MATEMÁTICAS ORIENTADAS A LAS ENSEÑANZAS APLICADAS
3.º ESO

somoslink

SOLUCIONES AL LIBRO DEL ALUMNO

UNIDAD 8. TIPOS DE FUNCIONES

Unidad 8. Tipos de funciones

SOLUCIONES PÁG. 171

1 En una frutería, 10 kg de manzanas cuestan 6 €.

a. Construye la tabla de valores que relaciona las dos magnitudes.

Cantidad de manzanas (kg)	10	1	2	3	4
Coste (€)	6	0,6	1,2	1,8	2,4

b. ¿Es esta una relación de proporcionalidad directa? Si es así, determina la constante de proporcionalidad.

Es una relación de proporcionalidad directa con constante k = $\frac{6}{10}$ = 0,6.

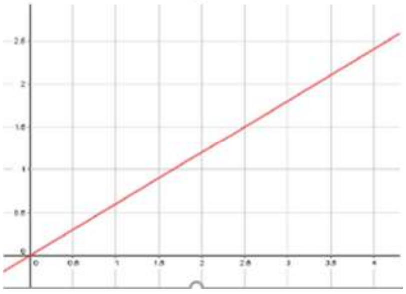
c. Halla la ecuación de la función lineal correspondiente.

$y = 0{,}6x$

d. ¿Tiene sentido en este contexto un número de kilogramos negativo?

No, solo tiene sentido cuando los kilogramos son positivos.

e. Representa la gráfica de la función.



2 Halla las expresiones algebraicas de las funciones que relacionan las siguientes variables:

a. El número de entradas de cine y el precio de su adquisición, teniendo en cuenta que cada entrada cuesta 6 €.

x: número de entradas; *y*: coste expresado en euros; $y = 6x$

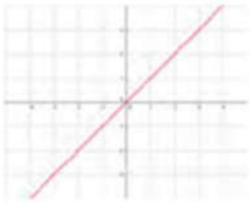
b. El tiempo que permanece circulando un vehículo a una velocidad constante de 80 km/h y los kilómetros que recorre en ese período de tiempo.

x: tiempo expresado en horas; *y*: distancia recorrida expresada en kilómetros; $y = 80x$

3 Representa gráficamente las siguientes funciones lineales:

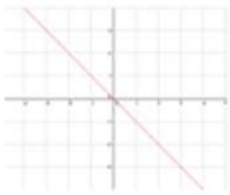
a. $y = x$

x	1	2	3
y	1	2	3



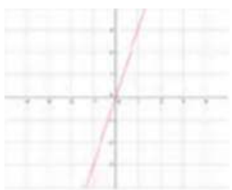
b. $y = -x$

x	1	2	3
y	–1	–2	–3



c. $y = 3x$

x	1	2	3
y	3	6	9



d. $y = -3x$

x	1	2	3
y	–3	–6	–9

e. $y = \frac{x}{3}$

x	1	2	3
y	1/3	2/3	1

$y = -\frac{x}{3}$

x	1	2	3
y	–1/3	–2/3	–1

4 Determina la pendiente de las rectas correspondientes a las siguientes funciones lineales e indica si son crecientes o decrecientes:

a. $y = -5x$
m = –5; es una función decreciente.

b. $y = 8x$
m = 8; es una función creciente.

c. $y = -14x$
m = –14; es una función decreciente.

d. $y = \frac{1}{9}x$
m = $\frac{1}{9}$; es una función creciente.

e. $y = -\frac{1}{7}x$
m = $-\frac{1}{7}$; es una función decreciente.

f. $y = -\frac{3}{2}x$
m = $-\frac{3}{2}$; es una función decreciente.

5 Encuentra, en cada caso, la expresión algebraica de la función lineal cuya gráfica pasa por el punto indicado:

a. (2 , 2)
m = $\frac{2}{2}$ = 1; luego, la función es $y = x$.

b. (1 , 4)
m = $\frac{4}{1}$ = 4; luego, la función es $y = 4x$.

c. (3 , –1)
m = $-\frac{1}{3}$; luego, la función es $y = -\frac{1}{3}x$.

d. (–2 , –1)
m = $-\frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$; luego, la función es $y = \frac{1}{2}x$.

e. (–1 , 3)
m = $-\frac{3}{1}$ = –3; luego, la función es $y = -3x$.

f. (3 , –4)
m = $-\frac{4}{3}$; luego, la función es $y = -\frac{4}{3}x$.

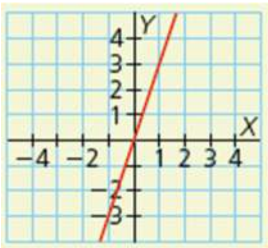
6 Halla la expresión algebraica de la función definida por esta tabla de valores:

x	1	2	3	4	5
y	0,25	0,5	0,75	1	1,25

y = 0,25 · *x*.

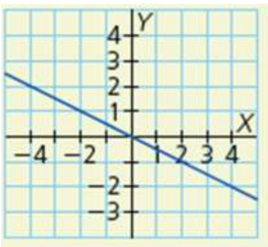
7 Halla las expresiones algebraicas de las siguientes rectas:

a.



La recta pasa por los puntos (0 , 0) y (1 , 3), por lo que la pendiente es m = 3. La ecuación de la recta es *y* = 3*x*.

b.



b. La recta pasa por el punto (–2 , 1), por lo que la pendiente es m = $-\frac{1}{2}$. La ecuación de la recta es $y = -\frac{1}{2}x$.

8 Determina si cada una de estas tablas responde a una función lineal y, en caso afirmativo, deduce la ecuación de la recta correspondiente:

a.

x	1	2	3	–4	12
y	12	6	4	–3	1

No es una relación de proporcionalidad directa, sino de proporcionalidad inversa, por lo que no se corresponde con una función lineal.

b.

x	3	8	4	2	6
y	6	16	8	4	12

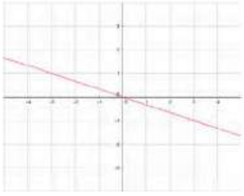
Es una relación de proporcionalidad directa cuya constante es $\frac{6}{3}$ = 2. Por tanto, la pendiente es m = 2, y la ecuación de la recta, *y* = 2*x*.

SOLUCIONES PÁG. 173

9 Para inscribirse en un curso de baile, Mario debe pagar 10 € en concepto de matrícula más una cantidad mensual de 20 €. Determina la expresión algebraica que relaciona el precio del curso en función del número de meses de asistencia. ¿Se trata de una función afín o de una función lineal?

$y = 10 + 20x$. Se trata de una función afín.

10 Representa gráficamente la función afín $y = 2x + 1$ y determina su dominio.



El dominio de la función es $\mathbb{R}$, y el recorrido, también $\mathbb{R}$.

11 Indica los valores de la pendiente y de la ordenada en el origen de las siguientes funciones afines, represéntalas en los mismos ejes de coordenadas e indica si existe alguna relación entre sus gráficas:

a. $y = 3x - 4$

Pendiente: 3; ordenada en el origen: –4; Dominio = $\mathbb{R}$; Recorrido = $\mathbb{R}$

b. $y = 3x + 4$

Pendiente: 3; ordenada en el origen: 4; Dominio = $\mathbb{R}$; Recorrido = $\mathbb{R}$

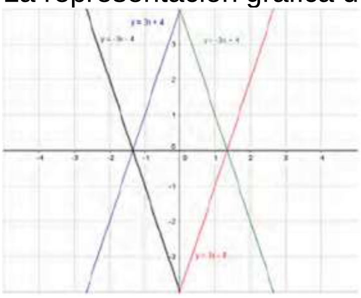
c. $y = -3x + 4$

Pendiente: –3; ordenada en el origen: 4; Dominio = $\mathbb{R}$; Recorrido = $\mathbb{R}$

d. $y = -3x - 4$

Pendiente: –3; ordenada en el origen: –4; Dominio = $\mathbb{R}$; Recorrido = $\mathbb{R}$

La representación gráfica de estas funciones es:



Las rectas que representan las funciones $y = 3x + 4$ e $y = 3x - 4$ son paralelas entre sí.
Las rectas que representan las funciones $y = -3x + 4$ e $y = -3x - 4$ son paralelas entre sí.

12 Actividad resuelta.

13 Halla, en cada caso, la ecuación explícita, la ecuación punto-pendiente y la ecuación general de la recta que pasa por los puntos indicados.

a. A (1 , –2) y B (3 , 1)
Ecuación explícita: y = mx + n
m = $\frac{1-(-2)}{3-1} = \frac{3}{2} \rightarrow y = \frac{3}{2}x + n \rightarrow n = y - \frac{3}{2}x$. Sustituyendo en el punto A, n = $-\frac{7}{2}$ y por tanto:
$y = \frac{3}{2}x - \frac{7}{2}$
Ecuación punto-pendiente: $y - y_0 = m \cdot (x - x_0)$
$y - 1 = \frac{3}{2} \cdot (x - 3)$
Ecuación general: Ax + By + C
$\frac{3}{2}x - y - \frac{7}{2} = 0 \Rightarrow 3x - 2y - 7 = 0$

b. A (8 , 3) y B (1 , 1)
Ecuación explícita: y = mx + n
m = $\frac{1-3}{1-8} = \frac{2}{7} \rightarrow y = \frac{2}{7}x + n \rightarrow n = y - \frac{2}{7}x$. Sustituyendo en el punto A, n = $\frac{5}{7}$ y por tanto:
$y = \frac{2}{7}x + \frac{5}{7}$
Ecuación punto-pendiente: $y - y_0 = m \cdot (x - x_0)$
$y - 1 = \frac{2}{7} \cdot (x - 1)$
Ecuación general: Ax + By + C
$\frac{2}{7}x - y + \frac{5}{7} = 0 \Rightarrow 2x - 7y + 5 = 0$

c. A (3 , 5) y B (0 , 3)
Ecuación explícita: y = mx + n
m = $\frac{3-5}{0-3} = \frac{-2}{-3} \rightarrow y = \frac{2}{3}x + n \rightarrow n = y - \frac{2}{3}x$. Sustituyendo en el punto A, n = 3 y por tanto:
$y = \frac{2}{3}x + 3$
Ecuación punto-pendiente: $y - y_0 = m \cdot (x - x_0)$
$y - 5 = \frac{2}{3} \cdot (x - 3)$
Ecuación general: Ax + By + C
$\frac{2}{3}x - y + 3 = 0 \Rightarrow 2x - 3y + 9 = 0$

d. A (2 , –5) y B (3 , –1)
Ecuación explícita: y = mx + n
m = $\frac{-1-(-5)}{3-2} = 4 \rightarrow y = 4x + n \rightarrow n = y - 4x$. Sustituyendo en el punto A, n = – 13 y por tanto:
$y = 4x - 13$
Ecuación punto-pendiente: $y - y_0 = m \cdot (x - x_0)$
$y + 1 = 4 \cdot (x - 3)$
Ecuación general: Ax + By + C
$4x - y - 13 = 0$

14 Obtén, en cada, caso, mediante transposición de términos, la ecuación explícita de las siguientes rectas:

a. $y = 4 \cdot (x - 4)$
$y = 4 \cdot (x - 4) \Rightarrow y = 4x - 16$

b. $3x + 5y + 2 = 0$
$3x + 5y + 2 = 0 \Rightarrow 5y = -3x - 2 \Rightarrow y = -\frac{3}{5}x - \frac{2}{5}$

c. $4 \cdot (x + \frac{2}{3}) + y + 10 = 0$
$4 \cdot (x + \frac{2}{3}) + y + 10 = 0 \Rightarrow 4x + \frac{8}{3} + y + 10 = 0 \Rightarrow y = -4x - 10 - \frac{8}{3} \Rightarrow y = -4x - \frac{38}{3}$

15 Encuentra, en cada caso, la expresión algebraica de la función lineal que cumplen la condición indicada.

a. Su gráfica es una recta, su pendiente es m = 2 y pasa por el punto (3 , 5).

$m = 2 \rightarrow y = mx + n \rightarrow y = 2x + n \rightarrow n = y - 2x \rightarrow n = -1 \rightarrow y = 2x - 1$

b. Se trata de una función constante y su ordenada en el origen es 3.
$f(x) = 3$

c. Su gráfica es una recta que pasa por los puntos (3 , 0) y (0 , 3).

$y = mx + n \rightarrow$ Sustituyendo el punto (0 , 3), tenemos n = 3

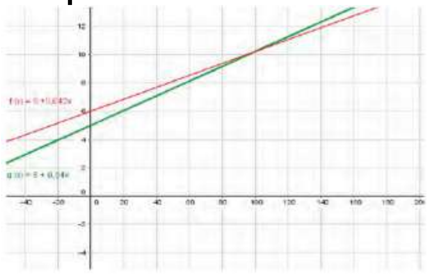
Sustituyendo el punto (3 , 0), tenemos que $3m + n = 0$

Como $n = 3 \rightarrow m = -1$ y entonces: $y = -x + 3$

16 Se desea contratar el suministro eléctrico de un domicilio. Dos compañías de electricidad han realizado sendas ofertas mensuales.
• La primera compañía cobra 5 € como cuota de enganche y 0,052 € por cada kilovatio-hora consumido.
• La segunda compañía cobra 6 € como cuota de enganche y 0,042 € por cada kilovatio-hora consumido.

a. Halla las expresiones algebraicas de las funciones afines que determinan el precio del suministro según los kilovatios-hora consumidos.
a. La función que determina el consumo en función de los kWh de la primera compañía es: f (x) = 5 + 0,052x
La función que determina el consumo en función de los kWh de la segunda compañía es: g (x) = 6 + 0,042x

b. Representa dichas funciones.



c. Si el consumo medio de un domicilio es de 300 kWh al mes, ¿cuál de las dos compañías resulta más provechosa?
En la primera compañía, el importe de la factura sería:
f (300) = 5 + 0,052 · 300 = 20,6 €
En la segunda compañía, el importe de la factura sería:
g (300) = 6 + 0,042 · 300 = 18,6 €
Para ese consumo, resulta más rentable la segunda compañía.

17 Indica, en cada caso, si la función es lineal o afín, determina la pendiente y señala si la función es creciente o decreciente.

a. *y* = 4*x* + 3
Función afín; pendiente: m = 4; función creciente.

b. *y* = –4*x*
b. Función lineal; pendiente: m = –4; función decreciente.

c. *y* = 5
Función afín; pendiente: m = 0; función constante.

d. *y* = 5*x* – 3
Función afín; pendiente: m = 5, función creciente.

e. *y* = –3*x* + 7
Función afín; pendiente: m = –3, función decreciente.

f. *y* = 5*x*
Función lineal; pendiente: m = 5; función creciente.

SOLUCIONES PÁG. 175

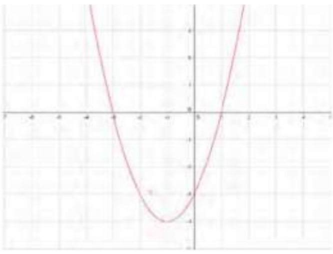
18 Indica si las siguientes variables están relacionadas por una función cuadrática. En caso afirmativo, halla la expresión algebraica de la función.

a. El área de un círculo y su radio.
El área de un círculo en función de su radio viene dada por la fórmula $A = \pi r^2$; por tanto, es una función cuadrática.

b. El área de un cuadrado y la longitud de uno de sus lados.
El área de un cuadrado en función de la longitud de uno de sus lados viene dada por la fórmula $A = l^2$; por tanto, es una función cuadrática.

c. El importe de la compra, expresado en euros, y los kilogramos de unos kiwis cuyo precio es de 3 €/kg.
El precio, expresado en euros, de la compra de x kg de kiwis a 3 €/kg viene dado por la función $y = 3x$; por tanto, no es una función cuadrática.

19 Dibuja una parábola que tenga estas características:
– a > 0
– Su vértice está en el punto (–1 , –4).
– Corta el eje *X* en el punto (–3 , 0) y el eje *Y* en el punto (0 , –3).



20 Calcula el vértice de las siguientes parábolas e indica si se trata de un máximo o de un mínimo:

Sustituyendo en la fórmula que calcula el vértice: $x_v = \frac{-b}{2a}$ y $y_v = f\left(\frac{-b}{2a}\right)$

a. $\boldsymbol{y = x^2 - 5x + 6}$
$x_v = \frac{-(-5)}{2} = \frac{5}{2}$, $y_v = f\left(\frac{5}{2}\right) = \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 5 \cdot \frac{5}{2} + 6 = \frac{25}{4} - \frac{25}{2} + 6 = -\frac{1}{4}$; a > 0, luego es un mínimo.

b. $\boldsymbol{y = x^2 + x}$
$x_v = -\frac{1}{2}$, $y_v = f\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$; a > 0, luego es un mínimo.

c. $\boldsymbol{y = -x^2 + 3x}$
$x_v = \frac{3}{2}$, $y_v = f\left(\frac{3}{2}\right) = -\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 3 \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{4}$; a < 0, luego es un máximo.

d. $\boldsymbol{y = -x^2 + 5x}$
$x_v = \frac{5}{2}$, $y_v = f\left(\frac{5}{2}\right) = -\left(\frac{5}{2}\right)^2 + 5 \cdot \left(\frac{5}{2}\right) = -\frac{25}{4} + \frac{25}{2} = \frac{25}{4}$; a < 0, luego es un máximo.

e. $\boldsymbol{y = -x^2 + 5x - 6}$
$x_v = \frac{5}{2}$, $y_v = f\left(\frac{5}{2}\right) = -\left(\frac{5}{2}\right)^2 + 5 \cdot \frac{5}{2} - 6 = -\frac{25}{4} + \frac{25}{2} - 6 = \frac{1}{4}$; a < 0, luego es un máximo.

f. $\boldsymbol{y = 4x^2 + 16}$
$x_v = 0$, $y_v = f(0) = 16$; a > 0, luego es un mínimo.

21 Halla el eje de simetría de estas parábolas:

a. $\boldsymbol{y = x^2 - 4x}$
$x = \frac{-(-4)}{2} = 2 \Rightarrow x = 2$

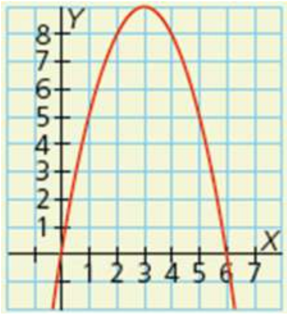
b. $\boldsymbol{y = 2x^2 - 18}$
$x = \frac{0}{4} = 0 \Rightarrow x = 0$

c. $\boldsymbol{y = 9x^2 + 9x + 2}$
$x = \frac{-9}{18} = \frac{-1}{2} \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$

d. $\boldsymbol{y = 2x^2 + 4x - 6}$
$x = \frac{-4}{4} = -1 \Rightarrow x = -1$

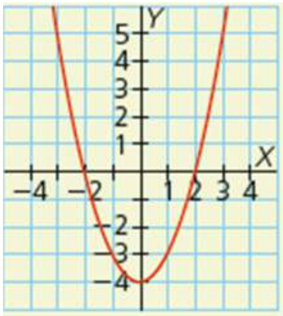
22 Determina el vértice, el eje de simetría y los puntos de corte con los ejes de cada parábola.

a.



Vértice: (3 , 9); eje de simetría: $x = 3$; cortes con el eje *Y*: (0 , 0); cortes con el eje *X*: (0 , 0), (6 , 0)

b.



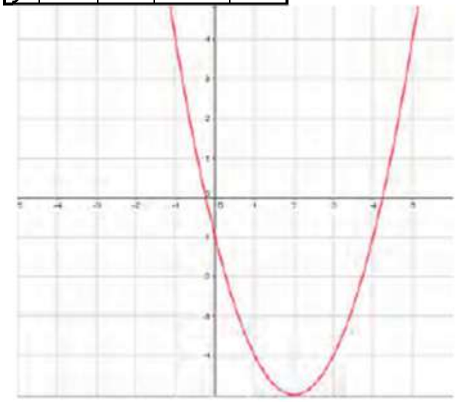
Vértice: (0 , –4); eje de simetría: $x = 0$; cortes con el eje *Y*: (0 , –4); cortes con el eje *X*: (–2 , 0), (2 , 0)

23 Representa gráficamente las siguientes funciones cuadráticas:

Construimos las tablas de valores correspondientes para poder dibujarlas.

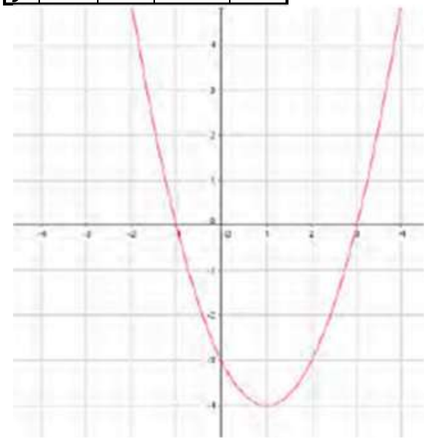
a. $y = x^2 - 4x - 1$

x	–1	0	1	2
y	4	–1	–4	–5



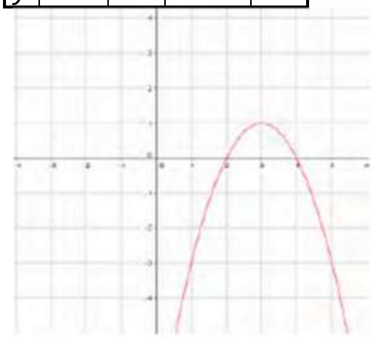
b. $y = x^2 - 2x - 3$

x	–1	0	1	2
y	0	–3	–4	–3



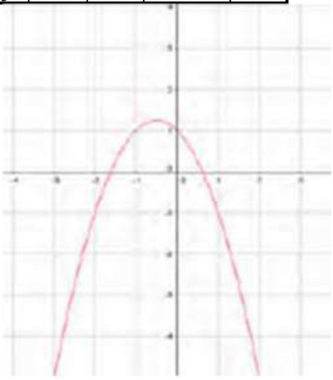
c. $y = -x^2 + 6x - 8$

x	–1	0	1	2
y	–15	–8	–3	0



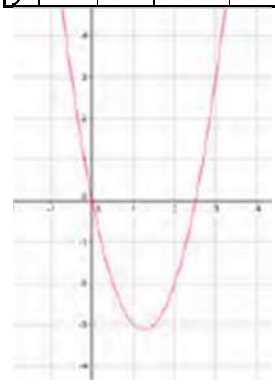
d. $y = x^2 - x + 1$

x	–1	0	0,5	2
y	3	1	0,75	3



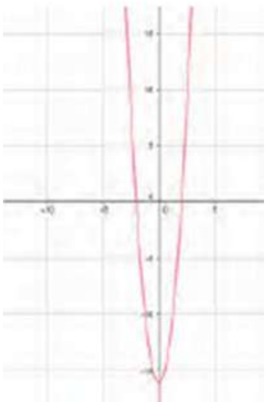
e. $y = 2x^2 - 5x$

x	–1	0	1	2
y	7	0	–3	–2



f. $y = 4x^2 - 16$

x	–1	0	1	2
y	–12	–16	–12	0



24 Determina la función que relaciona el área de un rectángulo con su altura, sabiendo que mide 2 cm más de alto que de largo.

f $(x) = x\ (x - 2) \Rightarrow$ f $(x) = x^2 - 2x$
Se trata de una función cuadrática.

25 Actividad resuelta.

26 Halla la parábola que tiene su vértice en el punto (5 , 25) y corta el eje *X* en los puntos (0 , 0) y (10 , 0).

Al cortar el eje *Y* en el punto (0 , 0) y sustituirlo en la expresión algebraica de la función cuadrática ($y = ax^2 + bx + c$) se deduce que c = 0.
Si sustituimos el vértice y el punto que nos queda obtenemos:

$(5\ ,\ 25) \rightarrow a \cdot 5^2 + b \cdot 5 = 25 \rightarrow 25a + 5b = 25$

$(10\ ,\ 0) \rightarrow a \cdot 10^2 + b \cdot 10 = 0 \rightarrow 100a + 10b = 0$

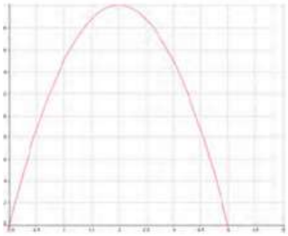
Resolviendo el sistema tenemos que a = –1 y b = 10:
Por lo que la expresión algebraica de la función es: f $(x) = -x^2 + 10x$

27 La altura que alcanza una pelota lanzada hacia arriba depende del tiempo transcurrido desde su lanzamiento. La relación entre la altura, *y*, y el tiempo, *x*, viene determinada por la siguiente expresión:

$$y = 20x - 5x^2$$

Representa la gráfica correspondiente e indica en qué momento alcanza la pelota su altura máxima.

Como a = –5 < 0, la función está abierta hacia abajo y tiene un máximo.
Vértice: $x_v = \frac{-20}{-10} = 2 \Rightarrow y_v = 40 - 20 = 20 \Rightarrow V\ (2\ ,\ 20)$
Eje de simetría: $x = 2$
Cortes con el eje *Y*: (0 , 0)
Cortes con el eje *X*: (0 , 0); (4 , 0)



La pelota alcanza su altura máxima a los 2 s, momento en que alcanza los 20 m.

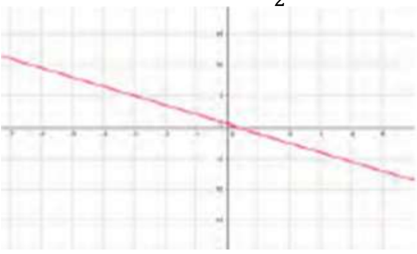
SOLUCIONES PÁG. 179

28 Representa, en cada caso, la recta que contiene todas las soluciones de la ecuación lineal.

a. $3x + 2y = 1$
Hallamos dos puntos de la recta:

$x = 1 \rightarrow 3 \cdot 1 + 2y = 1 \rightarrow y = -1$ y tenemos primera solución: $(1 , -1)$

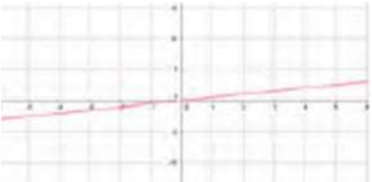
$x = 2 \rightarrow 3 \cdot 2 + 2y = 1 \rightarrow y = -\frac{5}{2}$ y tenemos primera solución: $\left(2 , -\frac{5}{2}\right)$



b. $x - 2y = 0$

$x = 1 \rightarrow 1 - 2y = 0 \rightarrow y = \frac{1}{2}$ y tenemos primera solución: $\left(1 , \frac{1}{2}\right)$

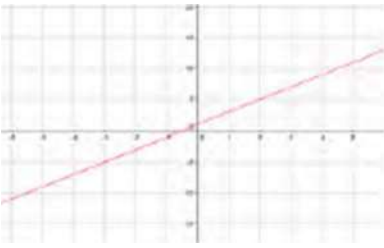
$x = 2 \rightarrow 2 - 2y = 0 \rightarrow y = 1$ y tenemos primera solución: $(2 , 1)$



c. $-2x + y = 1$

$x = 1 \rightarrow -2 \cdot 1 + y = 1 \rightarrow y = 3$ y tenemos primera solución: $(1 , 3)$

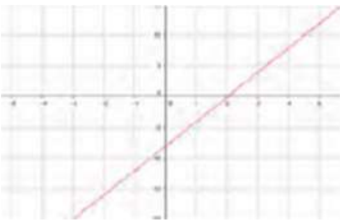
$x = 2 \rightarrow -2 \cdot 2 + y = 1 \rightarrow y = 5$ y tenemos primera solución: $(2 , 5)$



d. $4x - y = 8$

$x = 1 \rightarrow 4 \cdot 1 - y = 8 \rightarrow y = -4$ y tenemos primera solución: $(1 , -4)$

$x = 2 \rightarrow 4 \cdot 2 - y = 8 \rightarrow y = 0$ y tenemos primera solución: $(2 , 0)$

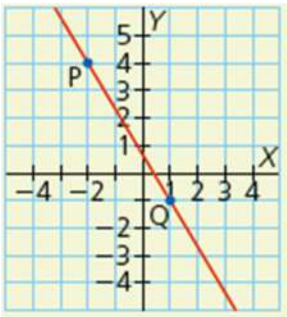


29 De una ecuación lineal con dos incógnitas se conocen dos de sus soluciones: x = 1, y = 5 y x = 2, y = 6. Determina la expresión algebraica de la recta que contiene todas las soluciones de esta ecuación.

$y = mx + n \rightarrow 5 = m + n$ y $6 = 2m + n$
Resolviendo el sistema de ecuaciones, tenemos que m = 1 y n = 4. Entonces, su expresión sería: $y = x + 4$

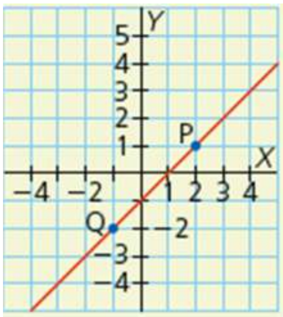
30 Halla, en cada caso, una ecuación lineal con dos incógnitas cuya solución venga dada por la recta indicada.

a.



$y = mx + n \rightarrow -1 = m + n$ y $4 = -2m + n$
Resolviendo el sistema de ecuaciones, tenemos que m = $-\frac{5}{3}$ y n = $\frac{2}{3}$. Entonces, su expresión sería: $y = -\frac{5}{3}x + \frac{2}{3}$

b.



$y = mx + n \rightarrow \quad 1 = 2m + n$ y $-2 = -m + n$
Resolviendo el sistema de ecuaciones, tenemos que m = 1 y n = – 1. Entonces, su expresión sería: $y = x - 1$

31 Actividad resuelta.

32 Estudia la posición relativa de los siguientes pares de rectas:

a. $-x + y = -5$; $y - 3x = -5$
Son secantes, ya que tienen distinta pendiente (1 y 3, respectivamente).

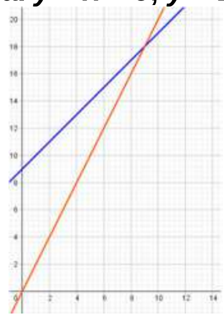
b. $y - 4x = 0$; $y - 4x = 2$
Como tienen distintas ordenadas en el origen, son rectas paralelas.

c. $y = 3$; $y = 4$
Son rectas paralelas, ya que tienen distinta pendiente y distinta ordenada en el origen (3 y 4, respectivamente).

d. $x = 3$; $y = 3$
Son secantes en el punto (3 , 3).

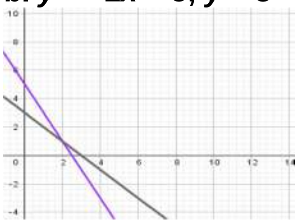
33 Determina la posición relativa de cada par de rectas y, en el caso de que sean secantes, calcula su punto de corte, representando previamente dichas rectas.

a. ***y* = *x* + 9; *y* = 2*x***



Se cortan en el punto (9 , 18); luego, $x = 9$, $y = 18$ es la solución del sistema.

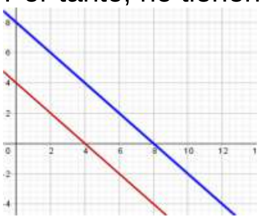
b. ***y* = –2*x* + 5; *y* = 3 – *x***



Se cortan en el punto (2 , 1); luego, la solución es $x = 2$, $y = 1$.

c. ***y* = –*x* + 4; *y* = –*x* – 8**

Son dos rectas paralelas, ambas tienen pendiente –1 y distintas ordenadas en el origen. Por tanto, no tienen puntos de corte.



d. ***y* = 3; *y* = 5 + *x***

Son dos rectas secantes, pues tienen pendientes diferentes.

Se cortan en el punto (–2 , 3), por tanto, la solución es: $x = -2$, $y = 3$

34 Escribe, en cada caso, la ecuación de dos rectas secantes y dos paralelas a la recta indicada.

a. $y = x - 5$
Rectas paralelas: $y = x + 5$; $y = x + 8$
Rectas secantes: $y = 2x + 1$; $y = -5x + 3$

b. $y = -7$
Rectas paralelas: $y = 3$; $y = 5$
Rectas secantes: $y = 2x$; $y = x - 1$

c. $x = 4$
Rectas paralelas: $x = 5$; $x = -3$
Rectas secantes: $y = 2$; $y = x + 3$

d. $-5x + 7$
Rectas paralelas: $y = -5x$; $y = -5x + 2$
Rectas secantes: $y = 6x$; $y = 4$

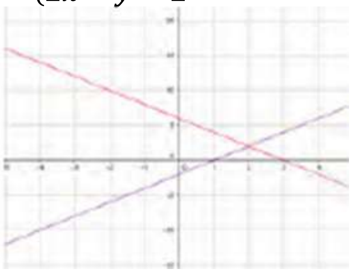
35 Actividad resuelta.

36 Determina, en cada caso, si el sistema tiene solución y obtenla de forma gráfica.

a. $\begin{cases} \boldsymbol{x = 3} \\ \boldsymbol{y = 5} \end{cases}$

Son secantes y su punto de corte es (3 , 5).

b. $\begin{cases} \boldsymbol{2x + y = 6} \\ \boldsymbol{2x - y = 2} \end{cases}$

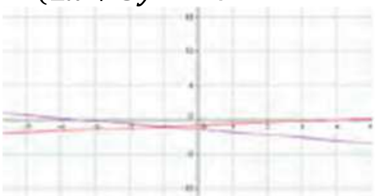


$2x + y = 6 \rightarrow y = 6 - 2x \rightarrow$ m = –2

$2x - y = 2 \rightarrow y = 2x - 2 \rightarrow$ m = 2

Son secantes y su punto de corte es (2 , 2).

c. $\begin{cases} \boldsymbol{-x + 5y = -4} \\ \boldsymbol{2x + 5y = -7} \end{cases}$



$-x + 5y = -4 \rightarrow y = \frac{-4 + x}{5} \rightarrow$ m = $\frac{1}{5}$

$2x + 5y = -7 \rightarrow y = \frac{-7 - 2x}{5} \rightarrow$ m = $\frac{-2}{5}$

Son secantes y su punto de corte es (–1 , –1).

d. $\begin{cases} \boldsymbol{-4x + 6y = -6} \\ \boldsymbol{-2x + 3y = -3} \end{cases}$

Las rectas son paralelas y, por tanto, el sistema no tiene solución.

37 Construye, en cada caso, un sistema de ecuaciones que tenga las soluciones indicadas. Después, compara los sistemas que has obtenido con los de tu compañero.

a. $\boldsymbol{x = 3; y = 2}$

$$\begin{cases} \mathbf{5x + 3y = 21} \\ \mathbf{3x - 2y = 5} \end{cases}$$

b. $\boldsymbol{x = 0; y = -3}$

$$\begin{cases} \mathbf{5x + 3y = -9} \\ \mathbf{3x - 2y = 5} \end{cases}$$

c. $\boldsymbol{x = 1; y = 4}$

$$\begin{cases} \mathbf{5x + 3y = 17} \\ \mathbf{3x - 2y = -2} \end{cases}$$

d. $\boldsymbol{x = -2; y = 3}$

$$\begin{cases} \mathbf{5x + 3y = -1} \\ \mathbf{3x - 2y = -12} \end{cases}$$

38 Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado e interpreta gráficamente las soluciones:

a. $\boldsymbol{-x^2 + 6x - 8 = 0}$

$-x^2 + 6x - 8 = 0 \Rightarrow x = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 32}}{-2} = \frac{-6 \pm 2}{-2} \Rightarrow x_1 = 2, x_2 = 4$

La parábola corta el eje X en los puntos (2 , 0) y (4 , 0).

b. $\boldsymbol{x^2 - 5x = 0}$

$x^2 - 5x = 0 \Rightarrow x(x - 5) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 5$

La parábola corta el eje X en los puntos (0 , 0) y (5 , 0).

c. $\boldsymbol{2x^2 + 2x + 6 = 0}$

$2x^2 + 2x + 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 48}}{4} \Rightarrow$ No tiene solución real.

La parábola no corta el eje X en ningún punto.

d. $\boldsymbol{-x^2 + 8x - 16 = 0}$

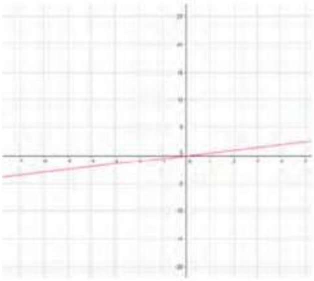
$-x^2 + 8x - 16 = 0 \Rightarrow x = \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 64}}{-2} = 4$

La parábola corta el eje X en el punto (4 , 0).

SOLUCIONES PÁG. 181

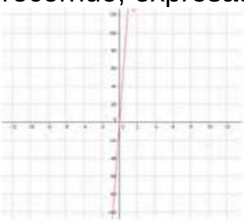
39 Una frutería vende sandías a 0,5 € el kilogramo. Determina la función que permite calcular el coste de una sandía en función de su masa y realiza su representación gráfica.

$y = 0{,}5 \cdot x$.
Se trata de una función lineal o de proporcionalidad directa y su representación gráfica es la siguiente recta:



40 Un tren viaja a 140 km/h. ¿Cuánto tiempo tarda en recorrer 420 km? ¿Cuántos kilómetros hace en 4 h? Determina la expresión algebraica que define esta relación funcional y realiza su representación gráfica.

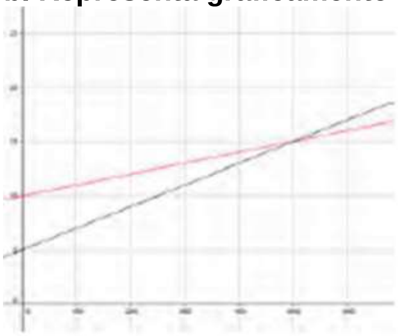
Tardará 3 h en recorrer 420 km (420/140 = 3). En 4 h recorrerá: $4 \cdot 140 = 560$ km
Si se toma el tiempo expresado en horas como variable independiente, *x*, y el espacio recorrido, expresado en kilómetros, como variable dependiente, *y*, se obtiene: $y = 140x$



41 Un servicio de telefonía móvil tiene dos tarifas: la tarifa Amigo, que consiste en una parte fija mensual de 10 € al mes y 0,01 € por minuto, y la tarifa Hermano, en la que hay una parte fija mensual de 5 € al mes, a la que hay que añadir 0,02 € por minuto.

a. Obtén una función para cada una de las dos tarifas que proporcione el gasto según los minutos consumidos.
La función que define la tarifa Amigo es $y = 0{,}01\,x + 10$, y la función que define la tarifa Hermano, $y = 0{,}02\,x + 5$.

b. Representa gráficamente ambas funciones.



c. ¿Con cuántos minutos de consumo es el coste de ambas tarifas el mismo?
Ambas tarifan cuestan 15 € cuando se consumen 500 minutos.

$0{,}01\,x + 10 = 0{,}02\,x + 5 \rightarrow x = 500$

d. Si un mes se consumen 200 min, ¿cuál de las dos tarifas es más ventajosa? ¿Y si se habla durante 600 min?
Para un consumo de 200 minutos, la tarifa Amigo asciende a $10 + 200 \cdot 0{,}01 = 12$ €, y la tarifa HERMANO, a $5 + 200 \cdot 0{,}02 = 9$ €; luego, resulta más rentable la tarifa Hermano.
Para un consumo de 600 minutos, la tarifa Amigo vale $10 + 600 \cdot 0{,}01 = 16$ €, y la tarifa Hermano, $5 + 600 \cdot 0{,}02 = 17$ €; luego, resulta más rentable la tarifa Amigo.
Para consumos inferiores a 15 min, la tarifa más económica es la tarifa Hermano, y para consumos superiores a 15 min, la tarifa Amigo.

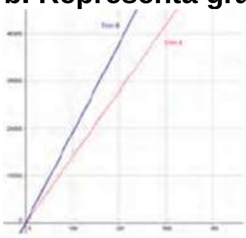
42 Tania y Sergio están buscando un piso para alquilar y han encontrado una oferta que les interesa: les piden un depósito inicial de 500 € de fianza y una mensualidad de 400 €. Determina la función que permite obtener el importe del alquiler en función del número de meses.

$y = 500 + 400\,x$

43 Un tren, A, salió de Madrid con destino París a una velocidad media de 140 km/h. Otro tren, B, salió de París con dirección Madrid a una velocidad media de 190 km/h.

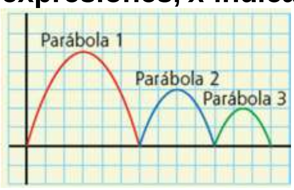
a. Determina las funciones que permiten obtener los kilómetros recorridos por cada tren en función del número de hora de trayecto.
Tren A: $y = 140\,x$; Tren B: $y = 190\,x$

b. Representa gráficamente dichas funciones.



c. ¿A qué hora se cruzarán los dos trenes si la distancia que separa Madrid y París es de 1 650 km? ¿A qué distancia de la capital de España tendrá lugar el encuentro?
De la ecuación de la velocidad (velocidad = espacio/tiempo) se puede deducir el tiempo: $140x + 190x = 1\,650 \rightarrow x = 5$. Se cruzarán pasadas 5 horas a 700 km de Madrid y a 950 km de París ($140 \cdot x = 140 \cdot 5 = 700$ y $190 \cdot x = 190 \cdot 5 = 950$).

44 Una pelota bota siguiendo trayectorias parabólicas encadenadas según se muestra en la figura adjunta. La ecuación de la parábola 1 es $y = 2x - x^2$; la de la parábola 2, $y = -2x^2 + 10x - 12$, y la de la parábola 3, $y = -x^2 + 7x - 12$. En estas expresiones, *x* indica el tiempo (en segundos), e *y*, la altura (en metros).



a. Calcula la altura máxima que alcanza la pelota después del primer y el segundo bote.
El vértice de la parábola $\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$ se encuentra en el punto:
$\left(-\frac{10}{4} = 2{,}5\ ,\ f(2{,}5) = 0{,}5\right)$, por lo que la altura máxima después del primer bote es de 0,5 m.

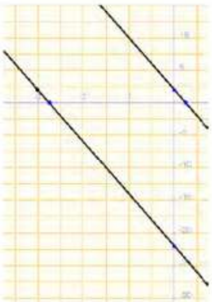
b. ¿En qué instante se dan los botes 1 y 2?
Resolvemos la ecuación de la segunda parábola: $y = -2x^2 + 10x - 12 \rightarrow$
$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-10 \pm \sqrt{10^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-12)}}{-4} \rightarrow x_1 = 3$ y $x_2 = 2$. El primer bote se da a los 2,5 s. Resolvemos la ecuación de la tercera parábola: $y = -2x^2 + 10x - 12 \rightarrow x_1 = 3$ y $x_2 = 4$. El segundo bote se da a los 3,5 s.

c. ¿Cuál fue la máxima altura que se alcanzó en el primer tramo?
$\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right) = (1\ ,\ 1)$. La altura máxima es de 1 m.

SOLUCIONES PÁG. 182

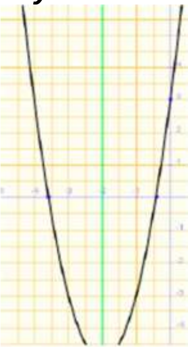
1. Representa la función *y* = –8*x* + 2 y dibuja la recta que es paralela a la gráfica de dicha función y pasa por el punto (–3 , 2).

```
representar(−8x+2) → tablero1
representar(−8x−22) → tablero1
representar(punto(−3,2)) → tablero1
```



2. Representa estas parábolas y determina los correspondientes ejes de simetría, vértices y puntos de corte con los ejes.

a. $y = 2x^2 + 8x + 3$



Vértice: (–2 , –5)

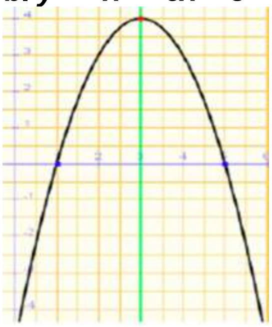
Puntos de corte con el eje *X*: $2x^2 + 8x + 3 = 0 \rightarrow x = \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3}}{2 \cdot 2} \rightarrow$

$(\frac{-\sqrt{10}}{2} - 2, 0)$, $(\frac{\sqrt{10}}{2} - 2, 0)$

Punto de corte con el eje *Y*: (0 , 3)

Eje de simetría: $x = -2$

b. $y = -x^2 + 6x - 5$



Vértice: (3 , 4)

Puntos de corte con el eje *X*: (1 , 0), (5 , 0)

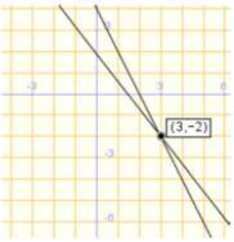
Punto de corte con el eje *Y*: (0 , –5)

Eje de simetría: $x = 3$

3. Resuelve gráficamente estos sistemas:

a. $\begin{cases} \mathbf{2x + y = 4} \\ \mathbf{9x + 7y = 13} \end{cases}$

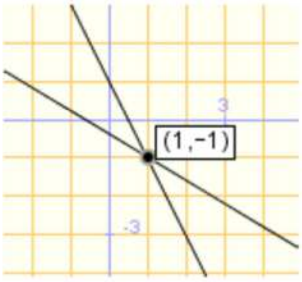
dibujar({2x+y=4,9x+7y=13}) → tablero1



El punto de corte es (3 , –2).

b. $\begin{cases} \mathbf{3x + 5y = -2} \\ \mathbf{2x + y = 1} \end{cases}$

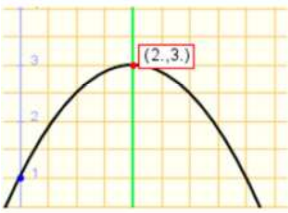
dibujar({3x+5y=−2,2x+y=1}) → tablero1



El punto de corte (1 , –1) es solución del sistema.

4. Un balón sigue una trayectoria parabólica dada por la ecuación $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 1$. Dibuja la gráfica e indica la altura máxima que alcanza el balón.

representar(−1/2x^2+2x+1) → tablero1



El vértice es, por tanto, el punto (2 , 3); luego, alcanza una altura máxima de 3 m.

SOLUCIONES PÁG. 183

1 Indica si los siguientes enunciados son verdaderos o falsos:

a. Una función lineal que tiene –4 de pendiente es una función decreciente.
Verdadero.

b. La función lineal f (*x*) = 0 tiene como dominio todo $\mathbb{R}$, y su recorrido es también todo $\mathbb{R}$.
Falso; el dominio es todo $\mathbb{R}$, pero su recorrido es solo {0}.

c. Una función lineal es siempre discontinua en *x* = 0.
Falso; las funciones lineales son continuas en todo $\mathbb{R}$.

d. La pendiente de una función lineal que pasa por el punto (1 , 3) es $\frac{1}{3}$.
Falso; la pendiente es $\frac{3}{1} = 3$.

e. Las funciones afines son siempre funciones crecientes.
Falso; las funciones afines son crecientes, constantes y decrecientes.

f. Si una función afín tiene por ordenada en el origen el valor n = 3, entonces la gráfica de la función pasa por el punto (0 , 3).
Verdadero.

g. Si la recta que representa una función no pasa por el origen, entonces la función es lineal.
Falso; las rectas que no pasan por el origen corresponden a las gráficas de funciones afines.

h. No hay ninguna función afín que tenga como recorrido el punto {3}.
Falso; la función *y* = 3, por ejemplo, verifica la condición.

i. Las rectas que pasan por (0 , 0) son las gráfica de funciones afines.
Falso; son gráficas de funciones lineales.

j. Una función cuadrática con a > 0 tiene como gráfica una parábola abierta hacia abajo.
Falso; es una parábola abierta hacia arriba.

k. Si el vértice de una parábola es el punto (3 , 6) y a < 0, la parábola corta el eje X en dos puntos.
Verdadero.

l. Si una función cuadrática tiene un máximo en (3 , 4), entonces dicho punto es el vértice.
Verdadero; el máximo o mínimo de una función cuadrática se corresponde con el vértice de la parábola que la representa.

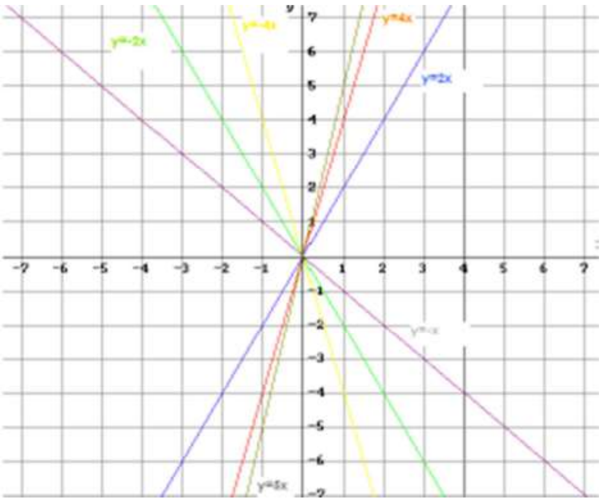
SOLUCIONES PÁG. 184

REPASO FINAL

FUNCIONES LINEALES

1 Representa gráficamente, en cada caso, la función lineal y determina la pendiente de la recta correspondiente, indicando si es creciente o decreciente. Después, comprueba los resultados que has obtenido con Wiris.

a. $y = -4x$
b. $y = 4x$
c. $y = 2x$
d. $y = -2x$
e. $y = -x$
f. $y = 5x$



a. Pendiente: –4; función decreciente.
b. Pendiente: 4; función creciente.
c. Pendiente: 2; función creciente.
d. Pendiente: –2; función decreciente.
e. Pendiente: –1; función decreciente.
f. Pendiente: 5; función creciente.

2 Determina la pendiente y la expresión algebraica de las funciones lineales que pasan por los siguientes puntos:

a. A (3 , 1)
Pendiente: $m = \frac{1}{3}$; ecuación: $y = \frac{1}{3}x$

b. B (–8 , 4)
Pendiente: $m = -\frac{4}{8} = -\frac{1}{2}$; ecuación: $y = -\frac{1}{2}x$

c. C (4 , –2)
Pendiente: $m = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$; ecuación: $y = -\frac{1}{2}x$

d. D (–1 , 1)
Pendiente: $m = -1$; ecuación: $y = -x$

3 Determina el dominio y el recorrido de estas funciones lineales:

a. $y = 3x$
Dominio: ℝ; recorrido: ℝ

b. $y = 0$
Dominio: ℝ; recorrido: {0}

c. $y = –5x$
Dominio: ℝ; recorrido: ℝ

d. $y = 8x$
Dominio: ℝ; recorrido: ℝ

4 Completa en tu cuaderno las siguientes tablas, sabiendo que corresponden a funciones lineales:

a.

x	2	4	3		
y		24		36	–12

x	2	4	3	6	–2
y	12	24	18	36	–12

b.

x	1	3		4	–5
y		0,6	–0,8		

x	1	3	–4	4	–5
y	0,2	0,6	–0,8	0,8	–1

5 Para elaborar pan, se necesitan 700 g de agua por cada 300 g de harina.

a. ¿Cuántos litros de agua se utilizarán para elaborar una masa de pan que contiene 3 kg de harina?
Mediante una regla de 3, se obtiene que necesitamos 7 000 g de agua, que suponen 7 L de agua.

b. ¿Qué cantidad de harina se precisa para preparar la masa de pan que contiene 14 L de agua?
6 000 g de harina; es decir, 6 kg de harina.

c. Determina la expresión algebraica de la función que relaciona los gramos de harina que se usan en función de los gramos de agua. (Nota: 1 L agua = 1 000 g agua).
$y = \frac{3}{7}x$, donde x son los gramos de agua, e y, los gramos de harina.

FUNCIONES AFINES

6 Indica cuál es la expresión algebraica de la función afín cuya gráfica pasa por el punto (0 , 4) y tiene pendiente 3.

a. $y = 3x + 4$ **c.** $y = 3x$

b. $y = 4x + 3$ **d.** $y = 4x$

La respuesta es la a ya que es la única con pendiente 3 que cumple la igualdad al sustituir el punto dado.

7 Halla, en cada caso, la expresión algebraica de la función afín cuya gráfica pasa por los siguientes pares de puntos y determina si es creciente o decreciente, indicando también cuál es su dominio y su recorrido.

a. A (1 , 2) y B (4 , 1)
$y = mx + n \rightarrow 2 = m + n$ y $1 = 4m + n \rightarrow n = \frac{7}{3}$ y $m = -\frac{1}{3}$
$f(x) = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{3}$; la función afín es decreciente; Dominio: $\mathbb{R}$; Recorrido: $\mathbb{R}$

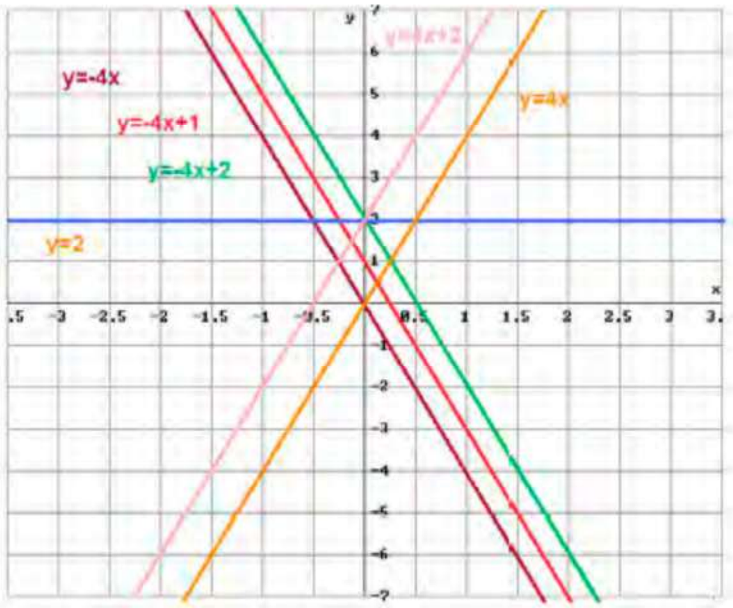
b. A (8 , 2) y B (3 , 1)
$y = mx + n \rightarrow 2 = 8m + n$ y $1 = 3m + n \rightarrow n = \frac{2}{5}$ y $m = \frac{1}{5}$
$f(x) = \frac{1}{5}x + \frac{2}{5}$; la función afín es creciente; Dominio: $\mathbb{R}$; Recorrido: $\mathbb{R}$

c. A (3 , 1) y B (–3 , –3)
$y = mx + n \rightarrow 1 = 3m + n$ y $-3 = -3m + n \rightarrow n = -1$ y $m = \frac{2}{3}$
$f(x) = \frac{2}{3}x - 1$; la función afín es creciente; Dominio: $\mathbb{R}$; Recorrido: $\mathbb{R}$

d. A (–3 , 4) y B (1 , 1)
$y = mx + n \rightarrow 4 = -3m + n$ y $1 = m + n \rightarrow n = \frac{7}{4}$ y $m = -\frac{3}{4}$
$f(x) = -\frac{3}{4}x + \frac{7}{4}$; la función afín es decreciente; Dominio: $\mathbb{R}$; Recorrido: $\mathbb{R}$

8 Representa las siguientes funciones en unos mismos ejes de coordenadas:

$y = -4x$	$y = -4x + 2$	$y = -4x + 1$
$y = 4x$	$y = 2$	$y = 4x + 2$



a. ¿Existe alguna relación entre las gráficas de estas funciones?
Las funciones tienen la misma pendiente, aunque unas con signo contrario de las otras.

b. Indica la pendiente de cada una y su ordenada en el origen.
Pendientes: –4, –4, –4, 4, 0,4; ordenadas en el origen: 0, 2, 1, 0, 2, 2

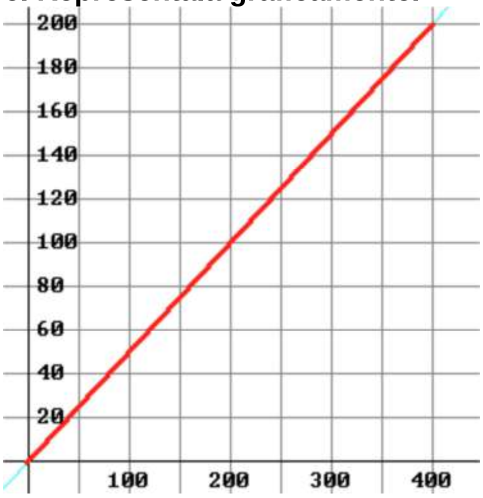
9 Una piscina municipal tiene una profundidad de 200 cm. Al inicio de la temporada se vacía y se limpian sus paredes con productos especiales para, a continuación, volver a llenarla. En este proceso, el nivel de la piscina aumenta a razón de 0,5 cm por minuto.

a. Construye una tabla en la que se refleje el nivel del agua (expresado en centímetros) en función del tiempo de llenado (expresado en minutos).

Tiempo (min)	1	10	20	30	40	50	100	200	300	400
Nivel del agua (cm)	0,5	5	10	15	20	25	50	100	150	200

b. Determina la expresión algebraica de esta función e indica de qué tipo es.
$y = 0,5x$; es una función lineal

c. Represéntala gráficamente.



d. ¿Cuál será el nivel de agua a los 10 min de empezarse a llenar?
A los 10 minutos, el nivel del agua alcanza los 5 cm.

e. ¿Cuánto tiempo tardará en llenarse?
Tarda en llenarse 400 min.

SOLUCIONES PÁG. 185

FUNCIONES CUADRÁTICAS

10 Indica cuáles de las siguientes funciones cuadráticas tienen máximo y cuáles tienen mínimo y calcúlalos en cada caso:

a. $\boldsymbol{y = 2x^2 + x + 3}$
$x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{1}{4} \Rightarrow y_v = f\left(-\frac{b}{2a}\right) = 2 \cdot \frac{1}{16} - \frac{1}{4} + 3 = \frac{23}{8}$; se trata de un mínimo.

b. $\boldsymbol{y = x^2 + 6x + 9}$
$x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{6}{2} = -3 \Rightarrow y_v = f\left(-\frac{b}{2a}\right) = 9 - 18 + 9 = 0$; se trata de un mínimo.

c. $\boldsymbol{y = -x^2 + 3x}$
$x_v = -\frac{b}{2a} = \frac{3}{2} = \Rightarrow y_v = f\left(-\frac{b}{2a}\right) = -\frac{9}{4} + \frac{9}{2} = \frac{9}{4}$; se trata de un máximo.

d. $\boldsymbol{y = -4x^2 + 8x}$
$x_v = -\frac{b}{2a} = \frac{8}{8} = 1 \Rightarrow y_v = f\left(-\frac{b}{2a}\right) = -4 + 8 = 4$; se trata de un máximo.

11 Indica cuáles de las siguientes funciones cuadráticas tienen un máximo:

a. $\boldsymbol{y = -3x^2 + 2x - 3}$ **b.** $\boldsymbol{y = 3x^2 + 2}$

c. $\boldsymbol{y = -x^2 + 5x - 3}$ **d.** $\boldsymbol{y = 4x^2 + 3x - 1}$

Tienen máximo a. y c porque a < 0.

12 Calcula el vértice y el eje de simetría de estas parábolas:

Vértice $\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$

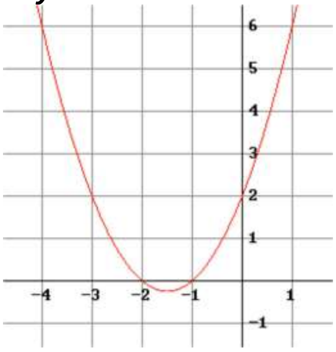
a. $\boldsymbol{y = -x^2 + 16}$
Vértice: $x_v = \frac{0}{2} = 0 \Rightarrow y_v = 16$; V (0 , 16). Eje de simetría: $x = 0$

b. $\boldsymbol{y = -2x^2 - 8x - 6}$
Vértice: $x_v = \frac{8}{-4} = -2 \Rightarrow y_v = -8 + 16 - 6 = 2$; V (–2 , 2). Eje de simetría: $x = -2$

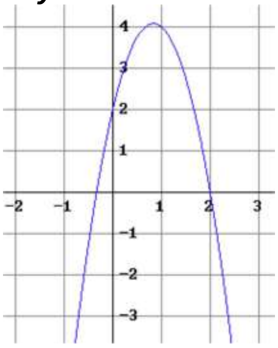
c. $\boldsymbol{y = x^2 + 2x - 5}$
Vértice: $x_v = -\frac{2}{2} = -1 \Rightarrow y_v = 1 - 2 - 5 = -6$; V (–1 , –6). Eje de simetría: $x = -1$

13 Representa gráficamente las funciones cuadráticas propuestas. Después, comprueba los resultados obtenidos con Wiris.

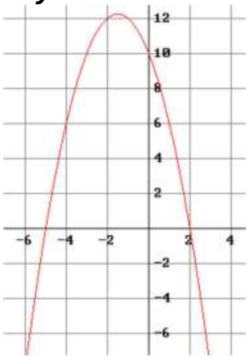
a. $y = x^2 + 3x + 2$



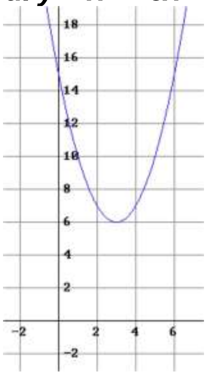
b. $y = -3x^2 + 5x + 2$



c. $y = -x^2 - 3x + 10$



d. $y = x^2 - 6x + 15$



14 Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de las siguientes funciones cuadráticas:

a. $y = x^2 - 9x$

Como a > 0 y su eje de simetría está en $x = \frac{9}{2}$, la función es decreciente en $(-\infty , \frac{9}{2})$ y creciente en $(\frac{9}{2} , +\infty)$.

b. $y = -x^2 - 2x + 2$

Como a < 0 y su eje de simetría está en $x = -1$, la función es creciente en $(-\infty , -1)$ y decreciente en $(-1 , +\infty)$.

15 Determina la ecuación de la parábola que pasa por los puntos (–4 , 10) y (–2 , 2) y corta el eje *Y* en (0 , 10).

Al cortar el eje *Y* en (0 , 10), tenemos: $ax^2 + bx + c = y \rightarrow 0 \cdot x^2 + b \cdot 0 + c = 10 \rightarrow c = 10$

Sustituyendo el punto y el vértice tenemos el sistema de ecuaciones:

$16a - 4b = 10$
$4a - 2b = 2$ que da como solución: $a = 2$ y $b = 8 \rightarrow f(x) = 2x^2 + 8x + 10$

16 Determina la ecuación de la parábola que corta el eje *X* en los puntos (–1 , 0) y (3 , 0) y el eje *Y* en el punto (0 , –3).

Al cortar el eje *Y* en el punto (0 , –3) y sustituirlo en la expresión algebraica de la función cuadrática ($y = ax^2 + bx + c$) se deduce que $c = -3$.

Si sustituimos el vértice y el punto que nos queda obtenemos:

$(-1 , 0) \rightarrow a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) - 3 = 0 \rightarrow a - b - 3 = 0$

$(3 , 0) \rightarrow a \cdot 3^2 + b \cdot 3 - 3 = 0 \rightarrow 9a + 3b - 3 = 0$

Resolviendo el sistema tenemos que $a = 1$ y $b = -2$ por lo que la expresión algebraica de la función es: $f(x) = x^2 - 2x - 3$

17 Indica cuál es el punto de corte con el eje Y de las siguientes parábolas. Después, comprueba con Wiris los resultados obtenidos.

a. $y = x^2 + 5x - 3$

(0 , –3) porque al sustituir x por 0, el punto resultante es ese.

b. $y = -4x^2 + 5x$

(0 , 0) porque al sustituir x por 0, el punto resultante es ese.

c. $y = x^2 - 7x + 19$

(0 , 19) porque al sustituir x por 0, el punto resultante es ese.

d. $y = -3x + 2x + 1$

(0 , 1) porque al sustituir x por 0, el punto resultante es ese.

18 El espacio recorrido por un móvil sigue una trayectoria parabólica determinada por la ecuación $y = -3x^2 + 8x$, donde y representa el espacio recorrido, expresado en metros, y x, el tiempo, expresado en segundos. Determina cuál es la máxima altura a la que llega y en qué instante la alcanza.

El vértice de la gráfica de la función cuadrática $y = -3x^2 + 8x$ es:

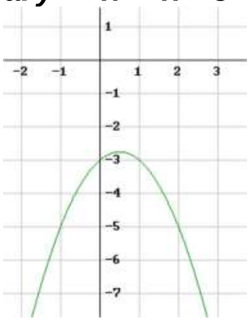
$x_v = \frac{-8}{-6} = \frac{4}{3} = 1{,}33 \Rightarrow y_v = -3 \cdot \frac{16}{9} + 8 \cdot \frac{4}{3} = \frac{48}{9} = \frac{16}{3}$

Por tanto, $V\left(\frac{4}{3}, \frac{16}{3}\right)$.

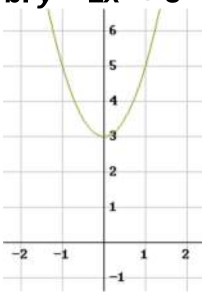
La altura máxima se alcanza para $x = \frac{4}{3}$ s, es decir, a los 1,33 s. En ese momento se alcanza una altura de 5,33 m $\left(\frac{16}{3}\right)$.

19 Entra en esta página web y lee la información que se proporciona sobre las funciones cuadráticas:
http://thales.cica.es/rd/Recursos/rd99/ed99-0416-02/indice.htm
A continuación, estudia los tipos de funciones cuadráticas y modifica los parámetros de las ecuaciones correspondientes para ver cómo varían las gráficas. Finalmente, representa en tu cuaderno estas otras funciones cuadráticas:

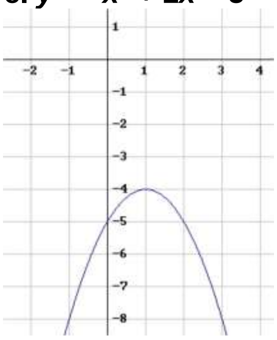
a. $y = -x^2 + x - 3$



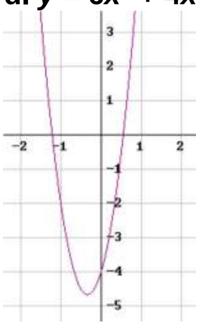
b. $y = 2x^2 + 3$



c. $y = -x^2 + 2x - 5$



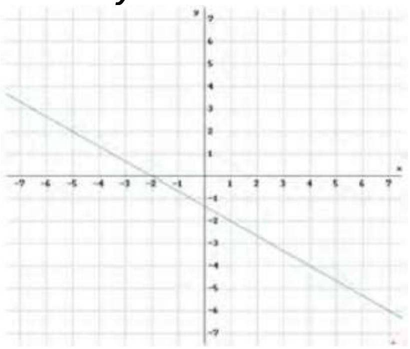
d. $y = 6x^2 + 4x - 4$



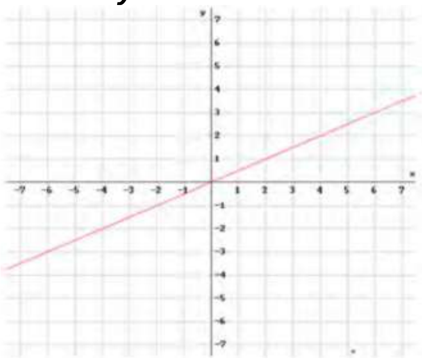
APLICACIONES GEOMÉTRICAS

20 Representa gráficamente las soluciones de las siguientes ecuaciones lineales:

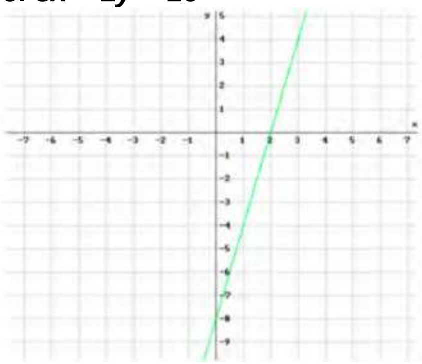
a. $2x + 3y + 4 = 0$



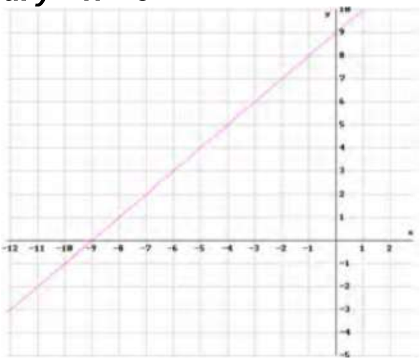
b. $-x + 2y = 0$



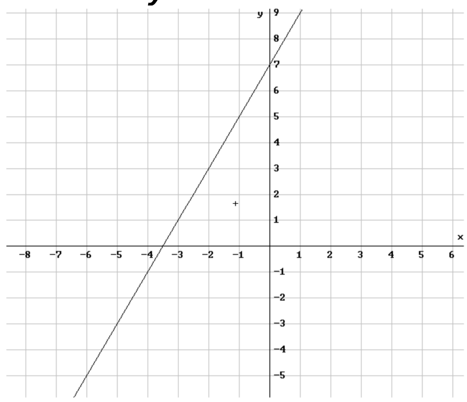
c. $8x - 2y = 16$



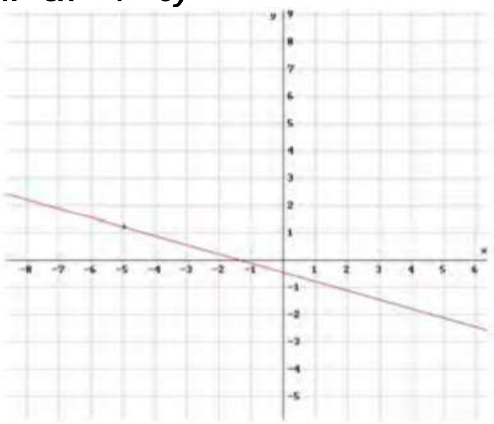
d. *y* – *x* = 9



e. 2*x* + 7 = *y*



f. –3*x* – 4 = 9*y*



21 Estudia la posición relativa de estos pares de rectas:

a. 3*x* + 5*y* = 1; *x* – 3*y* = 2

$y = \frac{1}{5} - \frac{3}{5}x$ e $y = -\frac{2}{3} + \frac{1}{3}x$. Como tienen pendientes distintas, son rectas secantes.

b. 4*x* – 2*y* = 3; 2*x* – *y* = 5

b. $y = -\frac{3}{2} + 2x$ e $y = 2x - 5$. Como tienen la misma pendiente, pero sus ordenadas en el origen son distintas, la primera $-\frac{3}{2}$ y la segunda –5, son rectas paralelas.

22 Indica cuáles de las siguientes rectas son paralelas a la recta $y = -3x + 5$:

a. $y = 3x + 2$ **c.** $y = 5x - 3$

b. $y = -3x + 4$ **d.** $y = -3x$

b y d tienen la misma pendiente y además sus ordenadas en el origen son distintas. Por lo que b y d son paralelas a la recta dada.

SOLUCIONES PÁG. 186

23 Determina si los siguientes pares de rectas son paralelas o secantes:

a. $y = x - 5$; $y = 3x - 5$
Son secantes, pues tienen distinta pendiente.

b. $y = 4x$; $y = 4x + 2$
Son paralelas, pues ambas tienen pendiente 4 y distinta ordenada en el origen.

c. $y = 5x - 2$; $y = 5x + 2$
Son paralelas, pues ambas tienen pendiente 5 y distinta ordenada en el origen.

d. $y = 3$; $y = 4$
Son paralelas, pues ambas tienen pendiente 0 y distinta ordenada en el origen.

24 Halla la ecuación de la recta que es paralela a $y = -5x + 7$ y pasa por el punto (1 , 1).

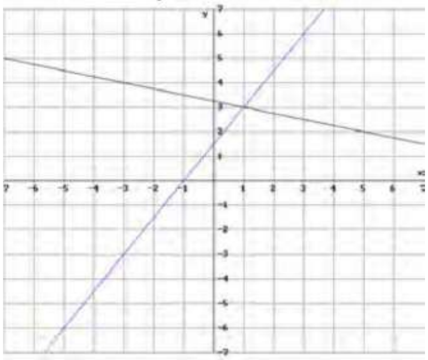
$y = mx + n \rightarrow 1 = -5 + n \rightarrow n = 6$: $y = -5x + 6$

25 Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto A (1 , 1) y es paralela a la recta que pasa por los puntos P (–1 , 2) y Q (1 , –1).

$y = mx + n \rightarrow 2 = -m + n$ y $-1 = m + n \rightarrow m = -\frac{3}{2}$ y $n = \frac{1}{2}$. La recta por tanto es: $-\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$.
La segunda recta que debe ser paralela a la anterior, se calcula sustituyendo el punto por el que pasa y calculando n: $1 = -\frac{3}{2} \cdot (1) + n \rightarrow n = \frac{5}{2}$ y la recta sería: $y = -\frac{3}{2}x + \frac{5}{2}$.

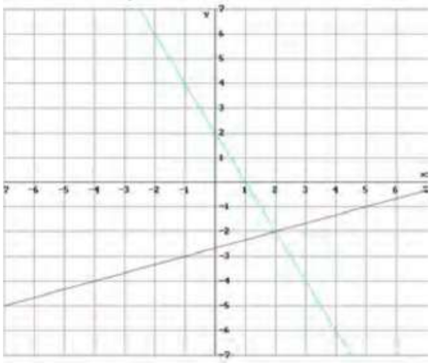
26 Determina si los siguientes sistemas de ecuaciones lineales tienen solución y, en caso afirmativo, obtén las soluciones de forma gráfica:

a. $\begin{cases} x + 4y = 13 \\ -3x + 2y = 3 \end{cases}$



Se cortan en el punto (1 , 3); luego, la solución del sistema es $x = 1$, $y = 3$.

b. $\begin{cases} 4x + 2y = 4 \\ x - 3y = 8 \end{cases}$

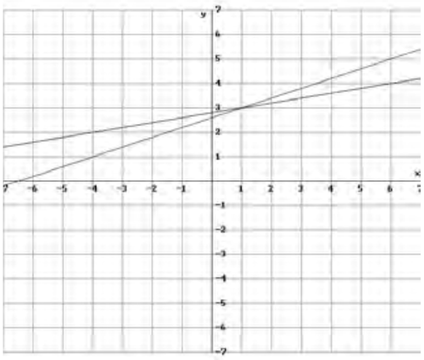


Se cortan en el punto (2 , –2); luego, la solución del sistema es $x = 2$, $y = -2$.

c. $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$

Se trata de dos rectas paralelas, ya que la pendiente de ambas es –2 y tienen distinta ordenada en el origen.

d. $\begin{cases} x - 5y = -14 \\ 2x - 5y = -13 \end{cases}$



Se cortan en el punto (1 , 3), luego la solución es $x = 1$, $y = 3$.

27 Determina las ecuaciones de las rectas *r* y *s*, teniendo en cuenta que la primera pasa por los puntos (1 , 1) y (3 , 0), y que la segunda tiene pendiente 4 y pasa por el punto (2 , 1).

Calculamos la recta *r*:

$y = mx + n \rightarrow 1 = m + n$ y $0 = 3m + n \rightarrow m = -\frac{1}{2}$ y $n = \frac{3}{2}$.

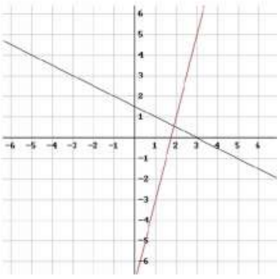
La recta por tanto es: $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$

Calculamos la recta *s*:

$y = mx + n \rightarrow 1 = 4 \cdot 2 + n \rightarrow n = -7$

La recta por tanto es: $y = 4x - 7$

a. ¿Son paralelas o secantes? En caso de ser secantes, calcula su punto de corte.
Son rectas secantes, pues tienen diferentes pendientes. Para obtener el punto de corte se representan ambas rectas o se resuelve el sistema de ecuaciones:

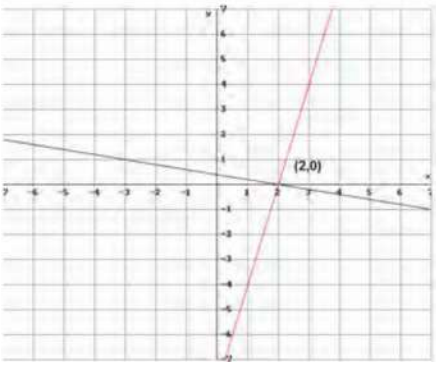


El punto de corte es $\left(\frac{17}{9}, \frac{5}{9}\right)$

b. Determina la ecuación de la recta paralela a *r* que pasa por el punto (3 , 1).
$1 = -\frac{1}{2} \cdot 3 + n \rightarrow n = \frac{5}{2} \rightarrow y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$

28 Determina la ecuación de la recta que es paralela a $y = x + 2$ y pasa por el punto de corte de estas rectas: *r* : $x + 5y = 2$; *s* : $-4x + y = -8$

Se representan las rectas y se calcula el punto de corte:

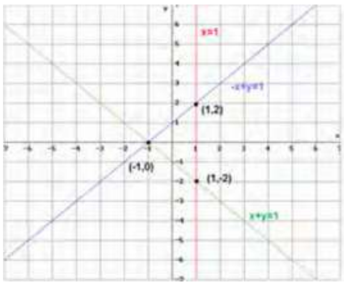


Resolviendo el sistema también se puede calcular el punto de corte. Obtenemos que $x = 2$ e $y = 0$. El punto es entonces (2 , 0).

$0 = 2 + n \rightarrow n = -2 \rightarrow y = x - 2$

29 Calcula las coordenadas de los vértices del triángulo que resulta de la intersección de estas tres rectas: *r* : *x* – 1 = 0; *s* : –*x* + *y* = 1; *t* : *x* + *y* = –1

La representación de las tres rectas es:



Los vértices del triángulo son (1 , 2), (1 , –2) y (–1 , 0).

30 Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas e interpreta los resultados de forma gráfica:

a. $2x^2 - 5x + 3 = 0$

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{4} \rightarrow x_1 = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$ y $x_2 = 1$.

La parábola que representa la función cuadrática corta el eje *X* en los puntos $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ y (1 , 0).

b. $-2x^2 + 14x - 24 = 0$

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-14 \pm \sqrt{196 - 192}}{-4} \rightarrow x_1 = 4$ y $x_2 = 3$

La parábola que representa la función cuadrática corta el eje *X* en los puntos (4 , 0), (3 , 0)

c. $x^2 + 7x = 0$

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-7 \pm \sqrt{49}}{2} \rightarrow x_1 = 0$ y $x_2 = -7$

La parábola que representa la función cuadrática corta el eje *X* en los puntos (–7 , 0), (0 , 0).

d. $x^2 - 3x + 10 = 0$

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 40}}{-2} \longrightarrow$ No tiene solución real, por lo que la parábola que representa la función cuadrática no corta el eje *X* en ningún punto.

e. $-x^2 + 3x + 9 = 0$

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 36}}{-2} \longrightarrow x_1 = \frac{3 - 3\sqrt{5}}{2}$ y $x_2 = \frac{3 + 3\sqrt{5}}{2}$

La parábola que representa la función cuadrática corta el eje *X* en los puntos (4,85 ; 0) y (–1,85 ; 0).

f. $x^2 - 10x + 25 = 0$

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 100}}{2} \rightarrow x = 5$ solución doble. La parábola que representa la función cuadrática corta el eje *X* en el punto (5 , 0).

31 Resuelve estas ecuaciones cuadráticas e interpreta los resultados de forma gráfica:

a. $-x^2 + 6x - 8 = 0$

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 32}}{-2}$ → Soluciones: $x = 2$, $x = 4$. La parábola $y = -x^2 + 6x - 8$ corta el eje X en los puntos (2 , 0) y (4 , 0)

b. $x^2 - 5x = 0$

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{5 \pm \sqrt{25}}{2}$ → Soluciones: $x = 0$, $x = 5$. La parábola $y = x^2 - 5x$ corta el eje X en los puntos (0 , 0) y (5 , 0)

c. $2x^2 + 2x + 6 = 0$

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 48}}{4}$ → No tiene soluciones. La parábola $y = 2x^2 + 2x + 6$ no corta el eje X en ningún punto.

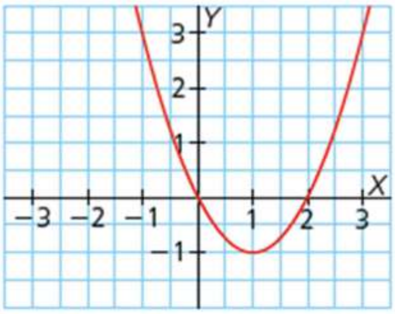
d. $-x^2 + 8x - 16 = 0$

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 64}}{-2}$ → Soluciones: $x = 4$ (solución doble).

La parábola $y = -x^2 + 8x - 16$ corta el eje X en un único punto, (4 , 0), que es su vértice.

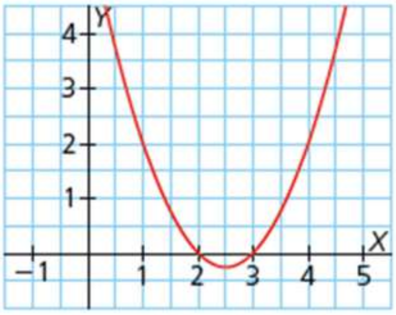
32 Determina los puntos de corte con los ejes de las parábolas representadas e indica, en cada caso, una ecuación de segundo grado cuyas soluciones coincidan con las abscisas de los puntos de corte.

a.



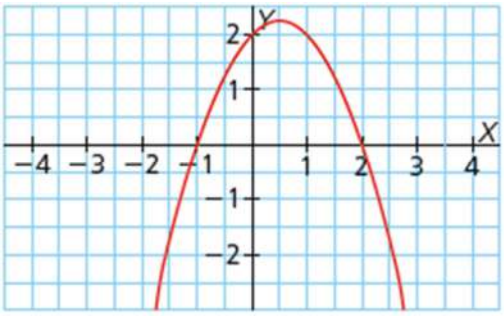
Puntos de corte con los ejes: (0 , 0) *y* (2 , 0). Una ecuación cuadrática con estas soluciones es: $x\,(x - 2) = x^2 - 2x = y$

b.



Puntos de corte con los ejes: (2 , 0) *y* (3 , 0). Una ecuación cuadrática sería:
$(x - 2)(x - 3) = x^2 - 5x + 6 = y$

c.



Puntos de corte: (–1 , 0), (2 , 0). Una ecuación cuadrática sería:
$(x + 1)\,(x - 2) = x^2 - x - 2 = y$

LAS FUNCIONES EN LA VIDA COTIDIANA

33 El año 2000 se instauró el euro en algunos países de la Unión Europea. Antes de dicha fecha, la moneda que existía en España era la peseta. El sistema de cambio aproximado permitía obtener 6 € por cada 1 000 pesetas.

a. Copia en tu cuaderno y completa esta tabla:

Euros	0	3	2	1	5
Pesetas					

Euros	0	3	2	1	5
Pesetas	0	500	333,33	166,66	833,3

b. Encuentra la expresión algebraica de la función que proporciona el número de pesetas que se pueden obtener con cierto número de euros. ¿Se trata de una función de proporcionalidad directa?

Se trata de una función de proporcionalidad directa definida por la expresión algebraica:
$y = 166{,}66x$

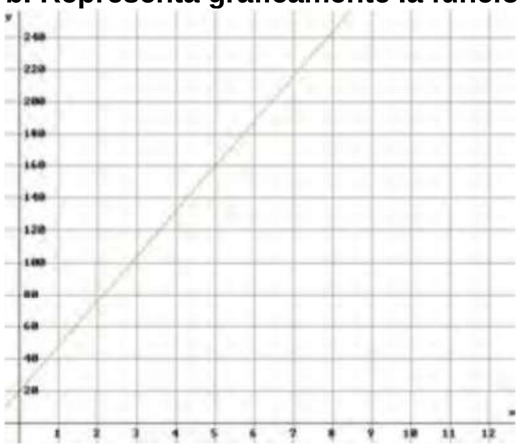
SOLUCIONES PÁG. 187

34 Una academia de matemáticas cobra una cuantía fija de 20 € en concepto de matrícula más 28 € mensuales.

a. Halla la expresión algebraica de la función que proporciona el precio que se ha de pagar por asistir un número determinado de meses.

$y = 20 + 28x$

b. Representa gráficamente la función.



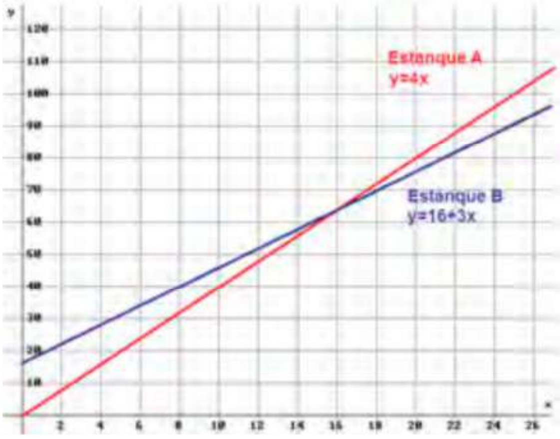
c. Determina su dominio y su recorrido.

Dom = $(0\ ,\ \infty)$; Rec $(20\ ,\ \infty)$

35 Dos estanques de 1 000 L de capacidad se están llenando simultáneamente. El estanque A se llena a razón de 4 L/min, mientras que el estanque B lo hace a razón de 3 L/min. Si el estanque A estaba vacío y el estanque B tenía 16 L de agua:

a. Determina la expresión analítica de las funciones que expresan el llenado de cada estanque.
$y = 4x$ para el estanque A *e* $y = 16 + 3x$ para el estanque B.

b. Representa las funciones gráficamente.



c. ¿Existe algún instante en el que los estanques tengan la misma cantidad de agua?
El momento en el que ambos estanques tienen la misma cantidad de agua se alcanza para $x = 16$, momento en que se cortan las dos rectas. Es decir, a los 16 minutos.

d. ¿Cuál de los dos estanques se llena antes?
Se llena antes el estanque A. A partir del minuto 16, los valores de la recta $y = 4x$ son mayores que los de la recta $y = 16 + 3x$.

36 Un trabajador cobra 12 € por cada hora de trabajo.

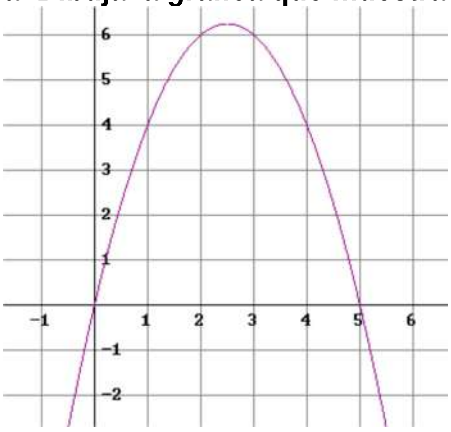
a. Construye una tabla que exprese la relación entre el sueldo que percibe el trabajador y las horas que trabaja.

Horas trabajadas	1	2	3	4
Sueldo	12	24	36	48

b. ¿Son magnitudes directamente proporcionales? En caso afirmativo, ¿cuál es la constante de proporcionalidad? ¿Cuál es la expresión algebraica de esta función?
Son magnitudes directamente proporcionales. La constante de proporcionalidad es 12. La expresión de la función lineal es: $f(x) = 12x$

37 Un balón de baloncesto sigue una trayectoria determinada por la expresión $y = 5x - x^2$, donde *y* representa la altura que alcanza, expresada en metros, y *x* el tiempo, expresado en segundos.

a. Dibuja la gráfica que muestra su trayectoria.



b. ¿Cuál es la máxima altura a la que llega? ¿En qué instante la alcanza?

Calculamos el vértice de la parábola: $x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{5}{2}$ e $y_v = f\left(\frac{-b}{2a}\right) = f\left(\frac{5}{2}\right) = 5 \cdot \left(\frac{5}{2}\right) - \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$

La altura máxima es de $\frac{25}{4}$ = 6,25 m y se alcanza en el instante $x = \frac{5}{2}$, es decir a los 2,5 s.

38 Joanna desea construir un recinto rectangular para un rebaño de ovejas y dispone de 200 m de valla. Calcula cuáles han de ser las dimensiones del rectángulo para que el área sea máxima.

Si se designa el ancho con *x* y el largo con *y*, y se considera que el perímetro del rectángulo es de 200 m, entonces se tiene:

$2x + 2y = 200 \rightarrow x + y = 100 \rightarrow y = 100 - x$

Por tanto, el área del rectángulo en función del ancho viene dado por la función cuadrática:

$f(x) = x(100 - x) = 100x - x^2$

El vértice de la parábola que representa esta función es:

$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-100}{-2} = 50 \Rightarrow y_v = f\left(\frac{-b}{2a}\right) = f(50) = 100 \cdot 50 - 50^2 = 5\,000 - 2\,500 = 2\,500$

Luego, el ancho es $x = 50$, y el largo, $y = 50$.

El rectángulo es de 50 × 50 (es el rectángulo de área máxima).

El área máxima es 2 500 m^2.

EVALUACIÓN

1 La pendiente de la función lineal que pasa por el punto (4 , 8) es:

a. 4 **b. 2** **c.** $\frac{1}{2}$ **d. 8**

Solución b porque m = $\frac{8}{4}$ = 2

2 La expresión algebraica de la función que determina el precio de *x* kg de kiwis si 2 kg valen 6 € es:

a. $y = 6x$ **b.** $y = 2x$ **c.** $y = 3x$ **d.** $y = x$

Solución c porque $y = \frac{6}{3}x = 2x$

3 ¿Cuáles de las siguientes rectas son paralelas?

a. $y = 3x$; $y = x + 3$ **c.** $y = 4x - 1$; $y = 4x$
b. $y = 2$; $y = 2x$ **d.** $y = x + 2$; $y = 2x$

Solución c porque tienen igual pendiente y distinta ordenada en el origen.

4 ¿Cuál de las siguientes funciones es afín?

a. $y = 5x$ **b.** $y = 8$ **c.** $y = -7x$ **d.** $y = x^2$

Solución b porque n es un número real no nulo.

5 La ecuación explícita de la recta que pasa por los puntos A (2 , 2) y B (1 , –1) es:

a. $y = 3x - 4$ **c.** $y = 3x$
b. $y = 4x - 2$ **d.** $y = -3x + 4$

Solución a porque m = $\frac{-1-2}{1-2}$ = 3 y n = 2 – 2m = –4

6 ¿Cuál es el máximo de la función $y = x^2 - 4x + 2$?

a. (2 , 4) **b. (4 , –2)** **c. No tiene.** **d. (2 , – 4)**

Solución c porque a > 0 y no tiene máximo, tiene mínimo.

7 El eje de simetría de la parábola $y = 3x^2 - 12x + 1$ es la recta:
a. $x = -12$ **b.** $x = 2$ **c.** $x = 6$ **d.** $x = 5$

Solución b porque $x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{12}{6} = 2$

8 La parábola $y = -x^2 - x + 6$:

a. No tiene ningún punto de corte con el eje *X*.
b. Tiene un punto de corte con el eje *X*.
c. Tiene dos puntos de corte con el eje *X*.

Solución c porque $b^2 - 4ac = 25 > 0$

9 ¿Cuál es el punto de corte con el eje *Y* de la parábola $y = -5x^2 + 3x + 7$?

a. No tiene. b. (0 , 7) c. (7 , 0) d. (0 , –7)

Solución b porque cuando $x = 0 \rightarrow y = 7$

10 La función $f(x) = 3x^2 + 6x - 3$ es creciente en:

a. (–∞ , –1) c. (–∞ , –6)
b. (–1 , +∞) d. (–6 , +∞)

Solución b porque $x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-6}{6} = -1$ y al ser a > 0, es un mínimo y decrece hasta –1. Por tanto, crece desde ahí hasta +∞.