864} = \frac{4371}{11864} \cdot 100 = 36,84 \%$$

$$P_4 = \frac{7829 - 4838}{7829} = \frac{2991}{7829} \cdot 100 = 38,20 \%$$

Por lo tanto, el curso que tiene más chicos en porcentaje es el 4.º curso.

b) Si hacemos los cálculos:

$$P_1 = 100 - 37,74 = 62,26 \%$$

$$P_2 = 100 - 36,77 = 63,23 \%$$

$$P_3 = 100 - 36,84 = 63,16 \%$$

$$P_4 = 100 - 38,20 = 61,80 \%$$

No hay ningún curso en que el porcentaje de mujeres doble el de hombres.

c)
$$P_{\text{total}} = \frac{7315 + 6885 + 7493 + 4838}{11749 + 10888 + 11864 + 7829} = \frac{26531}{42330} = 62,67 \%$$

28. a) 3,5 %

b) Hombres: 1 %. Mujeres: 1 %.

$$\text{Total: } 1\% + 1\% = 2\%$$

c) Hombres: 3,0 % + 2,5 % + 2,0 % = 7,5 %

$$\text{Mujeres: } 3,0\% + 3,0\% + 2,0\% = 8,0\%$$

$$\text{Total: } 7,5\% + 8,0\% = 15,5\%$$

d) La pirámide de población A corresponde claramente a un país en proceso de desarrollo. Su típica forma triangular con una ancha base que se va estrechando al aumentar la edad revela un elevado índice de natalidad y una corta esperanza de vida.

En los países más desarrollados las franjas de menor edad son más cortas debido al bajo índice de natalidad, por lo que el máximo se desplaza hacia edades mayores. Los avances en medicina alargan la esperanza de vida, de forma que las franjas de mayor edad están más pobladas que las correspondientes a un país en proceso de desarrollo.

29. Si x representa las ventas de E, $3x$ representa las ventas de D, $9x$ representa las ventas de C, $27x$ representa las ventas de B y $81x$ representa las ventas de A.

Entonces, el total de ventas es:
 $x + 3x + 9x + 27x + 81x = 121x$

$$f_A = \frac{81x}{121x} \cdot 100 = 67 \%$$

$$f_B = \frac{27x}{121x} \cdot 100 = 22,3 \%$$

$$f_C = \frac{9x}{121x} \cdot 100 = 7,4 \%$$

$$f_D = \frac{3x}{121x} \cdot 100 = 2,5 \%$$

$$f_E = \frac{x}{121x} \cdot 100 = 0,8 \%$$

Amplitud de los sectores:

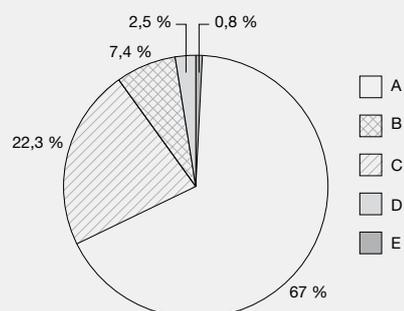
$$0,670 \cdot 360^\circ = 241,2^\circ$$

$$0,223 \cdot 360^\circ = 80,3^\circ$$

$$0,074 \cdot 360^\circ = 26,6^\circ$$

$$0,025 \cdot 360^\circ = 9^\circ$$

$$0,008 \cdot 360^\circ = 2,9^\circ$$



30. Es un valor que describe de manera resumida algunas características importantes de la serie de datos.

Ambos tipos de parámetros se calculan a partir de la serie de datos; pero los de centralización pueden considerarse representativos de esta serie mientras que los de dispersión informan sobre la dispersión (o agrupamiento) de los datos.

31. La moda, puesto que para calcularla no es preciso ordenar los datos y tampoco que estos sean numéricos.

32.
$$\bar{x} = \frac{6,8 \cdot 28 + 5,7 \cdot 36}{28 + 36} = 6,18$$

33. Respuesta abierta.

34. $\bar{x} = 1,8 \rightarrow 1,8$ fallos.

35. $Mo = 9,50$

$N = 6 \rightarrow \frac{N}{2} = 3$ Los datos centrales son los que

ocupan los lugares 3 y 4. Ambos corresponden al valor 9,50.

$Me = 9,50;$

$\bar{x} = 9,54$

$r = 0,50$

$d_m = 0,14$

$\sigma^2 = 0,03$

$\sigma = \sqrt{0,03} = 0,17$

36. a)

T (°C)	10	12	13	15	16	17	18	19	22
n_i	1	1	1	1	1	2	5	2	1
N_i	1	2	3	4	5	7	12	14	15

b) $Mo = 18^\circ\text{C}$

$N = 15; \frac{N}{2} = 7,5$. El dato central es el que ocupa

el octavo lugar y corresponde al valor 18.

Por lo tanto, $Me = 18^\circ\text{C}$.

$\bar{x} = 16,67$

$r = 12$

$d_m = 2,31$

$\sigma^2 = 8,76$

$s = 2,96$

$CV = 0,18$

37.

x_i	47	48	49	50	51	52	53	55
n_i	1	2	7	16	6	4	2	1

$Mo = 50$

$\frac{N}{2} = \frac{39}{2} = 19,5$. El valor del dato que ocupa el

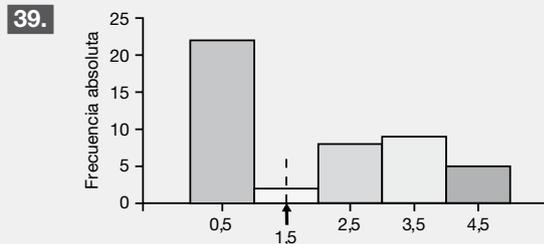
lugar 20 es 50.

$Me = 50$

$\bar{x} = 50,28$

38. En ambos casos se obtiene un mismo valor para la media aritmética, pero la desviación típica es distinta.

Es más fiable el test A, ya que la desviación típica es menor. Esto significa que los valores obtenidos estarán más agrupados.



$Mo = 0,5$, pues la clase modal es $[0, 1)$.

$\frac{N}{2} = \frac{46}{2} = 23$ Los datos centrales son los

que ocupan los lugares 23 y 24. Ambos datos pertenecen al intervalo $[1, 2)$.

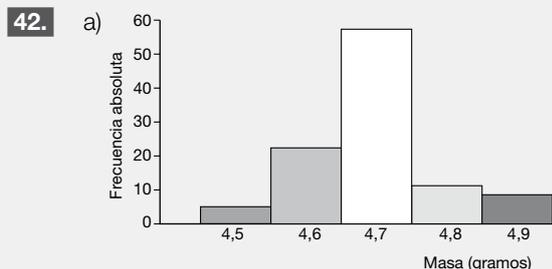
Clase mediana: $[1, 2)$; $Me = 1,5$

$\bar{x} = 1,91$

40. Respuesta abierta.

41. $\bar{x} = 592,33$

— La duración media de las bombillas ha sido de 592,33 h.



b)

Intervalo de clase	Marca de clase	n_i	N_i
$[4,45, 4,55)$	4,5	3	3
$[4,55, 4,65)$	4,6	23	26
$[4,65, 4,75)$	4,7	56	82
$[4,75, 4,85)$	4,8	11	93
$[4,85, 4,95)$	4,9	7	100

Moda: Clase modal: $[4,65, 4,75)$; $Mo = 4,7$

Media aritmética:

$$\bar{x} = \frac{4,5 \cdot 3 + 4,6 \cdot 23 + 4,7 \cdot 56 + 4,8 \cdot 11 + 4,9 \cdot 7}{100} = 4,7$$

Mediana:

$$\frac{N}{2} = \frac{100}{2} = 50 \text{ Los datos centrales ocupan los}$$

lugares 50 y 51.

Ambos se encuentran en el intervalo [4,65, 4,75).

Clase mediana: [4,65, 4,75) ; $Me = 4,7$

Recorrido:

$$r = 4,95 - 4,45 = 0,50$$

Desviación media:

$$d_m = \frac{|4,5 - 4,7| \cdot 3 + |4,6 - 4,7| \cdot 23 + |4,7 - 4,7| \cdot 56 + |4,8 - 4,7| \cdot 11 + |4,9 - 4,7| \cdot 7}{100} = 0,05$$

Varianza:

$$\sigma^2 = \frac{|4,5 - 4,7|^2 \cdot 3 + |4,6 - 4,7|^2 \cdot 23 + |4,7 - 4,7|^2 \cdot 56 + |4,8 - 4,7|^2 \cdot 11 + |4,9 - 4,7|^2 \cdot 7}{100} = 0,01$$

Desviación típica:

$$\sigma = \sqrt{0,01} = 0,1$$

Coefficiente de variación:

$$CV = \frac{0,1}{4,7} = 0,02$$

- 43.** Sí, en determinadas series que presentan una gran dispersión.

Por ejemplo, en la serie 0, 3, 3, 0.

$$\bar{x} = \frac{0 \cdot 2 + 3 \cdot 2}{4} = 1,5$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{0^2 \cdot 2 + 3^2 \cdot 2}{4} - 1,5^2} = 1,5$$

- 44.** $Mo = 5$; $Me = 5,5$; $\bar{x} = 5,67$

$$d_m = 1,33$$
; $\sigma^2 = 2,56$; $\sigma = 1,60$

a) 6, 10, 10, 12, 14, 16.

$$Mo = 10$$
; $Me = 11$; $\bar{x} = 11,33$

$$d_m = 2,67$$
; $\sigma^2 = 10,22$; $\sigma = 3,20$

b) 15, 25, 25, 30, 35, 40.

$$Mo = 25$$
; $Me = 27,5$; $\bar{x} = 28,33$

$$d_m = 6,67$$
; $\sigma^2 = 63,89$; $\sigma = 8$

c) La moda, la mediana, la media aritmética, la desviación media y la desviación típica de las series resultantes son el resultado de multiplicar el número positivo por el valor original del parámetro correspondiente. La varianza queda multiplicada por el cuadrado del número positivo.

- 45.** 73, 56, 56, 56, 56, 56, 56, 31, 31, 31, 31, 15, 15, 15, 15, 15.

a) 56 es la moda, 38 es la media aritmética y 31 es la mediana.

b) Los resultados son tan diferentes porque los valores extremos influyen bastante en la media aritmética.

- 46.** Agrupamos los datos en 6 intervalos de una amplitud igual a 10 unidades.

Edad	Marca de clase	n_i
[10, 20)	15	7
[20, 30)	25	14
[30, 40)	35	3
[40, 50)	45	1
[50, 60)	55	0
[60, 70)	65	1

La mayoría de las edades están situadas entre 20 y 30 años. Por ello, el anuncio más efectivo será el dirigido a estas edades.

$$\bar{x} = 25,77$$

$$\sigma = 10,71$$

Estos resultados confirman que la respuesta que hemos dado es correcta.

- 47.** Respuesta TIC.

$$\bar{x} = 2,65$$

$$\sigma = 0,118$$

- 48.** Respuesta TIC.

Clase modal: [8, 9); $Mo = 8,5$

Clase mediana: [8, 9); $Me = 8,5$

$$\bar{x} = 8,75$$

- 49.** $20\% + 25\% = 45\%$ de las personas tenían entre 20 y 30 años. Por lo tanto, $0,45 \cdot 15\,500 = 6\,975$ de las personas que asistieron al concierto tenían entre 20 y 30 años.

- 50.** El número de unidades del videojuego vendidas el lunes son: $a_1 = 45$

El martes se vendieron: $a_2 = 45 - (2 - 1) \cdot 3 = 42$ unidades.

El miércoles: $a_3 = 45 - (3 - 1) \cdot 3 = 39$ unidades.

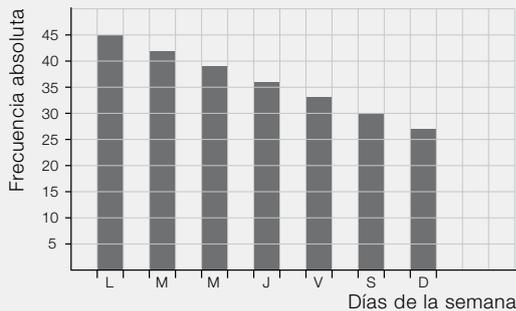
El jueves: $a_4 = 45 - (4 - 1) \cdot 3 = 36$ unidades.

El viernes: $a_5 = 45 - (5 - 1) \cdot 3 = 33$ unidades.

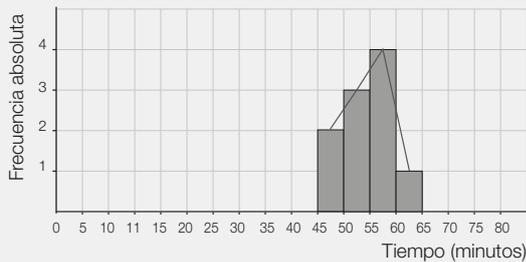
El sábado: $a_6 = 45 - (6 - 1) \cdot 3 = 30$ unidades.

El domingo: $a_7 = 45 - (7 - 1) \cdot 3 = 27$ unidades.

El diagrama de barras siguiente representa las frecuencias absolutas del número de unidades vendidas del videojuego:



51.



52. Media aritmética:

$$\bar{x} = \frac{0 \cdot 5 + 1 \cdot 5 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 3 + 5 \cdot 3 + 6 \cdot 2 + 7 \cdot 2 + 8 \cdot 1}{30} \rightarrow \bar{x} = \frac{87}{30} = 2,9$$

Mediana:

00000111112222 22 33344455566778

$$Me = \frac{2+2}{2} = 2$$

Moda:

$$Mo = 2$$

53. Media aritmética:

$$\bar{x} = \frac{9 \cdot 2 + 10 + 11 + 12 + 13 \cdot 2}{7} \rightarrow \bar{x} = \frac{77}{7} = 11$$

Varianza:

$$\sigma^2 = \frac{|9 - 11|^2 \cdot 2 + |10 - 11|^2 + |11 - 11|^2 + |12 - 11|^2 + |13 - 11|^2 \cdot 2}{7} \rightarrow \sigma^2 = \frac{8 + 1 + 1 + 8}{7} \rightarrow \sigma^2 = \frac{18}{7} \approx 1,6$$

Desviación típica:

$$\sigma = \sqrt{2,6} \approx 1,6$$

54. Para el primer conjunto de datos, tenemos:

$$\bar{x}_1 = \frac{2x + 3y + 19 + 18}{4} = 17 \rightarrow 2x + 3y + 37 = 4 \cdot 17 \rightarrow 2x + 3y = 68 - 37 \rightarrow 2x + 3y = 31$$

Y para el segundo conjunto de datos:

$$\bar{x}_2 = \frac{x + 4y + 21 + 16 + 20}{5} = 17 \rightarrow x + 4y + 57 = 5 \cdot 17 \rightarrow x + 4y = 85 - 57 \rightarrow x + 4y = 28$$

Por lo tanto, tenemos un sistema con dos variables:

$$\left. \begin{array}{l} 2x + 3y = 31 \\ x + 4y = 28 \end{array} \right\} \rightarrow x + 4y = 28; x = 28 - 4y$$

$$2x + 3y = 31$$

$$2 \cdot (28 - 4y) + 3y = 31$$

$$56 - 8y + 3y = 31$$

$$-5y = -25$$

$$y = 5$$

$$x = 28 - 4 \cdot 5 = 8$$

Sustituyendo x e y , obtenemos los dos conjuntos de datos:

16, 15, 19, 18 y 8, 20, 21, 16, 20

55. Tabla de frecuencias absolutas y frecuencias absolutas acumuladas:

Nº de veces que se utilizó el transporte público	Frecuencia absoluta	Frecuencia absoluta acumulada:
0	3	3
1	1	4
2	1	5
3	2	7
4	1	8
5	3	11
6	1	12
7	1	13
8	2	15
11	1	16
12	1	17
15	1	18
17	1	19
21	1	20
	20	

Vamos a calcular los cuartiles Q_1 , Q_2 y Q_3 .

El primer cuartil es:

$$i = \left(\frac{1}{4}\right) \cdot 20 = 5; Q_1 = \frac{2+3}{2} = \frac{5}{2} = 2,5$$

El segundo cuartil es:

$$i = \left(\frac{2}{4}\right) \cdot 20 = 10; Q_2 = 5$$

El tercer cuartil es:

$$i = \left(\frac{3}{4}\right) \cdot 20 = 15; Q_3 = \frac{8+11}{2} = \frac{19}{2} = 9,5$$

A continuación, representamos el diagrama de cajas y bigotes:



56. Las marcas de clase son:

Clase	x_i
[3,7)	5
[7,11)	9
[11,15)	13
[15,19)	17
[19,23)	21

La media aritmética es:

$$\bar{x} = \frac{3 \cdot 5 + 5 \cdot 9 + 7 \cdot 13 + 4 \cdot 17 + 1 \cdot 21}{20} = \frac{15 + 45 + 91 + 68 + 21}{20} = \frac{240}{20} = 12$$

Por lo tanto, la desviación media es:

$$d_m = \frac{|5-12| + |9-12| + |13-12| + |17-12| + |21-12|}{20} = \frac{7+3+1+5+9}{20} = \frac{25}{20} = 1,25$$

57. Como la mediana es 3, tenemos:

$$Me = \frac{Me + 4}{2} = 3 \rightarrow x + 4 = 6 \rightarrow x = 2$$

Moda:

$$Mo = 2$$

Media aritmética:

$$\bar{x} = \frac{2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 1 \cdot 7 + 2 \cdot 8}{10} = \frac{2 + 6 + 8 + 7 + 16}{10} = \frac{39}{10} = 3,9$$

Desviación media:

$$d_m = \frac{|1-3,9| \cdot 2 + |2-3,9| \cdot 3 + |4-3,9| \cdot 2 + |7-3,9| + |8-3,9| \cdot 2}{10} = \frac{2,9 \cdot 2 + 1,9 \cdot 3 + 0,1 \cdot 2 + 3,1 + 4,1 \cdot 2}{10} = \frac{23}{10} = 2,3$$

Varianza:

$$\sigma^2 = \frac{|1-3,9|^2 \cdot 2 + |2-3,9|^2 \cdot 3 + |4-3,9|^2 \cdot 2 + |7-3,9|^2 + |8-3,9|^2 \cdot 2}{10} = \frac{2,9^2 \cdot 2 + 1,9^2 \cdot 3 + 0,1^2 \cdot 2 + 3,1^2 + 4,1^2 \cdot 2}{10} = \frac{16,82 + 10,83 + 0,02 + 9,61 + 33,62}{10} = \frac{70,9}{10} = 7,09$$

Desviación típica:

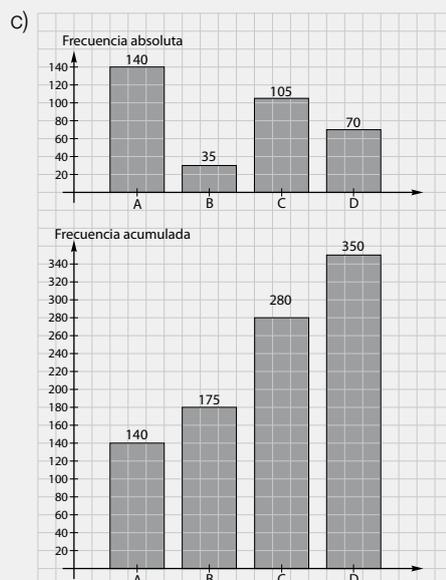
$$\sigma = \sqrt{7,09} \approx 2,66$$

Pon a prueba tus competencias

1.

Partido	n_i	f_i	N_i
A	140	0,4	140
B	35	0,1	175
C	105	0,3	280
D	70	0,2	350

b) Mo = Partido A



d) Partido A: 140 diputados.

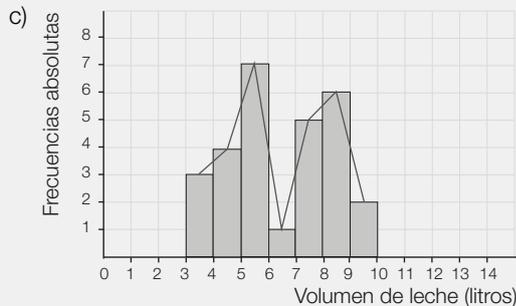
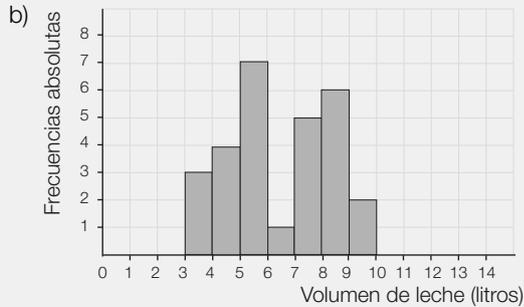
Partido B: 35 diputados.

Partido C: 105 diputados.

Partido D: 70 diputados.

2. a)

Clase	[3,4)	[4,5)	[5,6)	[6,7)	[7,8)	[8,9)	[9,10)
N.º de litros	3	4	7	1	5	6	2



d) Se produjeron 176,4 L de leche en ese día.

e) $\bar{x} = \frac{176,4}{28} = 6,3$ L

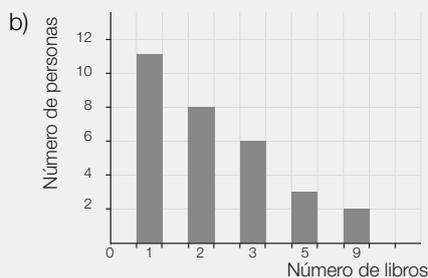
f) En la tabla del apartado a), vemos que hay 14 valores inferiores a 6 correspondientes a la suma de los intervalos [3,4), [4,5) y [5,6). En la clase [6,7) tenemos un solo valor, el 6, que también es

inferior a 6,3. Por lo tanto, $\frac{15}{28} \approx 0,54$.

Aproximadamente el 54 % de las vacas lecheras produjeron un volumen de leche inferior a la media.

3. a) La media aritmética es:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1 \cdot 11 + 2 \cdot 8 + 3 \cdot 6 + 5 \cdot 3 + (x + 2) \cdot 2}{30} \\ &= 2,6 \rightarrow \frac{11 + 16 + 18 + 15 + 2x + 4}{30} = 2,6 \rightarrow \\ &\rightarrow \frac{2x + 64}{30} = 2,6 \rightarrow 2x + 64 = 78 \rightarrow \\ &\rightarrow 2x = 14 \rightarrow x = 7 \end{aligned}$$



c) La varianza es:

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \frac{(1 - 2,6)^2 + (2 - 2,6)^2 + (3 - 2,6)^2 + \\ &\quad (5 - 2,6)^2 + (9 - 2,6)^2}{30} \rightarrow \sigma^2 = \frac{2,56 + 0,36 + \\ &\quad + 0,16 + 5,76 + 40,96}{30} \rightarrow \sigma^2 = \frac{49,8}{30} = 1,66 \end{aligned}$$

d) La desviación típica es:

$$\sigma = \sqrt{1,66} \approx 1,29$$

4.

a) $0,35 \cdot 36 = 12,6 \rightarrow 13$ sortijas

b) $20\% + 10\% = 30\%$

Por lo tanto, $0,3 \cdot 36 = 10,8 \rightarrow 11$ sortijas

c) Los extremos de la clase son 1800 y 1950.

Al hacer el descuento de 16 % en estos dos valores, tenemos:

$$0,84 \cdot 1800 = 1512 \text{ y } 0,84 \cdot 1950 = 1638,$$

respectivamente. Esos dos nuevos valores y

todos los valores intermedios pertenecen a la

clase [1500, 1650). Por lo tanto, la última clase

desaparece y solo existen 4 clases.

d) Entre 1800 € y 1950 € había $0,10 \cdot 36 = 3,6$

sortijas, es decir, 4 sortijas. Estas 4 sortijas ahora

pertenecen a la clase [1500, 1650). Como la

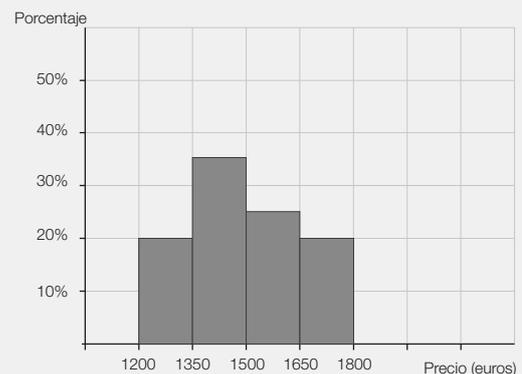
clase [1500, 1650) tenía $0,15 \cdot 36 = 5,4$ sortijas,

es decir, 6 sortijas. El intervalo de clase pasa a

tener 10 sortijas, que corresponden al 25 % de

las 36 sortijas.

Así, el nuevo diagrama de barras es:



1. a) $x + (x + 1) + 3x + (5x - 3) + (3x - 1) + x^2 + (x - 1) = 28$

$$x^2 + 14x - 32 = 0$$

$$x = \frac{-14 \pm \sqrt{196 + 128}}{2} = \frac{-14 \pm 18}{2}$$

$$x_1 = -16; x_2 = 2$$

En el último año, dos personas no vieron ninguna película.

b) Tenemos que sumar las personas que vieron seis y nueve películas:

$$x^2 + (x - 1) \rightarrow 2^2 + (2 - 1) = 5$$

Cinco personas encuestadas vieron más de cinco películas.

$$c) \bar{x} = \frac{0 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 7 + 5 \cdot 5 + 6 \cdot 4 + 9 \cdot 1}{28} = 3,4$$

Cada persona vio de promedio 3,4 películas.

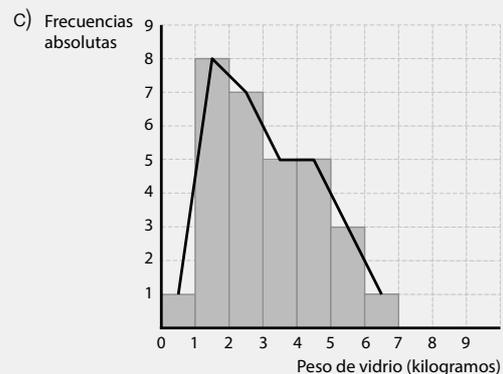
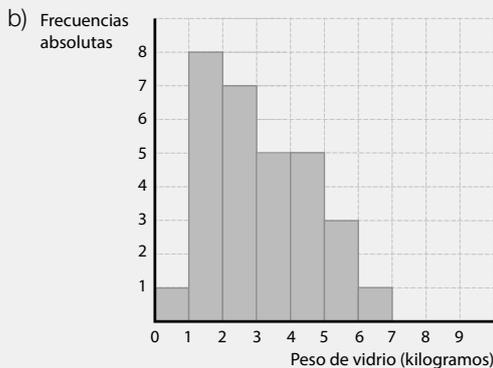
$$d) \sigma^2 = \frac{|0 - 3,4|^2 + |1 - 3,4|^2 + |2 - 3,4|^2 + |3 - 3,4|^2 + |5 - 3,4|^2 + |6 - 3,4|^2 + |9 - 3,4|^2}{28}$$

$$\sigma^2 = \frac{60,12}{28} = 2,15$$

La desviación típica es $\sigma = \sqrt{2,15} \approx 1,47$.

2.

Clases	[0, 1)	[1, 2)	[2, 3)	[3, 4)	[4, 5)	[5, 6)	[6, 7)
Kilogramos	1	8	7	5	5	3	1



d) 89,6 kg

e) Las marcas de clase son:

Clases	[0, 1)	[1, 2)	[2, 3)	[3, 4)	[4, 5)	[5, 6)	[6, 7)
x_i	0,5	1,5	2,5	3,5	4,5	5,5	6,5

La media es:

$$\bar{x} = \frac{1 \cdot 0,5 + 8 \cdot 1,5 + 7 \cdot 2,5 + 5 \cdot 3,5 + 5 \cdot 4,5 + 3 \cdot 5,5 + 1 \cdot 6,5}{30} = 3,1 \text{ kg}$$

De promedio ha habido 3,1 kg de vidrio por día en el contenedor.

3.

a) La variable independiente es el tiempo y la dependiente, la altura a la que se encuentra el halcón.

b) Según la gráfica [0,20] min

c) Se deduce que a 100 m porque es donde permanece periodos más largos después de cazar a las presas.

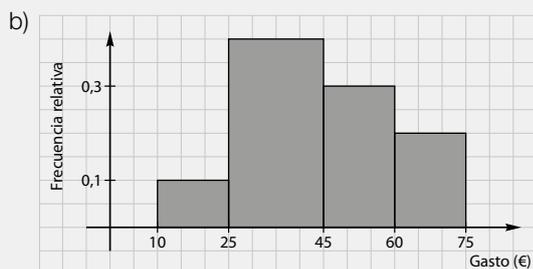
d) Entre los 4 y los 5 min. A los 15 min. Se deduce en ambos casos de las caídas en picado y la vuelta a retomar altura. La paloma volaba a 25 m.

e) Sí, de los 7,5 a los 10 min y a partir del minuto 16 aproximadamente hasta el 20.

4.

a)

	Marca de clase	n_i	f_i
	10-25	5	0,1
	25-45	20	0,4
	45-60	15	0,3
	60-75	10	0,2



- c) Tomando la marca de clase como representante de cada intervalo obtenemos que la media de gasto es de 45 €.
- d) El de frecuencia absoluta 20, es decir, el intervalo de 25 a 45 €.

5. a) $\bar{x} = 498,29 \frac{\text{kg}}{\text{persona}}$

- b) Si ordenamos los datos:
279, 453, 462, 464, 551, 611, 668
La mediana es el dato central $Me = 464$.

c) [279, 668]

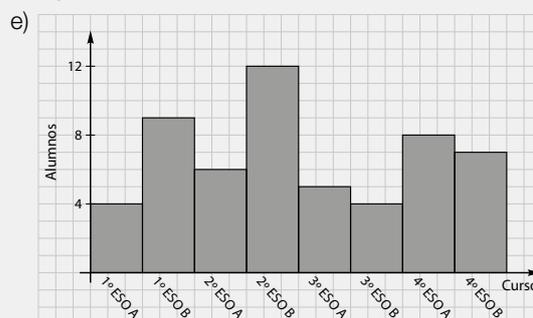
d) Si aplicamos la expresión para la varianza en la que todas las frecuencias son 1: $\sigma^2 = 13840,79$

e) Se trata de la raíz cuadrada de la varianza:
 $\sigma = 117,65$

6. a) En total hay 55 alumnos en las 8 clases que no pasan de curso.
- b) Si dividimos los 55 suspensos entre las 8 clases, la media es de 6,88 suspensos por clase.
- c) El de 4 suspensos que se produce en dos clases.
- d) Ordenamos el número de suspensos:
4 4 5 6 7 8 9 12
 $Q_1 = 4,5$

$$Q_2 = Me = 6,5$$

$$Q_3 = 8,5$$



7.

a)

x_i	f_i
0	4
1	5
2	3
3	2
4	1

b) $15 - 4 = 11$

11 personas habían ido al teatro al menos una vez en los últimos 3 meses.

c)
$$\bar{x} = \frac{0 \cdot 4 + 1 \cdot 5 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 1}{15} = \frac{21}{15} = 1,4$$

d) $\frac{4}{15} \approx 0,27$

El 27% de las personas no fueron al teatro en los últimos 3 meses.

- 1.** Población: jóvenes de un país.
Variable estadística: estilo de música preferido.
- 2.** Cualitativas ordinales: estado de salud, opinión política sobre la actuación del gobierno.
Cualitativas nominales: color del cabello, marca de automóvil.
Cuantitativas discretas: número de hermanos, número de miembros de la unidad familiar.
Cuantitativas continuas: estatura, peso.
- 3.** a) Sí, la función es simétrica respecto al eje de ordenadas. Se trata de una función par.
b) Sí, es una función periódica. El período es 8.
- 4.** La variable independiente sería el número de pasajeros y la dependiente, el número de paradas realizadas.
- 5.** a) Una población.
b) Una muestra.
c) Una muestra.
d) Una población.
- 6.** Variable estadística cuantitativa discreta.
- 7.** a) Los alumnos de la clase.
b) Quince alumnos elegidos al azar.
c) Los alumnos no elegidos para la muestra.
- 8.** Dos rectas paralelas tienen la misma pendiente y distinta ordenada en el origen.
- 9.** Calculamos el beneficio medio anual de las dos empresas (en millones de euros):
Empresa A: $\bar{x} = \frac{30 + 36 + 42 + 46 + 54 + 58 + 50 + 54 + 58 + 52}{10} = 48$
Empresa B: $\bar{x} = \frac{57 + 36 + 27 + 52 + 25 + 54 + 74 + 54 + 30 + 61}{10} = 47$
La empresa A es más rentable.
- 10.** Utilizando la calculadora se obtienen los resultados (en millones de euros):
Empresa A: $\bar{x} = 48$; $\sigma = 8,944$
Empresa B: $\bar{x} = 47$; $\sigma = 15,627$
- 11.** a) $D(f) = R$; $R(f) = [-10, 40]$
b) La función es creciente en los intervalos: $(-\infty, -35)$, $(-25, -15)$ y $(0, +\infty)$, y decreciente en los intervalos: $(-35, -25)$ y $(-15, 0)$.
c) La función tiene dos máximos relativos en $(-35, 25)$ y $(-15, 40)$, y dos mínimos relativos en $(-25, 10)$ y $(0, -10)$.
d) Sí, la función es continua.

12. a)

$x(L)$	7,5	7,6	7,7	7,8
n	3	1	4	6

- b) El valor más repetido es 7,8. Por lo tanto:

$$\text{Moda} = 7,8 \text{ L}$$

Calculamos la media aritmética:

$$\bar{x} = \frac{7,5 \cdot 3 + 7,6 \cdot 1 + 7,7 \cdot 4 + 7,8 \cdot 6}{14} = 7,69$$

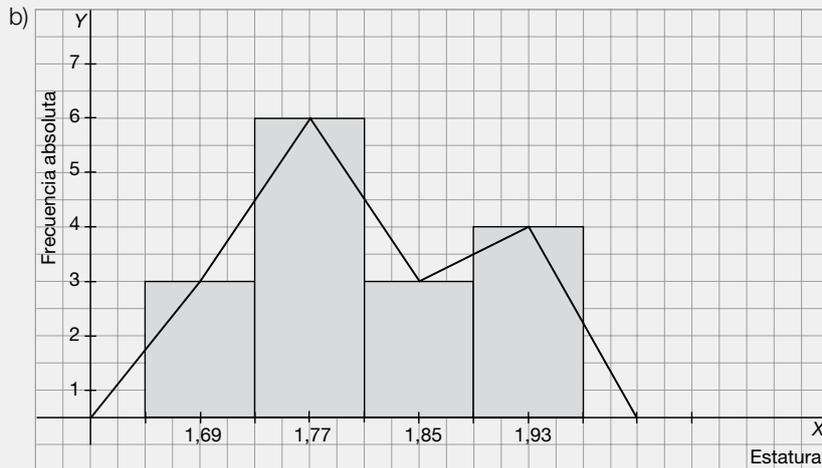
La media aritmética es 7,69 L.

Los dos datos centrales corresponden al valor 7,7. Así:

Mediana = 7,7 L

13. a)

Intervalo de clase	[1,65, 1,73)	[1,73, 1,81)	[1,81, 1,89)	[1,89, 1,97)
n	3	6	3	4



14.

Intervalo de clase	Marca de clase	n_i	N_i	$X_i \cdot n_i$	$ x_i - \bar{x} $	$ x_i - \bar{x} \cdot n_i$	$ x_i - \bar{x} ^2$	$ x_i - \bar{x} ^2 \cdot n_i$
[65, 70)	67,5	18	18	1215	8,7	156,6	75,69	1362,42
[70, 75)	72,5	30	48	2175	3,7	111	13,69	410,7
[75, 80)	77,5	24	72	1860	1,3	31,2	1,69	40,56
[80, 85)	82,5	16	88	1320	6,3	100,8	39,69	635,04
[85, 90)	87,5	12	100	1050	11,3	135,6	127,69	1532,28
		100		7620		535,2		3981

La clase modal es [70, 75), pues tiene la mayor frecuencia absoluta. Así, $Mo = 72,5$.

• Los dos datos centrales son los que ocupan los lugares 50 y 51. Ambos pertenecen al intervalo [75, 80). Así, como aproximación a la mediana, tomaremos $Me = 77,5$.

• $\bar{x} = \frac{7620}{100} = 76,2$ • $\sigma^2 = \frac{3981}{100} = 39,81$

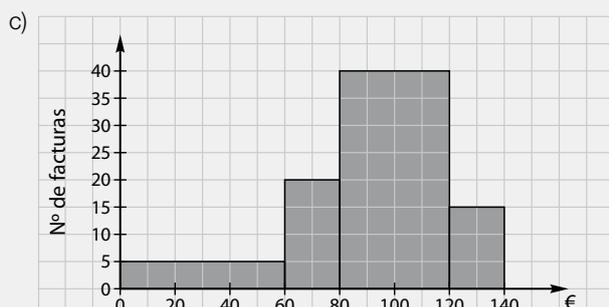
• $r = 90 - 65 = 25$ • $\sigma = \sqrt{39,81} = 6,31$

• $d_m = \frac{535,2}{100} = 5,35$

15. Al trabajar con datos agrupados, tomaremos la marca de clase como representante de cada intervalo.

a) Aplicando la expresión de la media aritmética para datos agrupados en intervalos $\bar{x} = 93,75 \text{ €}$.

b) $Me = 100 \text{ €}$; $Mo = 100 \text{ €}$.



- 16.** a) El mes en el que se produjo un menor consumo de agua fue en abril.
 b) El mayor consumo se produjo en el mes de agosto.
 c) $\bar{x} = \frac{156,6}{12} = 13,05$
 El consumo medio de agua fue de 13,05 L.

17.
$$\sigma^2 = \frac{(1,2 - 3)^2 + (2,4 - 3)^2 + (3,6 - 3)^2 + (4,8 - 3)^2}{4} =$$

$$= \frac{(-1,8)^2 + (-0,6)^2 + (0,6)^2 + (1,8)^2}{4} =$$

$$= \frac{7,2}{4} = 1,8 \rightarrow \sigma \approx 1,34$$

18.
$$3 = \frac{x + 2x + 3x + 4x}{4} \rightarrow 3 = \frac{10x}{4}$$

$$x = \frac{12}{10} = 1,2$$
 Los datos son 1,2, 2,4, 3,6 y 4,8.

- 19.** Respuesta sugerida: 5, 5, 6, 7, 9, 9, 9.
 En este caso, la media es

$$\bar{x} = \frac{2 \cdot 5 + 6 + 7 + 4 \cdot 9}{8} = 7,375$$

- 20.** La media de alumnos que realiza actividades extraescolares es: $\bar{x} = 45$ alumnos

- 21.** Si conocemos el valor de la pendiente, como la recta debe verificar las coordenadas del punto, obtendremos el valor de la ordenada en cada caso.

a) A(5, 3)

$$m = \frac{4}{5}$$

$$y = \frac{4}{5}x - 1$$

b) B(3, 5)

$$m = -\frac{2}{3}$$

$$y = -\frac{2}{3}x + 7$$

c) C(-2, 4)

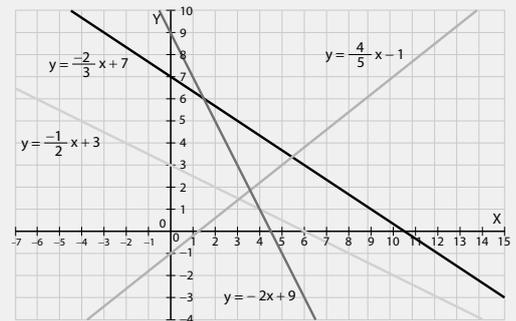
$$m = -\frac{1}{2}$$

$$y = -\frac{1}{2}x + 3$$

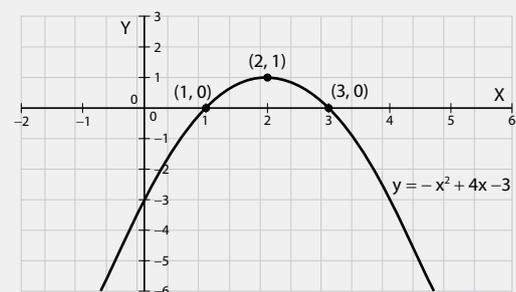
d) $m = -2$

$$D(2, 5)$$

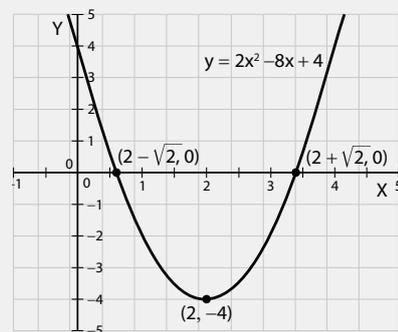
$$y = -2x + 9$$



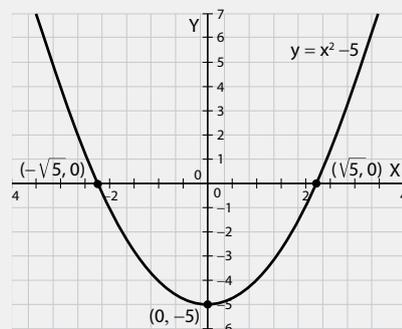
- 22.** a) Puntos de corte con los ejes: (1, 0) y (3, 0); V(2, 1)



- b) Puntos de corte con los ejes: (3,41, 0) y (0,59, 0); V(2, -4)



- c) Puntos de corte con los ejes: $(-\sqrt{5}, 0)$ y $(\sqrt{5}, 0)$; V(0, -5)



- 23.** a) V(1, -16)

b) $x = 1$

c) $y = -15$

d) $y = (x - 1)^2 - 16 = x^2 - 2x - 15$