MATEMÁTICAS ORIENTADAS A LAS ENSEÑANZAS APLICADAS
3.º ESO

somoslink

SOLUCIONES AL LIBRO DEL ALUMNO

UNIDAD 7. FUNCIONES

Unidad 7. Funciones

SOLUCIONES PÁG. 149

1 En un cine, la entrada cuesta 9,20 por persona.

a. Determina si esta relación es una función.
La relación entre las dos variables es una función, ya que a cada número de personas se le asigna un precio.

b. En caso afirmativo, ¿cuál es la variable independiente? ¿Y la variable dependiente?
La variable independiente es el número de personas, y la variable dependiente, el coste de las entradas.

c. ¿Cuánto ha de pagar un grupo de 10 amigos por asistir al cine? ¿Cuánto tienen que pagar 5 personas?
Si asisten 10 personas, pagarán 92 €, mientras que, si asisten 5 personas, pagarán 46 €.

d. Si un grupo ha pagado 184 €, ¿cuántas personas han asistido?
Si se han pagado 184 €, entonces han asistido 20 personas.

e. ¿Cuántas entradas se pueden comprar con 138 €?
Con 138 € se pueden comprar 15 entradas.

2 Determina cuáles de las siguientes relaciones entre magnitudes son funciones e indica, en caso de que lo sean, cuál es la variable dependiente y cuál la independiente:

a. Un número natural y su raíz cuadrada.
No es una función, pues un número natural tiene dos raíces, una positiva y otra negativa.

b. El espacio recorrido por un automóvil que circula a una velocidad constante de 60 km/h y las horas que dura el trayecto.
Sí es una función; la variable independiente es el tiempo, expresado en horas, y la variable dependiente, el espacio recorrido, expresado en kilómetros.

c. El número de obreros que trabajan en una obra y el tiempo que emplean en realizarla.
Sí es una función; la variable independiente es el número de obreros, y la variable dependiente, el tiempo que tardan en realizar la obra.

d. La temperatura de una localidad y el número de habitantes de esta.
No es una función; no existe ninguna relación entre las magnitudes.

3 Escribe tres relaciones que sean funciones y otras tres que no lo sean.

Son ejemplos de funciones:

La relación entre la longitud de una circunferencia y su radio.

La relación entre el consumo de gasolina de un vehículo y el número de kilómetros que recorre.

La relación entre los intereses que produce un depósito bancario a un tipo fijo y la cantidad de dinero que proporciona el depósito.

No son funciones:

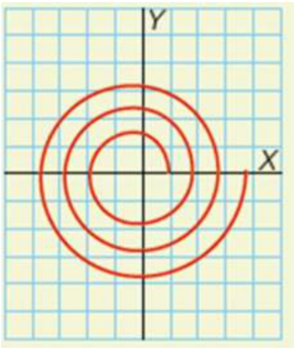
La relación entre las estaturas de las personas y sus pesos.

La relación entre la edad y el peso.

La relación entre la temperatura media de una localidad y el número de personas que la habitan.

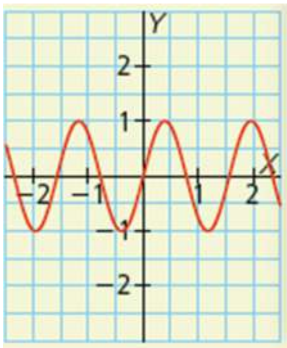
4 Dadas las siguientes curvas, determina cuáles son gráficas de funciones:

a.



No es la gráfica de una función ya que para un mismo valor de la variable *x* existen varios valores de la variable *y.*

b.



Sí es la gráfica de una función ya que para un valor de la variable *x* sólo existe un valor de la variable *y*.

5 Dada la función f (x) = x^2 – 5x, calcula:

a. f (0)
$f(0) = 0^2 - 5 \cdot 0 = 0$

b. f (1)
$f(1) = 1^2 - 5 \cdot 1 = -4$

c. f (3)
$f(3) = 3^2 - 5 \cdot 3 = -6$

d. f (–1)
$f(-1) = (-1)^2 - 5 \cdot (-1) = 6$

e. f (–2)
$f(-2) = (-2)^2 - 5 \cdot (-2) = 14$

f. f (–3)
$f(-3) = (-3^2) - 5 \cdot (-3) = 24$

6 Actividad resuelta.

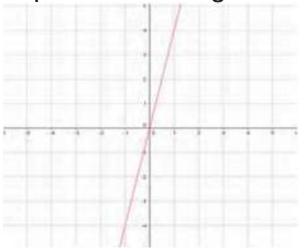
7 Construye la tabla de valores y dibuja la gráfica de las siguientes funciones:

a. $y = 4x$

Tabla de valores:

x	–2	–1	0	1	2
y	–8	–4	0	4	8

Representación gráfica:

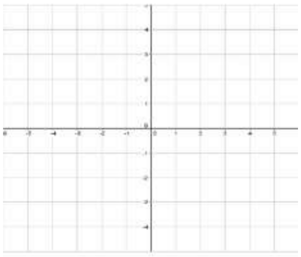


b. $y = 4$

Tabla de valores:

x	–2	–1	0	1	2
y	4	4	4	4	4

Representación gráfica:

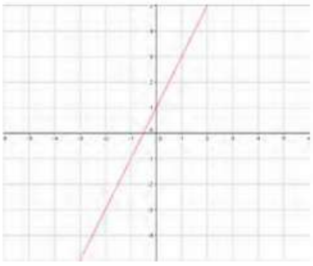


c. $y = 2x + 1$

Tabla de valores:

x	–2	–1	0	1	2
y	–3	–1	1	3	5

Representación gráfica:

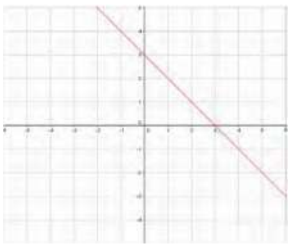


d. $y = –x + 3$

Tabla de valores:

x	–2	–1	0	1	2
y	5	4	3	2	1

Representación gráfica:



8 Halla la expresión algebraica que define las siguientes funciones:

a. La relación que asocia a cada número su cuadrado.
$y = x^2$

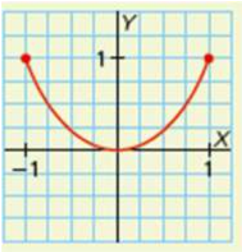
b. La relación que asocia a cada número el doble de su cubo.
$y = 2x^3$

c. El coste de cierta cantidad de naranjas (expresado en kg) cuyo precio es de 0,80 €/kg.
$y = 0{,}80 \cdot x$

SOLUCIONES PÁG. 150

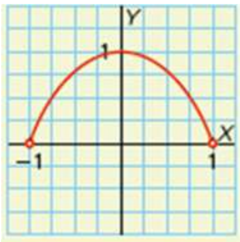
9 Calcula el dominio y el recorrido de las funciones definidas por las siguientes gráficas:

a.



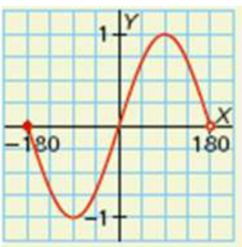
Dom (f) = [–1 , 1]; Rec (f) = [0 , 1]

b.



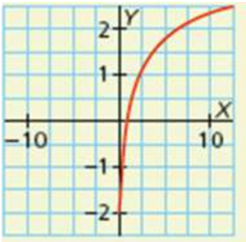
Dom (f) = (–1 , 1); Rec (f) = [0 , 1]

c.



Dom (f) = [–180 , 180); Rec (f) = [–1 , 1]

d.



Dom (f) = (0 , +∞); Rec (f) = (–∞, +∞)

10 Determina si los siguientes valores de *x* pertenecen al dominio de la función f (*x*) = $\sqrt{x-5}$:

a. *x* = 0
f (0) = $\sqrt{0-5}=\sqrt{-5}$. No existe, luego 0 no pertenece al dominio de la función.

b. *x* = 1
f (1) = $\sqrt{1-5}=\sqrt{-4}$. No existe, luego 1 no pertenece al dominio de la función.

c. *x* = 3
f (3) = $\sqrt{3-5}=\sqrt{-2}$. No existe, luego 2 no pertenece al dominio de la función.

d. *x* = 4
f (4) = $\sqrt{4-5}=\sqrt{-1}$. No existe, luego 4 no pertenece al dominio de la función.

e. *x* = 9
f (9) = $\sqrt{9-5}=\sqrt{4}$. Existe, luego 9 sí pertenece al dominio de la función.

f. *x* = 21
f (21) = $\sqrt{21-5}=\sqrt{16}=4$. Existe, luego 21 sí pertenece al dominio de la función.

11 Considera la función f (*x*) = $\frac{3x}{x-7}$.

a. Calcula, si es posible, f (0), f (5), f (6) y f (7).
f (0) = $\frac{3\cdot 0}{0-7}$ = 0
f (5) = $\frac{3\cdot 5}{5-7}$ = 7,5
f (6) = $\frac{3\cdot 6}{6-7}$ = –18
f (7) = $\frac{3\cdot 7}{7-7}=\frac{21}{0}$

b. ¿Pertenecen al dominio de f (*x*) los valores *x* = 0, *x* = 5, *x* = 6 y *x* = 7?
x = 0 pertenece al dominio de f.
x = 5 pertenece al dominio de f.
x = 6 pertenece al dominio de f.
No existe f (7) y en consecuencia, *x* = 7 no pertenece al dominio de f.

c. ¿Pertenecen al recorrido o imagen de f (*x*) los valores *y* = 0, *y* = 5, *y* = –18 e *y* = 40?

f (*x*) = 0 ⇒ $\frac{3x}{x-7}$ = 0 ⇒ 3*x* = 0 ⇒ *x* = 0; luego *y* = 0 pertenece al recorrido de f.

f (*x*) = 5 ⇒ $\frac{3x}{x-7}$ = 5 ⇒ 3*x* = 5*x* – 35 ⇒ *x* = $\frac{35}{2}$; luego *y* = 5 pertenece al recorrido de f.

f (*x*) = –18 ⇒ $\frac{3x}{x-7}$ = –18 ⇒ 3*x* = –18*x* + 126 ⇒ 21*x* = 126 ⇒ *x* = $\frac{126}{21}$ = 6; luego *y* = –18 sí pertenece al recorrido de f.

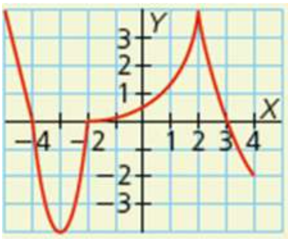
f (*x*) = 40 ⇒ $\frac{3x}{x-7}$ = 40 ⇒ 3*x* = 40*x* – 280 ⇒ 37*x* = 280 ⇒ *x* = $\frac{280}{37}$; luego *y* = 40 sí pertenece al recorrido de f.

SOLUCIONES PÁG. 151

12 Actividad resuelta.

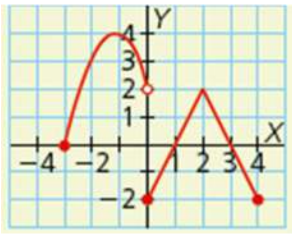
13 Determina los puntos de corte con los ejes y el signo de cada función a partir de su gráfica.

a.



Puntos de corte con el eje *X*: (–4 , 0), (–2 , 0), (3 , 0)
Punto de corte con el eje *Y*: (0 , $\frac{1}{3}$)
Signo de la función: es positiva en [–5 , –4) ∪ (–2 , 3) y negativa en (–4 , –2) ∪ (3 , 4]

b.



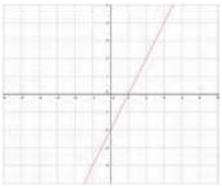
Puntos de corte con el eje *X*: (–3 , 0), (1 , 0), (3 , 0)
Punto de corte con el eje *Y*: (0 , –2)
Signo de la función: es positiva en [–3 , 0) ∪ (1 , 3) y negativa en [–2 , 1) ∪ (3 , 4]

14 Representa la función $y = 2x – 2$ y determina:

Para representar la función, se construye una tabla de valores:

x	0	1	2	3
y	–2	0	2	4

La gráfica de la función es una recta:



a. Sus puntos de corte con los ejes.
El punto de corte con el eje *X* es (1 , 0), y el punto de corte con el eje *Y*, (0 , –2).

b. El intervalo en el que la función es positiva.
La función es positiva en el intervalo (1 , +∞).

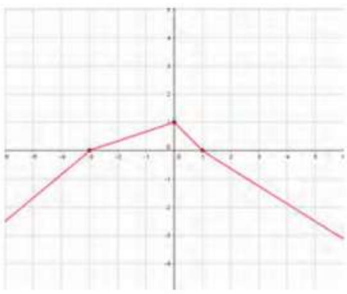
c. El intervalo en el que la función es negativa.
La función es negativa en el intervalo (–∞ , 1).

15 Indica los puntos de corte con los ejes de la siguiente función: f (x) = $\frac{1}{x}$

Puntos de corte con el eje *X*:
Se resuelve la ecuación f (*x*) = 0: $\frac{1}{x} = 0 \Rightarrow 1 = 0 \Rightarrow$ No tiene solución, luego no existen puntos de corte con el eje *X*.
Punto de corte con el eje *Y*:
No tiene, ya que $x = 0$ no pertenece al dominio de la función.

16 Dibuja la gráfica de una función que corte el eje *X* en los puntos (–3 , 0) y (1 , 0) y el eje *Y* en el punto (0 , 1). Después, compara la gráfica que has dibujado con la de tu compañero. ¿Podríais determinar el signo de las funciones que habéis dibujado?

La gráfica de la función será semejante a esta:

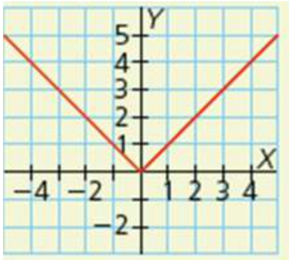


Es positiva en el intervalo (–3 , 1) y negativa en [–∞ , –3) ∪ (1 , +∞) .

SOLUCIONES PÁG. 153

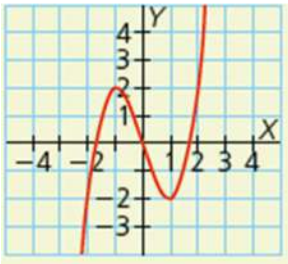
17 Determina, a partir de estas gráficas, si las funciones representadas son simétricas y, en caso afirmativo, indica el tipo de simetría:

a.



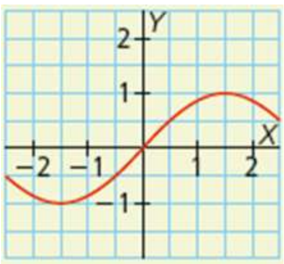
Es simétrica respecto del eje *Y*. Es una función par.

b.



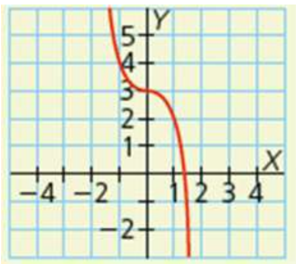
Es simétrica respecto del origen. Es una función impar.

c.



Es simétrica respecto del origen. Es una función impar.

d.



No es simétrica ni respecto del eje *Y* ni respecto del origen. No es par ni impar.

18 De una determinada función se sabe que f (1) = 2, f (–1) = 2, f (2) = 3, f (–2) = 3 y f (0) = 0. ¿Puede ser f (*x*) una función par? ¿Puede ser f (*x*) una función impar?

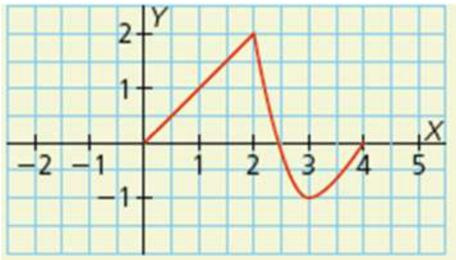
Como f (1) = f (–1) = 2, f (2) = f (–2) = 3 y f (0) = 0, entonces f (*x*) puede ser una función par, pero no impar.

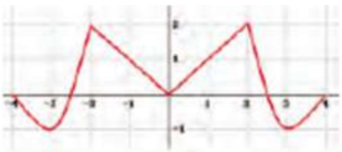
19 Si *y* = f (*x*) es una función impar de la que se conocen f (3) = 4, f (2) = 3 y f (1) = 2, ¿cuáles son los valores de f (–3), f (–2), f (–1) y f (0)?

Como f (*x*) es una función impar, entonces:
f (–3) = –f (3) = –4
f (–2) = –f (2) = –3
f (–1) = –f (1) = –2
f (0) = 0.

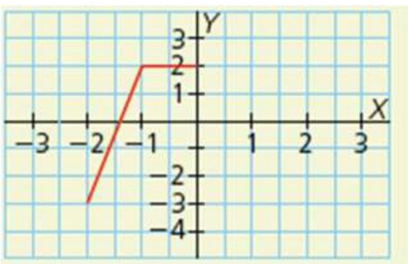
20 Copia estas gráficas en tu cuaderno y complétalas, sabiendo que las funciones representadas son pares:

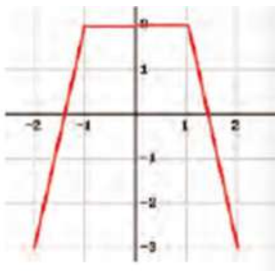
a.





b.





21 Determina si las siguientes funciones son pares, impares o no pertenecen a ninguna de las dos categorías:

a. f (x) = $x + 3$
f (x) = $x + 3$
f ($-x$) = $-x + 3$
$-$f (x) = $-x - 3$
Como f (x) ≠ f ($-x$), la función no es par.
Como f ($-x$) ≠ – f (x), la función no es impar.

b. f (x) = $2x$
f (x) = $2x$
f ($-x$) = $-2x$
$-$f (x) = $-2x$
Como f (x) ≠ f ($-x$), la función no es par.
Como f ($-x$) = – f (x), se trata de una función impar, es decir, simétrica respecto del origen.

c. f (x) = $-x$
f (x) = $-x$
f ($-x$) = x
$-$f (x) = x
Como f (x) ≠ f ($-x$), la función no es par.
Como f ($-x$) = – f (x), se trata de una función impar, es decir, simétrica respecto del origen.

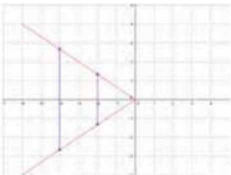
d. f (x) = $x^4 + 1$
f (x) = $x^4 + 1$
f ($-x$) = $x^4 + 1$
$-$f (x) = $x^4 - 1$
Como f (x) = f ($-x$), la función es par, es decir, simétrica respecto del eje Y.
Como f ($-x$) ≠ – f (x), la función no es impar.

e. f (x) = $-\frac{4}{x}$
f (x) = $-\frac{4}{x}$
f ($-x$) = $\frac{4}{x}$
$-$f (x) = $\frac{4}{x}$
Como f (x) ≠ f ($-x$), la función no es par.
Como f ($-x$) = – f (x), se trata de una función impar, es decir, simétrica respecto del origen.

f. f (x) = $3x^3$
f (x) = $3x^3$
f ($-x$) = $-3x^3$
$-$f (x) = $-3x^3$
Como f (x) ≠ f ($-x$), la función no es par.
Como f ($-x$) = – f (x), se trata de una función impar, es decir, simétrica respecto del origen.

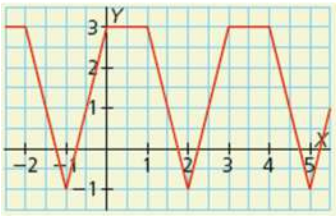
22 ¿Es posible que la gráfica de una función sea simétrica respecto del eje X? Razona tu respuesta.

La gráfica de una función no puede ser simétrica respecto del eje *X*, ya que semejante simetría implicaría, necesariamente, que a cada valor de la variable independiente se le asociarían dos valores de la variable dependiente.



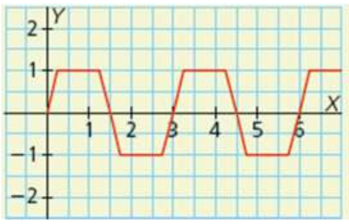
23 Determina si las siguientes funciones son periódicas, indicando, en su caso, su período:

a.



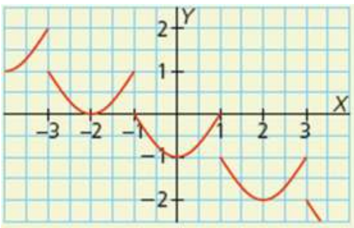
Es periódica de periodo 3.

b.



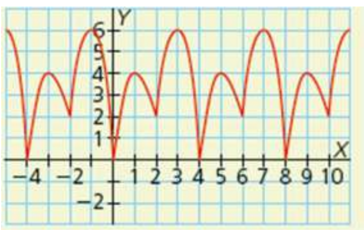
Es periódica de periodo 3.

c.



No es periódica.

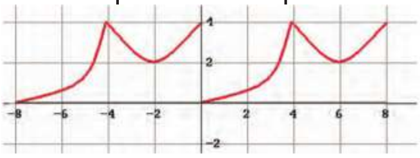
d.



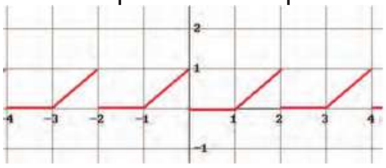
Es periódica de periodo 4.

24 Dibuja una función periódica con período 8 y otra función periódica con período 2.

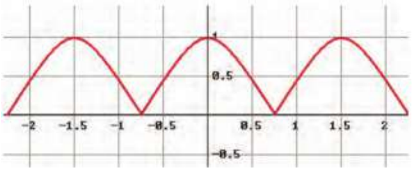
Función periódica de periodo 8:



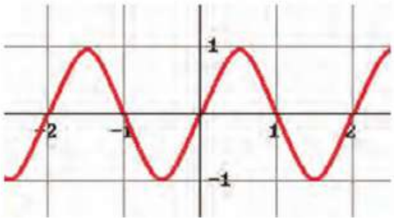
Función periódica de periodo 2:



25 Dibuja una función periódica con período 1,5 que sea simétrica respecto del eje *Y*.



26 Dibuja una función periódica con período 2 que sea impar.



27 ¿Es posible que una función sea periódica con período 5 y par? Razona tu respuesta.

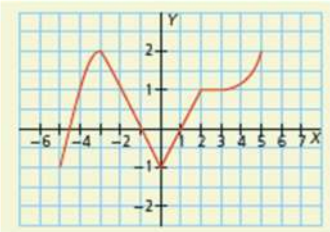
Sí es posible, basta con considerar una curva que sea simétrica respecto del eje *Y*, entre –2,5 y 2,5, y luego repetir su gráfica indefinidamente hacia la derecha y hacia la izquierda de dicho intervalo.

28 ¿Es posible que una función sea periódica con período 6 e impar? Razona tu respuesta.

Sí es posible, basta con considerar una curva que pase por el origen y sea simétrica respecto de este en el intervalo [–3 , 3] y repetir la gráfica a izquierda y derecha de tal forma que su trazo sea continuo.

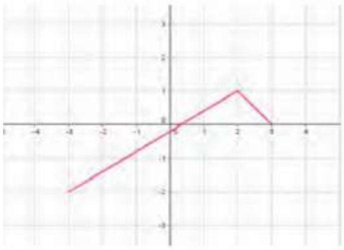
SOLUCIONES PÁG. 154

29 Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función representada por esta gráfica:



La función es creciente en (–5 , –3) ∪ (0 , 2) ∪ (3 , 5), constante en (2 , 3) y decreciente en (–3 , 0).

30 Dibuja la gráfica de una función que esté definida en el intervalo [–3 , 3] y sea creciente en (–3 , 2) y decreciente en (2 , 3).



31 La tabla muestra las ventas de teléfonos móviles que se han producido en una tienda durante los seis primeros meses del año.

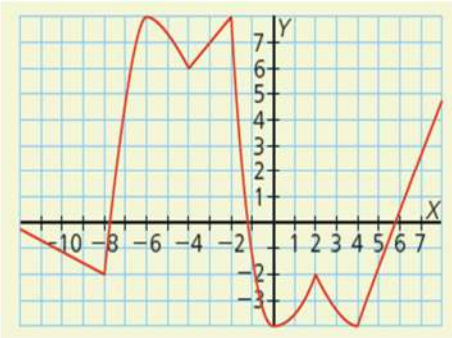
	Ene	Feb	Mar	Abr	May	Jun
Móviles	500	700	900	600	700	500

Analiza el crecimiento y decrecimiento de la función correspondiente.

La función es creciente de enero a marzo y de abril a mayo y es decreciente de marzo a abril y de mayo a junio.

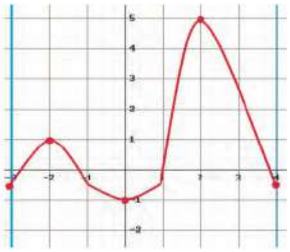
SOLUCIONES PÁG. 155

32 Determina los máximos y mínimos relativos de la siguiente función. Indica también si existen máximos o mínimos absolutos.



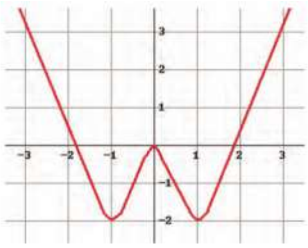
Máximos relativos: (–6 , 8), (–2 , 8), (2 , –2)
Mínimos relativos: (–8 , –2), (–4 , 6), (0 , –4), (4 , –4)
Máximos absolutos: no tiene, ya que la función crece hacia el infinito a partir de x = 4, y decrece desde el infinito en el intervalo (∞ , –8).
Mínimos absolutos: (0 , –4) y (4 , –4)

33 Dibuja una función definida en el intervalo [–3 , 4] que tenga un máximo relativo en el punto (–2 , 1), un mínimo relativo en el punto (0 , –1) y un máximo absoluto en el punto (2 , 5). ¿Puede ser (0 , –1) un mínimo absoluto de esta función?



En este caso, (0 , –1) es un mínimo absoluto, pero podría suceder que los valores de la función en x = –3 y x = 4 fueran inferiores a –1, en cuyo caso no sería un mínimo absoluto.

34 Dibuja una función simétrica respecto del eje *Y*, que esté definida en todos los números reales y tenga un máximo relativo en el punto (0 , 0) y dos mínimos absolutos en (–1 , –2) y (1 , –2). Analiza los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función a partir de su gráfica.



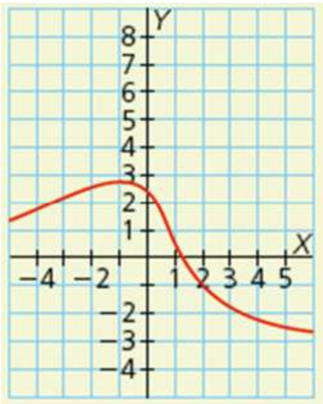
La función es decreciente en (–∞ , –1) ∪ (0 , 1) y creciente en (–1 , 0) ∪ (1 , ∞).

SOLUCIONES PÁG. 157

35 Actividad resuelta.

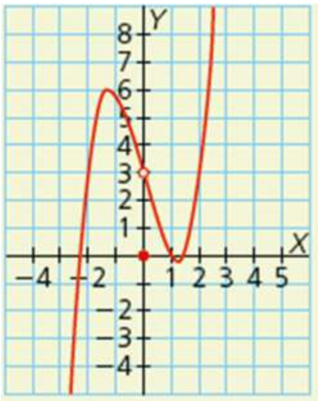
36 Estudia si las siguientes funciones son continuas e indica, en caso contrario, sus puntos de discontinuidad:

a.



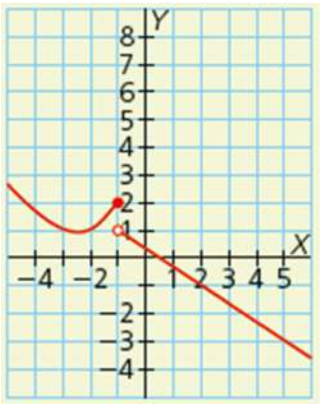
Es continua ya que no presenta ningún salto.

b.



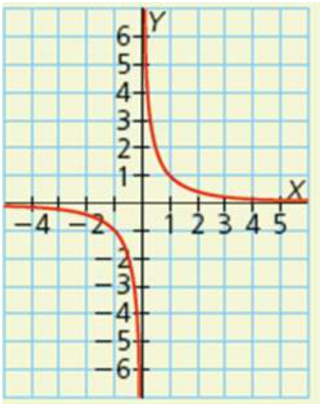
Es discontinua en $x = 0$.

c.



Es discontinua en $x = –1$.

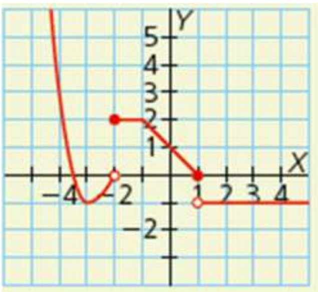
d.



Es discontinua en *x* = 0.

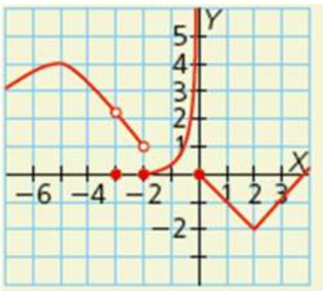
37 Determina si las siguientes funciones son continuas e indica, en caso de no serlo, sus puntos de discontinuidad y el tipo:

a.



Es discontinua en *x* = –2 y en *x* = 1. En ambos casos presenta una discontinuidad de salto finito.

b.



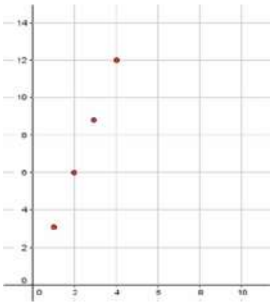
Es discontinua en *x* = –3, *x* = –2 y *x* = 0. En *x* = –3 tiene un punto de discontinuidad evitable; en *x* = –2, un punto de discontinuidad de salto finito, y en *x* = 0, un punto de discontinuidad de salto infinito.

38 Dibuja la gráfica de las siguientes funciones y estudia su continuidad:

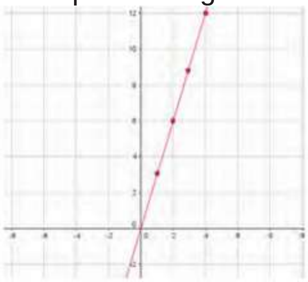
a. A cada número natural se le hace corresponder su triple.
Una posible tabla de valores para esta función es:

x	1	2	3	4
y	3	6	9	12

Se trata de una función que es discontinua. Todos los puntos de su gráfica son puntos aislados:

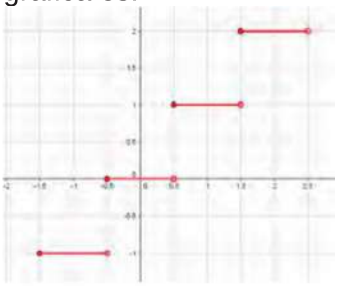


b. A cada número real se le hace corresponder su triple.
La expresión algebraica de la función es $y = 3x$, y su gráfica, la siguiente:



Como se observa, es continua en todo $\mathbb{R}$.

c. A cada número real se le hace corresponder su entero más próximo.
Se trata de una función que asocia a cada número real su entero más próximo. Su gráfica es:

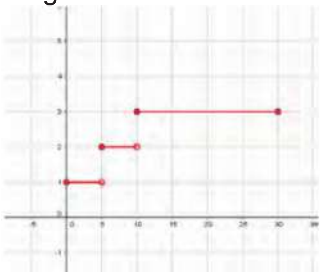


Como se observa, la función presenta infinitos puntos de discontinuidad de salto finito (en $x = –2,5$; $x = –1,5$; $x = –0,5$; $x = 0,5$; $x = 1,5$; $x = 2,5$; …) tiene infinitos puntos de discontinuidad.

39 Representa gráficamente las funciones que definen las siguientes situaciones, estudia su continuidad y clasifica sus posibles puntos de discontinuidad:

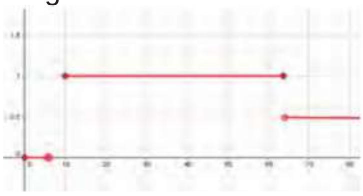
a. En un locutorio conectarse a Internet cuesta 1 € los 5 primeros minutos, 2 € desde los 5 min hasta los 10 min y 3 € desde los 10 min a los 30 min.

La gráfica de la función es:



La función tiene un punto de discontinuidad de salto finito en $x = 5$ y otro del mismo tipo en $x = 10$.

b. El precio un billete de autobús es gratuito para los menores de 6 años; los mayores de 65 años pagan 0,50 €, y para el resto de personas el coste es de 1 €.
La gráfica de la función es:



La función tiene dos puntos de discontinuidad de salto finito en $x = 6$ y $x = 65$.

40 La siguiente gráfica muestra el precio que cobra una operadora telefónica por las llamadas en función del número de minutos:

a. ¿Cuáles son sus puntos de discontinuidad?
$x = 1$, $x = 2$, $x = 3$…con x pertenecientes a $\mathbb{Z}$.

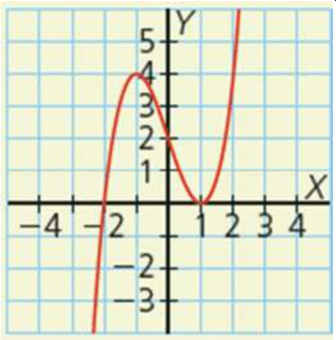
b. ¿Cuánto cuesta el establecimiento de llamada?
$0{,}2 \cdot t$

c. ¿Cuánto cuesta una llamada de 59 segundos? ¿Y de 60 segundos?
0,2 €; 0,4 €

d. ¿Cuánto cuesta una llamada de 119 segundos? ¿Y de 121 segundos?
0,4 €; 0,6 €

SOLUCIONES PÁG. 161

41 Analiza la función cuya gráfica viene dada por esta curva:



Dom (f) = ℝ; Rec (f) = ℝ
Puntos de corte con el eje *X*: (–2 , 0) y (1 , 0)
Punto de corte con el eje *Y*: (0 , 2)
Positiva en (–2 , +∞) y negativa en (–∞ , –2).
Creciente en (–∞ , –1) ∪ (1 , +∞) y decreciente en (–1 , 1).
Máximo relativo en (–1 , 4) y mínimo relativo en (1 , 0).
No tiene máximo absoluto ni mínimo absoluto.
La función no es simétrica ni periódica.
Es una función continua en todo su dominio, es decir, en todo ℝ.

42 Actividad resuelta.

43 Dos estaciones de servicio han establecido un plan de precios para los usuarios de vehículos que reposten en ellas:

a. ¿A cuánto sale en la estación de servicio A el litro de gasoil si se repostan 15 L? ¿Y en la B? ¿Cuánto se ha de pagar en cada estación por repostar 15 L?
El precio por litro por repostar 15 L en la estación de servicio A es de 2 €/L y el precio por repostar 15 L en la estación de servicio B es de 1,4 €/L.
Por repostar 15 L en la estación de servicio A se pagarán $15 \cdot 2 = 30$ €, y por repostar 15 L en la estación de servicio B, $15 \cdot 1{,}4 = 21$ €.

b. Si un camión desea repostar 90 L. ¿En cuál de las dos estaciones conviene que realice la compra? Justifica tu respuesta.
Al repostar 90 L, el precio por litro es superior en la estación de servicio A que en la estación de servicio B, por lo que conviene realizar el repostaje en la estación de servicio B.

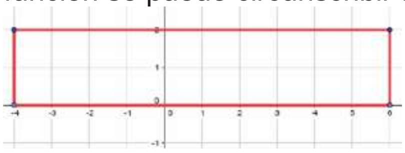
c. ¿Qué resulta más barato para un usuario, repostar 40 L en la estación de servicio B o 30 L en la estación de servicio A?
En la estación de servicio B, 40 L salen a 1,7 €/L, por lo que el importe total es de $40 \cdot 1{,}7 = 68$ €, mientras que 60 L en la estación A salen a $1{,}4 \cdot 60 = 84$ €. Resulta, por tanto, más barato el repostaje de la estación B.

d. Si se desea llenar el depósito de un camión que tiene una capacidad de 80 L, ¿en cuál de las dos estaciones convendría repostar? ¿Cuánto habrá que pagar?
En cualquiera de las dos porque el precio es idéntico 1,1 €/L. Gastará $1{,}1 \cdot 80 = 88$ €.

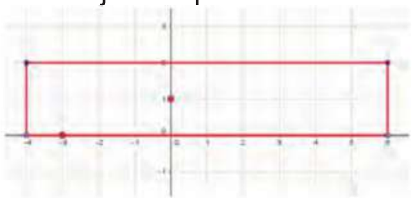
44 Construye la gráfica de una función que cumpla las siguientes características:

– D (f) = [–4 , 6] y R (f) = [0 , 2]
– Corta al eje *X* en el punto (–3 , 0) y al eje Y en (0 , 1).
– Tiene dos máximos relativos en (–2 , 2) y (3 , 2).
– Tiene un mínimo relativo en (0 , 1).
– Es continua en [–4 , 6], salvo en x = –3, donde tiene un punto de discontinuidad con salto finito de 1 unidad, siendo f (–3) = 0.
– Es decreciente en (−4 , –3) ∪ (–2 , 0) ∪ (3 , 6).
– Es creciente en (−3, –2) ∪ (2 , 3).
– Es constante en (0 , 1).
– f (–4) = 1 y f (6) = 1

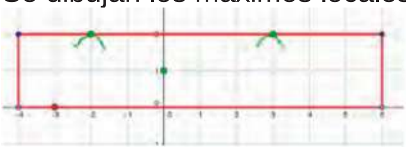
Con la información que se proporciona sobre el dominio y el recorrido, la gráfica de la función se puede circunscribir al rectángulo [–4 , 6] × [0 , 2]:



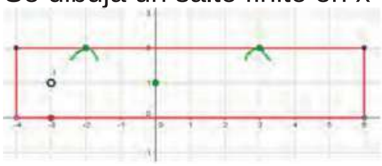
Se dibujan los puntos de corte: (–3 , 0) y (0 , 1):



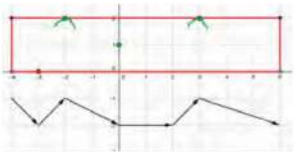
Se dibujan los máximos locales, (–2 , 2) y (3 , 2), y el mínimo local, (0 , 1):



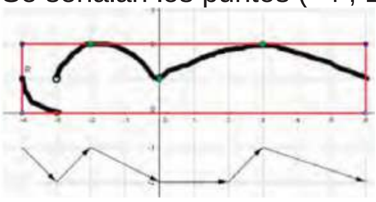
Se dibuja un salto finito en x = –3:



Se señalan los intervalos de crecimiento y decrecimiento:

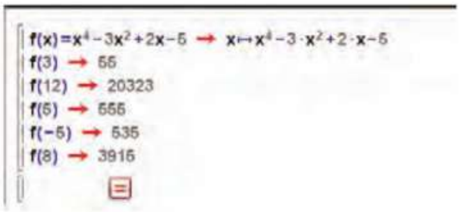


Se señalan los puntos (–4 , 1) y (6 , 1), por los que debe pasar la gráfica de la función:



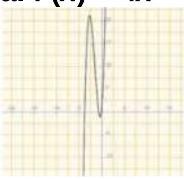
SOLUCIONES PÁG. 162

1 Define la siguiente función: f (x) = $x^4 - 3x^2 + 2x - 5$
A continuación, calcula f (3), f (12), f (5), f (–5) y f (8).

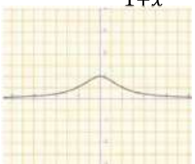


2. Dibuja las gráficas de estas funciones:

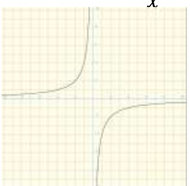
a. f (x) = $4x^3 + 18x^2 + 12x + 1$



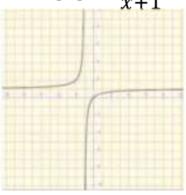
b. f (x) = $\frac{1}{1+x^2}$



c. f (x) = $-\frac{4}{x}$



d. f (x) = $\frac{x}{x+1}$



SOLUCIONES PÁG. 163

1 Indica si los siguientes enunciados son verdaderos o falsos:

a. Una función que tiene como dominio todo $\mathbb{R}$ también tiene que tener como recorrido todo $\mathbb{R}$.
Falso. El recorrido no tiene por qué coincidir con el dominio.

b. Si una función es simétrica respecto del eje *Y*, entonces su dominio no puede ser [0 , 2].
Verdadero. Si la función es simétrica respecto del eje Y, su dominio debe contener valores positivos y negativos, por lo que su dominio no puede ser [0 , 2].

c. Si el punto (3 , 4) es el máximo absoluto de una función, entonces también es un máximo relativo.
Verdadero. Los máximos absolutos son máximos relativos.

d. Si el punto (2 , 5) es un mínimo relativo de una función, entonces también es un mínimo absoluto.
Falso. Los mínimos relativos no tienen por qué ser mínimos absolutos. El enunciado contrario sí es cierto, todos los mínimos absolutos son mínimos relativos.

e. Si una función es continua y creciente en un intervalo (a , b), entonces f (a) < f (b).
Verdadero.

f. Una función cuyo dominio es el intervalo [0 , 4] no puede ser una función par.
Verdadero. Las funciones pares deben contener en su dominio un valor positivo y su opuesto.

g. Una función periódica no puede ser simétrica respecto del origen.
Falso. Existen funciones periódicas que sí son simétricas respecto del origen.

h. Una función periódica no puede tener puntos de discontinuidad.
Falso. Una función periódica puede tener puntos de discontinuidad.

i. Si una función es creciente y continua en el intervalo (0 , 4) y es decreciente en (4 , 8), entonces tiene un máximo relativo en $x = 4$.
Verdadero. Al ser continua, si crece a la izquierda de $x = 4$ y decrece a la derecha de $x = 4$, necesariamente tiene un máximo relativo en $x = 4$.

j. Una función simétrica respecto del origen nunca puede ser periódica.
Falso. Existen funciones simétricas respecto del origen que son periódicas.

SOLUCIONES PÁG. 164

REPASO FINAL

CONCEPTO DE FUNCIÓN

1 Determina si las siguientes relaciones entre magnitudes se corresponden con funciones y, en caso afirmativo, indica cuáles son las variables dependientes y las independientes:

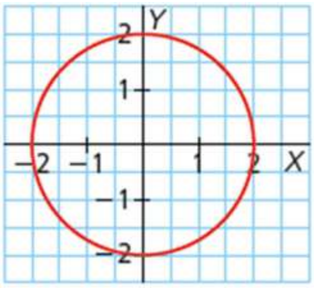
a. La temperatura corporal de una persona y su estatura.
No es una función, pues no existe ninguna relación entre dichas variables.

b. El precio de una llamada telefónica y la duración de esta.
Sí es una función. La variable independiente es el número de minutos, y la variable dependiente, el precio de la llamada.

c. La longitud de un muelle y la masa que se cuelga de él.
Sí es una función. La variable independiente es el peso que se cuelga del muelle, y la variable dependiente, la longitud que alcanza este.

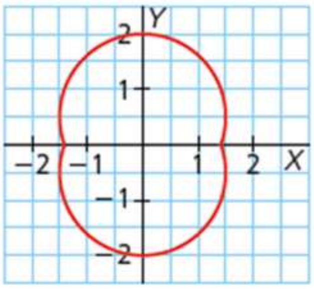
2 Señala cuáles de las siguientes curvas se corresponden con la representación gráfica de una función:

a.



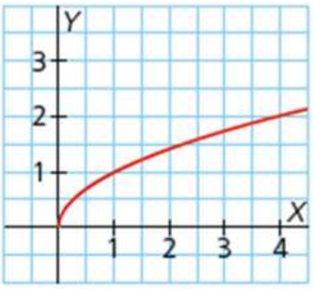
No es la gráfica de una función.

b.



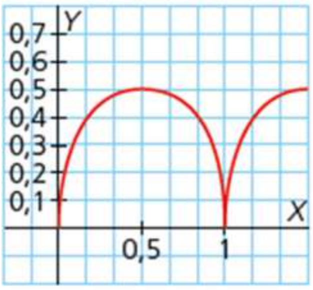
No es la gráfica de una función.

c.



Sí es la gráfica de una función.

d.



Sí es la gráfica de una función.

3 En la factura de la electricidad que recibimos cada dos meses en nuestro domicilio, hemos observado que se utiliza la siguiente fórmula:
Precio () = 12,47 + 0,13 · consumo (kWh) Esta fórmula permite obtener el importe de la factura a partir de los kilowatios-hora consumidos.

a. ¿Se trata de una función?
Sí es una función, pues para un determinado número de kWh de consumo se paga un único importe.

b. ¿Cuál es la variable dependiente y cuál la independiente?
La variable independiente es el número de kWh de consumo, y la variable dependiente, el coste de la factura.

c. ¿Cuánto pagaremos si no consumimos nada? ¿Y si consumimos 1 000 kW/h?
Si no se consume nada, se paga el importe fijo de 12,47 €. Si se consumen 1 000 kWh, se deberá abonar 12,47 + 130 = 142,47 €.

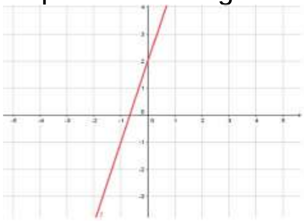
4 Construye una tabla de valores en tu cuaderno y representa gráficamente las funciones propuestas. Después, represéntalas de nuevo con Wiris y compara los resultados obtenidos.

a. $f(x) = 3x + 2$

Tabla de valores:

x	–2	–1	0	1	2
y	–4	–1	2	5	8

Representación gráfica:

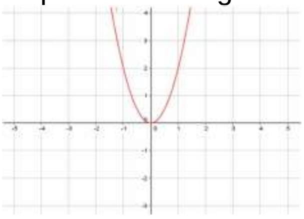


b. $f(x) = 2x^2$

Tabla de valores:

x	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5
y	50	32	18	8	2	0	2	8	18	32	50

Representación gráfica:

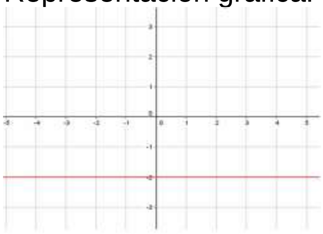


c. $f(x) = -2$

Tabla de valores:

x	–2	–1	0	1	2
y	–2	–2	–2	–2	–2

Representación gráfica:

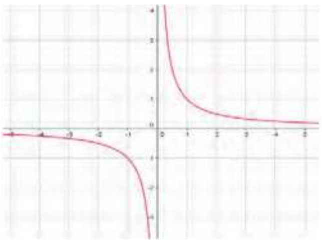


d. f (*x*) = $\frac{1}{x}$

Tabla de valores:

x	−4	−3	−2	−1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	4
y	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	−1	−2	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$

Representación gráfica:



5 Un aparcamiento privado cobra 0,50 € como cuota fija de entrada y, además, 0,25 € por cada hora de estancia.

a. ¿Cuánto cuesta permanecer en el aparcamiento dos horas?

0,5 + 2 · 0,25 = 1 €

b. ¿Y tres horas? ¿Y cuatro horas?

Por 3 horas, el coste será: 0,5 + 3 · 0,25 = 1,25 €

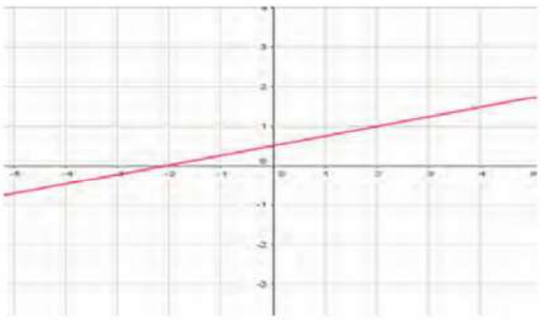
Por 4 horas, el coste será: 0,5 + 4 · 0,25 = 1,5 €

c. Halla la expresión algebraica de la función correspondiente, construye una tabla de valores y realiza su representación gráfica.

La expresión algebraica de esta función es y = 0,5 + 0,25x, donde x indica el número de horas, e y, el coste expresado en euros.

La representación gráfica de esta función puede obtenerse a partir de una tabla de valores:

x	0	1	2	3	4
y	0,5	0,75	1	1,25	1,5



DOMINIO Y RECORRIDO

6 Considera la siguiente función: f (x) = $+\sqrt{x^2-1}$

a. Calcula, si es posible, f (0), f $\left(\frac{1}{2}\right)$, f $\left(-\frac{1}{2}\right)$, f (1), f (–1), f (2) y f (–2).

f (0) = $\sqrt{0^2-1}$ = $\sqrt{-1}$; por tanto, no existe f (0).

f $(\frac{1}{2})$ = $\sqrt{(\frac{1}{2})^2-1}$ = $\sqrt{\frac{1}{4}-1=\ \sqrt{-\frac{3}{4}}}$; por tanto no existe f $(\frac{1}{2})$.

f (1) = $\sqrt{1^2-1}$ = $\sqrt{0}$ =1 ⇒ f (1) = 0

f (–1) = $\sqrt{(-1)^2-1}$ = $\sqrt{0}$ = 1 ⇒ f (1) = 0

f (2) = $\sqrt{(2)^2-1}$ = $\sqrt{3}$ ⇒ f (2) = $\sqrt{3}$

f (–2) = $\sqrt{(-2)^2-1}$ = $\sqrt{3}$ ⇒ f (–2) = $\sqrt{3}$

b. Indica si pertenecen al dominio de f (*x*) los siguientes valores de *x*:
***x* = 0, *x* = $\frac{1}{2}$, *x* = – $\frac{1}{2}$, *x* = 1, *x* = –1, *x* = 2 y *x* = –2.**

x = 0 y *x* = $\frac{1}{2}$ no están en el dominio de f, mientras que *x* = 1, *x* = –1, *x* = 2, *x* = –2 sí están en el dominio de f.

7 Determina el dominio y el recorrido de las siguientes funciones:

a. f (*x*) = *x*^{3}

x	1	2	3	4
y	1	8	27	64

Dom (f) = ℝ; Rec (f) = ℝ

b. f (*x*) = 3*x* – 2

x	1	2	3
y	1	4	7

Dom (f) = ℝ; Rec (f) = ℝ

c. f (*x*) = 0

x	1	2	3
y	0	0	0

Dom (f) = ℝ; Rec (f) = 0

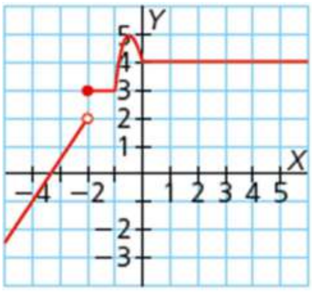
d. f (*x*) = *x*^{2} + 3*x*

x	–4	–3	–2	–1,5	–1	0	1	2
y	4	0	–2	-2,25	–2	0	4	10

Dom (f) = ℝ; Rec (f) = (–1,5 , ∞)

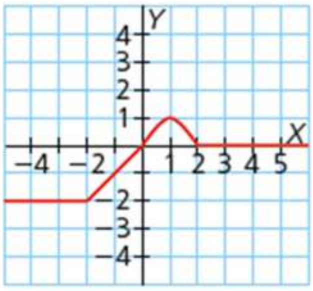
8 Indica el dominio y el recorrido de estas funciones a partir de sus gráficas:

a.



Dom (f) = ℝ; Rec (f) = (–∞ , 2) ∪ [3 , 5)

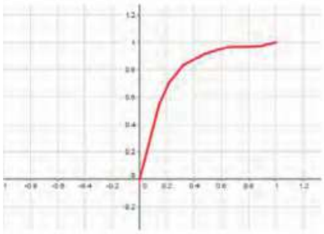
b.



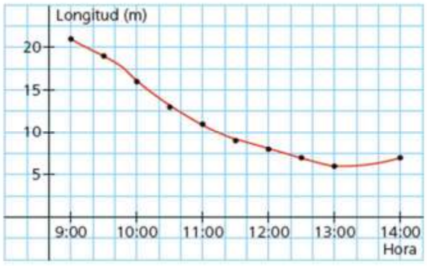
Dom (f) = ℝ; Rec (f) = [–2 , 1]

SOLUCIONES PÁG. 165

9 Dibuja la gráfica de una función cuyo dominio sea el intervalo [0 , 1] y que tenga por recorrido el intervalo [0 , 1].



10 María ha estado desde las 9:00 h hasta las 14:00 h al lado de un árbol midiendo la sombra que proyectaba este y ha elaborado la siguiente gráfica:



a. Obtén una tabla de valores.

x	9	9,5	10	11	11,5	12	12,5	13	14
y	21	19	15,5	11	9	8	7	6	7

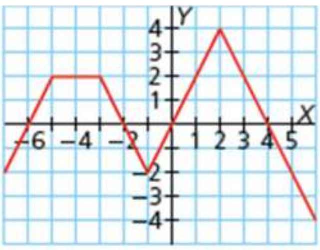
b. ¿Cuál es del dominio de la función? ¿Y su recorrido?

Dom (f) = [9 , 14]; Rec (f) = [6 , 21]

PUNTOS DE CORTE Y SIGNO DE LA FUNCIÓN

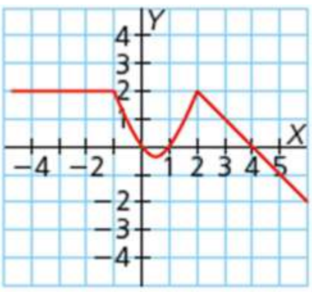
11 Estudia el signo y los puntos de corte con los ejes de las siguientes funciones:

a.



Puntos de corte con el eje *X*: (–6 , 0), (–2 , 0), (0 , 0), (4 , 0)
Punto de corte con el eje *Y*: (0 , 0)
Signo de la función:
Es positiva en (–6 , –2) ∪ (0 , 4)
Es negativa en (–∞ , –6) ∪ (–2 , 0) ∪ (4 , ∞)

b.



Puntos de corte con el eje *X*: (0 , 0), (1 , 0), (4 , 0)
Punto de corte con el eje *Y*: (0 , 0)
Signo de la función:
Es positiva en (–∞ , 0) ∪ (1 , 4)
Es negativa en (0 , 1) ∪ (4 , ∞)

12 Calcula los puntos de corte con los ejes de estas funciones:

a. f (x) = x^2 – 8x + 15

Puntos de corte con el eje X:

$x^2 - 8x + 15 = 0 \Rightarrow x = \frac{8 \pm \sqrt{64-60}}{2} \Rightarrow x_1 = 5,\ x_2 = 3$

Luego, los puntos de corte con el eje X son (5 , 0) y (3 , 0).

Punto de corte con el eje Y:

Si x = 0, entonces y = 15, luego el punto de corte con el eje Y es (0 , 15).

b. f (x) = 4x – 2

Puntos de corte con el eje X:

$4x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$, luego el punto de corte es $\left(\frac{1}{2}\ , 0\right)$

Punto de corte con el eje Y:

Si x = 0, entonces y = –2, luego el punto de corte es (0 , –2).

c. f (x) = 4

Puntos de corte con el eje X: no tiene.

Punto de corte con el eje Y: (0 , 4)

d. f (x) = $\frac{3x+5}{2}$

Puntos de corte con el eje X:

$\frac{3x+5}{2} = 0 \Rightarrow 3x + 5 = 0 \Rightarrow x = -\frac{5}{3}$

Luego el punto de corte es $\left(-\frac{5}{3}\ , 0\right)$

Punto de corte con el eje Y:

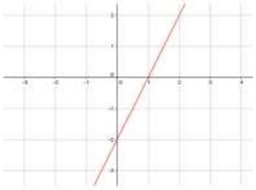
Si x = 0, entonces $y = \frac{5}{2}$, luego el punto de corte con el eje Y es $\left(0\ , \frac{5}{2}\right)$.

13 Representa la función *y* = 2*x* – 2 en tu cuaderno y responde a las cuestiones que se plantean a continuación. Después, represéntala de nuevo con Wiris y comprueba los resultados que has obtenido.

Para representar la función se puede construir una tabla de valores:

x	0	1	2	3
y	–2	0	2	4

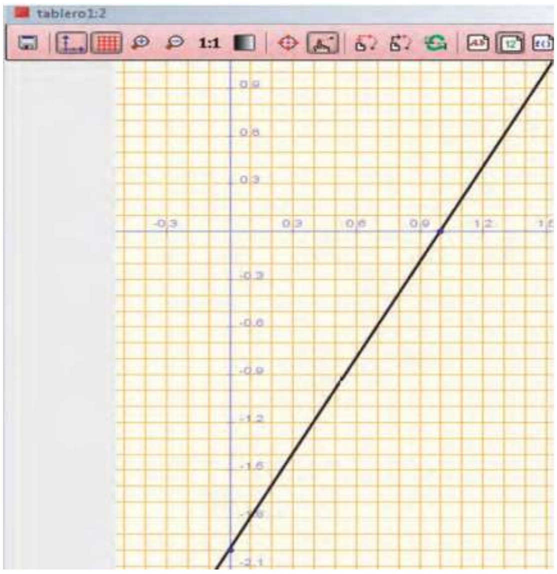
La gráfica es una recta:



a. ¿Cuáles son sus puntos de corte con los ejes?
Punto de corte con el eje *X*: (1 , 0)
Punto de corte con el eje *Y*: (0 , –2)

b. ¿Cuál es el intervalo en el que la función es positiva?
La función es positiva en el intervalo (1 , +∞).

c. ¿Y en el que la función es negativa?
La función es negativa en el intervalo (–∞ , 1).
La representación en Wiris es la siguiente:



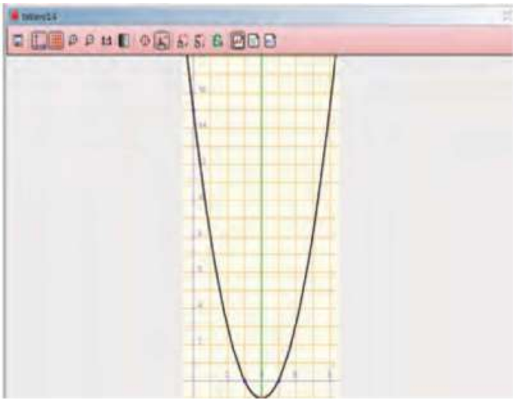
Como se observa, los puntos de corte con los ejes son (0 , –2) y (1 , 0).

14 Si consideras la gráfica de una función, ¿cuántos puntos de corte puede tener con el eje *X*? ¿Y con el eje *Y*?

Con el eje *X* puede tener infinitos puntos de corte, y con el eje Y, como máximo uno.

15 Dada la función f (x) = x^2 – 8x + 15, indica sus puntos de corte con los ejes. Representa después la función con Wiris y compara los resultados que has obtenido.

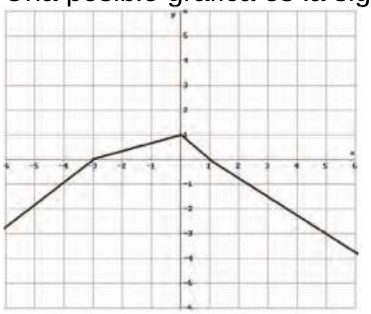
Punto de corte con el eje *Y*: (0 , 15)
Puntos de corte con el eje *X*: (3 , 0) y (5, 0)
Para representar la función con Wiris, se introduce:
representar (x^2 – 8x + 15)
La gráfica que se obtiene es la siguiente:



Como se puede comprobar, los puntos de corte con los ejes son los que se han calculado previamente.

16 Dibuja la gráfica de una función que corte el eje *X* en los puntos (–3 , 0) y (1 , 0) y el eje Y en el punto (0 , 1) y que sea positiva en (–3 , 1) y negativa en (–∞ , –3) U (1 , +∞).

Una posible gráfica es la siguiente:



Como se observa, es positiva en el intervalo (–3 , 1) y negativa en (–∞ , –3) ∪ (1 , +∞).

SIMETRÍA Y PERIODICIDAD

17 Indica, sin representar las gráficas, si las siguientes funciones son pares o impares:

a. f (x) = –5x

f (–x) = –5 · (–x) = 5x

–f (x) = 5x

Como f (x) ≠ f (–x), la función no es par, pero dado que f (–x) = –f (x), la función es impar.

b. f (x) = $x^4 - 3x^2$

f (–x) = $(-x)^4 - 3(-x)^2 = x^4 - 3x^2$

–f (x) = $-x^4 + 3x^2$

f (x) = f (–x), por tanto, la función es par y, en consecuencia, no es impar.

c. f (x) = 0

f (–x) = 0

–f (x) = 0

f (x) = f (–x), por tanto, se trata de una función par. Por otro lado f (–x) = –f (x), luego también es impar. Es la única función que es par e impar a la vez.

d. f (x) = x + 7

f (–x) = –x + 7

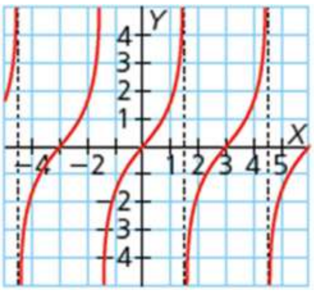
–f (x) = –x – 7

f (–x) ≠ f (x), por lo que la función no es par.

Por otro lado, f (–x) ≠ –f (x), luego tampoco es impar.

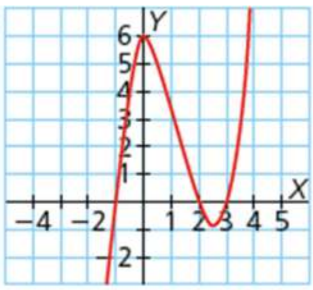
18 Determina si las siguientes funciones son simétricas e indica, en caso afirmativo, el tipo de simetría:

a.



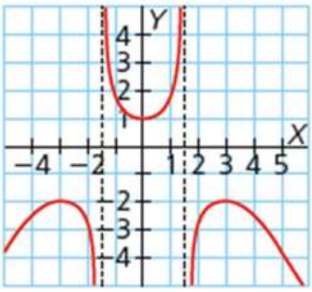
Es simétrica respecto del origen.

b.



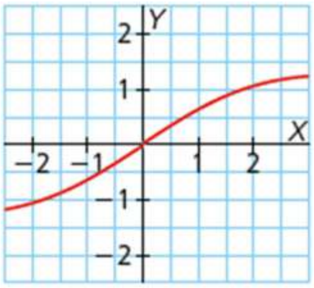
No es simétrica.

c.



Es simétrica respecto del eje *Y*.

d.



Es simétrica respecto del origen.

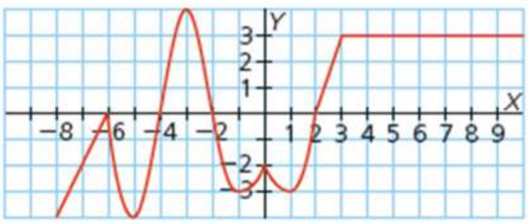
19 Representa dos funciones periódicas de período 3, una que sea una función simétrica respecto del eje *Y* y otra que sea simétrica en relación con el origen.

Respuesta abierta.

SOLUCIONES PÁG. 166

CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO

20 La gráfica de una función es la siguiente:

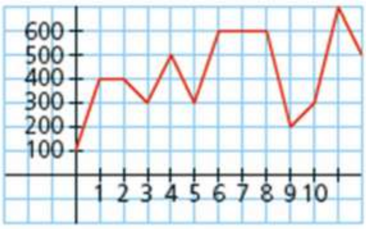


Determina los intervalos en los que la función es creciente y decreciente.

a. La función es creciente en (–∞ , –6) ∪ (–5 , –3) ∪ (–1 , 0) ∪ (1 , 3).
b. La función es decreciente en (–6 , –5) ∪ (–3 , –1) ∪ (0 , 1).
c. Máximos relativos: (–6 , 0), (–3 , 4), (0 , –2)
Mínimos relativos: (–5 , –4), (–1 , –3), (1 , –3)
d. Máximos absoluto: (–3 , 4)
Mínimo absoluto: no tiene

MÁXIMOS Y MÍNIMOS

21 La gráfica de una función es la siguiente:

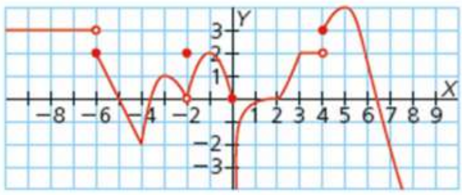


Determina los máximos y mínimos relativos y, si existen, los máximos y mínimos absolutos.

Máximos relativos: (4 , 500), (11 , 700)
Mínimos relativos: (0 , 100), (3 , 300), (5 , 300), (9 , 200), (12 , 500)
Mínimo absoluto: (0 , 100)
Máximo absoluto: (11 , 700)

CONTINUIDAD Y TIPOS DE DISCONTINUIDAD

22 Considera la función, f, cuya gráfica es la siguiente:



a. ¿Cuál es el dominio de la función? ¿Y el recorrido?
Dom (f) = ℝ; Rec (f) = (–∞ , 4]

b. ¿Es una función continua en su dominio?
No es continua.

c. Indica si la función tiene algún punto de discontinuidad y clasifícalo.
Es discontinua en cuatro puntos:

- En *x* = –6 hay un punto de discontinuidad de salto finito.
- En *x* = –2 hay una discontinuidad evitable.
- En *x* = 0 hay un punto de discontinuidad de salto infinito.
- En *x* = 4 hay un punto de discontinuidad de salto finito.

d. Calcula f (–6), f (–2), f (0) y f (4).
f (–6) = 2; f (–2) = 2 ; f (0) = 0; f (4) = 3

e. Indica cuáles son sus máximos y mínimos relativos.
Máximos relativos: (–3 , 1), (–1 , 2), (5 , 4)
Mínimos relativos: (–4 , –2)

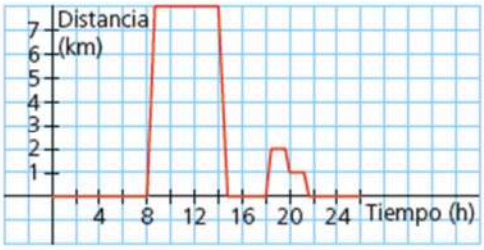
f. Señala cuáles son sus máximos y mínimos absolutos.
Máximos absolutos: (5 , 4)
Mínimos absolutos: no tiene

g. Determina sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.
La función es creciente en (–4 , –3) ∪ (–2 , 1) ∪ (0 , 4) ∪ (4 , 5) y decreciente en (–6 , –4) ∪ (–3 , –2) ∪ (–1 , 0) ∪ (5 , –∞)

h. ¿Es la función continua en el punto (–5 , –2)?
En el intervalo (–5 , –2) la función es continua.

ANÁLISIS, INTERPRETACIÓN Y CONSTRUCCIÓN DE GRÁFICAS

23 Ana ha salido temprano de casa hacia el instituto. Después de acabar las clases, ha vuelto a comer a casa. Más tarde, ha ido al conservatorio de música y, a la salida, ha visitado a su abuela, tras lo que ha vuelto a casa. La siguiente gráfica muestra el recorrido de Ana a lo largo del día:



a. ¿Cuál es la variable independiente?
La variable independiente es el tiempo, expresado en horas.

b. ¿Cuál es la variable dependiente?
La variable dependiente es la distancia, expresada en kilómetros.

c. ¿Cuál es el dominio de esta función?
Dom (f) = [0 , 24]

d. ¿Cuál es el recorrido?
Rec (f) = [0 , 8]

e. ¿A qué hora ha salido Ana hacia el instituto?
A las 8:00 de la mañana.

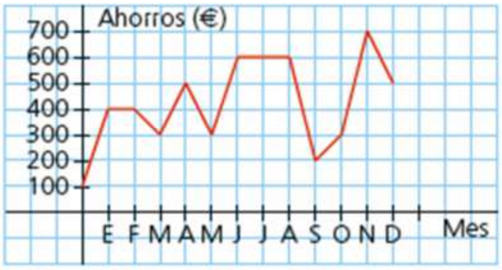
f. ¿Cuántas horas ha permanecido en el instituto?
Desde las 8:30 hasta las 14:15, es decir 5 h y 45 min.

g. ¿A cuántos kilómetros está el instituto de su casa?
Está a 8 kilómetros.

h. ¿A qué hora llegó Ana a casa de su abuela?
Llegó a las 20:00 h.

i. ¿Cuánto tiempo estuvo allí?
Estuvo poco más de una hora.

24 La gráfica muestra los ahorros de María durante los 12 meses del pasado año.



a. ¿Cuál es el recorrido de la función? Interpreta el resultado.
Rec (f) = [100, 700]

b. ¿Cuál es el dominio de la función?
Dom (f) = (0 , 12)

c. ¿En qué períodos del año han permanecido constantes los ahorros?
Entre enero y febrero y entre julio y agosto.

d. ¿En qué períodos del año han disminuido los ahorros?
Entre febrero y marzo, abril y mayo, agosto y septiembre y noviembre y diciembre.

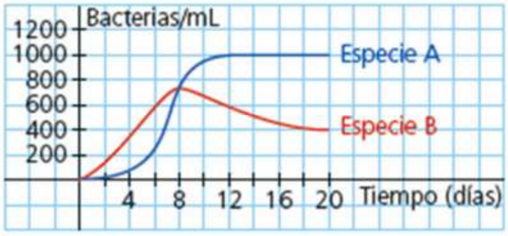
e. ¿Qué meses se ha obtenido un ahorro máximo relativo?
Entre abril y noviembre.

f. ¿En qué períodos del año han aumentado los ahorros?
Entre diciembre y enero, marzo y abril, mayo y junio y entre septiembre y noviembre.

g. ¿En qué mes ha alcanzado el ahorro su nivel máximo?
En noviembre.

SOLUCIONES PÁG. 167

25 El crecimiento de dos poblaciones de bacterias viene reflejado en esta gráfica:



a. ¿Cuál es el número de individuos que tienen las especies el día 20?
Especie A: 1 000; especie B: 400

b. ¿Cuál de las dos especies se reproduce con mayor rapidez hasta el día 8?
Se reproducen con la misma velocidad.

c. ¿Qué día alcanzan las dos especies la misma población?
El día 8.

d. ¿Cuál es el período de crecimiento de ambas especies?
Especie A: del día 0 al 12

e. ¿Qué día alcanza la especie B su máxima población?
Especie B: del día 0 al 8

26 Entra en esta web y analiza la gráfica que muestra la evolución de la población mundial desde los inicios de la civilización hasta nuestros días: http://ficus.pntic.mec.es/ibus0001/poblacion/evolucion_poblacion.html Después, a partir del texto que se te facilita y de la propia gráfica, responde a estas preguntas:

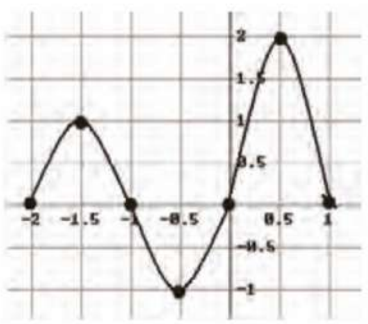
a. ¿En qué momento alcanzó la humanidad los 600 millones de personas?
En el año 1600.

b. ¿Cuál era la población mundial en el siglo I de nuestra era?
300 000 000 personas.

c. ¿Cuál fue el incremento de la población mundial a lo largo del siglo XX?
Aumento en 4 000 000 000 millones ya que:
6 000 000 000 – 2 000 000 000 = 4 000 000 000.

27 Construye la gráfica de una función continua que tenga las siguientes características:
− Su dominio es el intervalo [–2 , 1].
− Su recorrido es el intervalo [–1 , 2].
− Es positiva en los intervalos (–2 , –1) y (0 , 1) y negativa en el intervalo (–1 , 0).
− Los puntos de corte con el eje *X* son (–2 , 0), (–1 , 0), (0 , 0) y (1 , 0).
− Tiene dos máximos locales en (–1,5 , 1) y (0,5 , 2), respectivamente, y un mínimo local en (–0,5 , –1).

a. ¿Tiene esta función algún máximo o mínimo absoluto?
Una posible gráfica es:

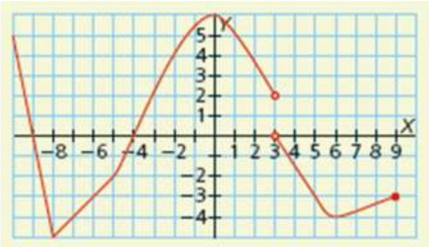


Tiene un máximo absoluto en (0,5 , 2) y un mínimo absoluto en (–0,5 , –1).

b. ¿Presenta algún tipo de simetría?
No es simétrica.

EVALUACIÓN

Considera la función cuya gráfica es la siguiente:



1 El dominio de definición de la función es:

a. $(-\infty, +9)$ **c.** $[-5, 6]$
b. $(-\infty, 3) \cup (3, 9]$ **d.** $(-\infty, +9]$

Solución b.

2 El recorrido o imagen de la función es:

a. $[5, 6]$ **c.** $[-4, 0) \cup (3, 6]$
b. $[-5, +\infty)$ **d.** $(-\infty, 6]$

Solución b.

3 Los puntos de corte de la gráfica con el eje de abscisas son:

a. $(-9, 0), (-4, 0)$ **c.** $(0, 6)$
b. $(-9, 0), (-4, 0), (3, 0)$ **d.** $(3, 0)$

Solución a.

4 Los puntos de corte de la gráfica con el eje de ordenadas son:

a. $(-9, 0)$ **c.** $(0, 6)$
b. $(6, 0)$ **d.** $(0, -9), (0, -4)$

Solución c.

5 La función es decreciente en los intervalos:

a. $(-8, 0) \cup (6, 9)$ **c.** $(-8, 6) \cup (6, 9)$
b. $(-\infty, -8) \cup (0, 3)$ **d.** $(-\infty, -8) \cup (0, 6)$

Solución d.

6 Los mínimos relativos de la función son:

a. (–8 , –5) y (6 , –4)
b. (–8 , –5), (3 , 2) y (6 , –4)
c. (0 , 6)
d. (0 , 6) y (9 , –3)

Solución a.

7 La función es:

a. Continua en (–∞ , 9].
b. Discontinua en *x* = 3.
c. Discontinua en *x* = 2.
d. Discontinua en (0 , –9), (0 , –4)

Solución b.