1. a) Anterior a a_n : a_{n-1}

b) Posterior a a_n : a_{n+1}

c) Siguiente a a_{n-2} : a_{n-1}

d) Anterior del anterior a a_n : a_{n-2}

2. a) $a_n = 3n$

b) $a_n = \frac{2}{n}$

c) $a_n = 2n + 1$

d) $a_n = n^2$

3. Los cinco primeros términos de la sucesión son:

1, 4, 7, 10, 13…

4. a) $a_1 = \frac{1^2+1}{1^2+2} = \frac{2}{3}$

$a_2 = \frac{2^2+1}{2^2+2} = \frac{5}{6}$

$a_3 = \frac{3^2+1}{3^2+2} = \frac{10}{11}$

$a_4 = \frac{4^2+1}{4^2+2} = \frac{17}{18}$

$a_5 = \frac{5^2+1}{5^2+2} = \frac{26}{27}$

$a_6 = \frac{6^2+1}{6^2+2} = \frac{37}{38}$

$a_7 = \frac{7^2+1}{7^2+2} = \frac{50}{51}$

$a_8 = \frac{8^2+1}{8^2+2} = \frac{65}{66}$

$a_9 = \frac{9^2+1}{9^2+2} = \frac{82}{83}$

$a_{10} = \frac{10^2+1}{10^2+2} = \frac{101}{102}$

$\frac{2}{3}, \frac{5}{6}, \frac{10}{11}, \frac{17}{18}, \frac{26}{27}, \frac{37}{38}, \frac{50}{51}, \frac{65}{66}, \frac{82}{83}, \frac{101}{102}$

b) $a_1 = \frac{1^2 - 3 \cdot 1 + 1}{1+2} = \frac{-1}{3}$

$a_2 = \frac{2^2 - 3 \cdot 2 + 1}{2+2} = \frac{-1}{4}$

$a_3 = \frac{3^2 - 3 \cdot 3 + 1}{3+2} = \frac{1}{5}$

$a_4 = \frac{4^2 - 3 \cdot 4 + 1}{4+2} = \frac{5}{6}$

$a_5 = \frac{5^2 - 3 \cdot 5 + 1}{5+2} = \frac{11}{7}$

$a_6 = \frac{6^2 - 3 \cdot 6 + 1}{6+2} = \frac{19}{8}$

$a_7 = \frac{7^2 - 3 \cdot 7 + 1}{7+2} = \frac{29}{9}$

$a_8 = \frac{8^2 - 3 \cdot 8 + 1}{8+2} = \frac{41}{10}$

$a_9 = \frac{9^2 - 3 \cdot 9 + 1}{9+2} = \frac{55}{11} = 5$

$a_{10} = \frac{10^2 - 3 \cdot 10 + 1}{10+2} = \frac{71}{12}$

$-\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{5}{6}, \frac{11}{7}, \frac{19}{8}, \frac{29}{9}, \frac{41}{10}, 5, \frac{71}{12}$

5. Para calcular los seis primeros términos de una sucesión recurrente, cuyo primer término ya conocemos, debemos seguir este orden: a_2, a_3, a_4, a_5 y a_6.

a) $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $a_3 = 6$, $a_4 = 10$, $a_5 = 15$ y $a_6 = 21$

b) $a_1 = 3$, $a_2 = 4$, $a_3 = 5$, $a_4 = 6$, $a_5 = 7$ y $a_6 = 8$

c) $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $a_3 = -1$, $a_4 = 3$, $a_5 = -5$ y $a_6 = 11$

6. Los cinco primeros términos de la sucesión son:

$\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}$, 1, 2...

7. a) No es progresión aritmética.

b) 22 – 26 = 18 – 22 = 14 – 18 = 10 – 14 = –4

Es una progresión aritmética de diferencia –4.

c) –7 – (–10) = –4 – (–7) = –1 – (–2) =

= 2 – (–1) = 3

Es una progresión aritmética de diferencia 3.

d) –4 – (–2) = –6 – (–4) = –8 – (–6) =

= –10 – (–8) = –2

Es una progresión aritmética de diferencia –2.

8. a) 7 – 5 = 9 – 7 = 11 – 9 = 2

La diferencia es 2.

b) –7 – (–5) = – 7 – (–7) = – 11 – (–9) = –2

La diferencia es –2.

c) –9 – (–11) = –7 – (–9) = –5 – (–7) = 2

La diferencia es 2.

d) 9 – 11 = 7 – 9 = 5 – 7 = –2

La diferencia es –2.

9. a) 33 – 26 = 12 – 5 = 7 → d = 7

5, 12, 19, 26, 33...

b) 6 – 3 = 3 – 0 = 0 – (–3) = 3 → d = 3

–6, –3, 0, 3, 6...

c) 1 – 2 = 2 – 3 = –1 → d = –1

5, 4, 3, 2, 1...

d) 5 – 3 = 3 – 1 = 2 → d = 2

1, 3, 5, 7, 9...

10. a) $a_8 = a_1 + (7-1)\,d = a_1 + 6d$

b) $a_n = a_{n-3} + 3d \rightarrow a_n - 3 = a_n - 3d$

11. $6 - 2 = 10 - 6 = 14 - 10 = 18 - 14 = 4$

En efecto, es una progresión aritmética de diferencia 4.

$a_n = a_1 + (n-1)\cdot d \rightarrow a_n = 2 + (n-1) - 4$

$a_n = 4n - 2$

Así pues, la expresión del término general es:

$a_n = 4n - 2$

$a_{80} = 4 \cdot 80 - 2 = 318$

El término a_{80} es 318.

12. Expresamos cada uno de los términos conocidos en función del primer término y de la diferencia.

$$\left.\begin{aligned} a_3 &= a_1 + 2d \\ a_3 &= 8 \end{aligned}\right\} 8 = a_1 + 2d$$

$$\left.\begin{aligned} a_{11} &= a_1 + 10d \\ a_{11} &= 32 \end{aligned}\right\} 32 = a_1 + 10d$$

Obtenemos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas.

$$\left.\begin{aligned} 8 &= a_1 + 2d \\ 32 &= a_1 + 10d \end{aligned}\right\}$$

$a_1 = 8 - 2d$

$32 = 8 - 2d + 10d \rightarrow 24 = 8d \rightarrow d = \dfrac{24}{8} = 3$

$a_1 = 8 - 2{\cdot}3 = 2$

$a_{21} = a_1 + 20d \rightarrow a_{21} = 2 + 20 \cdot 3 = 62$

El término a_{21} es 62.

13.
$$\left.\begin{aligned} a_1 &= 3 + 2 = 5 \\ a_2 &= 3 + 2 \cdot 2 = 7 \\ a_3 &= 3 + 3 \cdot 2 = 9 \\ a_4 &= 3 + 4 \cdot 2 = 11 \end{aligned}\right\} \rightarrow d = 2$$

$a_{11} = a_1 + 10d = 5 + 20 = 25$

El alquiler costará 25 €.

14. $d = 19 - 15 = ... = 7 - 3 = 4$

$a_9 = a_1 + 8d = 3 + 32 = 35$

Aplicamos la expresión de S_n para una progresión aritmética:

$$s_9 = \frac{(a_1 + a_9)\cdot 9}{2} = \frac{(3 + 35)\cdot 9}{2} = 171$$

La suma de los nueve primeros términos es 171.

15. En primer lugar calculamos a_1 y a_{16}:

$a_4 = a_1 + 3d \rightarrow 6 = a_1 + 3 \cdot (-3) \rightarrow 6 = a_1 - 9 \rightarrow a_1 = 15$

$a_{16} = a_1 + 15d \rightarrow a_{16} = 15 + 15 \cdot (-3) = -30$

Aplicamos la expresión de S_n para una progresión aritmética:

$$s_{16} = \frac{(a_1 + a_{16})\cdot 16}{2} = \frac{[15 + (-30)]\cdot 16}{2} = -120$$

La suma de los 16 primeros términos es –120.

16. La sucesión del dinero que ahorra cada semana es una progresión aritmética con $a_1 = 2$ y $d = 0$.

$a_{15} = a_1 + 14d = 2 + 14 \cdot 0 = 2$

$$s = \frac{(a_1 + a_{15})\cdot n}{2} = \frac{(2 + 2)\cdot 15}{2} = 30$$

El ahorro en 15 semanas es de 33 €.

17. a) No es progresión geométrica.

b) $\dfrac{24}{48} = \dfrac{12}{24} = \dfrac{6}{12} = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$

Es una progresión geométrica de razón $\dfrac{1}{2}$.

c) $\dfrac{\frac{9}{4}}{\frac{9}{2}} = \dfrac{\frac{9}{8}}{\frac{9}{4}} = \dfrac{\frac{9}{16}}{\frac{9}{8}} = \dfrac{\frac{9}{32}}{\frac{9}{16}} = \dfrac{1}{2}$

Es una progresión geométrica de razón $\dfrac{1}{2}$.

d) $\dfrac{4}{-2} = \dfrac{-8}{4} = \dfrac{16}{-8} = \dfrac{-32}{16} = -2$

Es una progresión geométrica de razón –2.

18. — Para determinar si se trata de una progresión geométrica, debemos ver si el cociente entre cada uno de los términos y su anterior es una cantidad constante.

$\dfrac{6}{2} = 3 \quad \dfrac{18}{6} = 3 \quad \dfrac{54}{18} = 3 \quad \dfrac{162}{54} = 3 \; ...$

Por lo tanto, sí es una progresión geométrica, de razón 3.

— Para hallar la expresión del término general, sustituimos $a_1 = 2$ y $r = 3$ en la expresión $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$

y obtenemos: $a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$

— Para calcular el término a_9 sustituimos n por 9 en la expresión que hemos obtenido del término general.

$a_9 = 2 \cdot 3^{9-1} = 2 \cdot 3^8 = 13122$

19. $\dfrac{12}{4} = \dfrac{36}{12} = \dfrac{108}{36} = \dfrac{324}{108} = 3$

En efecto, es una progresión geométrica de razón 3.

— $a_n = a_1 \cdot r^{n-1} \rightarrow a_n = 4 \cdot 3^{n-1}$

La expresión del término general es: $a_n = 4 \cdot 3^{n-1}$

— $a_{20} = 4 \cdot 3^{20-1} = 4 \cdot 3^{19} = 4\,649\,045\,868$

El término a_{20} es 4 649 045 868.

20. Expresamos cada uno de los términos conocidos en función del primero y de la razón.

$$\left.\begin{aligned} a_2 &= a_1 \cdot r \\ a_2 &= 24 \end{aligned}\right\} 24 = a_1 \cdot r$$

$$\left.\begin{array}{l} a_4 = a_1 \cdot r^3 \\ a_4 = 216 \end{array}\right\} 216 = a_1 \cdot r^3$$

Obtenemos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$\left.\begin{array}{l} 24 = a_1 \cdot r \\ 216 = a_1 \cdot r^3 \end{array}\right\}$$

$$a_1 = \frac{24}{r}$$

$$216 = \frac{24}{r} \cdot r^3 \rightarrow 216 = 24r^2$$

$$r^2 = \frac{216}{24} = 9 \rightarrow r = \pm 3$$

Si $r = 3 \rightarrow a_1 = \dfrac{24}{3} = 8 \rightarrow a_8 = 8 \cdot 3^7 = 17\,496$

Si $r = -3 \rightarrow a_1 = \dfrac{24}{-3} = -8 \rightarrow a_8 = (-8) \cdot (-3^7) =$
$= 17\,496$

En ambos casos, el término a_8 es 17 496.

21. Expresamos cada uno de los términos conocidos en función del primero y de la razón.

$$\left.\begin{array}{l} a_3 = a_1 \cdot r^2 \\ a_3 = 18 \end{array}\right\} 18 = a_1 \cdot r^2$$

$$\left.\begin{array}{l} a_5 = a_1 \cdot r^4 \\ a_5 = \dfrac{9}{2} \end{array}\right\} \frac{9}{2} = a_1 \cdot r^4$$

Obtenemos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$\left.\begin{array}{l} 18 = a_1 \cdot r^2 \\ \dfrac{9}{2} = a_1 \cdot r^4 \end{array}\right\}$$

Para resolver el sistema, primero despejamos a_1 de la primera ecuación:

$$a_1 = \frac{18}{r^2}$$

A continuación, sustituimos en la segunda ecuación a_1 por la expresión obtenida.

$$\frac{9}{2} = \frac{18}{r^2} \cdot r^4 \;;\; \frac{1}{4} = r^2 \;;\; r = \frac{1}{2}$$

$$\text{o } r = -\frac{1}{2}$$

El enunciado indica que debemos tomar el valor positivo. Por lo tanto:

$$a_1 = \frac{18}{r^2} = \frac{18}{\frac{1}{4}} = 72$$

Luego la expresión del término general es:

$$a_n = 72 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

Para calcular a_8 sustituimos n por 8 en la expresión del término general.

$$a_8 = 72 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^7 = \frac{72}{2^7} = \frac{9}{16}$$

22. Según los datos de la actividad:

$$\left.\begin{array}{l} r = 3 \\ a_5 = 405 \end{array}\right\} \rightarrow 405 = a_1 \cdot 3^4 \rightarrow a_1 = 5$$

23. Calculamos a_{15}:

$a_{15} = a_1 \cdot r^{14} \rightarrow a_{15} = 2 \cdot 3^{14} = 9\,565\,938$

Aplicamos la expresión de S_n para una progresión geométrica:

$$S_{15} = \frac{a_{15} \cdot r - a_1}{r-1} = \frac{9\,565\,938 \cdot 3 - 2}{3-1} =$$
$$= 14\,348\,906$$

La suma de los 15 primeros términos es 14348906.

24. La sucesión del dinero que ahorra cada semana es una progresión geométrica de $a_1 = 1$ y $r = 2$.

$a_{15} = a_1 \cdot r^{14} = 1 \cdot 2^{14} = 16\,384$

Aplicamos la expresión de S_n para una progresión geométrica:

$$S_{15} = \frac{a_{15} \cdot r - a_1}{r-1} = \frac{16\,384 \cdot 2 - 2}{2-1} = 32\,767$$

$3 + 32\,767 = 32\,770$

El ahorro en 15 semanas es de 32 770 €.

25. Actividad TIC.

26. Aplicando las expresiones del término general de las progresiones aritméticas:

6a) $\left.\begin{array}{l} a_1 = 5 \\ d = 2 \end{array}\right\} \rightarrow a_{50} = 5 + 49 \cdot 2 = 103$

$$S_{50} = \frac{(5 + 103) \cdot 50}{2} = 2700$$

6b) $\left.\begin{array}{l} a_1 = (-5) \\ d = (-2) \end{array}\right\} \rightarrow a_{50} = (-5) + 49 \cdot (-2) = (-103)$

$$S_{50} = \frac{(-5 - 103) \cdot 50}{2} = (-2700)$$

6c) $\left.\begin{array}{l} a_1 = (-11) \\ d = 2 \end{array}\right\} \rightarrow a_{50} = (-11) + 49 \cdot 2 = 87$

$$S_{50} = \frac{(-11 + 87) \cdot 50}{2} = 1900$$

6d) $\left.\begin{array}{l} a_1 = 11 \\ d = (-2) \end{array}\right\} \rightarrow a_{50} = 11 + 49 \cdot (-2) = (-87)$

$$S_{50} = \frac{(11 - 87) \cdot 50}{2} = (-1900)$$

7a) $\left.\begin{array}{l} a_1 = 5 \\ d = 7 \end{array}\right\} \rightarrow a_{50} = 5 + 49 \cdot 7 = 348$

$S_{50} = \dfrac{(5 + 348) \cdot 50}{2} = 8825$

7b) $\left.\begin{array}{l} a_1 = (-6) \\ d = 3 \end{array}\right\} \rightarrow a_{50} = (-6) + 49 \cdot 3 = 141$

$S_{50} = \dfrac{(-6 + 141) \cdot 50}{2} = 3375$

7c) $\left.\begin{array}{l} a_1 = 5 \\ d = -1 \end{array}\right\} \rightarrow a_{50} = 5 + 49 \cdot (-1) = (-44)$

$S_{50} = \dfrac{(5 - 44) \cdot 50}{2} = (-975)$

7d) $\left.\begin{array}{l} a_1 = 1 \\ d = 2 \end{array}\right\} \rightarrow a_{50} = 1 + 49 \cdot 2 = 99$

$S_{50} = \dfrac{(1 + 99) \cdot 50}{2} = 2500$

27. Calcularemos la suma de los 200 primeros pares y le restaremos la suma de los 100 primeros.

$0, 2, 4, 6... \rightarrow \left.\begin{array}{l} a_1 = 0 \\ d = 2 \end{array}\right\}$

$a_{100} = 0 + 99 \cdot 2 = 198$

$a_{200} = 0 + 199 \cdot 2 = 198$

Por lo tanto:

$$\left.\begin{array}{l} S_{200} = \dfrac{(0 + 398) \cdot 200}{2} = 39800 \\ S_{100} = \dfrac{(0 + 198) \cdot 100}{2} = 9900 \end{array}\right\}$$

$S_{200} - S_{100} = 29900$

28. Actividad TIC.

29. Según los datos de la actividad:

$\left.\begin{array}{l} r = 3 \\ a_1 = 5 \end{array}\right\} \rightarrow a_{20} = 5 \cdot 3^{19} \rightarrow a_{20} = 5811307335$

$S_{20} = \dfrac{5811307335 \cdot 3 - 5}{2} = 871696100$

30. A partir del término general de la sucesión:

2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024

31. LA partir de la sucesión de la actividad:

$\left.\begin{array}{l} a_1 = 39 \\ d = -3 \end{array}\right\} \rightarrow a_{35} = 39 - 3 \cdot 34 = -63$

32. Según los datos del problema:

$\left.\begin{array}{l} a_1 = 35 \\ d = 5 \end{array}\right\} \rightarrow a_{15} = 35 + 5 \cdot 14 = 105$ km

33. Según los datos que se nos aportan:

$\left.\begin{array}{l} a_1 = 225 \\ d = 8 \end{array}\right\} \rightarrow a_{18} = 225 + 8 \cdot 17 = 361$ obras

Actividades finales

34. Sí, puesto que una lista de números es un conjunto ordenado de números que se corresponden con los números naturales.

35. a) Cada término se obtiene multiplicando por tres el número que indica el lugar que ocupa dicho término en la sucesión: $a_n = 3n$.

b) Cada término se obtiene sumando a 68 el producto de –4 por el número que indica el lugar que ocupa dicho término en la sucesión:

$a_n = 68 - 4n$.

c) Cada término se obtiene elevando al cuadrado el número que indica el lugar que ocupa dicho término en la sucesión: $a_n = n^2$.

d) Cada término se obtiene sumando a –1 el producto de dos por el número que indica el lugar que ocupa dicho término en la sucesión:

$a_n = -1 + 2n$.

e) Cada término, excepto los dos primeros, se obtiene sumando los dos términos inmediatamente anteriores: $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, si $n \geq 3$.

f) Cada término se obtiene multiplicando el número que indica el lugar que ocupa dicho término en la sucesión por este mismo número disminuido en una unidad: $a_n = n \cdot (n - 1)$.

36. a) $a_n = n^2 + 2$

b) $a_{100} = 100^2 + 2 = 10002$

37. a) El término inicial es: $a_1 = 2$; y, luego, en cada término sumamos cinco al anterior $a_n = a_{n-1} + 5$.

b) Hoy, el término inicial es: $a_1 = 1$ (en millones); cada año su valor aumentará un 10 % (un 110 % = 1,1 en tanto por uno) $a_n = 1{,}1 \cdot a_{n-1}$.

c) Cuando compró su coche, costaba $a_1 = 6$ (en miles de euros); cada año que pasa, el coche cuesta la mitad que el año anterior $a_n = 0{,}5 \cdot a_{n-1}$.

38. a) $a_1 = 4 - 3 \cdot 1 = 1$

$a_2 = 4 - 3 \cdot 2 = -2$

$a_3 = 4 - 3 \cdot 3 = -5$

$a_4 = 4 - 3 \cdot 4 = -8$

$a_5 = 4 - 3 \cdot 5 = -11$

b) $a_1 = \dfrac{5 \cdot 1 - 3}{2 \cdot 1} = \dfrac{2}{2} = 1$

$a_2 = \dfrac{5 \cdot 2 - 3}{2 \cdot 2} = \dfrac{7}{4}$

$$a_3 = \frac{5 \cdot 3 - 3}{2 \cdot 3} = \frac{12}{6} = 2$$

$$a_4 = \frac{5 \cdot 4 - 3}{2 \cdot 4} = \frac{17}{8}$$

$$a_5 = \frac{5 \cdot 5 - 3}{2 \cdot 5} = \frac{22}{10} = \frac{11}{5}$$

c) $a_1 = \frac{3 \cdot 1 - 2}{1} = \frac{1}{1} = 1$

$$a_2 = \frac{3 \cdot 2 - 2}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$a_3 = \frac{3 \cdot 3 - 2}{3} = \frac{7}{3}$$

$$a_4 = \frac{3 \cdot 4 - 2}{4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$$

$$a_5 = \frac{3 \cdot 5 - 2}{5} = \frac{13}{5}$$

d) $a_1 = \frac{1^2 - 2}{2 \cdot 1} = \frac{-1}{2}$

$$a_2 = \frac{2^2 - 2}{2 \cdot 2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$a_3 = \frac{3^2 - 2}{2 \cdot 3} = \frac{7}{6}$$

$$a_4 = \frac{4^2 - 2}{2 \cdot 4} = \frac{14}{8} = \frac{7}{4}$$

$$a_5 = \frac{5^2 - 2}{2 \cdot 5} = \frac{23}{10}$$

39. Restando cada término del anterior comprobamos que se trata de una progresión aritmética de diferencia $\frac{1}{6}$.

Por lo tanto, su término general será:

$$a_n = \frac{1}{2} + (n-1) \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{3} + \frac{n}{6} = \frac{2+n}{6}$$

40. Para que una sucesión sea una progresión aritmética, la diferencia entre un término cualquiera y su anterior debe ser una cantidad constante.

41. a) 5, 8, 11, 14, 17... $d = 3$

7, 10, 13, 16, 19... $d' = 3$

$d' = d \rightarrow$ Falsa.

b) 5, 8, 11, 14, 17... $d = 3$

10, 16, 22, 28, 34... $d' = 6$

$d' = 2d' \rightarrow$ Cierta.

42. a) $8 - 5 = 11 - 8 = 14 - 11 = 17 - 14 = 3$

Se trata de una progresión aritmética de diferencia 3.

$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d \rightarrow a_n = 5 + (n-1) \cdot 3 =$

$= 3n + 2$

Por lo tanto, la expresión del término general es:

$a_n = 3n + 2$

Si $n = 20$, tenemos que: $a_{20} = 3 \cdot 20 + 2 = 62$.

Así pues, el término a_{20} es 62.

b) $3 - 1 = 2$; $6 - 3 = 3$

No es progresión aritmética.

c) $6 - 3 = 3$

$10 - 6 = 4$

No es progresión aritmética.

d) $27 - 3 = 51 - 27 = 75 - 51 = 99 - 75 = 24$

Se trata de una progresión aritmética de diferencia 24.

$a_n = a_1 + (n-1) - d - a_n = 3 + (n-1) - 24 =$

$= 24n - 21$

Por lo tanto, la expresión del término general es:

$a_n = 24n - 21$

Si $n = 20$ tenemos que: $a_{20} = 24 - 20 - 21 = 459$.

Así pues, el término a_{20} es 459.

43. — 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100

No es una progresión aritmética.

a) 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19

Obtenemos una progresión aritmética de diferencia 2 y cuyo primer término es 3.

b) 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2

Se obtiene un valor constante, 2.

44. $a_{10} = a_1 + 9d - a_{10} = -3 + 9 \cdot (-4) = -39$

$$s_{10} = \frac{(a_1 + a_{10}) \cdot 10}{2}$$

$$s_{10} = (-3 - 39) \cdot 5 = -210$$

La suma es -210.

45. A partir de la expresión del término general de una progresión aritmética:

$19 = a_1 + 4 \cdot 3 \rightarrow a_1 = 7$

$a_n = 7 + (n-1) \cdot 3$

46.

$$\left.\begin{array}{l} a_2 = a_1 + d \\ a_2 = 10 \end{array}\right\} 10 = a_1 + d$$

$$\left.\begin{array}{l} a_5 = a_1 + 4d \\ a_5 = 57 \end{array}\right\} 57 = a_1 + 4d$$

$$\left.\begin{array}{l} 10 = a_1 + d \\ 57 = a_1 + 4d \end{array}\right\}$$

$a_1 = 10 - d$

$57 = 10 - d + 4d \rightarrow 47 = 3d \rightarrow d = \frac{47}{3}$

$$a_1 = 10 - \frac{47}{3} = -\frac{17}{3}$$

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$$

$$a_n = -\frac{17}{3} + (n-1) \cdot \frac{47}{3} = \frac{47}{3}n - \frac{64}{3}$$

Por lo tanto, la expresión del término general es:

$$a_n = \frac{47}{3}n - \frac{64}{3}$$

Si $n = 30$, tenemos:

$$a_{30} = \frac{47}{3} \cdot 30 - \frac{64}{3} = \frac{1346}{3}$$

Así pues, el término a_{30} es $\frac{1346}{3}$.

47. a) $a_5 + a_9 = a_1 + 4d + a_1 + 8d = 2a_1 + 12d$

$2a_1 + 12d = 48$

El séptimo término es 24.

b) $a_4 + a_{10} = a_1 + 3d + a_1 + 9d = 2a_1 + 12d = 48$

La suma del cuarto y décimo término es 48.

48. $a_8 = a_1 + 7d = 34$

$$s_{20} = \frac{(a_1 + a_1 + 19d) \cdot 20}{2} = 1830$$

$183 = 2a_1 + 19d$

Resolvemos el sistema:

$$\left.\begin{aligned} 34 &= a_1 + 7d \\ 183 &= 2a_1 + 19d \end{aligned}\right\}$$

$a_1 = 34 - 7d$

$183 = 2 \cdot (34 - 7d) + 19d$

$183 = 68 - 14d + 19d$

$$185 = 5d \rightarrow d = \frac{115}{5} = 23$$

$a_1 = 34 - 7 \cdot 23 = 34 - 161 = -127$

$a_n = a_1 + (n - 1)d = -127 + 23n - 23 = 23n -$

El término general es $a_n = 23n - 150$.

49. $$S_{100} = \frac{(a_1 + a_{100}) \cdot 100}{2}; 10100 = \frac{(a_1 + 200) \cdot 100}{2};$$

$$a_1 = \frac{10100 \cdot 2}{100} - 200 = 2$$

$$a_{100} = a_1 + 99 \cdot d; \quad d = \frac{a_{100} - a_1}{99} = \frac{200 - 2}{99} = 2$$

El primer término es $a_1 = 2$ y la diferencia es $d = 2$

50. Podemos plantear y resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} \frac{23}{6} &= a_1 + 5d \\ \frac{35}{6} &= a_1 + 8d \end{aligned}\right\} \rightarrow a_1 = \frac{1}{2}; d = \frac{2}{3}$$

51. Tenemos, por un lado, la expresión que se corresponde con la suma de los 10 primeros términos.

$$s_{10} = \frac{10}{2}(a_1 + a_{10}) = 210$$

$10 \cdot (a_1 + a_{10}) = 420$

$(a_1 + a_{10}) = 42$

$(a_1 + a_1 + d \cdot 9) = 42$

$2a_1 + 9d = 42$

Y por otro lado

$a_{10} = a_1 \cdot 13$

$a_1 + 9d = a_1 \cdot 13$

$12a_1 - 9d = 0$

Es decir que tenemos que resolver el sistema:

$$\left.\begin{aligned} 2a_1 + 9d &= 42 \\ 12a_1 - 9d &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Por reducción:

$$14a_1 = 42 \rightarrow a_1 = \frac{42}{14} = 3$$

Y, por lo tanto: $9d = 12a_1 \rightarrow 9d = 12 \cdot 3 \rightarrow d = 4$

Y el término general sería:

$a_n = 3 + (n - 1) \cdot 4 = 4n - 1$

52. Calculemos la diferencia de la progresión a partir del dato del padre:

$1{,}85 = 1{,}25 + d \cdot 3 \rightarrow d = 0{,}2$ m

Por lo tanto, el término general de la progresión es:

$a_n = 1{,}25 + (n - 1) \cdot 0{,}2$

Por lo tanto:

a_3 (madre) $= 1{,}25 + (3 - 1) \cdot 0{,}2 = 1{,}65$ m

a_2 (hijo) $= 1{,}25 + (2 - 1) \cdot 0{,}2 = 1{,}45$ m

53. Para que una sucesión sea una progresión geométrica, el cociente entre un término cualquiera y su anterior debe ser una cantidad constante.

54. a) $\frac{4}{1} \neq \frac{9}{4} \neq \frac{16}{9} \neq \frac{25}{16}$

No es progresión geométrica.

b) $\frac{10}{5} = \frac{20}{10} = \frac{40}{20} = \frac{80}{40} = 2$

Es una progresión geométrica de razón 2.

c) $\frac{4}{2} = \frac{8}{4} = \frac{64}{32} \neq \frac{32}{8}$

No es una progresión geométrica.

d) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{4}} \neq \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}} \neq \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{6}} \neq \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{7}}$

No es una progresión geométrica.

55. a) $r = \frac{32}{16} = \frac{16}{8} = \frac{8}{4} = \frac{4}{2} = 2$

$a_n = a_1 \cdot r^{n-1} \rightarrow a_n = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$

La expresión del término general es $a_n = 2^n$

$a_{10} = 2^{10} = 1024$

El término a_{10} es 1024.

b)
$$r = \frac{\frac{8}{81}}{\frac{4}{27}} = \frac{\frac{4}{27}}{\frac{2}{9}} = \frac{\frac{2}{9}}{\frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1} \rightarrow a_n = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

La expresión del término general es:

$$a_n = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

$$a_{10} = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{9} = \frac{2^8}{3^9} = \frac{256}{6\,561}$$

El término a_{10} es: $\frac{256}{6\,561}$

c) $r = \frac{-4}{4} = \frac{4}{-4} = \frac{-4}{4} = \frac{4}{-4} = -1$

$a_n = a_1 \cdot r^{n-1} \rightarrow a_n = 4 \cdot (-1)^{n-1}$

La expresión del término general es:

$a_n = 4 \cdot (-1)^{n-1}$

$a_{10} = 4 \cdot (-1)^{10-1} = 4 \cdot (-1)^9 = 4 \cdot (-1) = -4$

El término a_{10} es -4.

d) $r = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{1}$

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1} \rightarrow a_n = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{2^{n-2}}$$

La expresión del término general es:

$$a_n = \frac{1}{2^{n-2}}$$

$$a_{10} = \frac{1}{2^8} = \frac{1}{256}$$

El término a_{10} es $\frac{1}{256}$

56.
$$\left.\begin{array}{l} a_2 = a_1 \cdot r \\ a_2 = 24 \end{array}\right\} 24 = a_1 \cdot r$$

$$\left.\begin{array}{l} a_5 = a_1 \cdot r^4 \\ a_5 = 1536 \end{array}\right\} 1536 = a_1 \cdot r^4$$

$$\left.\begin{array}{l} 24 = a_1 \cdot r \\ 1536 = a_1 \cdot r^4 \end{array}\right\} 1536 = a_1 \cdot r^4$$

$$a_1 = \frac{24}{r}$$

$$1536 = \frac{24}{r} \cdot r^4 \rightarrow 1536 = 24 \cdot r^3 \rightarrow 64 = r^3 \rightarrow r = 4$$

$$a_1 = \frac{24}{4} = 6$$

$a_n = a_1 \cdot r^{n-1} \rightarrow a_n = 6 \cdot 4^{n-1} = 3 \cdot 2 \cdot (2^2)^{n-1} =$
$= 3 \cdot 2 \cdot 2^{2n-2} = 3 \cdot 2^{2n-1}$

La expresión del término general es $a_n = 3 \cdot 2^{2n-1}$

$a_{10} = 3 \cdot (2^2)^{10-1} = 3 \cdot 2^{19} = 1\,572\,864$

El término a_{10} es $1\,572\,864$.

57. $a_8 = a_1 \cdot r^7 \cdot a_8 = 3 \cdot 2^7 = 384$

$$S_8 = \frac{a_8 \cdot r - a_1}{r - 1} = \frac{384 \cdot 2 - 3}{2 - 1} = 765$$

La suma de los ocho primeros términos es 765.

58. $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$; $768 = 3 \cdot 2^{n-1} = \frac{3}{2} \cdot 2^n$

$2^n = \frac{768 \cdot 2}{3} = 512$;

$512 = 2^9 = 2^n$; $n = 9$.

Ocupa el noveno lugar.

59. Podemos plantear y resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} 18 = a_1 \cdot r^2 \\ 1215 = a_1 \cdot r^5 \end{array}\right\} \rightarrow a_1 = 2;\ r = 3$$

60. Se debe verificar que:

$$\left.\begin{array}{l} a_3 = a_1 \cdot r^2 \\ a_6 = a_1 \cdot r^5 \end{array}\right\} \text{Dividiendo ambas ecuaciones } \frac{a_6}{a_3} = r^3$$

Por lo tanto:

$$r = \sqrt[3]{\frac{a_6}{a_3}} = 3$$

Para obtener a_1, sustituimos en cualquiera de las dos ecuaciones anteriores:

$45 = a_1 \cdot 3^2 \rightarrow a_1 = 5$

La suma de los ocho primeros términos es:

$a_8 = 5 \cdot 3^7 = 10935$

$$S_8 = \frac{10\,935 \cdot 3 - 5}{2} = 16\,400$$

61. a) A partir del primer término y la razón de la progresión geométrica:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = 2 \\ r = 7 \end{array}\right\} \rightarrow S_{10} = \frac{2 \cdot 7^{10} - 2}{7 - 1} = 94155416$$

b) Análogamente al caso anterior:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = 3 \\ r = -2 \end{array}\right\} \rightarrow S_{10} = \frac{3 \cdot (-2)^{10} - 3}{-2 - 1} = -1\,023$$

62. Obtenemos la razón y el primer término de la sucesión:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = 63 \\ r = \frac{1}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow S_{10} = \frac{63 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{10} - 63}{\frac{1}{3} - 1} = 94{,}50$$

63. A partir del primer término y la razón de la sucesión:

$a_1 = 8$

$r = \frac{1}{2}$

a)
$$S_5 = \frac{8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 - 8}{\frac{1}{2} - 1} = 15{,}50$$

b)
$$S_{10} = \frac{8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10} - 8}{\frac{1}{2} - 1} = 15{,}98$$

La suma de los infinitos términos de esta serie es igual a 16.

64. Tenemos que calcular inicialmente el primer término de la sucesión.

$$\left.\begin{array}{l} a_4 = 225 \\ r = 3 \end{array}\right\} \rightarrow 225 = a_1 \cdot 3^3 \Rightarrow a_1 = \frac{25}{3}$$

Aplicando la expresión de la suma de los diez primeros términos:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = \frac{25}{3} \\ r = 3 \end{array}\right\} \rightarrow S_{10} = \frac{\frac{25}{3} \cdot (3)^{10} - \frac{25}{3}}{3 - 1} = \frac{738100}{3}$$

65. Consideremos el orden de los términos consecutivos n y $n + 1$

Así, tenemos:

$$a_{n+1} = a_n \cdot r^{(n+1)-n} \rightarrow a_{n+1} = a_n \cdot r$$

$$5 = 2 \cdot r \rightarrow r = \frac{5}{2}$$

Por lo anto,

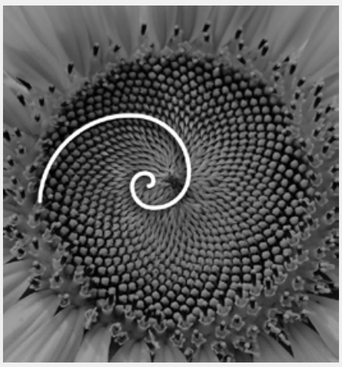
$$a_{n+1} = a_1 \cdot r^{(n+1)-1} \rightarrow a_{n+1} = a_1 \cdot r^n$$

$$5 = \frac{32}{625} \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^n \rightarrow 5 : \frac{32}{625} = \left(\frac{5}{2}\right)^n$$

$$\frac{3125}{32} = \left(\frac{5}{2}\right)^n \rightarrow \left(\frac{5}{2}\right)^5 = \left(\frac{5}{2}\right)^n \rightarrow n = 5$$

Así, el orden es 5 y 6.

66. Por ejemplo, las semillas de girasol se disponen en espirales logarítmicas cuya razón es el número de oro:



Esta espiral es también la que usan las aves rapaces para acercarse a sus presas.

67. Si a_1, a_2 y a_3 son las edades de los tres hermanos y consideramos que a_1 es la edad del hermano menor:

$a_1 = 18$

$a_2 = a_1 + d = 18 + d$

$a_3 = a_1 + 2d = 18 + 2d$

$18 + (18 + d) + (18 + 2d) = 63$

$54 + 3d = 63$

$3d = 63 - 54$

$3d = 9 \rightarrow d = \frac{9}{3} = 3$

$a_2 = 18 + d = 18 + 3 = 21$

$a_3 = 18 + 2d = 18 + 2 \cdot 3 = 24$

La edad de los otros hermanos es 21 y 24 años.

68. $a_5 = 4a_1$

$$50 = \frac{(a_1 + 4a_1) \cdot 5}{2}$$

$$20 = 5\,a_1 \rightarrow a_1 = \frac{20}{5} = 4$$

$a_5 = a_1 + 4d$

$$4a_1 = a_1 + 4d;\ 3a_1 = 4d \rightarrow d = \frac{3 \cdot 4}{4} = 3$$

Las edades son 4, 7, 10, 13 y 16 años.

69.
$$d = \frac{b - a}{k + 1} \rightarrow d = \frac{29{,}300 - 20{,}100}{10 + 1} =$$
$$= \frac{9{,}2}{11} = 0{,}8\widehat{36}$$

Los postes de socorro deben situarse en los siguientes puntos kilométricos: 20,936; 21,773; 22,609; 23,445; 24,282; 25,118; 25,955; 26,791; 27,627; 28,464.

70. a) $a_1 = \frac{2}{3}$

$r = \frac{2}{3}$

$$a_3 = a_1 \cdot r^2 = \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{8}{27}$$

Después de tres rebotes alcanzará una altura de $\frac{8}{27}$ m.

b) $$a_5 = a_1 \cdot r^4 = \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{32}{243}$$

Subidas:

$$s_5 = \frac{a_5 \cdot r - a_1}{r - 1} = \frac{\frac{32}{243} \cdot \frac{2}{3} - \frac{2}{3}}{\frac{2}{3} - 1} = \frac{422}{243}$$

Bajadas: $1 + \frac{422}{243} = \frac{665}{243}$

Distancia: $\dfrac{422}{243} + \dfrac{665}{243} = \dfrac{1087}{243}$

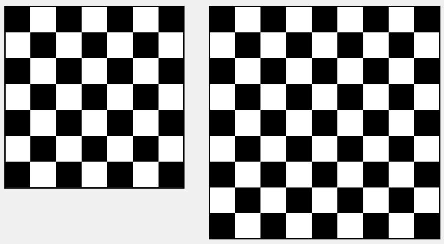
Entre subidas y bajadas recorre $\dfrac{1087}{243}$ m.

c) $s = \dfrac{a_1}{1 - r} \rightarrow s = \dfrac{\frac{2}{3}}{1 - \frac{2}{3}} = \dfrac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}} = 2$

$1 + 2 \cdot 2 = 5$

En total recorrería 5 m.

71. a)



b)

Figura	1	2	3	4	5
Cuadrados blancos	0	4	12	24	40
Cuadrados negros	1	5	13	25	41
Número total de cuadrados	1	9	25	49	81

c) Observamos que el número total de cuadrados es la sucesión de los cuadrados de los números impares. Por lo tanto, no habrá ninguna figura del tipo de las anteriores que tenga 10^2 cuadrados.

d) $121 = 11^2$. El número de cuadrados blancos será 60 y el de cuadrados negros, 61.

72. $a_1 = 1$; $a_n = 12$; $d = 1$; $n = 12$

$s = \dfrac{(1 + 12) \cdot 12}{2} = 78$

Total del día: $78 \cdot 2 = 156$

Dará 156 campanadas al día.

73. $a_2 = a_1 + 15$

$a_3 = a_2 + 30 = a_1 + 15 + 30 = a_1 + 15 \cdot (1 + 2)$

$a_4 = a_3 + 45 = a_1 + 15 + 30 + 45 = a_1 + 15 \cdot (1 + 2 + 3)$

$a_5 = a_4 + 60 = a_1 + 15 + 30 + 45 + 60 = a_1 + 15 \cdot (1 + 2 + 3 + 4)$

$a_6 = a_5 + 75 = a_1 + 15 + 30 + 45 + 60 + 75 = a_1 + 15(1 + 2 + 3 + 4 + 5)$

…

$a_{12} = a_{11} + 15 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots + 11)$

$a_{12} = a_1 + 990 : 1350 = a_1 + 990$; $a_1 = 360$

El primer mes ingresó 360 €, por lo que el último mes ahorró 165 €.

74. Los datos conocidos son:

$a_1 = 20$; $a_6 = 35$; $n = 6$

$35 = 20 + 5d$

$15 = 5d \rightarrow d = 3$

Las etapas serán de: 20, 23, 26, 32 y 35 km.

$s = \dfrac{(20 + 35) \cdot 6}{2} = 165$

Habrán recorrido165 km.

75. Se trata de una progresión aritmética de primer término 1 y diferencia 2.

a) Por lo tanto, el día 15 realizará:

$\left.\begin{array}{l} a_1 = 1 \\ d = 2 \end{array}\right\} \rightarrow a_{15} = 1 + 2 \cdot 14 = 29$ ejercicios

b) En estos 15 días habrá realizado un total de:

$S_{15} = \dfrac{(29 + 1) \cdot 15}{2} = 225$ ejercicios

76. Se trata de una progresión aritmética de primer término 10 y diferencia 3. Si un día cobró 55 €:

$\left.\begin{array}{l} a_1 = 10 \\ d = 3 \end{array}\right\} \rightarrow 55 = 10 + 3 \cdot (n - 1) \Rightarrow n = 16$ días

77. $a_{25} = 1922$; $d = 4$

$a_{25} = a_1 + 24d$; $a_{25} = a_1 + 96$

$1922 = a_1 + 96$; $a_1 = 1896$

$1922 - 48 = 1908$

$a_5 = a_1 + 4d = 1896 + 16 = 1912$

Las V Olimpíadas de Estocolmo se celebraron en 1912.

78. $a_1 = 9$

$a_{10} = a_1 \cdot r^{n-1} = 9 \cdot 3^9 = 177\,147$

$s = \dfrac{a_n \cdot r - a_1}{r - 1} = \dfrac{177147 \cdot 3 - 9}{3 - 1} = 265716$

A esta cifra hay que añadir a Elena y los tres amigos iniciales. En total, sabrán el chiste 265 720 personas.

79. $r = \sqrt[k+1]{\dfrac{b}{a}} = \sqrt[8+1]{\dfrac{1}{400}} = 0{,}514$

Las balizas se situarán en los siguientes puntos:

400; 205,6; 105,6; 54,3; 27,9; 14,3; 7,4; 3,8; 1,9; 1.

80. Se trata de una progresión aritmética de primer término 125 y diferencia (–2). Para calcular la cantidad total ingerida durante el tratamiento, previamente necesitamos saber cuánto tomó el décimo día:

$\left.\begin{array}{l} a_1 = 125 \\ d = (-5) \end{array}\right\} \rightarrow a_{10} = 125 - 5 \cdot 9 = 80$ mg

Por tanto, la cantidad total tomada durante el tratamiento es:

$$S_{10} = \frac{(125 + 80) \cdot 10}{2} = 1025 \text{ mg}$$

81. Según los datos del problema, partiendo de un único organismo, si se divide por bipartición su razón es ½. Si se divide cada 15 min, a las 4 horas se habrá dividido un total de 16 veces. Por lo tanto, en ese momento habrá un total de:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = 1 \\ r = 2 \end{array}\right\} \rightarrow S_{16} = \frac{1 \cdot (2)^{16} - 1}{2 - 1} = 65535 \text{ organismos}$$

82. Se trata de comparar la evolución según una progresión aritmética o geométrica del sueldo.

La opción de la primera empresa:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = 1000 \\ d = 100 \end{array}\right\} \rightarrow a_{10} = 1000 + 100 \cdot 9 = 1900 \text{ €}$$

En el segundo caso:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = 1000 \\ r = 1{,}1 \end{array}\right\} \rightarrow a_{10} = 1000 \cdot 1{,}1^9 = 2\,357{,}95 \text{ €}$$

La segunda opción es más favorable.

83. Para encontrar los términos de los cinco primeros años podemos confeccionar la siguiente tabla:

Árboles viejos	0	1	1	3	5
Árboles nuevos	1	0	2	2	6
Semillas	0	2	2	6	10
Año	*a*1	*a*2	*a*3	*a*4	*a*5
Árboles	1	1	3	511	

Empezamos con un árbol «joven» recién plantado, que al cabo de un año será ya «viejo» y podrá dar semillas. A partir de aquí, cada árbol viejo da dos semillas el mismo año, y cada semilla dará un árbol «joven» al año siguiente.

El cómputo total de árboles es la suma de los árboles «jóvenes» y los árboles «viejos».

Por lo tanto, obtenemos:

$a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_3 = 3$, $a_4 = 5$, y $a_5 = 11$

Para encontrar el término general observamos que corresponde a la suma de árboles del término anterior, a_{n-1}, más las semillas del término anterior, que, a su vez, son dos por cada árbol que hubiera hace dos términos, $2 \cdot a_{n-2}$. Por lo tanto: $a_n = a_{n-1} + 2 \cdot a_{n-2}$.

84. Se trata de una progresión aritmética de primer término 1 y diferencia 3.

En el segundo 20 recorrerá:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = 1 \\ d = 3 \end{array}\right\} \rightarrow a_{20} = 1 + 3 \cdot 19 = 58 \text{ m}$$

En el total de los 20 s:

$$S_{20} = \frac{(58 + 1) \cdot 20}{2} = 590 \text{ m}$$

85. Se trata de una progresión aritmética de primer término 80 y diferencia 30. Si en total cobró 18480 €:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = 80 \\ d = 30 \end{array}\right\} \rightarrow a_n = 80 + 30 \cdot (n - 1)$$

Si planteamos y resolvemos la suma del precio de los metros excavados:

$$18480 = \frac{(a_n + a_1) \cdot n}{2} \rightarrow 3n^2 + 13n - 3696 = 0$$

Si resolvemos la ecuación de segundo grado obtenemos $n = 33$ y $n = -112/3$. Si descartamos la solución negativa, concluimos que el señor excavó un pozo de 33 m.

86. La progresión es:

$$a_n = 123 \cdot \left(1 + \frac{x}{100}\right)^{n-1}$$

a) En cuatro subidas:

$$a_5 = 123 \cdot \left(1 + \frac{x}{100}\right)^{5-1} = 150$$

$$\left(1 + \frac{x}{100}\right)^4 = \frac{150}{123}$$

$$\left(1 + \frac{x}{100}\right)^4 = 1{,}22$$

$$1 + \frac{x}{100} = \sqrt[4]{1{,}22}$$

$$1 + \frac{x}{100} = 1{,}05$$

$x = 0{,}05 \cdot 100 = 5$ %

b) Respondemos a la segunda pregunta:

$$a_3 = 123 \cdot \left(1 - \frac{x}{100}\right)^{3-1} = 100$$

$$\left(1 - \frac{x}{100}\right)^2 = \frac{100}{123}$$

$$\left(1 - \frac{x}{100}\right)^2 = 0{,}81$$

$$1 - \frac{x}{100} = \sqrt{0{,}81}$$

$$1 - \frac{x}{100} = 10{,}90$$

$x = 0{,}098 \cdot 100 = 9{,}8$ %

87. Escribimos la progresión geométrica:

$$a_n = 999 \cdot \left(1 - \frac{5}{100}\right)^{n-1}$$

a) En las terceras rebajas, el precio es 901,60 €.

b) El precio final será 0,00 € porque siempre rebajamos el valor del objeto.

c) La mitad de precio la obtendrá haciendo descuentos progresivos entre las 14 y las 15 rebajas.

88. Se trata de una progresión aritmética de primer término 1 y diferencia 1. Si en total hay 820 alumnos:

$$\left.\begin{matrix} a_1 = 1 \\ d = 1 \end{matrix}\right\} \rightarrow a_n = 1 + 1 \cdot (n - 1) = n$$

Si planteamos y resolvemos la suma para todas las filas:

$$820 = \frac{(a_n + a_1) \cdot n}{2} \rightarrow n^2 + n - 1640 = 0$$

Si resolvemos la ecuación de segundo grado obtenemos $n = 40$ y $n = -41$. Si descartamos la solución negativa, concluimos que se formarán 40 filas.

89. El sexto término es ocho veces el tercer término:

$a_6 = 8 \cdot a_3$

Como es una progresión geométrica, tenemos:

$a_6 = a_3 \cdot r^3$

Así, $8 \cdot a_3 = a_3 \cdot r^3$

$r^3 = 8$

$r = 2$

90. La suma de sus términos es:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n \rightarrow 605 = \frac{5 + 105}{2} \cdot n$$

$$605 = 55 \cdot n \rightarrow n = \frac{605}{55} = 11$$

91. Se trata de la siguiente progresión geométrica:

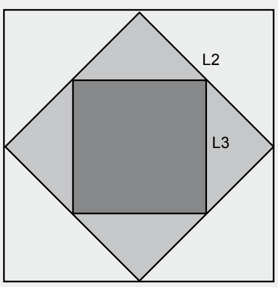
$$\left.\begin{matrix} a_1 = 59049 \\ a_6 = 100000 \end{matrix}\right\} \rightarrow 100000 = 59049 \cdot r^5 \rightarrow r = \frac{10}{9}$$

92. a) Nos piden la sucesión que forma los perímetros de los cuadrados así construidos. Llamaremos l al lado de los cuadrados.

$$l_1 = 1\text{ m} \rightarrow P_1 = 4\text{ m}$$

Para calcular l_2 y l_3, aplicamos el teorema de Pitágoras:

$$l_2 = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\text{ m} \rightarrow P_2 = 2 \cdot \sqrt{2}\text{ m}$$



$$l_3 = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2} = \frac{1}{2}\text{ m} \rightarrow P_3 = 2\text{ m}$$

Comprobamos si se trata de una progresión geométrica y calculamos la razón de la progresión:

$$\frac{P_3}{P_2} = \frac{P_2}{P_1} = r = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Por lo tanto, la sucesión de los perímetros es una progresión geométrica con el siguiente término general:

$$P_n = 4 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}$$

b) Procediendo de la misma forma. Teniendo en cuenta que $A = l^2$:

$$l_1 = 1\text{ m} \rightarrow A_1 = 1\text{ m}^2$$

$$l_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}\text{ m} \rightarrow A_2 = \frac{1}{2}\text{ m}^2$$

$$l_3 = \frac{1}{2}\text{ m} \rightarrow A_3 = \frac{1}{4}\text{ m}^4$$

De nuevo se trata de una progresión geométrica de razón:

$$\frac{A_3}{A_2} = \frac{A_2}{A_1} = r = \frac{1}{2}$$

Por lo tanto, la sucesión de las áreas es una progresión geométrica con el siguiente término general:

$$A_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

c) Calculamos las sumas de las áreas.

$$A_7 = \left(\frac{1}{2}\right)^6 \rightarrow S_7 = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^7 - 1}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{127}{64}\text{ m}^2$$

$$A_{20} = \left(\frac{1}{2}\right)^{19} \rightarrow S_{20} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{20} - 1}{\frac{1}{2} - 1} = 2\text{ m}^2$$

$$A_{1000} = \left(\frac{1}{2}\right)^{999} \rightarrow S_{1000} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{1000} - 1}{\frac{1}{2} - 1} = 2\text{ m}^2$$

Las sumas convergen a 2 m², ya que la progresión es decreciente. En el término general de la suma, el primer término del numerador tiende a cero y, por lo tanto, la suma total, cuando n crece, se puede calcular como sigue:

$$S_\infty = \frac{a_1}{1 - r} = 2\text{ m}^2$$

93. Se trata de la siguiente progresión geométrica que nos da el valor del vehículo para los sucesivos compradores:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = 10480 \\ r = \dfrac{1}{2} \end{array}\right\} \to a_n = 10480 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

a) Al quinto propietario le costó:

$$a_5 = 10480 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 655 \text{ €}$$

b) Aplicando de nuevo el término general de la progresión para $a_n = 1310$.

$$1310 = 10\,480 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \to n = 4$$

Se trata del cuarto propietario.

Lo podíamos haber deducido del apartado anterior, ya que esta cantidad es el doble de lo que pagó el quinto propietario.

c) Calculamos la suma de lo pagado por los 10 propietarios:

$$S_{10} = \frac{10\,480 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10} - 10\,480}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{670\,065}{32} \approx 20\,939{,}53 \text{ €}$$

94. La suma de los 10 primeros términos de la progresión aritmética es:

$$S_{10} = \frac{a_1 + a_{10}}{2} \cdot 10 \to 120 = \frac{-6 + a_{10}}{2} \cdot 10$$

$$120 = (-6 + a_{10}) \cdot 5 \to 24 = -6 + a_{10}$$

$$a_{10} = 30$$

95. Calculemos la razón de la progresión aritmética:

$a_{30} = a_1 + (30 - 1) \cdot d$

$144 = -1 + 29 \cdot d$

$29 \cdot d = 145$

$d = 5$

Calculemos el término de orden 40:

$a_{40} = a_{30} + (40 - 30) \cdot d$

$a_{40} = 144 + 10 \cdot 5 = 144 + 50 = 194$

La suma de sus 40 primeros términos es:

$$S_{40} = \frac{a_1 + a_{40}}{2} \cdot 40 \to S_{40} = (-1 + 194) \cdot 20 =$$
$$= 3860$$

96. Calculemos la razón:

$A_9 = a_3 + (9 - 3) \cdot r$

$18 = 6 + 6 \cdot r$

$6 \cdot r = 12$

$r = 2$

Tenemos que calcular $a_{100} + a_{101} + a_{102} + \ldots + a_{109} = S_{109} - S_{99.}$

Para esto, necesitamos calcular a_{99} y a_{109}.

$a_{99} = 2 + 98 \cdot 2 = 198$

$a_{109} = 2 + 108 \cdot 2 = 218$

Así,

$$S_{109} = \frac{2 + a_{109}}{2} \cdot 109 \to S_{109} = \frac{2 + 218}{2} \cdot 109$$

$$S_{109} = 110 \cdot 109 = 11990$$

$$S_{99} = \frac{2 + a_{99}}{2} \cdot 99 \to S_{99} = \frac{2 + 198}{2} \cdot 99$$

$$S_{109} = 100 \cdot 99 = 9900$$

Por lo tanto, $S_{109} - S_{99} = a_{100} + a_{101} + a_{102} + \ldots + a_{109} =$
$= 11\,990 - 9\,900 = 2\,090$

97. Se trata de la siguiente progresión geométrica, que nos da la distancia recorrida por la rana con cada salto:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = 2 \\ r = \dfrac{2}{3} \end{array}\right\} \to a_n = 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

a) Pasará justo por el centro de la charca si la suma de la distancia recorrida en un número determinado de saltos es igual a 5. Se puede comprobar que, si da 4 saltos, recorre 4,81 m ($S_4 = 4{,}81$ m) y si da 5 entonces 5,21 m ($S_5 = 5{,}21$ m), por lo tanto no pasa por el centro exacto.

b) No llegará al otro lado de la charca, ya que como mucho llegará a recorrer 6 m, es decir, $S_\infty = 6$ m.

98. Tenemos una progresión geométrica en que el primer término es 700 y la razón es 0,9.

Cada término de la progresión corresponde a tres meses. Por lo tanto, un año y seis meses después corresponde al término de orden 7.

Así, tenemos: $a_7 = a_1 \cdot r^6$

$a_7 = 700 \cdot 0{,}9^6$

$a_7 = 700 \cdot 0{,}531441$

$a_7 = 372$

El ordenador costará 372 € un año y seis meses después de su lanzamiento.

99. Llamemos x, y, z a estos números y apliquemos las condiciones del enunciado:

$$z - y = y - x$$

$$x + y + z = 21$$

$$\frac{z + 15}{y + 2} = \frac{y + 2}{x + 1}$$

Resolviendo el sistema no lineal de tres ecuaciones con tres incógnitas, obtenemos que: $x = 2$, $y = 7$, $z = 12$. Se puede comprobar que estos números cumplen las condiciones del problema.

100. La recompensa del centurion consiste en la siguiente progresión geométrica:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = 1 \\ r = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow a_n = 2^{n-1}$$

Si cada denario pesa 20 g y puede llevar como mucho una tonelada, el número máximo de denarios que podrá transportar de una vez será 1 000 000/20 = 50 000 denarios.

a) Si calculamos el número de denarios que le corresponden cada día, obtenemos que el día 16 son 32 768 (a_{16} = 32 768) y el 17 son 65 536 (a_{17} = 65 536). Por lo tanto, la recompensa duró 16 días.

b) Según se ha explicado en el apartado anterior, el último día se llevó 32 768 denarios.

c) Calculamos la suma de los 16 días de recompensa:

$$S_{16} = \frac{1\cdot(2)^{16} - 1}{2-1} = 65\,535 \text{ denarios}$$

Pon a prueba tus competencias

1. a) $a_1 = 3$, por lo tanto, fueron tres ordenadores.

b) Tenemos que calcular el término de orden 4: $a_4 = 3 \cdot 2^{4-1} = 3 \cdot 2^3 = 3 \cdot 8 = 24$

c) Determinemos *n,* de tal manera que:

$$48 = 3 \cdot 2^{n-1} \rightarrow \frac{48}{3} = 2^{n-1}$$

$$16 = 2^{n-1} \rightarrow 2^4 = 2^{n-1}$$

$$n - 1 = 4 \rightarrow n = 5$$

Así, cinco horas después del inicio de la infección había 48 ordenadores infectados.

d) (1 – 0,75) · 48 = 0,25 · 48 = 12. Así, continuaron contaminados 12 ordenadores.

2. a) Según el esquema, el número de antepasados de una abeja macho sigue la secuencia:

1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55

Por lo tanto, el número de antepasados tras 10 generaciones es: 1 + 2 + 3 + 5 + 8 + 13 + 21 + 34 + 55 = 142 antepasados.

b) $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$. Vemos que cada término se obtiene como suma de los dos anteriores.

c) Se trata de la sucesión de Fibonacci.

La razón entre dos términos sucesivos se va acercando al número de oro, es decir:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \Phi$$

3. a) $a_n = 10\,000 + (n-1) \cdot 2\,000$

b) $a_5 = 10\,000 + (5-1) \cdot 2\,000$

$a_5 = 10\,000 + 4 \cdot 2\,000 = 18\,000$

c) Tenemos que calcular la suma de los doce primeros términos de la progresión aritmética:

$a_{12} = 10\,000 + (12-1) \cdot 2\,000$

$a_5 = 10\,000 + 11 \cdot 2\,000 = 32\,000$

$$S_{12} = \frac{a_1 + a_{12}}{2} \cdot 12 \rightarrow S_{12} = (10\,000 + 32\,000) \cdot 6$$

$$S_{12} = 42\,000 \cdot 6 = 252\,000$$

d) El beneficio por cada bolígrafo es 0,2 – 0,05 = = 0,15 €.

Así, la empresa obtuvo, ese año, de beneficio 252 000 · 0,15 = 37 800 €

4. a) $a_n = 204\,582 - (n-1) \cdot 723$

b) $a_4 = 204\,582 - (4-1) \cdot 723$

$a_4 = 204\,582 - 3 \cdot 723$

$a_4 = 204\,582 - 2\,169 = 202\,413$

c) 2 169 habitantes.

d) $\dfrac{202\,413}{204\,582} = 0{,}99 = 99\,\%$

Así, la ciudad ha perdido el 1 % de su población entre 2004 y 2007.

1. a) Gasto = 50 · 4 + 15 · 20 = 500 W

b) La parte que gasta estando en *standby*: 300 W.

c) $\frac{300}{500} = 0,6 \rightarrow 60\,\%$

2. a) Sea x la cantidad total de café en gramos.

$$x = \frac{1}{3}x + \frac{3}{7}x + 300$$

$21x = 7x + 9x + 6\,300$

$5x = 6\,300$; $x = 1\,260$ g = 1,26 kg.

David compró 1,26 kg de café en grano.

b) $\frac{1\,260}{3} = 420$ g

David guardó 420 g de café.

c) $1\,260 \cdot \frac{3}{7} = 180 \cdot 3 = 540$ g

David dio 540 g a su hermana.

d) $\frac{540}{65} \approx 8,3$

Lo utilizó 9 veces.

3. a) Representamos por x la cantidad de almendras y por y la cantidad de avellanas, ambas expresadas en kilogramos.

Sandra compró 500 g de una mezcla de almendras y avellanas: $x + y = 0,5$

Las almendras cuestan 27 €/kg, las avellanas 35 €/kg y pagó 15,30 € por la mezcla:

$27x + 35y = 15,3$

Resolvemos el sistema:

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 0,5 \\ 27x + 35y &= 15,3 \end{aligned}\right\} \rightarrow x = 0,275;\ y = 0,225$$

La mezcla contenía 275 g de almendras y 225 g de avellanas.

b) $\frac{2}{5} \cdot 275 = 2 \cdot 55 = 110$

$\frac{1}{3} \cdot 225 = 75$

Sandra tostó 110 g de almendras y 75 g de avellanas.

4. Según los datos del problema, las ecuaciones de la distancia recorrida por Juan y Andrés para ir a trabajar son:

$x = 70 \cdot t$

$60 - x = 50 \cdot t$

a) Resolviendo el sistema de ecuaciones podemos obtener el tiempo que tardan en llegar a la oficina: $t = 0,5$ h.

b) La distancia de Juan = 70 · 0,5 = 35 km

La de Andrés = 50 · 0,5 = 25 km

c) El gasto de Juan es:

$$6,5\frac{\text{L}}{100\text{ km}} \cdot 1,20\frac{€}{\text{L}} \cdot 35\text{ km} = 2,73\ €$$

5. a) Si llamamos $x + 45$ a la longitud y x a la anchura y teniendo en cuenta que el perímetro del campo es 290 m:

$2x + 2 \cdot (x + 45) = 290 \rightarrow x = 50$

Por lo tanto, la longitud del campo es 95 m y su anchura 50 m.

A escala 1:1000, la anchura es 5 cm y la longitud 9,5 cm.

b) La superficie con las medidas anteriores es: 4 750 m2.

Con las nuevas medidas: 5 194 m^2.

El área del campo aumenta en 444 m^2.

c) Las nuevas medidas del campo son 101 × 50 m. Su superficie es 5 050 m^2. El área de campo disminuye 144 m^2 respecto al campo anterior.

d) A escala 1:1 000, las dimensiones del campo son 10,1 × 5 cm.

e) 4 750 · 65 = 308 750 €

f) 38 × 20 cm

6. a) $a_n = 600 + 50 \cdot (n - 1)$, donde n es el número de metros excavados.

b) Calculando la suma de los 20 primeros metros:

$a_{20} = 600 + 950 = 1\,550$ €

$$S_{20} = \frac{(600 + 1550) \cdot 20}{2} = 21\,500\ €$$

c) Se trata del metro número 60.

$a_{60} = 600 + 2\,950 = 3\,550$ €

d) $S_{60} = \frac{(600 + 3\,550) \cdot 60}{2} = 124\,500\ €$

1. $45 \cdot 56 = 2\,520$

$120 \cdot 21 = 2\,520$

Son equivalentes.

2. Variable independiente: número de paradas realizadas. Variable dependiente: número de pasajeros que viaja en el tren.

3. Un número racional se corresponderá con un decimal limitado o con un decimal ilimitado periódico. Un número irracional se corresponderá con un decimal ilimitado no periódico.

— La expresión decimal de un número irracional será siempre ilimitada y no periódica. La de un número racional puede ser limitada o ilimitada periódica.

4. a) 2^8

b) 2^{10}

c) 5^4

d) 3^9

5. Son falsas las afirmaciones b), c) y d).

b) Hay números racionales que no son naturales, por ejemplo, -4 o $\frac{9}{4}$.

c) Todos los números irracionales son reales.

d) $(x^5 + x^4 + x) + (-x^5 - x^4 + x) = 2x$

En el ejemplo anterior, el grado de la suma es 1 y el del sumando de mayor grado es 5.

6. Si la expresión del término general de una progresión aritmética es $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$, al multiplicar todos sus términos por 3 obtenemos:

$$a_n = 3a_1 + (n - 1) \cdot 3d$$

Este es el término general de una progresión aritmética cuyo primer término es $3a_1$ y cuya diferencia es $3d$.

Si la expresión del término general de una progresión geométrica es $a_n = a_1 \cdot r\,(n - 1)$, al multiplicar todos sus términos por 3 obtenemos:

$$a_n = 3a_1 \cdot r\,(n - 1)$$

Este es el término general de una progresión geométrica cuyo primer término es $3a_1$ y cuya razón es r.

7. Calculamos las fracciones irreducibles de cada una de las fracciones.

$\frac{7}{5} = \frac{7}{5}$	$\frac{9}{4} = \frac{9}{4}$	$\frac{3}{7} = \frac{3}{7}$	$\frac{336}{784} = \frac{3}{7}$
$\frac{14}{10} = \frac{7}{5}$	$\frac{72}{32} = \frac{9}{4}$	$\frac{15}{21} = \frac{5}{7}$	$\frac{3}{2} = \frac{3}{2}$
$\frac{45}{20} = \frac{9}{4}$	$\frac{24}{16} = \frac{3}{2}$	$\frac{165}{110} = \frac{3}{2}$	$\frac{84}{60} = \frac{7}{5}$

Son equivalentes las fracciones que tienen la misma fracción irreducible.

$$\frac{7}{5} = \frac{14}{10} = \frac{15}{21} = \frac{84}{60}$$

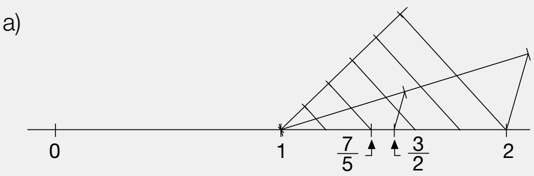
$$\frac{9}{4} = \frac{72}{32} = \frac{45}{20}$$

$$\frac{3}{7} = \frac{336}{784}$$

$$\frac{3}{2} = \frac{24}{16} = \frac{165}{110}$$

— Por lo tanto, tenemos representados un total de 4 números racionales.

8. a)



$$\frac{3}{2} > \frac{7}{5}$$

b) Podemos pasar los números racionales a su forma decimal y compararlos.

Podemos obtener un representante de cada uno de los números racionales que tengan el mismo denominador positivo. El número racional mayor será el que tenga el representante con mayor numerador.

9.

$$\begin{array}{r} 1\,000\,000\,x = 571\,428{,}571428... \\ x = \quad 0{,}571428... \\ \hline 1\,000\,000\,x - x = 571428 \\ 999\,999\,x = 571\,428 \end{array}$$

$$x = \frac{571\,428}{999\,999} = \frac{4}{7}$$

10. a) $\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{6}{4} - \frac{5}{3} = \frac{9}{4} + \frac{6}{4} - \frac{5}{3} =$

$= \frac{27 + 18 - 20}{12} = \frac{25}{12}$

b) $-2 \cdot \frac{4}{5} - \frac{2}{3} : \frac{1}{2} = -\frac{8}{5} - \frac{4}{3} = \frac{-24 - 20}{15} =$

$= \frac{-44}{15}$

c) $\frac{1}{6} + \left(\frac{7}{3} - \frac{5}{2}\right) \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{6} + \frac{14 - 15}{6} \cdot \frac{1}{5} =$

$= \frac{1}{6} + \frac{-1}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{6} - \frac{1}{30} = \frac{5 - 1}{30} = \frac{4}{30} =$

$= \frac{2}{15}$

d) $\left[\frac{11}{2} : \left(\frac{1}{4} - \frac{2}{3}\right)\right] \cdot \frac{1}{11} = \left(\frac{11}{2} : \frac{3 - 8}{12}\right) \cdot \frac{1}{11} =$

$= \left(\frac{11}{2} : \frac{-5}{12}\right) \cdot \frac{1}{11} = -\frac{66}{5} \cdot \frac{1}{11} = -\frac{66}{55} = -\frac{6}{5}$

11. a) $\frac{1}{6} + \frac{3}{8} = \frac{13}{24}$

b) $\sqrt[3]{\frac{2197}{9261}} = \frac{13}{21}$

12. x = tiempo (min)
y = cantidad de aceitunas recolectadas (kg)
$y = 3{,}5 \cdot x$

13. Llamamos x a la base del rectángulo, $(x - 3)$ a su altura y planteamos la ecuación:
$26 = 2x + 2 \cdot (x - 3) \rightarrow x = 8$ cm
La base mide 8 cm y la altura 5 cm.

14. El número estará comprendido entre 2,225 y 2,235.

15. a) $\frac{1}{3}(a - 2b)$ b) $3x^3 + 5x^2 - \frac{1}{2}x$

16. a) $P(3) = 3^3 + 2 \cdot 3^2 - 5 \cdot 3 + 3 = 27 + 18 - 15 + 3 = 33$
$P(-2) = (-2)^3 + 2 \cdot (-2)^2 - 5 \cdot (-2) + 3 = 13$

b) $Q(3) = -2 \cdot 3^3 + 3^2 + 2 \cdot 3 - 5 = -54 + 9 + 6 - 5 =$
$= -44$
$Q(-2) = -2 \cdot (-2)^3 + (-2)^2 + 2 \cdot (-2) - 5 = 11$

17. a) $P\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3} + 2\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

b) $P(x) - 2Q(x) = x + \sqrt{3} - 2\left(x - 2\sqrt{3}\right) =$
$= x + \sqrt{3} - 2x + 4\sqrt{3} = x - 2x + \sqrt{3} + 4\sqrt{3} =$
$= -x + 5\sqrt{3}$

c) $P(x) \cdot Q(x) = \left(x + \sqrt{3}\right) \cdot \left(x - 2\sqrt{3}\right) =$
$x^2 - 2\sqrt{3}x + \sqrt{3}x - 6 = x^2 - \sqrt{3}x - 6$

18. a) $x = \frac{4 + 2x}{3} + \frac{3}{2}$
$6x = 2\,(4 + 2x) + 9 \rightarrow 6x = 8 + 4x + 9$
$6x - 4x = 8 + 9 \rightarrow 2x = 17 \rightarrow x = \frac{17}{2}$

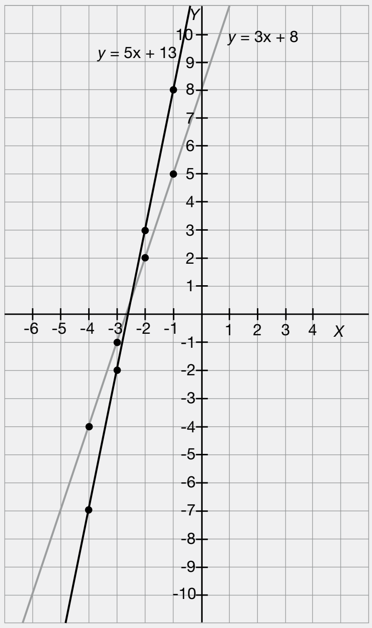
b) $\frac{5}{6}x - \left(\frac{3x}{2} - 3\right) = \frac{5x - 1}{4} + x + 3$
$\frac{5x}{6} - \frac{3x - 6}{2} = \frac{5x - 1}{4} + x + 3$
$12\left(\frac{5x}{6} - \frac{3x - 6}{2}\right) = 12\left(\frac{5x - 1}{4} + x + 3\right)$
$10x - 6\,(3x - 6) = 3\,(5x - 1) + 12\,(x + 3)$
$10x - 18x + 36 = 15x - 3 + 12x + 36$
$10x - 18x - 15x - 12x = -3 + 36 - 36$
$-35x = -3 \rightarrow x = \frac{3}{35}$

c) $\frac{3(2x - 1)}{10} + \frac{x}{5} = \frac{7(3x - 3)}{2} - \frac{1 - 3x}{4}$
$20\left(\frac{3(2x - 1)}{10} + \frac{x}{5}\right) = 20\left(\frac{7(3x - 3)}{2} - \frac{1 - 3x}{4}\right)$
$6\,(2x - 1) + 4x = 70\,(3x - 3) - 5\,(1 - 3x)$
$12x - 6 + 4x = 210x - 210 - 5 + 15x$
$12x + 4x - 210x - 15x = -210 - 5 + 6$
$209x = -209$
$x = 1$

19. Construimos una tabla de soluciones de las dos ecuaciones.

$y = 3x + 8$		$-5x + y = 13$; $y = 5x + 13$	
x	y	x	y
–4	–4	–4	–7
–3	–1	–3	–2
–2	2	–2	3
–1	5	–1	8

Representamos gráficamente las soluciones de ambas ecuaciones.



El punto de corte es (–2,5, 0,5). Por lo tanto, la solución del sistema es $x = -2{,}5$, $y = 0{,}5$.

— Respuesta sugerida. Resolución por el método de reducción.

$y = 3x + 8 \xrightarrow{\cdot 5} 5y = 15x + 40$
$y = 5x + 13 \xrightarrow{\cdot (-3)} -3y = -15x - 39$
$2y = 0 + 1 \rightarrow y = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2} = 3x + 8 \rightarrow 3x = \frac{1}{2} - \frac{16}{2} \rightarrow 3x = -\frac{15}{2}$
$x = -\frac{15}{6} = -\frac{5}{2}$

20. a) $(x-3)(x-5)+4x-6=2x+1$

$x^2-8x+15+4x-6=2x+1$

$x^2-6x+8=0$

Sustituimos en la fórmula general:

$$x=\frac{+6\pm\sqrt{(-6)^2-4\cdot 1\cdot 8}}{2\cdot 1}=\frac{6\pm 2}{2}$$

$x_1=4;\ x_2=2$

b) $(x-3)(x-5)\left(x+\frac{1}{3}\right)=0$

Tiene 3 soluciones:

$x-3=0 \rightarrow x_1=3$

$x-5=0 \rightarrow x_2=5$

$x+\frac{1}{3}=0 \rightarrow x_3=-\frac{1}{3}$

c) $x^2-4x=0 \rightarrow x(x-4)=0$

Tiene 2 soluciones:

$x_1=0$

$x-4=0 \rightarrow x_2=4$

21. $n^2-5n+7=3$

$n^2-5n+7-3=0$

$n^2-5n+4=0$

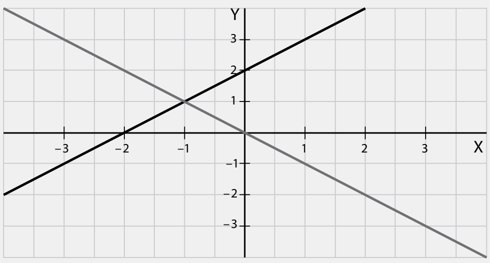
Sustituimos en la fórmula general:

$$n=\frac{+5\pm\sqrt{(-5)^2-4\cdot 1\cdot 4}}{2\cdot 1}=\frac{5\pm 3}{2}$$

$n_1=4;\ n_2=1$

Existen dos términos cuyo valor es 3, el primero y el cuarto.

22. El sistema tiene una solución que es (–2, 1).



23. Círculo: $A=\pi x^2$

El área viene dada por πx^2.

Triángulo: $A=\frac{3x\cdot x}{2}=\frac{3}{2}x^2$

El área viene dada por $\frac{3}{2}x^2$.

Cuadrado: $A=x^2$

El área viene dada por x^2.

Rectángulo: $A=2x\cdot x=2x^2$

El área viene dada por $2x^2$.

24. Si llamamos x e y a la longitud de los lados, se cumple:

$P=2(x+y)=50 \rightarrow y=25-x$

$A=x\cdot y=x\cdot(25-x)=25x-x^2$

Por lo tanto, la expresión buscada es $A=25x-x^2$.

25. Llamamos x al dinero que Santiago tiene ahorrado.

Regalo para su padre: $\frac{x}{3}$ Le queda: $x-\frac{x}{3}=\frac{2x}{3}$

CD: $\frac{2}{5}\cdot\left(\frac{2x}{3}\right)=\frac{4x}{15}$ Le quedan 36 €.

La suma de todo lo que se gasta más lo que le queda es igual a la cantidad que tenía ahorrada.

$$\frac{x}{3}+\frac{4x}{15}+36=x$$

$$15\cdot\left(\frac{x}{3}+\frac{4x}{15}+36\right)=15x$$

$5x+4x+540=15x$

$5x+4x-15x=-540$

$-6x=-540$

$$x=\frac{540}{6}=90$$

Santiago había ahorrado 90 €.

26. $100-16-20-28=36$

Después de descontar los CD de Beethoven, Mozart y Verdi, quedan un 36 % de otros compositores.

Si llamamos x al número de CD que tiene Yasmina en su colección:

$$\frac{36}{100}x=9$$

$x=25$

Yasmina tiene 25 CD en su colección.

27. Llamamos x al tiempo que se tarda en llenar el depósito el segundo grifo. Entonces, la parte del depósito que se llena con cada grifo en una hora será:

Primer grifo : $\frac{1}{4}$ Segundo grifo: $\frac{1}{x}$

Con los dos grifos a la vez se llenará una parte igual a $\frac{1}{2{,}4}=\frac{10}{24}$ en una hora. Así: $\frac{1}{4}+\frac{1}{x}=\frac{10}{24}$

$$\frac{1}{x}=\frac{10}{24}-\frac{1}{4}=\frac{10}{24}-\frac{6}{24}=\frac{4}{24}=\frac{1}{6}$$

Con el segundo grifo tardará 6 horas en llenar el depósito.

28.

	Hace 2 años	Ahora	Dentro de 14 años
Edad del padre	$x-2$	x	$x+14$
Edad del hijo	$y-2$	y	$y+14$

$$\left.\begin{array}{l} x - 2 = 4(y - 2) \\ x + 14 = 2(y + 14) \end{array}\right\}$$

$x - 2 = 4y - 8 \rightarrow \quad x - 4y = -6$

$x + 14 = 2y + 28 \rightarrow \quad x - 2y = 14$

$-2y = -20 \rightarrow y = 10$

$x - 40 = -6 \rightarrow x = 34$

El padre tiene 34 años y el hijo, 10 años.

29. Operando llegamos a la ecuación de segundo grado: $x^2 + 7x - 11 = 0$, que tiene soluciones aproximadas $x_1 = -8{,}32$ y $x_2 = 1{,}32$

30. x = Precio del libro
y = Precio de la entrada al museo

$x + y + 9{,}70 = 30$

$2x = 5y$

$x + y = 20{,}30 \rightarrow 2x + 2y = 40{,}60$

$2x - 5y = 0 \rightarrow -2x + 5y = 0$

$7y = 40{,}60$

$$y = \frac{40{,}60}{7} = 5{,}80$$

$x = 30 - 5{,}80 - 9{,}70 = 14{,}50$

El libro costaba 14,50 € y la entrada al museo, 5,80 €.

31. $y = 40 + 20t$, donde y se expresa en € y t en horas.

32. Dimensiones originales: ancho = x; largo = x.
Dimensiones finales: ancho = $x + 12$; largo = $x + 20$.

$(x + 12) \cdot (x + 20) = 1\,140$

$x^2 + 20x + 12x + 240 = 1\,140$

$x^2 + 32x - 900 = 0$

Esta ecuación de segundo grado tiene como soluciones $x_1 = 18$ y $x_2 = -50$.

La segunda solución no tiene sentido, pues la distancia debe ser un número positivo. Por lo tanto, el lado del terreno original medía 18 m.

33. Si llamamos x e y a la longitud de los lados de la parcela rectangular, se cumple:

$$\left.\begin{array}{l} P = 2(x + y) = 56 \rightarrow y = 28 - x \\ d = \sqrt{x^2 + y^2} = 20 \end{array}\right\}$$

De aquí deducimos el valor de x e y.

$x^2 + (28 - x)^2 = 20^2$

$x^2 + 784 - 56x + x^2 - 400 = 0$

$2x^2 - 56x + 384 = 0$

$x^2 - 28x + 192 = 0$

Esta ecuación de segundo grado tiene como soluciones $x_1 = 12$ y $x_2 = 16$.

$x = 12 \rightarrow y = 28 - 12 = 16$

$x = 16 \rightarrow y = 28 - 16 = 12$

Las dos soluciones son equivalentes y los lados del rectángulo miden 12 m y 16 m.

Por lo tanto, el área de la parcela es:
$A = x \cdot y = 12 \cdot 16 = 192$ m^2

34. Llamamos x e y a la longitud de los lados del rectángulo.

$$\left.\begin{array}{l} A = x \cdot y = 16 \quad \rightarrow y = \dfrac{16}{x} \\ P = 2(x + y) = 16 \rightarrow y = 8 - x \end{array}\right\}$$

$\dfrac{16}{x} = 8 - x \qquad 16 = 8x - x^2 \qquad x^2 - 8x + 16 = 0$

Esta ecuación de segundo grado tiene una solución doble, $x = 4$.

$x = 4 \rightarrow y = \dfrac{16}{4} = 4$

Se trata de un cuadrado de lado 4 cm.

35. x = distancia recorrida en el primer tramo
y = distancia recorrida en el segundo tramo

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 7 \\ x^2 + y^2 = 5^2 \end{array}\right\}$$

$y = 7 - x$

$x^2 + (7 - x)^2 = 52$

$x^2 + 49 - 14x + x^2 = 25$

$2x^2 - 14x + 24 = 0$

$x^2 - 7x + 12 = 0$

Esta ecuación de segundo grado tiene dos soluciones, $x = 3$ y $x = 4$. Puesto que el enunciado dice que el primer tramo es más corto que el segundo, la solución correcta es $x = 3$.

$x = 3 \rightarrow y = 7 - 3 = 4$

Las distancias recorridas en el primer y segundo tramos son, respectivamente, 3 km y 4 km.

36. $a_1 = 4 \qquad a_2 = 7 \qquad a_3 = 10$

Observamos que el término general de la serie se puede expresar como $a_n = 3n + 1$ (para formar el primer cuadrado, se necesitan 4 palillos, y para formar cada uno de los siguientes, 3 palillos).

El décimo término de la serie es:

$a_{10} = 3 \cdot 10 + 1 = 31$

Por lo tanto, son necesarios 31 palillos.

37. $a_1 = 10$
$a_2 = 10 + 20$

$a_3 = 10 + 20 + 20$

$a_n = 10 + (n - 1) \cdot 20$

Se trata de una progresión aritmética de primer término 10 y diferencia 20.

Veamos cuál debe ser el valor de n para que la suma de los n primeros términos sea igual a 9 000.

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} = 9000$$

$$S_n = \frac{[10 + 10 + (n - 1)\ 20] \cdot n}{2} = 9000$$

$[5 + 5 + (n - 1) \cdot 10] \cdot n = 9\,000$

$(10 + 10n - 10) \cdot n = 9\,000$

$10n^2 = 9\,000$

$n^2 = 900 \quad \rightarrow \quad n = 30$

Sandra lleva ahorrando 30 meses (2 años y 6 meses).

38. a) 18,37; Error = |18,37 – 18,373| = 0,003

b) 8,09; Error = 0

c) 4,76; Error = |4,76 – 4,7558| = 0,0042

d) 0,21; Error = |0,21 – 0,213| = 0,003

e) 5,10; Error = |5,10 – 5,097| = 0,003

f) 2,15; Error = |2,15 – 2,151| = 0,001