MATEMÁTICAS ORIENTADAS A LAS ENSEÑANZAS ACADÉMICAS
3.º ESO

somoslink

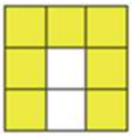
SOLUCIONES AL LIBRO DEL ALUMNO

Unidad 11. Movimientos en el plano

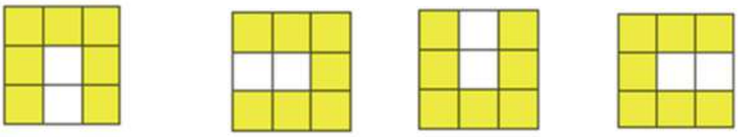
Unidad 11. Movimientos en el plano

SOLUCIONES PÁG. 237

1 ¿Cuáles de las figuras resultan al aplicar un movimiento a esta figura?



a. **b.** **c.** **d.**

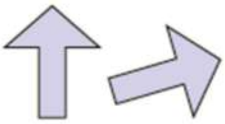


Las cuatro figuras se obtienen aplicando movimientos a la figura original. En todos los casos se conservan la forma y el tamaño.

2 Actividad resuelta.

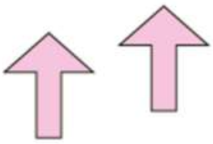
3 Observa las siguientes parejas de figuras e indica cómo se ha producido el movimiento:

a.



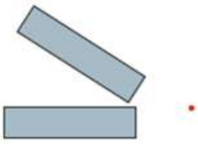
Se ha producido un giro.

b.



Se produce una traslación o una simetría.

4 Se realiza un movimiento como el de la figura sobre un rectángulo:

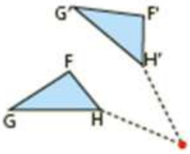


¿Cómo es el perímetro y el área del rectángulo transformado con respecto al del rectángulo original? Razona tu respuesta.

El perímetro es igual porque los movimientos conservan las distancias.
El área es igual por ser una isometría.

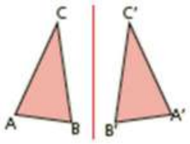
5 Indica cuál de estos movimientos es directo y cuál es inverso:

a.



Movimiento directo, ya que es un giro.

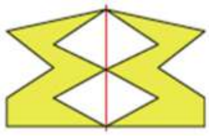
b.



Movimiento inverso, ya que es una simetría.

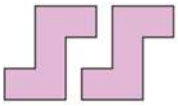
6 Indica qué puntos han quedado invariantes en estos movimientos:

a.



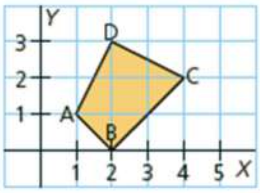
Los tres puntos que pertenecen a la figura y al eje.

b.

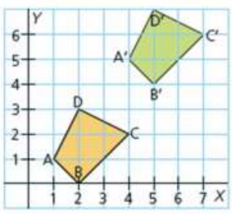


No hay puntos invariantes.

7 Dibuja en tu cuaderno unos ejes coordenados y traza el siguiente cuadrilátero:

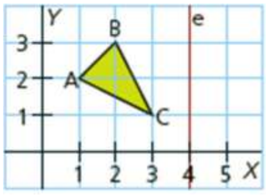


Muévelo tres unidades horizontalmente hacia la derecha y cuatro verticalmente hacia arriba.



a. ¿Ha cambiado la longitud de alguno de sus lados?
No ha cambiado la longitud de ninguno de sus lados.
b. ¿Y su área?
No ha cambiado su área.
c. ¿Hay algún punto que haya quedado invariante en este movimiento?
No, puesto que es una traslación.

8 **Dibuja en una hoja cuadriculada unos ejes coordenados y traza este triángulo con sus vértices y la recta:**



Dobla el papel por la recta y marca los vértices del triángulo para obtener los vértices del simétrico.

a. ¿Ha cambiado la longitud de alguno de sus lados?
No ha cambiado la longitud de ninguno de sus lados.

b. ¿Y su área?
No ha cambiado su área.

c. ¿Hay algún punto que haya quedado invariante en este movimiento?
No, puesto que ningún punto del triángulo está en el eje.

SOLUCIONES PÁG. 239

9 **Sean los puntos A (4 , 3), B (0 , –2) y C (–10 , 1). Calcula las coordenadas y el módulo de los siguientes vectores:**

a. $\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AB} = B - A = (0 , -2) - (4 , 3) = (-4 , -5)$

$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(-4)^2 + (-5)^2} = \sqrt{16 + 25} = \sqrt{41}$

b. $\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AC} = C - A = (-10 , 1) - (4 , 3) = (-14 , -2)$

$\left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{(-14)^2 + (-2)^2} = \sqrt{196 + 4} = 10\sqrt{2}$

c. $\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{BC} = C - B = (0 , -2) - (-10 , 1) = (10 , -3)$

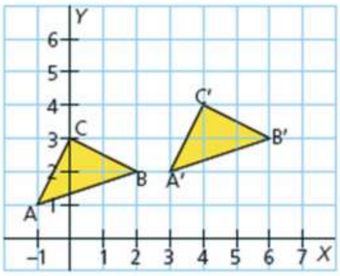
$\left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{(-10)^2 + 3^2} = \sqrt{100 + 9} = \sqrt{109}$

d. $\overrightarrow{CA}$

$\overrightarrow{CA} = A - C = (4 , 3) - (-10 , 1) = (14 , 2)$

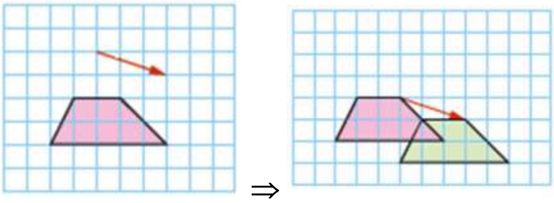
$\left|\overrightarrow{CA}\right| = \sqrt{14^2 + 2^2} = \sqrt{196 + 4} = 10\sqrt{2}$

10 **Dibuja en unos ejes coordenados el triángulo que tiene por vértices A (–1 , 1), B (2 , 2) y C (0 , 3) y realiza una traslación de vector $\vec{u}$ = (4 , 1).**

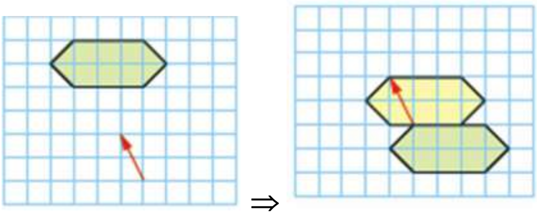


11 **Dibuja en tu cuaderno el resultado de realizar las siguientes traslaciones:**

a.



b.



12 **Escribe las coordenadas finales al realizar una traslación de vector $\vec{u}$ = (4 , –6) a los siguientes puntos:**

a. **A (3 , –1)**

A' = A + $\vec{u}$ ⇒ A' = (3 , –1) + (4 , –6) = (7 , –7) ⇒ A' = (7 , –7)

b. **B (6 , 2)**

B' = B + $\vec{u}$ ⇒ B' = (6 , 2) + (4 , –6) = (10 , –4) ⇒ B' = (10 , –4)

c. **C (–4 , 6)**

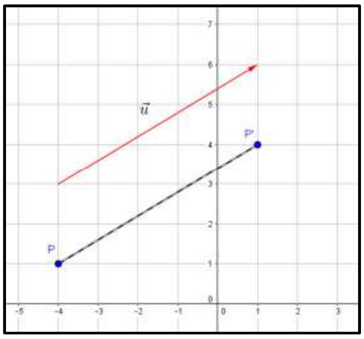
C' = C + $\vec{u}$ ⇒ C' = (–4 , 6) + (4 , –6) = (0 , 0) ⇒ C' = (0 , 0)

d. **D (0 , 0)**

D' = D + $\vec{u}$ ⇒ D' = (0 , 0) + (4 , –6) = (4 , –6) ⇒ D' = (4 , –6)

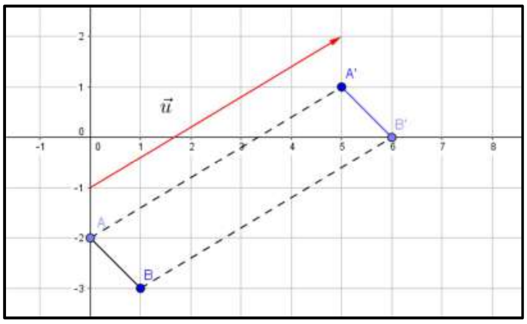
13 Realiza una traslación de vector $\vec{u}$ = (5 , 3) a estos elementos e indica las coordenadas de los puntos transformados:

a. El punto P (–4 , 1).



$P' = P + \vec{u} \Rightarrow P' = (-4 , 1) + (5 , 3) = (1 , 4) \Rightarrow P' (1 , 4)$

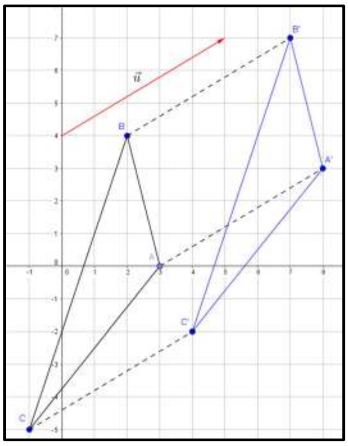
b. El segmento cuyos extremos son A (0 , –2) y B (1 , –3).



$A' = A + \vec{u} \Rightarrow A' = (0 , -2) + (5 , 3) = (5 , 1) \Rightarrow A' (5 , 1)$

$B' = B + \vec{u} \Rightarrow B' = (1 , -3) + (5 , 3) = (6 , 0) \Rightarrow B' (6 , 0)$

c. El triángulo de vértices A (3 , 0), B (2 , 4) y C (–1 , –5).



$A' = A + \vec{u} \Rightarrow A' = (3 , 0) + (5 , 3) = (8 , 3) \Rightarrow A' (8 , 3)$

$B' = B + \vec{u} \Rightarrow B' = (2 , 4) + (5 , 3) = (7 , 7) \Rightarrow B' (7 , 7)$

$C' = C + \vec{u} \Rightarrow C' = (-1 , -5) + (5 , 3) = (4 , -2) \Rightarrow C' (4 , -2)$

14 Actividad resuelta.

15 En la traslación de vector $\vec{u}$ = (–3 , –5) halla las coordenadas originales de los siguientes puntos transformados:

a. A’ (7 , 4)
$A' = A + \vec{u} \Rightarrow A = A' - \vec{u} = (7, 4) - (-3, -5) = (10, 9) \Rightarrow A = (10, 9)$

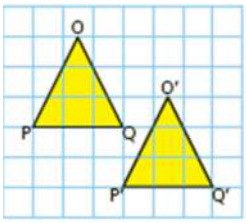
b. B’ (3 , –2)
$B' = B + \vec{u} \Rightarrow B = B' - \vec{u} = (3, -2) - (-3, -5) = (6, 3) \Rightarrow B = (6, 3)$

c. C’ (–3 , –5)
$C' = C + \vec{u} \Rightarrow C = C' - \vec{u} = (-3, -5) - (-3, -5) = (0, 0) \Rightarrow C = (0, 0)$

d. D’ (0 , 0)
$D' = D + \vec{u} \Rightarrow D = D' - \vec{u} = (0, 0) - (-3, -5) = (3, 5) \Rightarrow D = (3, 5)$

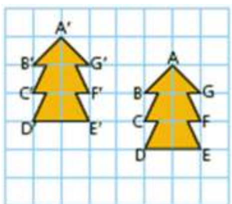
16 Halla el vector de traslación utilizado en estas figuras:

a.



Se cogen dos puntos, por ejemplo, P y P’, considerando que en P está el origen de coordenadas:
$P' = P + \vec{u} \Rightarrow \vec{u} = P' - P = (3, -2) - (0, 0) = (3, -2) \Rightarrow \vec{u}\ (3, -2)$

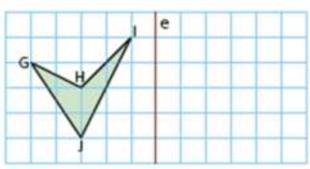
b.



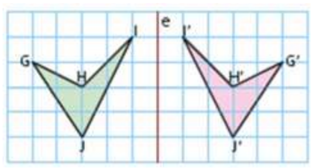
Se cogen dos puntos, por ejemplo A y A’, considerando que en A está el origen de coordenadas:
$A' = A + \vec{u} \Rightarrow \vec{u} = A' - A = (-4, 1) - (0, 0) = (-4, 1) \Rightarrow \vec{u}\ (-4, 1)$

SOLUCIONES PÁG. 241

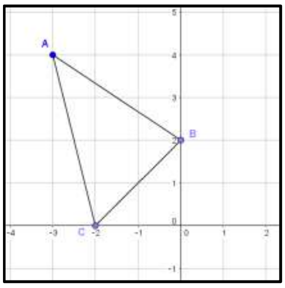
17 Dibuja en tu cuaderno la siguiente figura y traza la simetría con respecto al eje indicado:



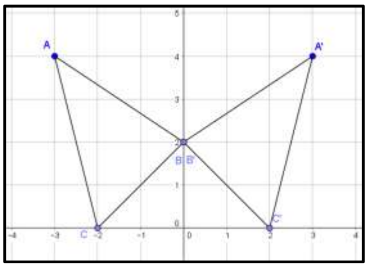
$\Rightarrow$



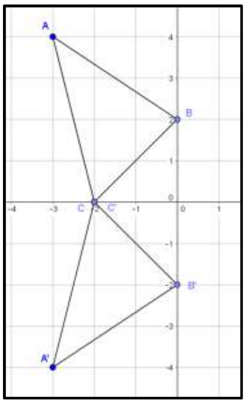
18 **Dibuja en tu cuaderno unos ejes coordenados y, sobre ellos, el triángulo de vértices A (–3 , 4), B (0 , 2) y C (–2 , 0).**



a. Realiza una simetría respecto del eje de ordenadas.



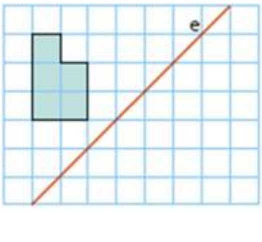
b. Realiza una simetría respecto del eje de abscisas.



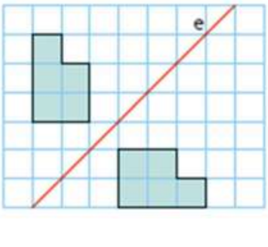
c. Indica los puntos invariantes en cada una de las simetrías anteriores.
El (0 , 2) en la primera simetría, y (–2 , 0) en la segunda simetría.

19 **Actividad resuelta.**

20 **Copia este dibujo en tu cuaderno y traza la simétrica a la figura dada según el eje indicado:**



$\Rightarrow$



21 Escribe las coordenadas de los homólogos de los puntos A (1 , 2), B (3 , 4), C (2 , 5) y D (1 , 3) que se forman al realizar una simetría con respecto:

a. Al eje de abscisas.

A’ = (x , $–y$) ⇒ A’ = (1 , –2)
B’ = (x , $–y$) ⇒ B’ = (3 , –4)
C’ = (x , $–y$) ⇒ C’ = (2 , –5)
D’ = (x , $–y$) ⇒ D’ = (1 , –3)

b. Al eje de ordenadas.

A’ = ($–x$, y) ⇒ A’ = (–1 , 2)
B’ = ($–x$, y) ⇒ B’ = (–3 , 4)
C’ = ($–x$, y) ⇒ C’ = (–2 , 5)
D’ = ($–x$, y) ⇒ D’ = (–1 , 3)

22 Escribe las coordenadas de los puntos originales de los que se obtienen los siguientes transformados al aplicar una simetría sobre el eje de ordenadas:

a. A’ (2 , 0)

Al aplicar una simetría sobre el eje de ordenadas, la coordenada x cambia de signo, por lo tanto: A (–2 , 0)

b. B’ (0 , –3)

Al aplicar una simetría sobre el eje de ordenadas, la coordenada x cambia de signo, por lo tanto: B (0 , –3)

c. C’ (–5 , –2)

Al aplicar una simetría sobre el eje de ordenadas, la coordenada x cambia de signo, por lo tanto: C (5 , –2)

d. D’ (–4 , 1)

Al aplicar una simetría sobre el eje de ordenadas, la coordenada x cambia de signo, por lo tanto: D (4 , 1)

23 Al realizar una simetría respecto del eje de ordenadas, las coordenadas de un punto homólogo son P’ (3 , –4).

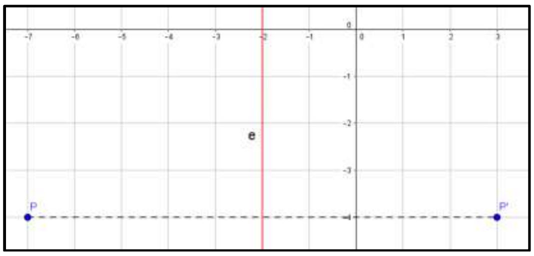
a. ¿Cuáles son las coordenadas del punto original?

Al aplicar una simetría sobre el eje de ordenadas, la coordenada x cambia de signo, por lo tanto: P (–3 , –4)

b. ¿Cuáles serían esas coordenadas si la simetría hubiese sido con respecto al eje de abscisas?

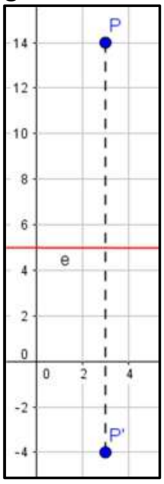
Al aplicar una simetría sobre el eje de abscisas, la coordenada y cambia de signo, por lo tanto: P (3 , 4)

c. ¿Y si hubiese sido en relación con la recta x = –2?



El eje, e, es la mediatriz del segmento $\overline{PP'}$. Las coordenadas son: P (–7 , –4)

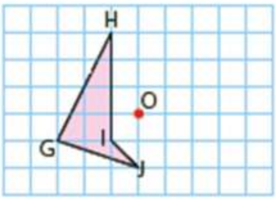
d. ¿Y si fuera respecto de la recta y = 5?



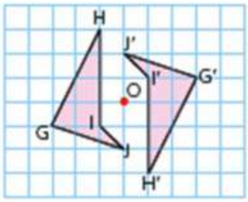
El eje, e, es la mediatriz del segmento $\overline{PP'}$. Las coordenadas son: P (3 , 14)

SOLUCIONES PÁG. 243

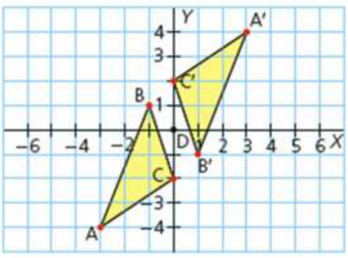
24 Dibuja en tu cuaderno la figura que resulta al aplicar una simetría central con respecto al punto O a la figura dada:



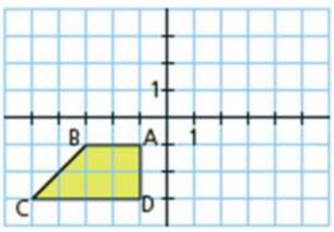
⇒



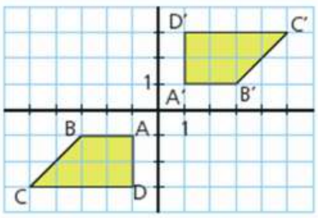
25 Dibuja en tu cuaderno unos ejes coordenados y, sobre ellos, el triángulo que tiene por vértices A (–3 , –4), B (–1 , 1) y C (0 , –2) y realiza una simetría con respecto al origen de coordenadas.



26 Copia este dibujo en tu cuaderno y realiza una simetría central con respecto al origen de coordenadas:



⇒



27 Escribe las coordenadas finales al realizar una simetría central con respecto al origen de coordenadas de los siguientes puntos:

a. A (4 , 2)
Al aplicar una simetría central con respecto al origen de coordenadas, el punto A (*x* , *y*) se transforma en el punto A' (–*x* , –*y*), por tanto: A' (–4 , –2)

b. B (–1 , 3)
Al aplicar una simetría central con respecto al origen de coordenadas, el punto B (*x* , *y*) se transforma en el punto B' (–*x* , –*y*), por tanto: B' (1 , –3)

c. C (3 , –8)
Al aplicar una simetría central con respecto al origen de coordenadas, el punto C (*x* , *y*) se transforma en el punto C' (–*x* , –*y*), por tanto: C' (–3 , 8)

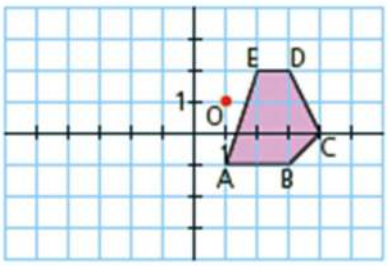
d. D (–6 , –5)
Al aplicar una simetría central con respecto al origen de coordenadas, el punto D (*x* , *y*) se transforma en el punto D' (–*x* , –*y*), por tanto: D' (6 , 5)

28 Encuentra una regla general para calcular las coordenadas del transformado de un punto, P (*x* , *y*) , en una simetría central con respecto al punto (2 , 3).

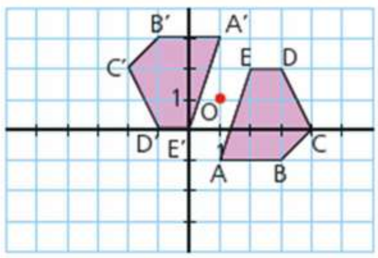
$$\mathrm{O}_x = \frac{P_x + P'_x}{2} \Rightarrow 2 = \frac{P_x + P'_x}{2} \Rightarrow P'_x = 4 - P_x$$

$$\mathrm{O}_y = \frac{P_y + P'_y}{2} \Rightarrow 3 = \frac{P_y + P'_y}{2} \Rightarrow P'_y = 6 - P_y$$

29 Copia este dibujo en tu cuaderno y realiza una simetría central con respecto al punto O:



$\Rightarrow$



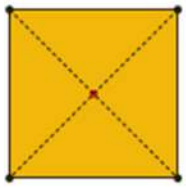
a. Escribe las coordenadas de los vértices obtenidos al realizar la simetría central de la figura.
A' (1 , 3), B' (–1 , 3), C' (–2 , 2), D' (–1 , 0) y E' (0 , 0)

b. Observa la relación que tienen las coordenadas de los puntos originales y transformados y obtén una regla general para calcular las coordenadas del transformado de un punto, P (*x* , *y*), en esta simetría central.
Nota: el punto medio de un segmento se obtiene como la semisuma de las coordenadas de los extremos.

$$\mathrm{O}_x = \frac{P_x + P'_x}{2} \Rightarrow 1 = \frac{P_x + P'_x}{2} \Rightarrow P'_x = 2 - P_x$$

$$\mathrm{O}_y = \frac{P_y + P'_y}{2} \Rightarrow 1 = \frac{P_y + P'_y}{2} \Rightarrow P'_y = 2 - P_y$$

30 **Las figuras globalmente invariantes son las que, al realizar la simetría central, quedan completamente invariantes, aunque en realidad casi ningún punto haya quedado invariante. Esto ocurre, por ejemplo, en esta figura:**



Investiga en qué polígonos regulares sucede esto y cuál sería el centro de simetría.
En los polígonos regulares con un número par de lados el centro de simetría coincide con el centro del polígono.

31 **Sea el segmento determinado por los puntos P (–1 , –2) y Q (–4 , –3). Averigua las coordenadas de los puntos transformados si se le aplica las siguientes simetrías:**

a. Respecto del origen de coordenadas.
Al aplicar una simetría central con respecto al origen de coordenadas, el punto P (*x* , *y*) se transforma en el punto P’ (–*x* , –*y*), por tanto, P’ (1 , 2). Así mismo, el punto Q (*x* , *y*) se transforma en el punto Q’ (–*x* , –*y*), por tanto, Q’ (4 , 3).

b. Respecto del punto O (3 , 7).

$$\mathrm{O}_x = \frac{P_x + P'_x}{2} \Rightarrow 3 = \frac{-1 + P'_x}{2} \Rightarrow P'_x = 6 + 1 = 7 \Rightarrow P'_x = 7$$

$$\mathrm{O}_y = \frac{P_y + P'_y}{2} \Rightarrow 7 = \frac{-2 + P'_y}{2} \Rightarrow P'_y = 14 + 2 = 16 \Rightarrow P'_y = 16$$

$$\mathrm{O}_x = \frac{Q_x + Q'_x}{2} \Rightarrow 3 = \frac{-4 + Q'_x}{2} \Rightarrow Q'_x = 6 + 4 = 10 \Rightarrow Q'_x = 10$$

$$\mathrm{O}_y = \frac{Q_y + Q'_y}{2} \Rightarrow 7 = \frac{-3 + Q'_y}{2} \Rightarrow Q'_y = 14 + 3 = 17 \Rightarrow Q'_y = 17$$

32 **Mediante una simetría cuyo centro es el origen de coordenadas se han obtenido los puntos indicados. Halla las coordenadas de los puntos originales.**

a. A’ (3 , 0)
Al aplicar una simetría central con respecto al origen de coordenadas, el punto A (*x* , *y*) se transforma en el punto A’ (–*x* , –*y*), por tanto, A (–3 , 0).

b. B’ (0 , –2)
Al aplicar una simetría central con respecto al origen de coordenadas, el punto B (*x* , *y*) se transforma en el punto B’ (–*x* , –*y*), por tanto, B (0 , 2).

c. C’ (–4 , –3)
Al aplicar una simetría central con respecto al origen de coordenadas, el punto C (*x* , *y*) se transforma en el punto C’ (–*x* , –*y*), por tanto, C (4 , 3).

d. D’ (–1 , 5)
Al aplicar una simetría central con respecto al origen de coordenadas, el punto D (*x* , *y*) se transforma en el punto D’ (–*x* , –*y*), por tanto, D (1 , –5).

33 Escribe las coordenadas de los puntos originales, a los que se les ha aplicado una simetría con respecto al punto O (3 , 3), si los puntos obtenidos son:

a. A' (0 , 0)

$$\mathrm{O}_x = \frac{A_x + A'_x}{2} \Rightarrow 3 = \frac{A_x + 0}{2} \Rightarrow A_x = 6 + 0 = 6 \Rightarrow A_x = 6$$

$$\mathrm{O}_y = \frac{A_y + A'_y}{2} \Rightarrow 3 = \frac{A_y + 0}{2} \Rightarrow A_y = 6 + 0 = 6 \Rightarrow A_y = 6$$

b. B' (3 , 1)

$$\mathrm{O}_x = \frac{B_x + B'_x}{2} \Rightarrow 3 = \frac{B_x + 3}{2} \Rightarrow B_x = 6 - 3 = 3 \Rightarrow B_x = 3$$

$$\mathrm{O}_y = \frac{B_y + B'_y}{2} \Rightarrow 3 = \frac{B_y + 1}{2} \Rightarrow B_y = 6 - 1 = 5 \Rightarrow B_y = 5$$

c. C' (–2 , 3)

$$\mathrm{O}_x = \frac{C_x + C'_x}{2} \Rightarrow 3 = \frac{C_x + (-2)}{2} \Rightarrow C_x = 6 + 2 = 8 \Rightarrow C_x = 8$$

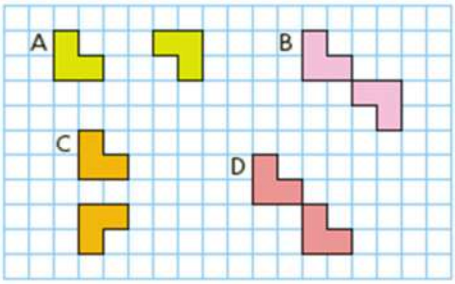
$$\mathrm{O}_y = \frac{C_y + C'_y}{2} \Rightarrow 3 = \frac{C_y + 3}{2} \Rightarrow C_y = 6 - 3 = 3 \Rightarrow C_y = 3$$

d. D' (5 , 6)

$$\mathrm{O}_x = \frac{D_x + D'_x}{2} \Rightarrow 3 = \frac{D_x + 5}{2} \Rightarrow D_x = 6 - 5 = 1 \Rightarrow D_x = 1$$

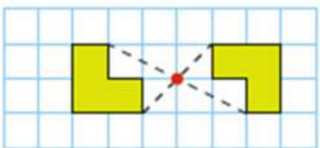
$$\mathrm{O}_y = \frac{D_y + D'_y}{2} \Rightarrow 3 = \frac{D_y + 6}{2} \Rightarrow D_y = 6 - 6 = 0 \Rightarrow D_y = 0$$

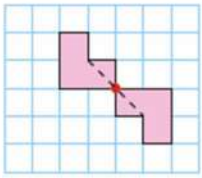
34 Estudia estas cuatro simetrías y responde a las cuestiones:

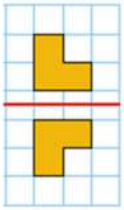


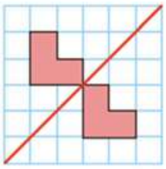
a. Indica cuáles son axiales y cuáles son centrales.
Figura A, central, figura B, central, figura C, axial, figura D, axial.

b. Dibuja las simetrías en un cuaderno y encuentra el eje o el centro de la simetría en cada caso.



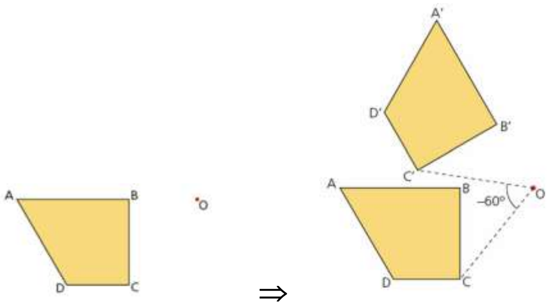






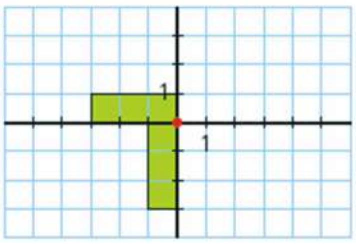
SOLUCIONES PÁG. 245

35 **Dibuja en tu cuaderno la siguiente figura y, ayudándote de un transportador de ángulos, rótala un ángulo de –60° con centro en el punto O:**

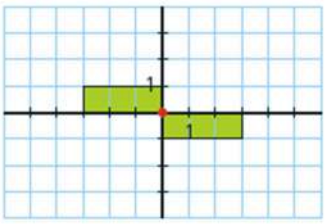


36 **Dibuja en tu cuaderno unos ejes coordenados y sobre ellos el rectángulo que tiene por vértices A (–3 , 0), B (–3 , 1), C (0 , 1) y D (0 , 0). Después, realiza los siguientes giros con centro en el origen de coordenadas:**

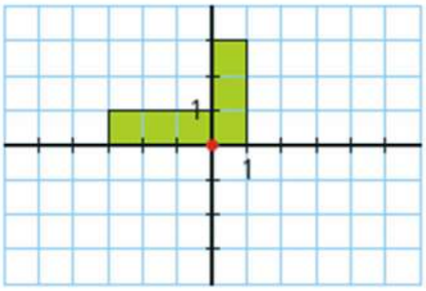
a. Ángulo de 90°.



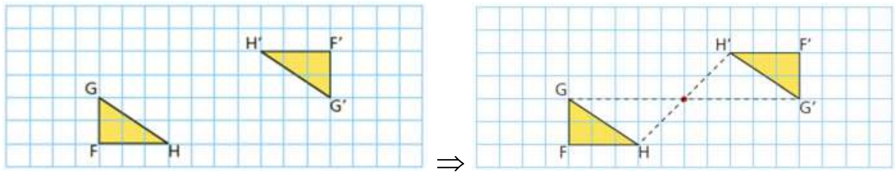
b. Ángulo de 180°.



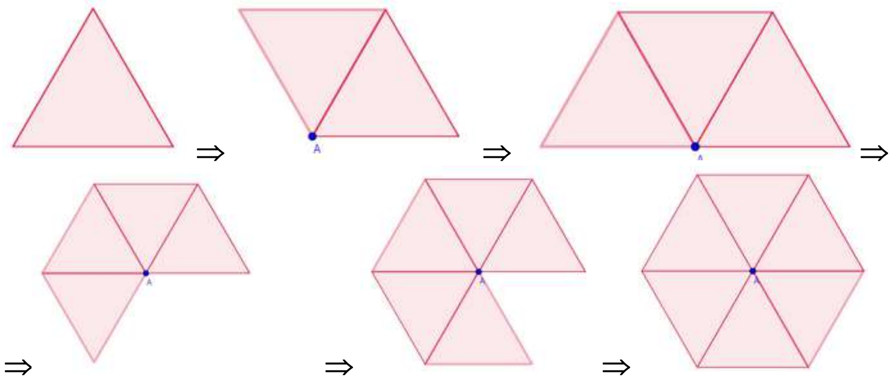
c. Ángulo de 270°.



37 Copia esta figura en tu cuaderno y encuentra el centro de giro que transforma un triángulo en el otro:

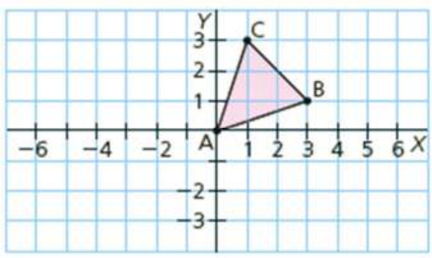


38 Dibuja un triángulo equilátero y gíralo 60º tomando como centro uno de sus vértices. Vuelve a girar 60º el triángulo obtenido, tomando el mismo vértice como centro. Reitera el proceso otras cuatro veces. ¿Cuál es el resultado final?



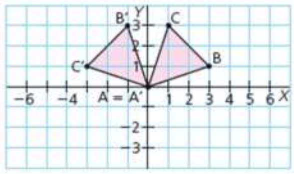
El triángulo después del sexto giro vuelve a su posición inicial.

39 Considera el vértice A como centro y rota la figura los siguientes ángulos:
a. 90° **b. 180°** **c. 270°** **d. 360°**

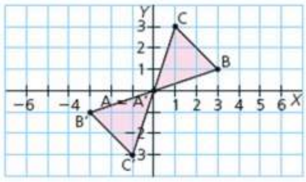


Indica las coordenadas de los vértices homólogos obtenidos en cada giro.

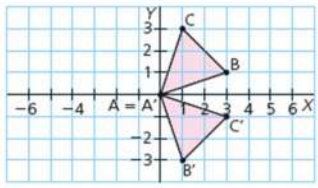
a.

 A’ (0 , 0), B’ (–1 , 3), C’ (–3 , 1)

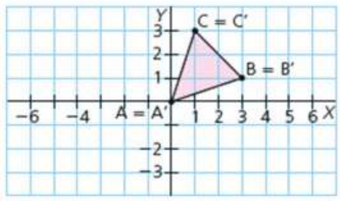
b.

 A’ (0 , 0), B’ (–3 , –1), C’ (–1 , –3)

c.

 A’ (0 , 0), B’ (1 , –3), C’ (3 , –1)

d.

 A’ (0 , 0), B’ (–1 , 3), C’ (–3 , 1)

40 Considera una circunferencia y contesta a estas preguntas:

a. ¿Qué punto debe tomarse como centro de giro para que, al realizar un giro sobre la circunferencia, esta quede invariante independientemente del ángulo girado?

El centro de la circunferencia.

b. Tomando como centro de giro un punto cualquiera de la circunferencia, ¿qué ángulo debe girarse para que la circunferencia original y la homóloga tengan un único punto en común?

Debe girarse 180°.

41 Traza una circunferencia en tu cuaderno. Aplícale un giro sobre cada uno de estos puntos:

a. En la circunferencia.

Respuesta abierta.

b. En el centro de la circunferencia.

Respuesta abierta.

c. En el exterior de la circunferencia.

Respuesta abierta.

¿En cuál de estos giros la circunferencia permanece invariante globalmente?

Cuando el centro de giro es el de la circunferencia.

42 Busca a tu alrededor algún logotipo que resulte de girar una figura, e inventa uno para tu clase.
Respuesta abierta.

43 Visualiza este vídeo:
https://www.youtube.com/watch?v=PTIEEKp2Tjo

a. ¿Qué figuras utilizaron los musulmanes para crear sus mosaicos nazaríes en la Alhambra?
Utilizaron polígonos regulares, el cuadrado y el triángulo equilátero fundamentalmente.

b. Descubre la técnica para confeccionarlos.
Utilizaron la técnica de la deformación de sus lados para obtener figuras que teselen el plano.

c. Elabora plantillas con cada una de las teselas que aparecen, y comprueba que recubren el plano.
Se pueden elaborar las plantillas del hueso, del avión y de la pajarita.

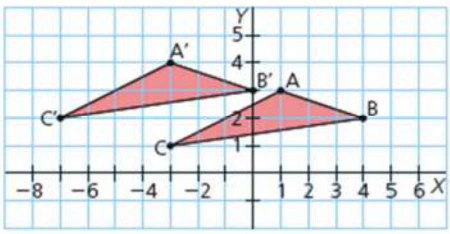
44 Partiendo del vértice de un polígono regular, se puede saber si este recubre el plano si, al girar un número exacto de veces completa una vuelta entera sobre dicho vértice.

a. Investiga que polígonos regulares pueden recubrir el plano.
El triángulo, el cuadrado y el hexágono.

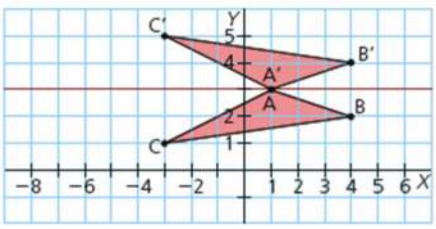
b. Analiza las conclusiones obtenidas y descríbelas en función del ángulo interno de los polígonos.
Con 6 triángulos equiláteros o girando un triángulo equilátero 6 veces alrededor de uno de sus vértices se recubre el plano. Con 4 cuadrados también y con 3 hexágonos.
Es decir, aquellos polígonos regulares cuyo ángulo interior sea divisor de 360º.

45 Realiza los siguientes movimientos sobre el triángulo que tiene por vértices A (1 , 3), B (4 , 2) y C (–3 , 1):

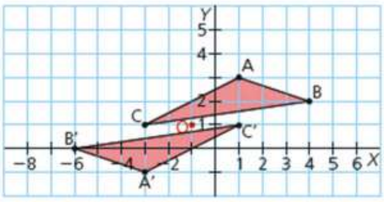
a. Una traslación de vector $\vec{u}$ (–4 , 1).



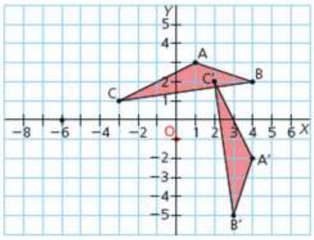
b. Una simetría de eje *y* = 3.



c. Una simetría de centro O (–1 , 1).



d. Un giro de centro C (0 , –1) y ángulo α = –85°.



SOLUCIONES PÁG. 247

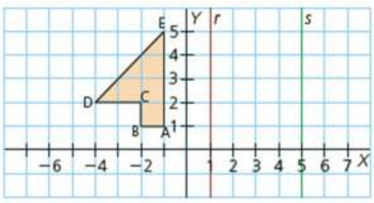
46 A una circunferencia de centro C (–3 , 4) se le aplica sucesivamente dos traslaciones, una de vector $\vec{u}$ = (2 , –3) y otra de vector $\vec{v}$ = (1 , –1).

a. ¿Cuáles son las coordenadas del homólogo del centro?
A'' = A + $\vec{u}$ + $\vec{v}$ ⇒ A'' = (–3 , 4) + (2 , –3) + (1 , –1) = (0 , 0) ⇒ A'' = (0 , 0)

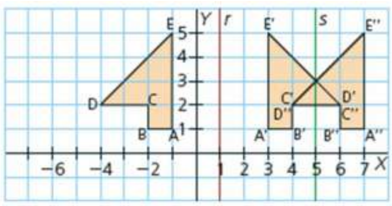
b. Si se modifica el orden de aplicación de las traslaciones, ¿varían las coordenadas del homólogo?
No, serán las mismas:
A'' = A + $\vec{v}$ + $\vec{u}$ ⇒ A'' = (–3 , 4) + (1 , –1) + (2 , –3) = (0 , 0) ⇒ A'' = (0 , 0)

c. ¿Existe una traslación equivalente a la composición de las dos anteriores? En caso afirmativo, indica cuál es.
Sí, la traslación de vector (3 , –4), que resulta de sumar los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$:
$\vec{u}$ + $\vec{v}$ = (2 , –3) + (1 , –1) = (3 , –4)
$\vec{v}$ + $\vec{u}$ = (1 , –1) + (2 , –3) = (3 , –4)

47 Dibuja en tu cuaderno el resultado de trazar las dos simetrías de la figura:

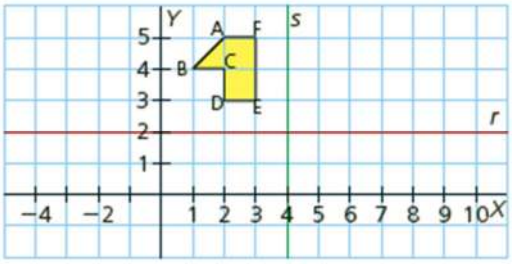


⇒

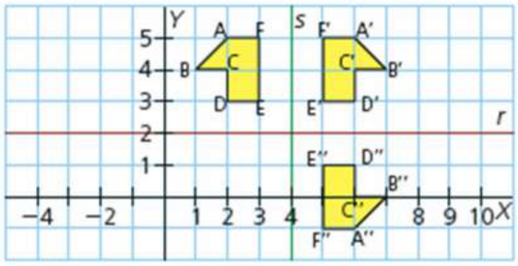


Indica otro movimiento análogo a esta composición.
Con una traslación de vector (8 , 0).

48 Dibuja en tu cuaderno el resultado de trazar las dos simetrías de la figura:



⇒



Indica otro movimiento análogo a esta composición.
Un giro de 180º con centro en (4 , 2) o una simetría de centro (4 , 2).

49 Halla las coordenadas de los puntos homólogos correspondientes a los vértices del triángulo A (3 , 4), B (4 , 1) y C (–2 , –1) al aplicarle una doble traslación de vectores:

a. $\vec{u}$ **= (4 , 1),** $\vec{v}$ **= (–3 , 0)**

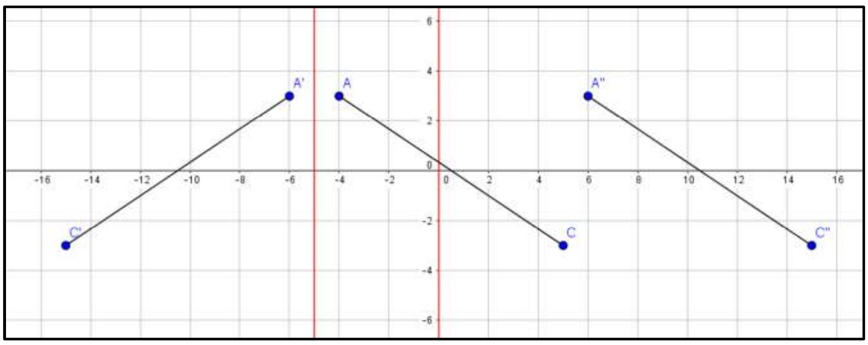
A'' = A + $\vec{u}$ + $\vec{v}$ = (3 , 4) + (4 , 1) + (–3 , 0) = (4 , 5) ⇒ A'' = (4 , 5)
B'' = B + $\vec{u}$ + $\vec{v}$ = (4 , 1) + (4 , 1) + (–3 , 0) = (5 , 2) ⇒ B'' = (5 , 2)
C'' = C + $\vec{u}$ + $\vec{v}$ = (–2 , –1) + (4 , 1) + (–3 , 0) = (–1 , 0) ⇒ C'' = (–1 , 0)

b. $\vec{u}$ **= (6 , 2),** $\vec{v}$ **= (–4 , –2)**

A'' = A + $\vec{u}$ + $\vec{v}$ = (3 , 4) + (6 , 2) + (–4 , –2) = (5 , 4) ⇒ A'' = (5 , 4)
B'' = B + $\vec{u}$ + $\vec{v}$ = (4 , 1) + (6 , 2) + (–4 , –2) = (6 , 1) ⇒ B'' = (6 , 1)
C'' = C + $\vec{u}$ + $\vec{v}$ = (–2 , –1) + (6 , 2) + (–4 , –2) = (0 , –1) ⇒ C'' = (0 , –1)

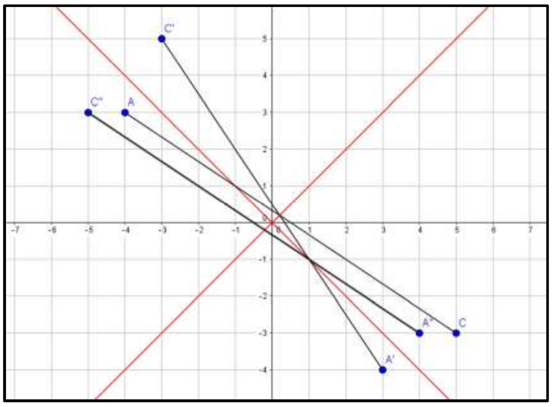
50 Halla las coordenadas de los puntos homólogos correspondientes a los vértices del segmento A (–4 , 3) y C (5 , –3) al aplicarle una doble simetría de ejes:

a. ***x* = –5, *x* = 0**



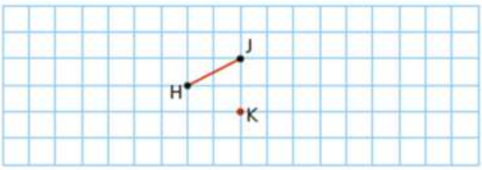
A'' = (6 , 3) y C'' = (15 , –3)

b. ***y* = *x*, *y* = –*x***

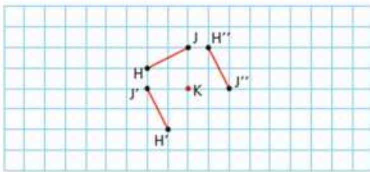


A'' (4 , –3) y C'' (–5 , 3)

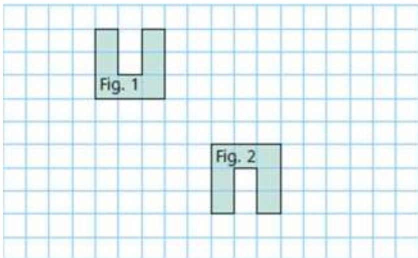
51 Dibuja en tu cuaderno el resultado de trazar de forma simultánea sobre la figura dos giros de amplitud 90° y 180°, respectivamente:

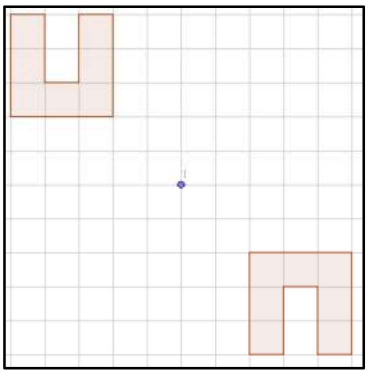


⇒

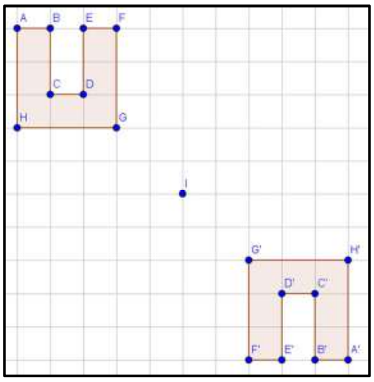


52 Encuentra dos movimientos diferentes que transformen la figura 1 en la figura 2.





Una simetría central.



Un giro de 180º.

SOLUCIONES PÁG 249

1 **¿Qué representa geométricamente el módulo de un vector?**
La longitud del vector.

2 **Si dos vectores están en la misma recta, pero tienen distinto sentido, ¿pueden ser equipolentes?**
No. Los vectores equipolentes tienen el mismo módulo, la misma dirección y el mismo sentido.

3 **¿Pueden ser equipolentes dos vectores que se encuentran en rectas perpendiculares? ¿Y si están en rectas paralelas?**
No, porque no tienen la misma dirección.
Sí, porque tienen la misma dirección y sentido y pueden tener el mismo módulo.

4 **Define qué son los puntos invariantes en un movimiento y da un ejemplo de ellos en cada uno de los movimientos estudiados.**
Un punto es invariante cuando su transformado por un movimiento coincide con él.

- En una traslación no existen puntos invariantes, salvo que el vector de traslación sea nulo y entonces todos los puntos son invariantes.
- En una simetría axial son invariantes todos los puntos que estén en el eje.
- En una simetría central el único punto invariante es el centro.
- En un giro el único punto invariante es el centro, salvo que la amplitud de giro sea 0º, 360º o un múltiplo y entonces el movimiento es la identidad y todos los puntos son invariantes.

5 **Explica la diferencia entre movimientos directos e inversos y clasifica según ese criterio cada uno de los movimientos.**
Un movimiento es directo cuando conserva la orientación de giro de los ángulos, e inverso cuando la invierte.
El único movimiento inverso es la simetría axial.

6 **¿Qué cumplen los vectores que son equipolentes entre sí?**
Que tienen igual dirección, módulo y sentido.

7 **¿A qué otro movimiento equivale un giro de 180° de amplitud?**
A una simetría central cuyo centro es el centro del giro.

8 **Explica cuál es el resultado de componer dos traslaciones de vectores $\vec{u} = (3 , 5)$ y $\vec{v} = (-2 , 4)$.**
Otra traslación de vector $\vec{u} + \vec{v} = (3 , 5) + (-2 , 4) = (1 , 9)$.

9 **Indica algún punto invariante en la traslación de vector (0 , 1).**
No hay ninguno.

10 **Indica algún punto invariante en un giro de centro el origen de coordenadas y ángulo α = 45°.**
El único punto invariante en un giro es su centro.

11 **Explica cuál es el resultado de componer dos simetrías que tienen por ejes, respectivamente, *y* = 1 e *y* = 4.**
Una traslación de vector (0 , 6).

12 **Indica algún punto invariante en la simetría respecto del eje de abscisas.**
Cualquier punto del eje de abscisas.

13 **Explica cuál es el resultado de componer dos simetrías que tienen por ejes, respectivamente, *y* = 0 e *x* = 0.**
Un giro de 180º con centro en el origen de coordenadas.

14 **Explica cuál es el resultado de componer dos giros, ambos con centro en P (1 , 2), y que tienen por ángulos α = 45° y β = 90°, respectivamente.**
Otro giro con el mismo centro y amplitud 135º.

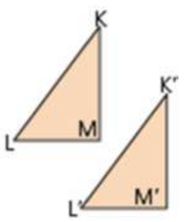
15 **Realiza una presentación a tus compañeros. Puedes hacer un documento PowerPoint, utilizar Glogster…**
Respuesta abierta.

SOLUCIONES PÁG. 250 - REPASO FINAL

MOVIMIENTOS EN EL PLANO

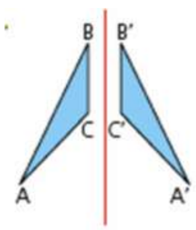
1 **Clasifica estos movimientos en simetrías, giros o traslaciones:**

a.



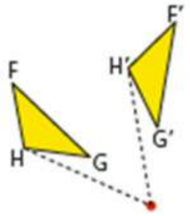
Traslación.

b.



Simetría.

c.



Giro.

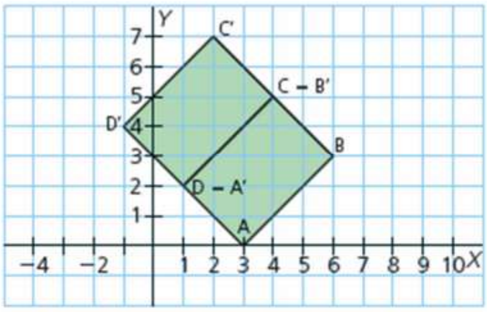
TRASLACIONES

2 **Indica las nuevas coordenadas del segmento cuyos extremos son P (4 , 6) y Q (2 , –1) al trasladarlo según el vector $\vec{u}$ = (2 , –3).**

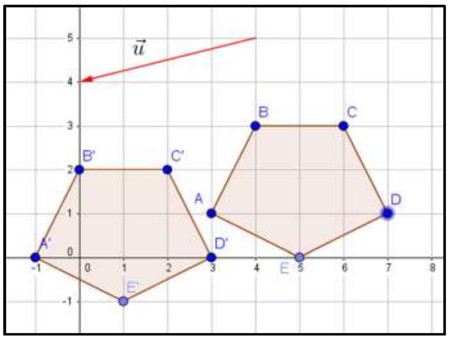
P' = P + $\vec{u}$ ⇒ P' = (4 , 6) + (2 , –3) = (6 , 3) ⇒ P' (6 , 3)

Q' = Q + $\vec{u}$ ⇒ Q' = (2 , –1) + (2 , –3) = (4 , –4) ⇒ Q' (4 , –4)

3 **Dibuja en tu cuaderno sobre unos ejes coordenados el rectángulo de vértices A (3 , 0), B (6 , 3), C (4 , 5) y D (1 , 2) y realiza una traslación de vector $\vec{u}$ = (–2 , 2).**



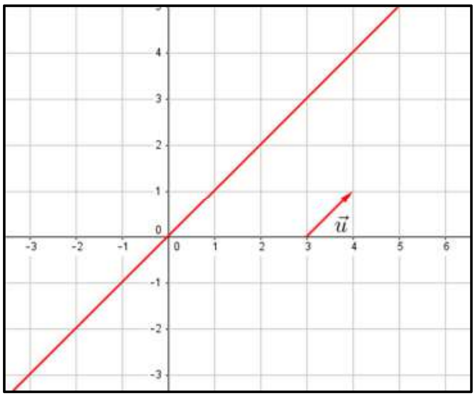
4 **Utiliza el programa GeoGebra para realizar una traslación del pentágono que tiene por vértices A (3 , 1), B (4 , 3), C (6 , 3), D (7 , 1) y E (5 , 0) con un vector de traslación $\vec{u}$ = (–4 , –1).**



5 **Considera una traslación de vector $\vec{u}$ = (1 , 1).**

a. **¿Puedes indicar alguna figura que permanezca invariante?**
Ninguna figura permanece invariante con el vector.

b. Dibuja en tu cuaderno la recta *y* = *x*, bisectriz del primer cuadrante, y trasládala según el vector indicado. ¿Tiene algún punto invariante? ¿Y la recta de forma conjunta?



No, todos los puntos se trasladan. La recta permanece invariante globalmente.

6 Al aplicar una traslación de vector $\vec{u}$ = (–3 , –5), se obtienen como puntos homólogos:

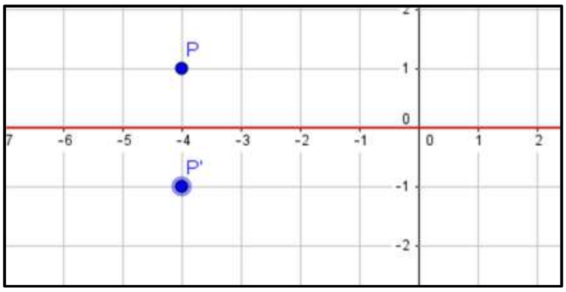
a. A' (0 , 3) b. B' (2 , 4) c. C' (–3 , 6) d. D' (5 , –4)
Halla sus correspondientes puntos originales.

a. A' = A + $\vec{u}$ ⇒ A = A' – $\vec{u}$ = (0 , 3) – (–3 , –5) = (3 , 8) ⇒ A = (3 , 8)
b. B' = B + $\vec{u}$ ⇒ B = B' – $\vec{u}$ = (2 , 4) – (–3 , –5) = (5 , 9) ⇒ B = (5 , 9)
c. C' = C + $\vec{u}$ ⇒ C = C' – $\vec{u}$ = (–3 , 6) – (–3 , –5) = (0 , 11) ⇒ C = (0 , 11)
d. D' = D + $\vec{u}$ ⇒ D = D' – $\vec{u}$ = (5 , –4) – (–3 , –5) = (8 , 1) ⇒ D = (8 , 1)

SIMETRÍAS

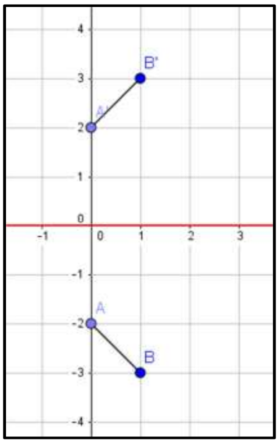
7 Realiza una simetría axial sobre el eje de abscisas a estos elementos e indica las coordenadas de los puntos transformados:

a. El punto P (–4 , 1).



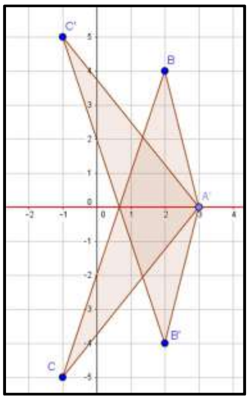
P' (–4 , –1)

b. **El segmento cuyos extremos son A (0 , –2) y B (1 , –3).**



A’ (0 , 2) y B’ (1 , 3)

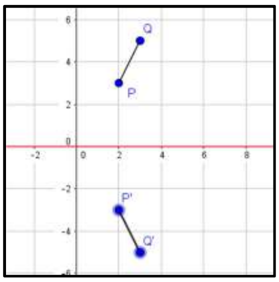
c. **El triángulo que tiene por vértices A (3 , 0), B (2 , 4) y C (–1 , –5).**



A’ (3 , 0), B’ (2 , –4) y C’ (–1 , 5)

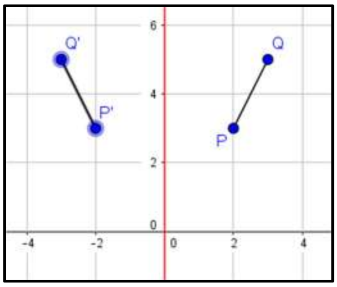
8 **Escribe las coordenadas del transformado de los extremos P (2 , 3) y Q (3 , 5) de un segmento según las siguientes simetrías:**

a. **Respecto del eje de abscisas.**



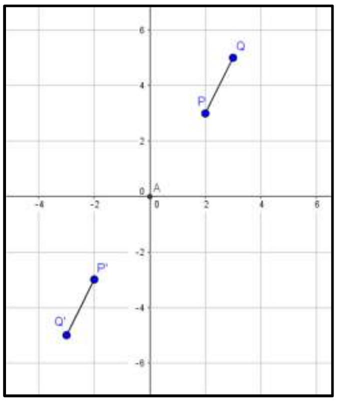
P’ (2 , –3) y Q’ (3 , –5)

b. Respecto del eje de ordenadas.



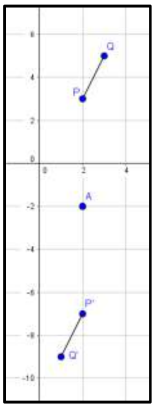
P' (–2 , 3) y Q' (–3 , 5)

c. Respecto al origen de coordenadas.



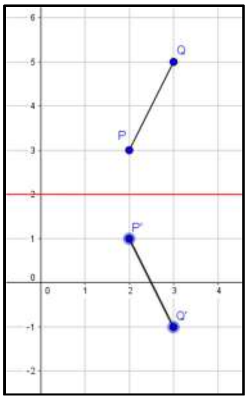
P' (–2 , –3) y Q' (–3 , –5)

d. Respecto del punto A (2 , –2).



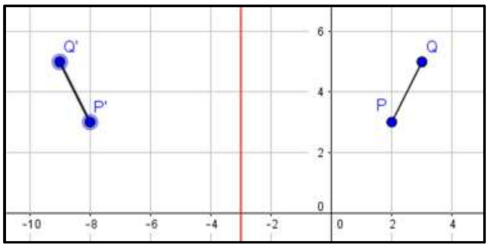
P' (2 , –7) y Q' (1 , –9)

e. Respecto del eje *y* = 2.



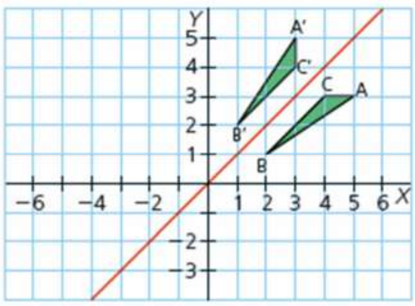
P’ (2 , 1) y Q’ (3 , –1)

f. Respecto del eje *x* = –3.



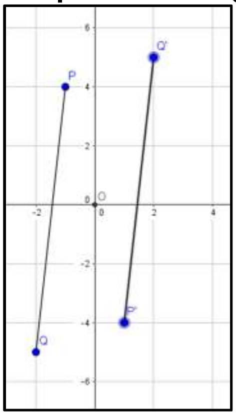
P’ (–8 , 3) y Q’ (–9 , 5)

9 **Dibuja en tu cuaderno unos ejes coordenados y sobre ellos el triángulo que tiene por vértices A (5 , 3), B (2 , 1) y C (4 , 3) y realiza una simetría con respecto a la bisectriz del primer cuadrante.**



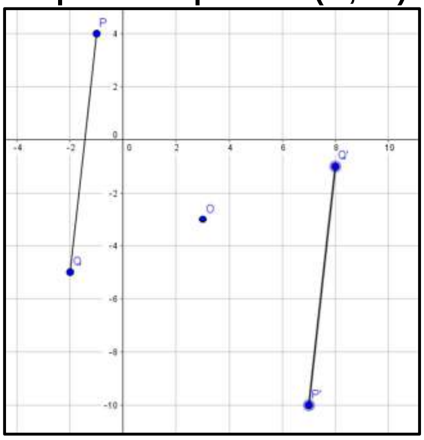
10 Escribe las coordenadas del segmento transformado cuyos extremos son P (–1 , 4) y Q (–2 , –5) según las siguientes simetrías:

a. Respecto del origen de coordenadas.



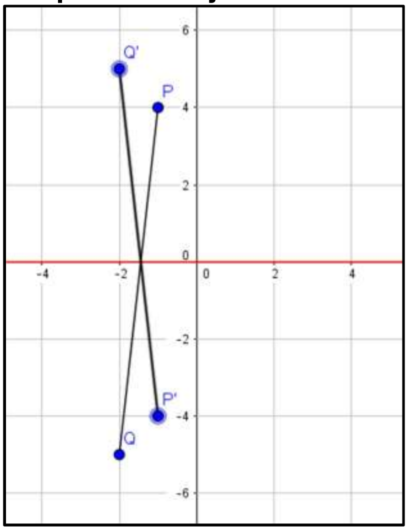
P’ (1 , –4) y Q’ (2 , 5)

b. Respecto del punto O (3 , –3).



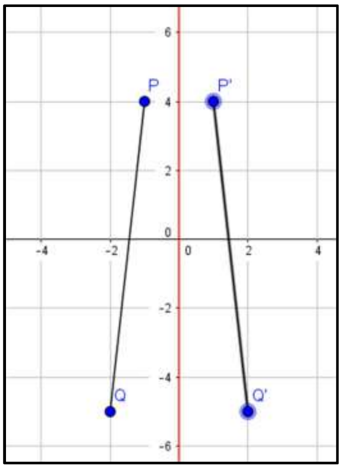
P’ (7 , –10) y Q’ (8 , –1)

c. Respecto del eje de abscisas.



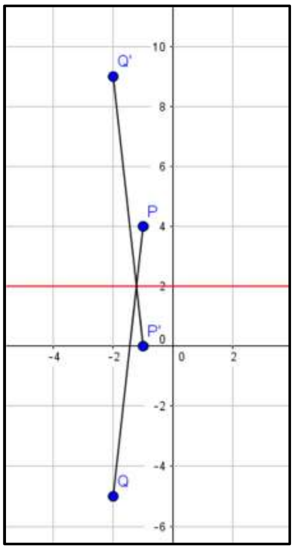
P’ (–1 , –4) y Q’ (–2 , 5)

d. Respecto del eje de ordenadas.



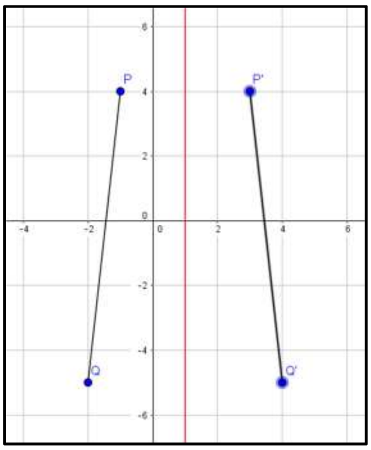
P' (1 , 4) y Q' (2 , –5)

e. Respecto del eje *y* = 2.



P' (–1 , 0) y Q' (–2 , 9)

f. Respecto del eje *x* = 1.



P' (3 , 4) y Q' (4 , –5)

11 Escribe las coordenadas de los puntos originales de los que se obtienen los siguientes transformados al aplicar una simetría respecto del origen de coordenadas:

a. A’ (1 , 2)
Al aplicar una simetría central con respecto al origen de coordenadas, el punto A (*x* , *y*) se transforma en el punto A’ (–*x* , –*y*), por tanto, A (–1 , –2).

b. B’ (4 , 0)
Al aplicar una simetría central con respecto al origen de coordenadas, el punto B (*x* , *y*) se transforma en el punto B’ (–*x* , –*y*), por tanto, B (–4 , 0).

c. C’ (3 , –5)
Al aplicar una simetría central con respecto al origen de coordenadas, el punto C (*x* , *y*) se transforma en el punto C’ (–*x* , –*y*), por tanto, C (–3 , 5).

d. D’ (0 , –4)
Al aplicar una simetría central con respecto al origen de coordenadas, el punto D (*x* , *y*) se transforma en el punto D’ (–*x* , –*y*), por tanto, D (0 , 4).

12 Escribe las coordenadas de los puntos originales de los que se obtienen los siguientes transformados al aplicar una simetría respecto del punto P (2 , 6):

a. A’ (1 , 2)

$$\mathrm{O}_x = \frac{A_x + A'_x}{2} \Rightarrow 2 = \frac{A_x + 1}{2} \Rightarrow A_x = 4 - 1 = 3 \Rightarrow A_x = 3$$

$$\mathrm{O}_y = \frac{A_y + A'_y}{2} \Rightarrow 6 = \frac{A_y + 2}{2} \Rightarrow A_y = 12 - 2 = 10 \Rightarrow A_y = 10$$

b. B’ (4 , 0)

$$\mathrm{O}_x = \frac{B_x + B'_x}{2} \Rightarrow 2 = \frac{B_x + 4}{2} \Rightarrow B_x = 4 - 4 = 0 \Rightarrow B_x = 0$$

$$\mathrm{O}_y = \frac{B_y + B'_y}{2} \Rightarrow 6 = \frac{B_y + 0}{2} \Rightarrow B_y = 12 - 0 = 12 \Rightarrow B_y = 12$$

c. C’ (3 , –5)

$$\mathrm{O}_x = \frac{C_x + C'_x}{2} \Rightarrow 2 = \frac{C_x + 3}{2} \Rightarrow C_x = 4 - 3 = 1 \Rightarrow C_x = 1$$

$$\mathrm{O}_y = \frac{C_y + C'_y}{2} \Rightarrow 6 = \frac{C_y + (-5)}{2} \Rightarrow C_y = 12 + 5 = 17 \Rightarrow C_y = 17$$

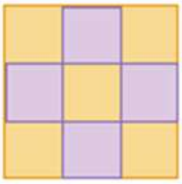
d. D’ (0 , –4)

$$\mathrm{O}_x = \frac{D_x + D'_x}{2} \Rightarrow 2 = \frac{D_x + 0}{2} \Rightarrow D_x = 4 - 0 = 4 \Rightarrow D_x = 4$$

$$\mathrm{O}_y = \frac{D_y + D'_y}{2} \Rightarrow 6 = \frac{D_y + (-4)}{2} \Rightarrow D_y = 12 + 4 = 16 \Rightarrow D_y = 16$$

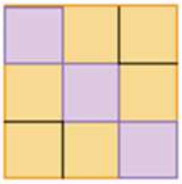
13 Al igual que con los ejes de simetría, algunas figuras poseen centros de simetría que las dejan globalmente invariantes. Analiza cuál de estas figuras posee centros de simetría que las dejen globalmente invariantes.

a.



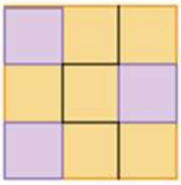
Tiene centro de simetría en su centro geométrico.

b.



Tiene centro de simetría en su centro geométrico.

c.

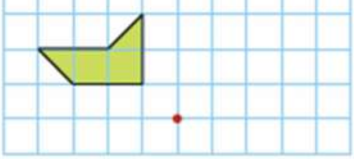
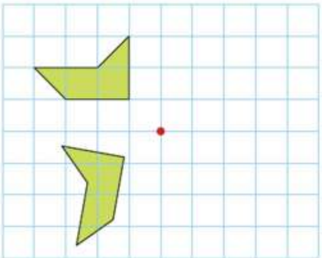


No tiene centro de simetría.

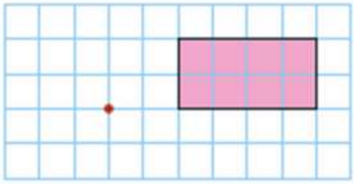
SOLUCIONES PÁG. 251

GIROS

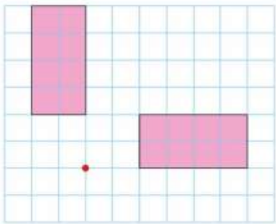
14 Copia en tu cuaderno este dibujo y, con la ayuda de un transportador de ángulos, realiza un giro de 80° respecto del centro indicado:

 ⇒ 

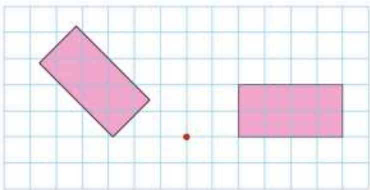
15 **Copia el dibujo en tu cuaderno y, sin emplear el transportador de ángulos, realiza un giro respecto del centro indicado de:**



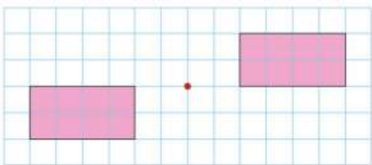
a. 90º



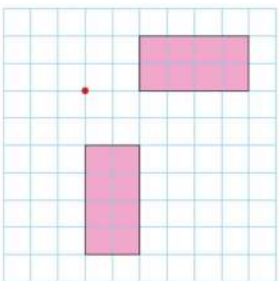
b. 135°



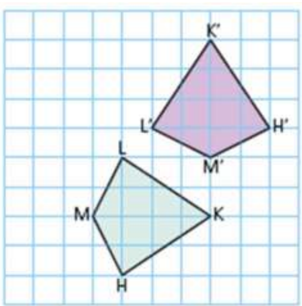
c. 180°



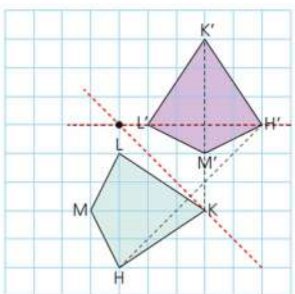
d. 270°



16 **Encuentra el centro de este giro:**



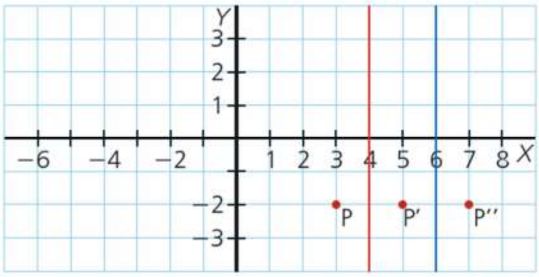
⇒



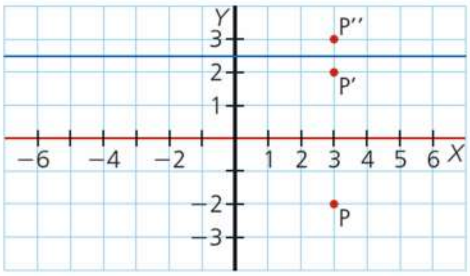
COMPOSICIÓN DE MOVIMIENTOS

17 Dibuja dos simetrías que transformen el punto P (3 , –2) en el mismo homólogo que resultaría si le aplicara una traslación de vector:

a. $\vec{u}$ = (4 , 0)



b. $\vec{v}$ = (0 , 5)

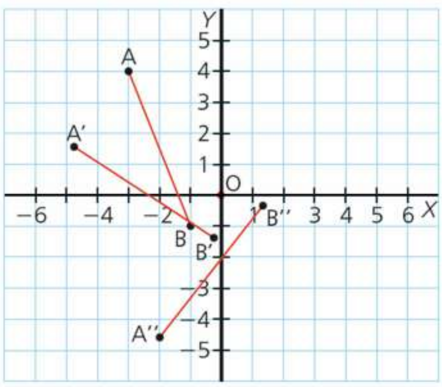


18 A un segmento que tiene por extremos A (–3 , 4) y B (–1 , –1) se le aplican sucesivamente dos giros, uno de 35° y otro de 85° de amplitud.

a. Define un movimiento que produzca el mismo resultado que ambos giros.
Un giro del mismo centro y amplitud la suma de las dos amplitudes: 35º + 85º = 120º.

b. Si se modifica el orden de aplicación de los giros, ¿variarán los homólogos finales?
No, ya que la suma cumple la propiedad conmutativa:
35º + 85º = 85º + 35º = 120º

c. Comprueba los resultados con el programa GeoGebra.



EVALUCIÓN

1 **¿Cuál es el vector que forman los puntos A (–1 , 3) y B (5 , –2)?**
a. (–3 , –5) **b. (–6 , –5)** c. (6 , –5) **d. (6 , 5)**

$\overrightarrow{AB}$ = B – A = (5 , –2) – (–1 , 3) = (6 , –5)

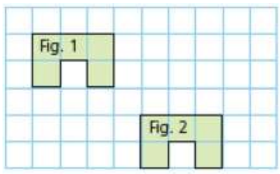
2 **Las coordenadas del homólogo del punto P (3 , 5) al transformarse por una traslación de vector $\vec{u}$ = (4 , –3) son:**
a. (–1 , 2) b. (7 , 2) **c. (1 , –8)** **d. (7 , 8)**

P' = P + $\vec{u}$ $\Rightarrow$ P' = (3 , 5) + (4 , –3) = (7 , 2) $\Rightarrow$ P' = (7 , 2)

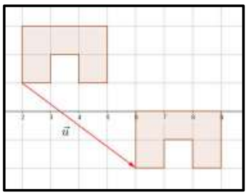
3 **Las coordenadas del homólogo del punto P (4 , –7) al transformarse por una simetría respecto del eje de ordenadas son:**
a. (–4 , 7) **b. (4 , –7)** **c. (4 , 7)** d. (–4 , –7)

P' (–*x* , *y*) = P' (–4 , –7)

4 **Las coordenadas del vector de la traslación que transforma la figura 1 en la figura 2 son:**



a. (4 , –3) **b. (–4 , 3)** **c. (4 , 3)** **d. (–4 , –3)**



5 **Las coordenadas del homólogo del punto P (6 , 3) al transformarse por una simetría central respecto del punto P (1 , 2) son:**

a. (–6 , –3) b. (–4 , 1) **c. (3 , 2)** **d. (0 , 0)**

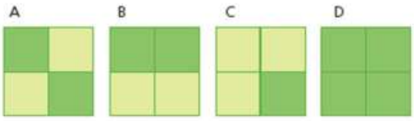
$$O_x = \frac{P_x + P'_x}{2} \Rightarrow 1 = \frac{6 + P'_x}{2} \Rightarrow P'_x = 2 - 6 = -4 \Rightarrow P'_x = -4$$

$$O_y = \frac{P_y + P'_y}{2} \Rightarrow 2 = \frac{3 + P'_y}{2} \Rightarrow P'_y = 4 - 3 = 1 \Rightarrow P'_y = 1$$

6 **Al aplicar dos traslaciones sucesivas sobre una figura, esta ha quedado invariante; indica cuál de estos pares de vectores definen esas dos traslaciones:**
a. (6 , 2) y (1 , 1) **c. (–4 , 1) y (–4 , 1)**
b. (1 , 3) y (–1, –3) **d. (2 , –3) y (–3 , 2)**

Para que la figura quede invariante los vectores deben tener el mismo módulo, la misma dirección, pero sentido contrario.

7 ¿Cuál de estas figuras tiene únicamente dos ejes de simetría?



a. A **b. B** **c. C** **d. D**