MATEMÁTICAS ORIENTADAS A LAS ENSEÑANZAS APLICADAS
3.º ESO

somoslink

SOLUCIONES AL LIBRO DEL ALUMNO

UNIDAD 9. GEOMETRÍA PLANA

Unidad 9. Geometría plana

SOLUCIONES PÁG. 198

1 Indica tres elementos de la vida cotidiana que puedan identificarse con cada uno de estos elementos geométricos:

a. Recta.

Respuesta abierta.

b. Semirrecta.

Respuesta abierta.

c. Segmento.

Respuesta abierta.

2 Dada una recta, *r,* y un punto, P, exterior a esta, indica cuántas rectas podemos trazar que pasen por P y sean:

a. Secantes a *r.*

Infinitas.

b. Paralelas a *r.*

Solo una.

c. Perpendiculares a *r.*

Solo una.

3 Decide si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando convenientemente tu respuesta:

a. Toda recta, *r,* perpendicular a otra recta, *s,* es secante a esta.

Verdadero. La corta bajo un ángulo de 90º.

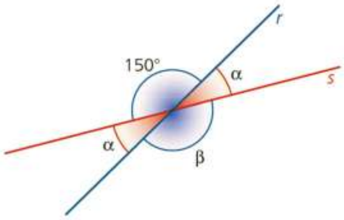
b. Toda recta, *r,* secante a otra recta, *s,* es perpendicular a esta.

Falso. Puede cortarla bajo cualquier ángulo; no tiene que ser necesariamente de 90º.

SOLUCIONES PÁG. 201

4 Actividad resuelta.

5 Calcula la amplitud de los ángulos indicados.



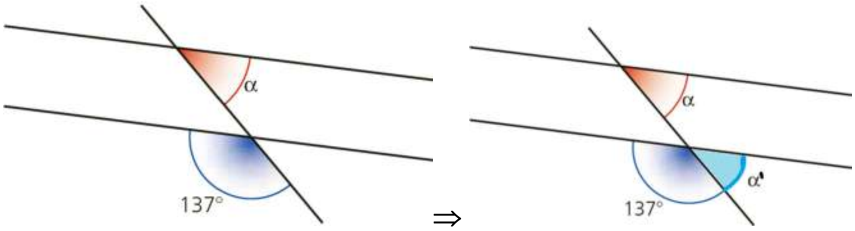
El ángulo α y el ángulo de 150º son suplementarios y sus amplitudes suman 180º. Por lo tanto:$\alpha = 180º - 150º = 30º$

El ángulo β y el ángulo de 150 son ángulos opuestos por el vértice, por lo tanto, miden lo mismo: $\beta = 150º$

6 Actividad resuelta.

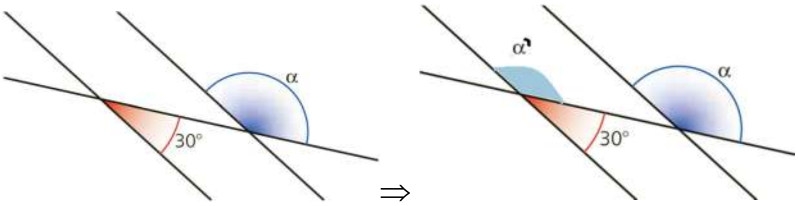
7 Calcula, en cada caso, la amplitud del ángulo *α*.

a.



El ángulo α’ es suplementario con el ángulo de 137º. Por lo tanto, su amplitud es:
α' =180º – 137º = 43º
Los ángulos α y α' son correspondientes, y por tano, tienen la misma amplitud, es decir, α = α' = 43º

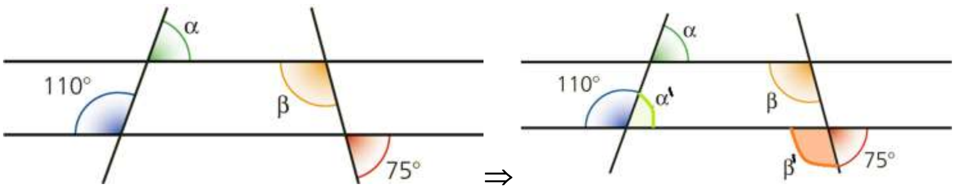
b.



Los ángulos α y α' son correspondientes, por lo tanto, miden lo mismo.
El ángulo α' y el ángulo de 30º son ángulos suplementarios, y suman 180º.
Así: α' = 180º – 30º = 150º. Es decir, α = 150º.

8 Calcula la amplitud de los siguientes ángulos:

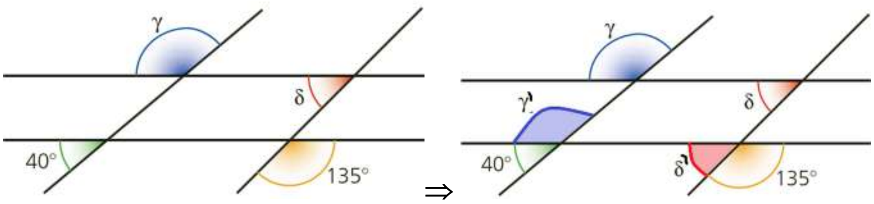
a.



Los ángulos α y α' son correspondientes, por lo tanto, miden lo mismo.
El ángulo α' y el ángulo de 110º son ángulos suplementarios, y suman 180º.
Así: α' = 180º – 110º = 70º. Es decir, α = 70º.

Los ángulos β y β' son correspondientes, por lo tanto, miden lo mismo.
El ángulo β' y el ángulo de 75º son ángulos suplementarios, y suman 180º.
Así: β' = 180º – 75º = 105º. Es decir, β = 105º.

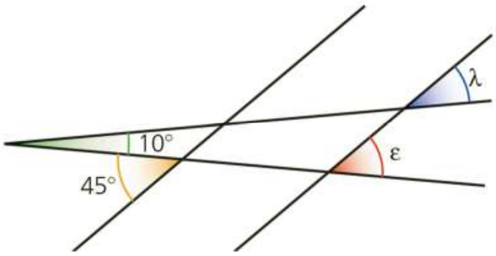
b.



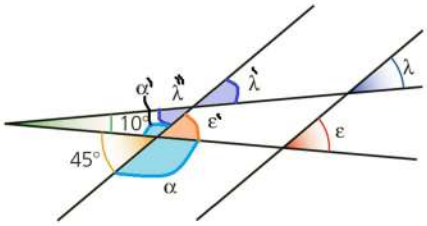
Los ángulos γ y γ' son correspondientes, por lo tanto, miden lo mismo.
El ángulo γ' y el ángulo de 40º son ángulos suplementarios, y suman 180º.
Así: γ' = 180º – 40º = 145º. Es decir, γ = 40º.

Los ángulos δ y δ' son correspondientes, por lo tanto, miden lo mismo.
El ángulo δ' y el ángulo de 135º son ángulos suplementarios, y suman 180º.
Así: δ' = 180º – 135º = 45º. Es decir, δ = 45º.

c.



⇒



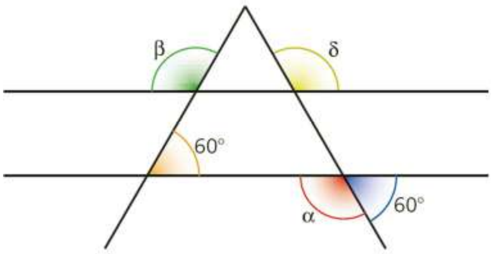
Los ángulos ε y ε' son correspondientes, por lo tanto, miden lo mismo.
El ángulo ε' y el ángulo de 45º son ángulos opuestos por el vértice.
Así: ε' = 45º y, por tanto, ε = 45º.

El ángulo α y el ángulo de 45º son ángulos suplementarios, y suman 180º.
Así: α = 180º – 45º = 135º. Es decir, α = 135º. Los ángulos α y α' son ángulos opuestos por el vértice. Por tanto, $\alpha = \alpha'$ = 135º.

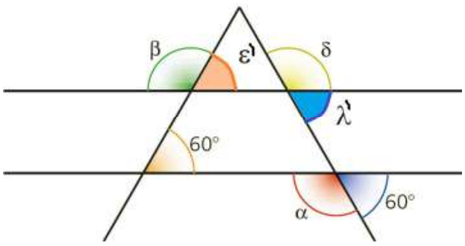
La suma de los ángulos internos en un triángulo es de 180º. Entonces:
α' + 10º + λ'' = 180º $\Rightarrow$ λ'' = 180º – 10º – 135º = 35º.

Los ángulos λ'' y λ' son opuestos por el vértice, por lo tanto, miden lo mismo, 35º. Los ángulos λ' y λ son ángulos correspondientes, y miden lo mismo. Es decir, λ = 35º.

9 Halla la amplitud de los ángulos indicados.



⇒



El ángulo α y el ángulo de 60º son ángulos suplementarios, y suman 180º. Así:
α = 180º – 60º = 120º.

El ángulo λ' y el ángulo de 60º son ángulos correspondientes. Por lo tanto, miden lo mismo: λ' = 60º. Los ángulos λ' y δ son ángulos suplementarios y suman 180º. Así: λ' + δ = 180º $\Rightarrow$ δ = 180º – 60º = 120º.

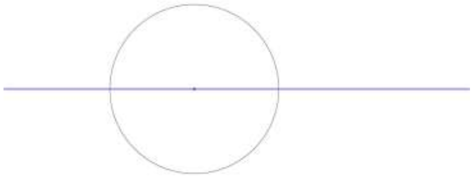
El ángulo ε' y el ángulo de 60º son ángulos correspondientes. Por lo tanto, miden lo mismo: ε' = 60º. Los ángulos ε' y β son ángulos suplementarios y suman 180º. Así: ε' + β = 180º $\Rightarrow$ β = 180º – 60º = 120º.

SOLUCIONES PÁG. 202

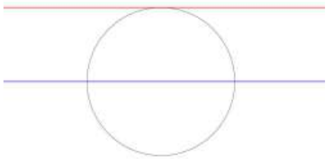
10 Dibuja en tu cuaderno el lugar geométrico de los puntos del plano que distan 3 unidades de una recta dada.

Son dos rectas paralelas a la recta dada que distan de ella 3 unidades.
Se siguen estos pasos:
1. Se dibuja una recta:

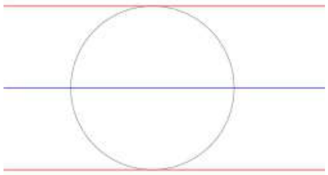
2. Se dibuja una circunferencia de 3 cm de radio.



3. Se dibuja una recta paralela a la dada y secante a la circunferencia en la parte superior de la circunferencia:



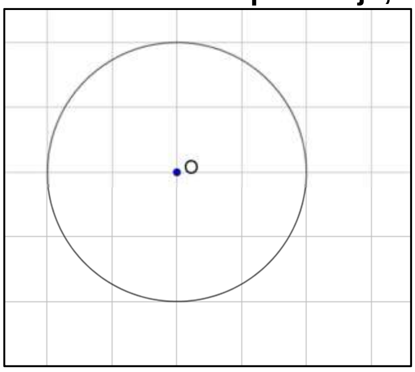
4. Y por último se dibuja otra recta paralela a la dada y secante a la circunferencia en la parte inferior de la circunferencia:



11 Determina el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de dos rectas paralelas.

Es la recta paralela media.

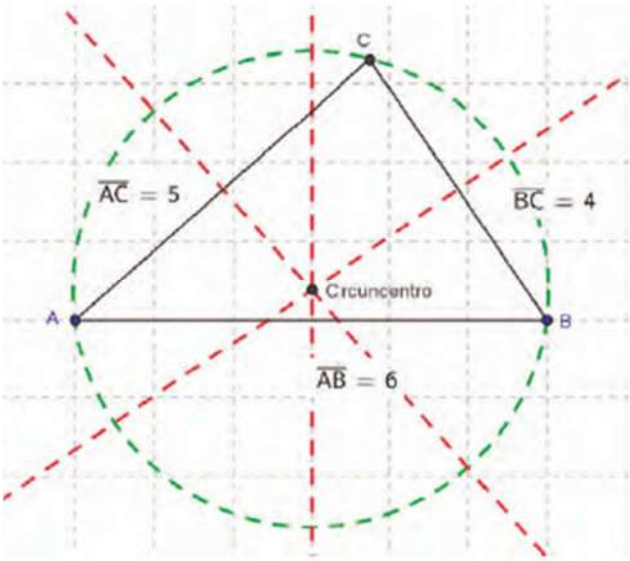
12 Traza en tu cuaderno el lugar geométrico de los puntos del plano que distan 2 unidades de un punto fijo, O. ¿De qué figura conocida se trata?



Es una circunferencia de centro el punto O y radio 2 unidades.

13 Dibuja un triángulo cuya base mida 6 cm y cuyos lados sean de 5 cm y 4 cm, respectivamente.

a. Traza las mediatrices de los segmentos que forman los lados del triángulo y comprueba que se cortan en un punto.

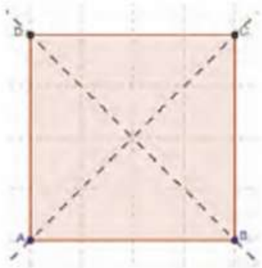


b. ¿Recuerdas cómo se llama ese punto? ¿Qué propiedad cumple dicho punto con respecto a los vértices del triángulo?

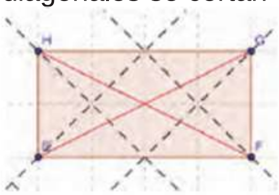
Circuncentro. Cumple la propiedad de equidistar de los vértices del triángulo y, por tanto, es el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo.

SOLUCIONES PÁG. 203

14 Traza un cuadrado de 4 cm de lado y las bisectrices de sus ángulos. ¿Qué deduces? Dibuja ahora un rectángulo de 4 cm de base y 2 cm de altura. Traza las bisectrices de sus ángulos. ¿Qué sucede?

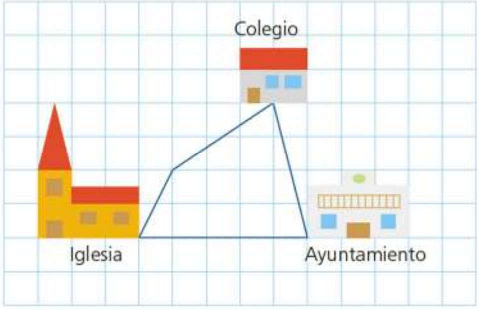


En el cuadrado, las bisectrices coinciden con las diagonales; por tanto, las diagonales se cortan en el punto medio del cuadrado y son perpendiculares entre sí.

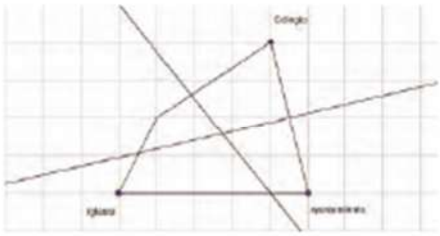


En el rectángulo, hay 4 bisectrices (una por cada ángulo) y se cortan dos a dos perpendicularmente, pero ya no coinciden con las diagonales. En este caso, las diagonales se siguen cortando en el punto medio del rectángulo, pero ya no lo hacen bajo ángulos de 90º.

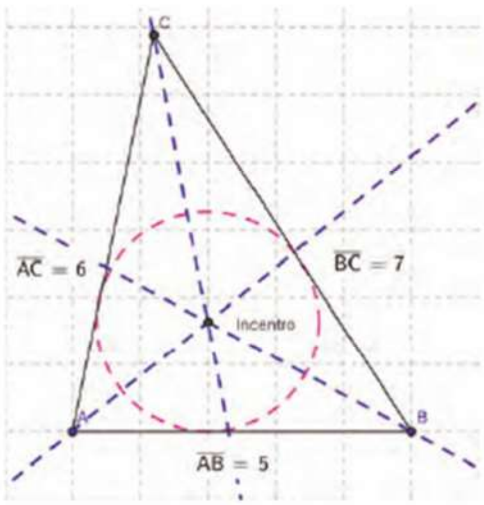
15 En la plaza de un pueblo se quiere colocar una estatua dedicada a un ciudadano ilustre. Se desea situarla a igual distancia de la iglesia, el ayuntamiento y el colegio. Copia este esquema en tu cuaderno y traza el punto exacto donde debe colocarse el monumento.



La estatua se debe situar en el punto de intersección de las mediatrices de los segmentos que unen el ayuntamiento con el colegio y el colegio con la iglesia.

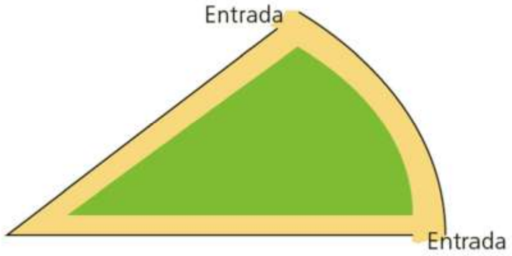


16 Dibuja un triángulo de 5 cm de base y cuyos lados midan 6 cm y 7 cm, respectivamente. Traza las bisectrices de los ángulos del triángulo y comprueba que se cortan en un punto. ¿Qué propiedad cumple ese punto con respecto a los lados del triángulo? ¿Cómo se denomina dicho punto?

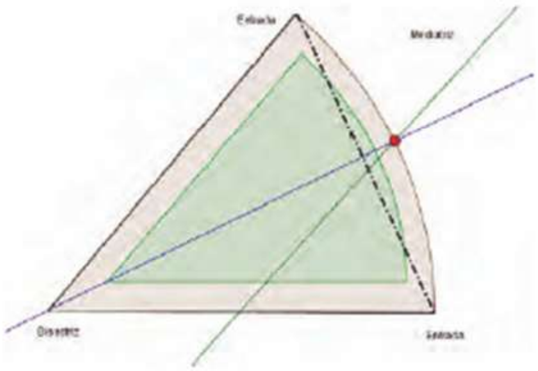


Las tres bisectrices se cortan en el incentro. El incentro cumple la propiedad de equidistar de los lados del triángulo y es, por tanto, el centro de la circunferencia inscrita al triángulo.

17 En un parque que tiene la forma que se muestra en la ilustración se desea colocar una farola de manera que se encuentre a igual distancia de los dos lados rectos y que, a su vez, equidiste de las dos entradas. Copia este esquema en tu cuaderno y señala el punto exacto donde debe colocarse la farola.



La farola se debe colocar en el punto de intersección de la bisectriz de los lados rectos del parque con la mediatriz del segmento que une las dos entradas.



SOLUCIONES PÁG. 207

18 Actividad resuelta.

19 Encuentra el número de lados de un polígono convexo, sabiendo que la suma de sus ángulos interiores es 1 440°.

$(n-2)\cdot 180^{\circ} = 1\,440^{\circ} \Rightarrow 180n - 360 = 1\,440 \Rightarrow n = \frac{1800}{180} = 10$

Tiene 10 lados.

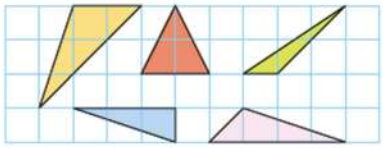
20 Determina el número de lados de un polígono convexo, sabiendo que tiene 9 diagonales en total.

$$\frac{n(n-3)}{2} = 9 \Rightarrow n^2 - 3n = 18 \Rightarrow n^2 - 3n - 18 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4\cdot(-18)}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{81}}{2} = \frac{3 \pm 9}{2} \Rightarrow \begin{cases} n = \frac{3+9}{2} = 6 \\ n = \frac{3-9}{2} \Rightarrow \text{Solución no valida} \end{cases}$$

El polígono convexo tiene 6 lados.

21 Ayudándote de la cuadrícula, calcula el área de los siguientes triángulos:



Triángulo naranja: 3 u^2

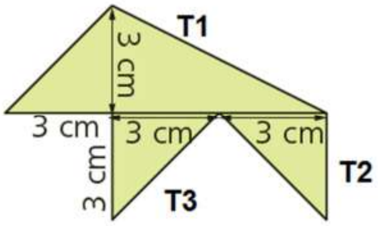
Triángulo rojo: 2 u^2

Triángulo verde: 1 u^2

Triángulo azul: 1,5 u^2

Triángulo rosa: 2 u^2

22 Calcula el área de la siguiente figura:



La figura se ha descompuesto es 3 figuras más sencillas. El área de dicha figura es la suma de cada una de las áreas. Se calcula el área de cada una de ellas:

$A = A_{T1} + A_{T2} + A_{T3}$

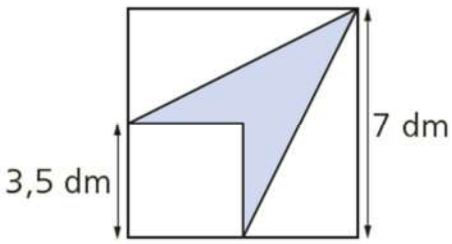
$A_{T1} = \frac{9 \cdot 3}{2} = 13,5 \text{ cm}^2$

$A_{T2} = \frac{3 \cdot 3}{2} = 4,5 \text{ cm}^2$

$A_{T3} = \frac{3 \cdot 3}{2} = 4,5 \text{ cm}^2$

$A = 13,5 \text{ cm}^2 + 4,5 \text{ cm}^2 + 4,5 \text{ cm}^2 = 22,5 \text{ cm}^2$

23 Expresa en metros cuadrados el área de la figura coloreada.



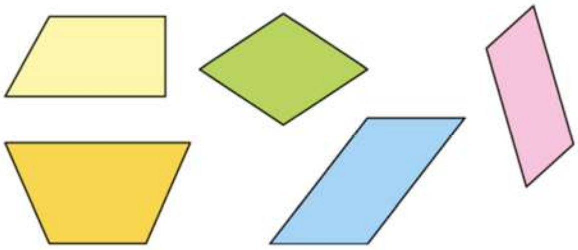
$A_{\text{cuadrado grande}} = 7^2 = 49 \Rightarrow A_{\text{cuadrado grande}} = 49 \text{ dm}^2$

$A_{\text{cuadrado pequeño}} = 3,5^2 = 12,25 \Rightarrow A_{\text{cuadrado pequeño}} = 12,25 \text{ dm}^2$

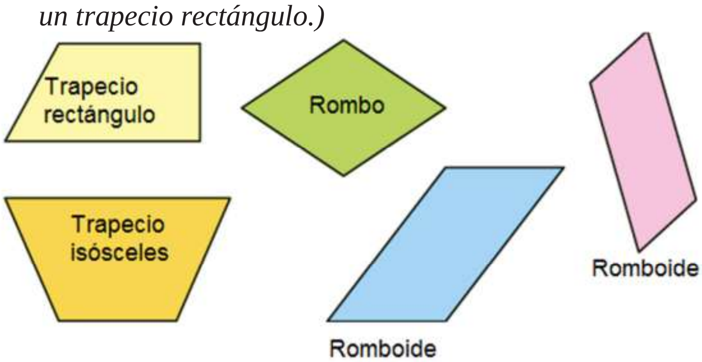
$A_{\text{triángulo}} = \frac{3,5 \cdot 7}{2} = 12,25 \Rightarrow A_{\text{triángulo}} = 12,25 \text{ dm}^2$

$A_{\text{figura coloreada}} = 49 - (12,25 \cdot 3) = 12,25 \Rightarrow A_{\text{figura coloreada}} = 12,25 \text{ dm}^2 = 0,122\,5 \text{ cm}^2$

24 Clasifica los siguientes cuadriláteros:



(Nota: en la primera edición del libro del alumno, había un triángulo rectángulo en vez de un trapecio rectángulo.)

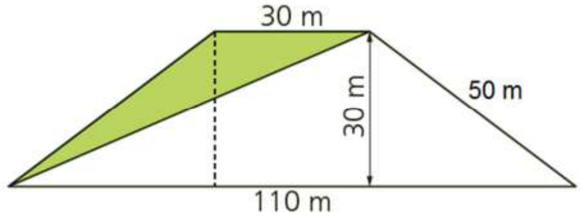


25 El área de un rombo es de 75 cm². ¿Cuánto mide su diagonal mayor si la menor es de 10 cm?

$75 = \frac{D \cdot 7}{2} \Rightarrow D = \frac{75 \cdot 2}{10} = 15$

La diagonal mayor mide 15 cm.

26 La plaza de un pueblo tiene forma de trapecio isósceles como el de la ilustración.



Con motivo de las fiestas, la banda de música tocará en la parte de la plaza que aparece coloreada en la figura. ¿Cuántos metros cuadrados de lona se necesitan para formar un toldillo que proteja a la banda del sol?

$A_{\text{trapecio}} = \dfrac{(110+30)\cdot 30}{2} = \dfrac{4\,200}{2} = 2\,100 \Rightarrow A_{\text{trapecio}} = 2\,100 \text{ m}^2$

El área total del trapecio es 2 100 m^2.

$A_{\text{triángulo no coloreado}} = \dfrac{110\cdot 30}{2} = 1\,650$ $A_{\text{triángulo no coloreado}} = 1\,650 \text{ m}^2$

El área del triángulo no coloreado es 1 650 m^2.

La superficie del toldillo es 2 100 – 1 650 = 450 m^2.

27 Halla la amplitud del ángulo central y de los ángulos interiores de un polígono regular de doce lados.

El ángulo central mide: $\alpha = \dfrac{360^{\circ}}{n} = \dfrac{360^{\circ}}{12} = 30^{\circ}$

Cada uno de los ángulos interiores mide: $\beta = \dfrac{(n-2)\cdot 180^{\circ}}{n} = \dfrac{(12-2)\cdot 180^{\circ}}{12} = 150^{\circ}$.

28 ¿Cuál es el área de un hexágono regular de 6 cm de lado y 5,2 cm de apotema?

$A_{\text{hexágono}} = \dfrac{P\cdot ap}{2} = \dfrac{6\cdot 6\cdot 5,2}{2} = 93,6 \text{ cm}^2$

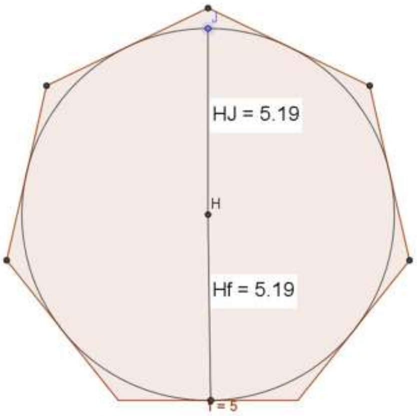
29 Determina el valor de la apotema de un decágono regular de 4 cm de lado cuya área es de 123,11 cm^2.

$123,11 = \dfrac{10\cdot 4\cdot ap}{2} \Rightarrow 246,22 = 40\cdot ap \Rightarrow ap = \dfrac{246,22}{40} = 6,156 \text{ cm}$

30 Actividad resuelta.

31 Calcula el área de un heptágono regular de 5 cm de lado, sabiendo que el diámetro de la circunferencia inscrita es de 10,38 cm.

El radio de la circunferencia inscrita es la mitad del diámetro, r = 5,19 cm. La longitud de la apotema del heptágono mide lo mismo que el radio de la circunferencia inscrita:



$$A_{\text{heptágono}} = \frac{P \cdot ap}{2} = \frac{7 \cdot 5 \cdot 5{,}19}{2} = 90{,}825 \Rightarrow A_{\text{heptágono}} = 90{,}825 \text{ cm}^2$$

SOLUCIONES PÁG. 209

32 Para realizar esta actividad, formad grupos de dos o tres alumnos. Se trata de obtener de forma empírica el valor de π. Para ello, tenéis que partir del hecho de que en cualquier circunferencia π es el cociente entre la longitud y el diámetro. Proceded del siguiente modo:

- **Coged un objeto con base circular, por ejemplo un portalápices.**
- **Medid, con ayuda de una cuerda o hilo de algodón grueso, la circunferencia de la base y anotad su longitud.**
- **Medid con la misma cuerda el diámetro de la base del objeto.**
- **Anotad el cociente entre ambas medidas.**
- **Repetid el proceso varias veces, utilizando otros objetos de base circular (una lata de refresco, una papelera, etc.).**
- **La aproximación del valor de π se determinará a partir de la media aritmética de los distintos cocientes obtenidos. De esta forma, se minimiza el margen de error cometido en las mediciones.**

Respuesta abierta.

33 La primera aproximación del número π, que data del antiguo Egipto (1800 a. C.), partía del supuesto de que el área de un círculo de diámetro *d* era «similar» al área de un cuadrado de lado $\frac{8}{9}$d. A partir de esta aproximación se obtenía una fracción que resultaba ser una aproximación bastante razonable de π. Intenta obtener tú esa fracción partiendo de un círculo de 9 unidades de diámetro. Busca información sobre otros métodos para calcular el número π.

Área círculo de diámetro 9 unidades = 20,25π u^2

Área cuadrado de lado 8 unidades = 64 u^2

Igualando y despejando π, se tiene: $\pi = \frac{64}{20,25} = \frac{6\,400}{2\,025} = \frac{256}{81} = 3,1604$

34 Calcula la amplitud del ángulo inscrito en una circunferencia de 9 cm de radio, sabiendo que abarca un arco de 7π cm.

$l_{arco} = \frac{2 \cdot \pi \cdot r \cdot n}{360^0} \Rightarrow 7\pi = \frac{2 \cdot \pi \cdot 9 \cdot n}{360^0} \Rightarrow n = \frac{360^0 \cdot 7 \cdot \cancel{\pi}}{2 \cdot \cancel{\pi} \cdot 9} = \frac{2\,520}{18} = 140^0$

El ángulo central mide 140º y, por tanto, el inscrito mide 70º.

35 Determina el área de las siguientes figuras circulares:

a. Sector circular de 3 cm de radio y 45° de amplitud.

$A_{\text{sector circular}} = \dfrac{\pi \cdot 3^2 \cdot 45^0}{360^0} = \dfrac{9\pi}{8}$ = 3,53 cm^2

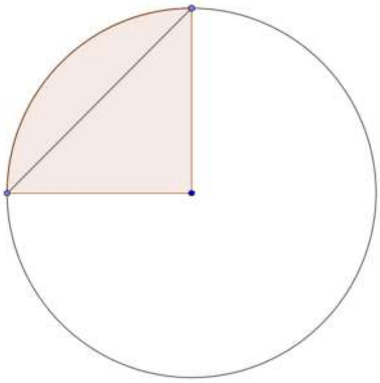
b. Corona circular cuyos radios miden 7 cm y 5 cm.

$A_{\text{corona circular}} = \pi \cdot (7^2 - 5^2) = 24\pi$ cm^2 = 75,4 cm^2

c. Trapecio cuyos radios miden 2 cm y 6 cm y que tiene una amplitud de 30°.

$A_{\text{trapecio circular}} = \dfrac{\pi \cdot \left(6^2 - 2^2\right) \cdot 30^0}{360^0} = \dfrac{8\pi}{3}$ = 8,38 cm^2

d. Segmento circular de 5 cm de radio y 90° de amplitud.



$A_{\text{sector circular}} = \dfrac{\pi \cdot 5^2 \cdot 90^0}{360^0} = \dfrac{25\pi}{4}$ = 19,63 cm^2

$A_{\text{triángulo}} = \dfrac{5 \cdot 5}{2} =$ 12,5 cm^2

Área del segmento circular = 19,63 – 12,5 = 7,13 cm^2

SOLUCIONES PÁG. 211

36 Halla la altura de un triángulo equilátero de 6 cm lado.

En un triángulo equilátero los tres lados miden lo mismo. Se aplica el teorema de Pitágoras:

$6^2 = 3^2 + h^2 \rightarrow h = \sqrt{27}$ = 5,2 cm

37 Calcula el área de un triángulo equilátero de 27 dm de perímetro.

Lado = 9

Se aplica el teorema de Pitágoras para hallar la altura:

$9^2 = 4{,}5^2 + h^2 \Rightarrow h = \sqrt{60{,}75}$ = 7,79 dm

$A = \dfrac{9 \cdot 7{,}79}{2} =$ 35,06 dm^2

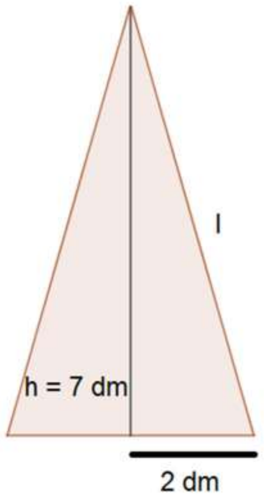
La altura del triángulo mide h = 7,79 dm; el área es 35,06 dm^2

38 En un triángulo isósceles, los lados iguales miden 10 cm y el lado desigual 12 cm. ¿Cuánto mide su altura?

Se aplica el teorema de Pitágoras:

$10^2 = 6^2 + h^2 \Rightarrow h = \sqrt{64} = 8$ cm

39 Averigua cuánto miden los lados iguales de un triángulo isósceles, sabiendo que su altura es de 7 dm y que el lado desigual mide 4 dm.



$l^2 = 2^2 + 7^2 \Rightarrow l = \sqrt{53} = 7{,}28$ cm

Cada lado mide 7,28 cm.

40 Determina el lado de un cuadrado cuya diagonal vale 8 m.

$8^2 = a^2 + a^2 \Rightarrow 64 = 2a^2 \Rightarrow a^2 = 32 \Rightarrow a = \sqrt{32} = 5{,}66$ m

El lado mide 5,66 m.

41 ¿Cuánto vale la diagonal de un rectángulo cuyos lados miden 15 y 20 m?

$h^2 = 20^2 + 15^2 \Rightarrow h = \sqrt{625} = 25$ m

La diagonal mide 25 m.

42 Una rampa de 13 m de longitud salva un desnivel de 5 m. ¿Qué longitud tiene la base de la rampa?

$13^2 = 5^2 + b^2 \Rightarrow b = \sqrt{144} = 12$ m

La base de la rampa mide 12 m.

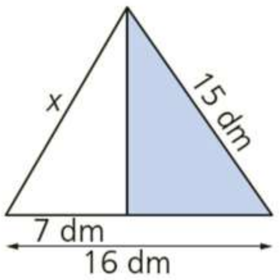
43 La piscina del pabellón polideportivo de mi ciudad es un rectángulo que mide 40 m de largo y 30 m de ancho. ¿Cuánto mide la diagonal?

$h^2 = 40^2 + 30^2 \Rightarrow h = \sqrt{2500} = 50$ m

La diagonal mide 50 m.

44 Actividad resuelta.

45 Halla el valor de *x* en el siguiente triángulo:



$15^2 = 9^2 + a^2 \Rightarrow a = \sqrt{144} = 12$ cm

$x^2 = 7^2 + 12^2 \Rightarrow x = \sqrt{193} = 13{,}89$ cm

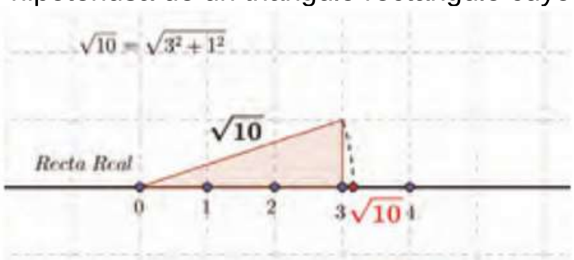
La altura mide 12 cm, de manera que *x* = 13,89 cm.

46 Actividad resuelta.

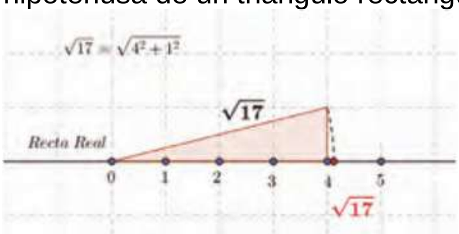
47 Representa gráficamente sobre la recta real los siguientes números irracionales:

$$\sqrt{10}\ ;\ \sqrt{17}\ ;\ \sqrt{26}\ ;\ \sqrt{13}\ ;\ \sqrt{3}$$

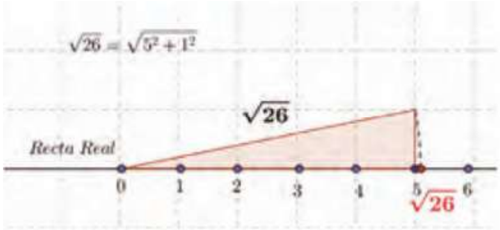
- Para representar $\sqrt{10}$ se descompone de la forma $\sqrt{10} = \sqrt{1^2 + 3^2}$. A partir de esta expresión, el teorema de Pitágoras permite expresar $\sqrt{10}$ como la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 1 y 3 unidades.



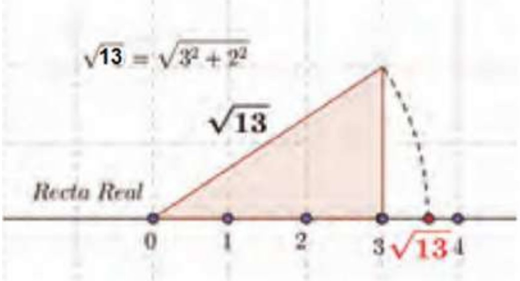
- Para representar $\sqrt{17}$ se descompone de la forma $\sqrt{17} = \sqrt{1^2 + 4^2}$. A partir de esta expresión, el teorema de Pitágoras permite expresar $\sqrt{17}$ como la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 1 y 4 unidades.



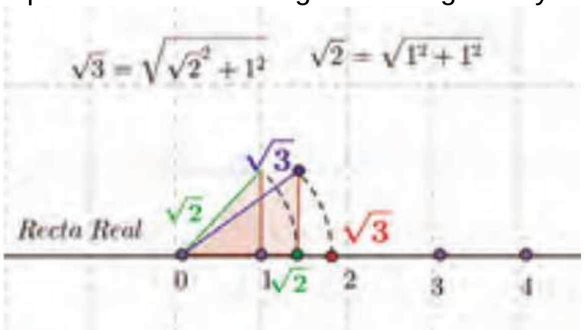
- Para representar $\sqrt{26}$ se descompone de la forma $\sqrt{26} = \sqrt{1^2 + 5^2}$. A partir de esta expresión, el teorema de Pitágoras permite expresar $\sqrt{26}$ como la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 1 y 5 unidades.



- Para representar $\sqrt{13}$ se descompone de la forma $\sqrt{13} = \sqrt{3^2 + 2^2}$. A partir de esta expresión, el teorema de Pitágoras permite expresar $\sqrt{13}$ como la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 3 y 2 unidades.

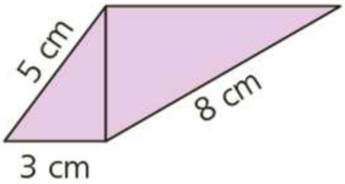


- Para representar $\sqrt{3}$ se descompone de la forma $\sqrt{3} = \sqrt{1^2 + \sqrt{2}^2}$. A partir de esta expresión, el teorema de Pitágoras permite expresar $\sqrt{3}$ como la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 1 y $\sqrt{2}$ unidades.

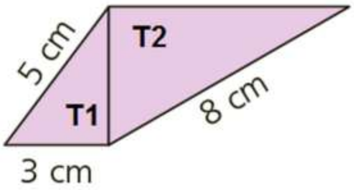


48 Calcula el área de las siguientes figuras:

a.



$\Rightarrow$



El área de la figura es la suma de las áreas de los triángulos T1 y T2.
Se halla la altura del triángulo T1 aplicando el teorema de Pitágoras:

$5^2 = 3^2 + h^2 \Rightarrow h = \sqrt{16} = 4$ cm

El área de T1 es:

$A_{T1} = \frac{3 \cdot 4}{2} = 6 \text{ cm}^2$

Se calcula la base del triángulo T2 aplicando el teorema de Pitágoras:

$8^2 = 4^2 + b^2 \Rightarrow b = \sqrt{48} = 6{,}93$ cm

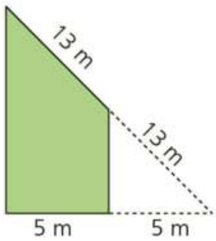
El área de T2 es:

$A_{T2} = \frac{4 \cdot 6{,}93}{2} = 13{,}86 \text{ cm}^2$

El área total es:

$A = A_{T1} + A_{T2} = 6 \text{ cm}^2 + 13{,}86 \text{ cm}^2 = 19{,}86 \text{ cm}^2$

b.



Se aplica el teorema de Pitágoras al triángulo grande para calcular la altura, h:

$26^2 = 10^2 + h^2 \Rightarrow h = \sqrt{576} = 24$ m

El área del triángulo grande es:

$A_{T1} = \frac{10 \cdot 24}{2} = 120 \text{ m}^2$

Se aplica el teorema de Pitágoras al triángulo pequeño para calcular la altura, h:

$13^2 = 5^2 + h^2 \Rightarrow h = \sqrt{144} = 12$ m

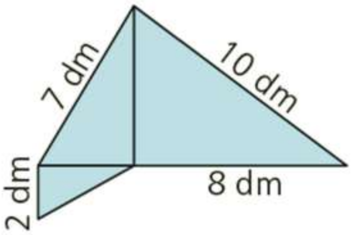
El área del triángulo pequeño es:

$A_{T2} = \frac{5 \cdot 12}{2} = 30 \text{ m}^2$

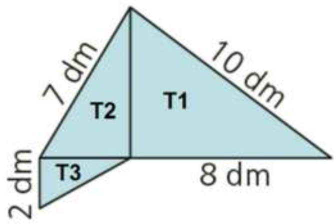
El área de la parte coloreada de la figura es:

$A = A_{T1} - A_{T2} = 120 \text{ m}^2 - 30 \text{ m}^2 = 90 \text{ m}^2$

c.



$\Rightarrow$



Se aplica el teorema de Pitágoras en el triángulo T1 para calcular la altura, h:

$10^2 = 8^2 + h^2 \Rightarrow h = \sqrt{36} = 6$ dm

El área del triángulo T1 es:

$A_{T1} = \dfrac{6 \cdot 8}{2} = 24 \text{ dm}^2$

Se aplica el teorema de Pitágoras en el triángulo T2 para calcular la base, b:

$7^2 = 6^2 + b^2 \Rightarrow b = \sqrt{13} = 3{,}61$ dm

El área del triángulo T2 es:

$A_{T2} = \dfrac{6 \cdot 3{,}61}{2} = 10{,}83 \text{ dm}^2$

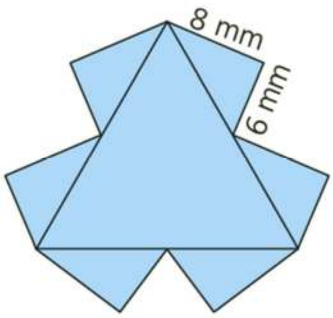
El área del triángulo T3 es:

$A_{T3} = \dfrac{2 \cdot 3{,}61}{2} = 3{,}61 \text{ dm}^2$

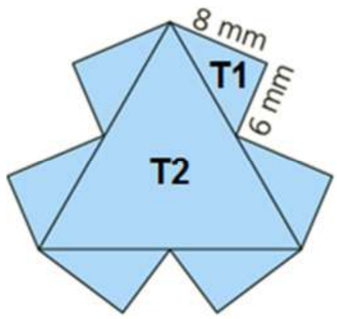
El área total de la figura en la suma de las tres áreas halladas:

$A = A_{T1} + A_{T2} + A_{T3} = 24 \text{ dm}^2 + 10{,}83 \text{ dm}^2 + 3{,}61 \text{ dm}^2 = 38{,}44 \text{ dm}^2$

d.



$\Rightarrow$



Se aplica el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo T1 para hallar la hipotenusa:

$a^2 = 8^2 + 6^2 \Rightarrow a = \sqrt{100} = 10$ mm

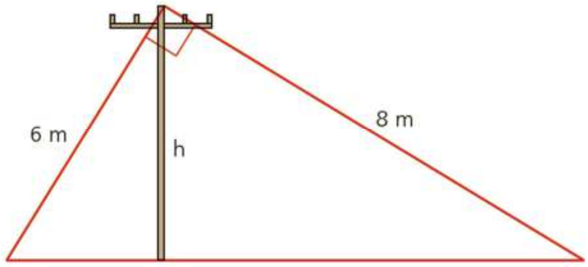
La longitud del lado del triángulo T2 es el doble de la longitud anterior, es decir, 20 mm. Se aplica el teorema de Pitágoras para calcular la altura, h:

$20^2 = 10^2 + h^2 \Rightarrow h = \sqrt{300} = 17{,}32$ mm

El área total es la suma del área del triángulo T2 y seis triángulos T1:

$A = 173{,}2 + 6 \cdot \left(\dfrac{6 \cdot 8}{2}\right) = 317{,}2 \text{ mm}^2$

49 Un poste está sujeto a tierra por dos cables que forman en su parte superior un ángulo de 90°. Halla la altura del poste, sabiendo que los cables miden 6 m y 8 m, respectivamente.



Se calcula el área del triángulo formado por los cables y por el suelo:

$A = \frac{6 \cdot 8}{2} =$ 24 m^2

Se aplica el teorema de Pitágoras para calcular la distancia entre los cables a pie del suelo, b:

$b^2 = 6^2 + 8^2 \Rightarrow b = \sqrt{100} = 10$ m

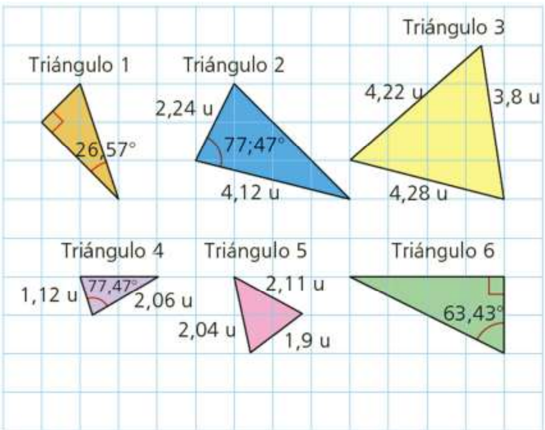
Conocida la longitud de la base y el área, se determina la altura del poste:

$$\frac{10 \cdot h}{2} = 24 \Rightarrow 10h = 48 \Rightarrow h = 4{,}8$$

La hipotenusa mide 10 m. El área del triángulo es de 24 m^2 y, por tanto, la altura del triángulo, que es la longitud del poste, es de 4,8 m.

SOLUCIONES PÁG. 215

50 Determina cuáles de estos triángulos son semejantes y explica el porqué:



Triángulos 1 y 6: son rectángulos y tienen un ángulo agudo igual.

Triángulos 2 y 4: tienen dos lados proporcionales y el ángulo que comprenden es igual.

51 Un mapa está hecho a escala 1:20 000 000.

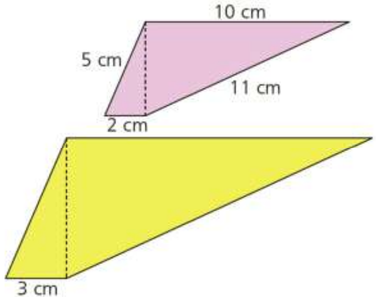
a. ¿Qué distancia separará Lugo de Murcia en el mapa si en la realidad distan 780 km?

$\frac{780\,000 \text{ m}}{20\,000\,000} = 0{,}039 \text{ m} =$ 3,9 cm

b. La separación en el mapa entre Soria y León es de 1,6 cm. ¿Cuál es la distancia real?

0,016 · 20 000 000 = 320 000 m = 320 km

52 Las siguientes figuras son semejantes:



a. Calcula el área de la figura menor.

Se calcula la altura común de los dos triángulos aplicando el teorema de Pitágoras:

$11^2 = 10^2 + h^2 \Rightarrow h = \sqrt{21}$ = 4,58 cm.

El área de la figura es la suma del triángulo menor más el triángulo mayor:

$A_{\text{triángulo menor}} = \frac{2 \cdot 4{,}58}{2} =$ 4,58 cm^2

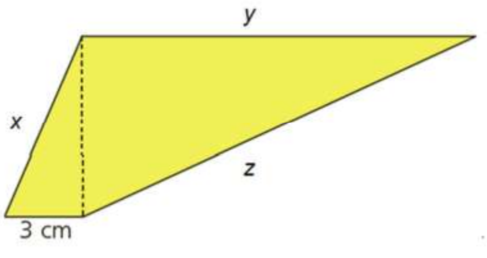
$A_{\text{triángulo mayor}} = \frac{10 \cdot 4{,}58}{2} = 22{,}9$ cm^2

El área total de la figura menor es:

$A_{\text{total}} = A_{\text{triángulo menor}} + A_{\text{triángulo mayor}} = 4{,}58 + 22{,}9 = 27{,}48$ cm^2

b. Halla la razón de semejanza y la longitud de los lados de la figura mayor.

La razón de semejanza es k = $\frac{3}{2}$. Los lados de la figura mayor son:



$\frac{3}{2} = \frac{x}{5} \Rightarrow x = 7{,}5$ cm

$\frac{3}{2} = \frac{y}{10} \Rightarrow y = 15$ cm

$\frac{3}{2} = \frac{z}{11} \Rightarrow z = 16{,}5$ cm

c. Deduce el área de la figura mayor sin calcularla.

La razón entre las áreas de dos figuras semejantes es k^2. Así, el área de la figura mayor es:

$$k^2 = \frac{A_{\text{figura mayor}}}{A_{\text{figura menor}}} \Rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{A_{\text{figura mayor}}}{27,48} \Rightarrow A_{\text{figura mayor}} = \frac{9 \cdot 27,48}{4} = 61,83\,\text{cm}^2$$

53 Los lados de un triángulo miden 7 dm, 8 dm y 10 dm, respectivamente. ¿Cuánto medirá el lado menor de un triángulo semejante a este cuyo perímetro es de 125 dm?

La razón de semejanza entre dos polígonos es también la razón de semejanza entre los perímetros.

Se halla el perímetro del triángulo del que se conocen los lados:

P = 7 + 8 + 10 = 25 dm

La razón de semejanza es:

$$k = \frac{125}{25} = 5$$

La longitud del lado semejante es: $k = \frac{l'}{7} \Rightarrow 7 \cdot 5 = 35$ dm

54 Un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 8 cm y 6 cm, respectivamente, es semejante a otro triángulo de 54 cm² de área. Halla la razón de semejanza y la longitud de los lados del nuevo triángulo.

El área del triángulo del que se conocen los lados es:

$$A = \frac{b \cdot h}{2} \Rightarrow A = \frac{8 \cdot 6}{2} = 24 \Rightarrow A = 24\ \text{cm}^2$$

La razón entre las áreas de dos figuras semejantes es k^2:

$$k^2 = \frac{54}{24} = 2,25 \Rightarrow k = 1,5$$

La razón de semejanza entre los triángulos es también la razón de semejanza entre los lados. Así:

$C_1 = 8 \cdot 1,5 = 12$ cm

$C_2 = 6 \cdot 1,5 = 9$ cm

Se aplica el teorema de Pitágoras para hallar la hipotenusa del triángulo rectángulo pequeño:

$h^2 = 8^2 + 6^2 \Rightarrow h = \sqrt{100} = 10$

Por tanto, la hipotenusa del triángulo rectángulo semejante es: $h = 10 \cdot 1,5 = 15$ cm

55 Un triángulo isósceles que tiene 7 cm de base y cuyos lados iguales miden 10 cm es semejante a otro de 15 cm de altura. Halla la razón de semejanza de los triángulos y las dimensiones del segundo de ellos.

Se aplica el teorema de Pitágoras para calcular la altura:

$h^2 = 10^2 - 3,5^2 \Rightarrow h = \sqrt{87,75} = 9,37$ cm

La razón de semejanza entre polígonos semejantes es la razón entre los lados homólogos: $k = \frac{15}{9,37} = 1,6$

Las dimensiones del segundo triángulo son:

$k = \frac{b'}{b} \Rightarrow 1,6 = \frac{b'}{7} \Rightarrow b' = 1,6 \cdot 7 = 11,2\,\text{cm}$ de base

$k = \frac{c'}{c} \Rightarrow 1,6 = \frac{c'}{10} \Rightarrow c' = 1,6 \cdot 10 = 16\,\text{cm}$ lado igual

56 El mosquito tigre tiene una longitud media de 7 mm. ¿De qué tamaño se verá si lo observamos a través de una lupa que tiene un aumento de un 200 %? ¿Cuál es el factor de escala aplicado?

A través del microscopio se verá con un tamaño de:

$7 + 7 \cdot \dfrac{200}{100} = 21$ mm

El factor de escala es $\dfrac{21}{7} = 3$

57 Se quiere construir una maqueta de la catedral de Burgos. Sabiendo que la altura total de este monumento es de 88 m, halla la escala que se ha de emplear si se desea que la maqueta tenga 50 cm de altura.

La escala es la razón de semejanza entre las dimensiones de la figura representada y las dimensiones de la figura real.

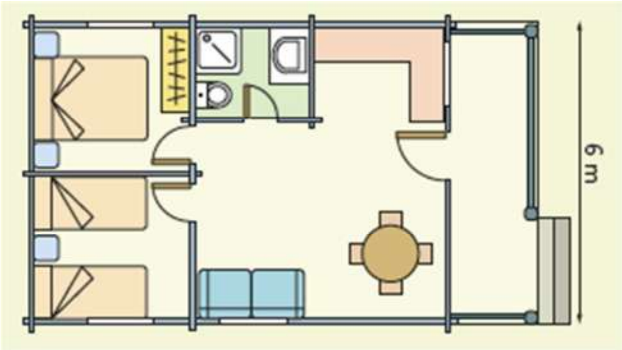
Escala = $\dfrac{50}{8\,800} = \dfrac{1}{176}$

58 El siguiente plano representa el barrio en el que vive Miguel. Calcula la distancia que tiene que recorrer todos los días para ir de su casa al colegio.

La distancia de casa al colegio es de 5 cm aproximadamente: 1,7 + 1,4 + 1,9 = 5.
La escala gráfica mide 1,45 cm.
Entonces:

$\dfrac{1{,}45\text{ cm}}{60\text{ dam}} = \dfrac{5\text{ cm}}{x} \Rightarrow x = 206{,}89\text{ dam} = 2\,068{,}9\text{ m}$

59 Observa el siguiente plano:



a. Determina la escala aplicada.

En el plano 3,7 cm equivalen a 6 m en la realidad; luego, la escala es $\frac{600}{3,7} = 162 \Rightarrow$ 1 : 162, aproximadamente

b. Calcula la superficie real de cada habitación.

La casa tiene una superficie aproximada de 62,4 m^2, repartidos de la siguiente manera:

Terraza: 9,71 m^2

Dormitorios 1 y 2: 10,85 m^2

Baño: 4,72 m^2

Cocina: 5,35 m^2

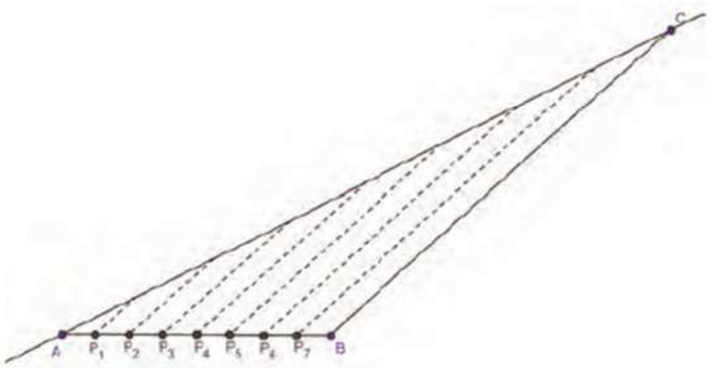
Salón: 20,99 m^2

SOLUCIONES PÁG. 217

60 **Dibuja en tu cuaderno un segmento, $\overline{AB}$, de 5 cm de longitud y divídelo en 8 partes iguales.**

Para realizar el dibujo se siguen estos pasos:

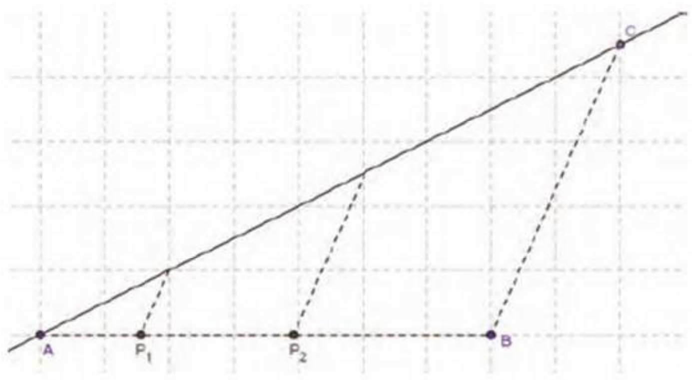
1. Se dibuja un segmento $\overline{AB}$ de 5 cm de longitud.
2. Con origen en el extremo A del segmento, se traza una recta auxiliar con la inclinación que se desee.
3. Sobre la recta auxiliar, y comenzando en A, se marcan de forma consecutiva los extremos de ocho segmentos. El último extremo se designa con la letra C.
4. Se une el extremo C de la recta auxiliar con el extremo B del segmento que se va a dividir y se trazan paralelas a $\overline{CB}$ que pasen por las marcas que se han realizado en la recta auxiliar. El segmento queda así, dividido en ocho partes iguales.



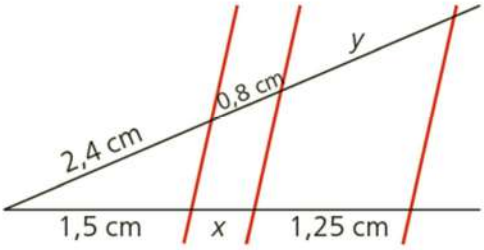
61 **Dibuja en tu cuaderno un segmento, $\overline{AB}$, de 7 cm de longitud y divídelo en 3 partes proporcionales a 2, 3 y 4.**

Para realizar el dibujo se siguen estos pasos:

1. Se dibuja un segmento $\overline{AB}$ de 7 cm de longitud.
2. Con origen en el extremo A del segmento, se traza una recta auxiliar con la inclinación que se desee.
3. Sobre la recta auxiliar, y comenzando en A, se marcan de forma consecutiva los extremos de tres segmentos de 2 L, 3 L y 4 L de longitud, respectivamente. El último extremo se designa con la letra C.
4. Se une el extremo C de la recta auxiliar con el extremo B del segmento que se va a dividir y se trazan paralelas a $\overline{CB}$ que pasen por las marcas que se han realizado en la recta auxiliar. El segmento queda así, dividido en tres partes proporcionales a 2, 3 y 4.



62 Halla el valor de *x* e *y*.



Las rectas paralelas cortan a dos rectas secantes formando segmentos proporcionales. Así, la proporción entre ellos es:

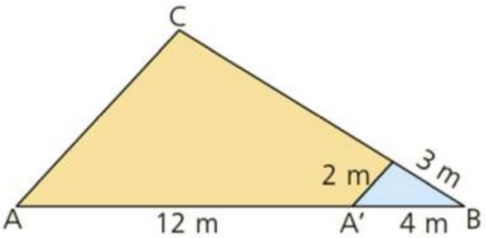
$$\frac{2,4}{1,5} = \frac{0,8}{x} = \frac{y}{1,25}$$

Realizando los cálculos se tiene que:

$$\frac{2,4}{1,5} = \frac{0,8}{x} \Rightarrow x = \frac{0,8 \cdot 1,5}{2,4} = 0,5 \Rightarrow x = 0,5 \text{ cm}$$

$$\frac{2,4}{1,5} = \frac{y}{1,25} \Rightarrow y = \frac{2,4 \cdot 1,25}{1,5} = 2 \Rightarrow y = 2 \text{ cm}$$

63 ¿Qué perímetro tiene el triángulo ABC?



Son dos triángulos en posición de Tales. Por lo tanto, son semejantes.
La razón de semejanza es:

$$k = \frac{16}{4} = 4$$

Así, los lados del triángulo ABC miden:
AB = 16 cm CB = 3 · 4 = 12 cm AC = 2 · 4 = 8 cm
El triángulo mayor tiene por lados 16 m, 12 m y 8 m, luego su perímetro es 36 m.

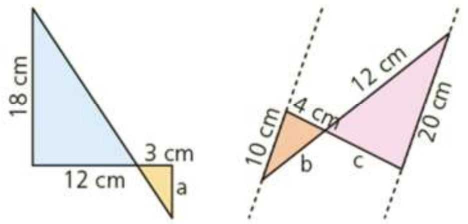
También se puede resolver teniendo en cuenta que la razón de semejanza entre los dos triángulos es 4 y, como el triángulo pequeño tiene por perímetro 9 m, el grande debe tener perímetro igual a 36 m.

64 Actividad resuelta.

65 Una farola proyecta una sombra de 15 m en el mismo momento del día en el que un cartel publicitario de 3 m de altura proyecta una sombra de 4 m. Calcula la altura de la farola.
La farola y el cartel publicitario determinan con la inclinación de los rayos solares dos triángulos en posición de Tales. Por tanto, se establece la proporción entre los lados de los triángulos:

$$\frac{h}{3} = \frac{15}{4} \Rightarrow h = \frac{3 \cdot 15}{4} = 11,25 \Rightarrow h = 11,25 \text{ m}$$

66 Halla el valor de *a, b* y *c* en las siguientes figuras:



Los triángulos son semejantes por ser rectángulos y tener un ángulo agudo con la misma amplitud por ser opuestos por el vértice.
Así, en la figura de la izquierda:

$$\frac{3}{12}=\frac{a}{18}\Rightarrow a=\frac{3\cdot 18}{12}=4{,}5\Rightarrow a=4{,}5 \text{ cm}$$

Y en el triángulo de la derecha:

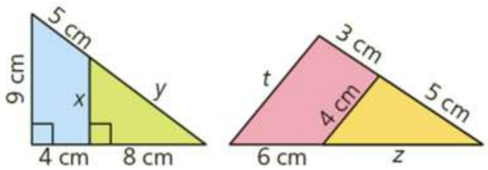
$$\frac{10}{20}=\frac{4}{c}=\frac{b}{12}\begin{cases}\dfrac{10}{20}=\dfrac{4}{c}\Rightarrow c=\dfrac{4\cdot 20}{10}=8\Rightarrow c=8 \text{ cm}\\ \dfrac{10}{20}=\dfrac{b}{12}\Rightarrow b=\dfrac{10\cdot 12}{20}=6\Rightarrow b=6 \text{ cm}\end{cases}$$

67 El géiser Old Faithful es uno de los más conocidos del Parque Nacional de Yellowstone, Wyoming (EE UU). Al mediodía, cuando alcanza su altura máxima de 75 m, proyecta una sombra de 1,6 m. Calcula la altura que alcanzó este géiser en un día en el que su sombra al mediodía fue de 0,85 m.

El géiser a su máxima altura y a otra altura determinan con la inclinación de los rayos solares dos triángulos en posición de Tales. Por tanto, se establece la proporción entre los lados de los triángulos:

$$\frac{75}{1{,}6}=\frac{h}{0{,}85}\Rightarrow h=\frac{75\cdot 0{,}85}{1{,}6}=39{,}84\Rightarrow h=39{,}84 \text{ m}$$

68 Calcula el valor de *x, y, z* y *t* en las siguientes figuras:



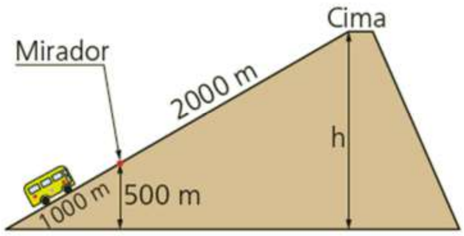
Son triángulos en posición de Tales. Por lo tanto, son semejantes.
La proporción que se establece en los triángulos de la izquierda es:

$$\frac{9}{x}=\frac{12}{8}=\frac{5+y}{y}\begin{cases}\dfrac{9}{x}=\dfrac{12}{8}\Rightarrow x=\dfrac{9\cdot 8}{12}=6\Rightarrow x=6 \text{ cm}\\ \dfrac{12}{8}=\dfrac{5+y}{y}\Rightarrow 12y=40+8y\Rightarrow 4y=40\Rightarrow y=10 \text{ cm}\end{cases}$$

La proporción que se establece en los triángulos de la derecha es:

$$\frac{t}{4}=\frac{8}{5}=\frac{6+z}{z}\begin{cases}\dfrac{t}{4}=\dfrac{8}{5}\Rightarrow t=\dfrac{4\cdot 8}{5}=6{,}4\Rightarrow t=6{,}4 \text{ cm}\\ \dfrac{8}{5}=\dfrac{6+z}{z}\Rightarrow 8z=30+5z\Rightarrow 3z=30\Rightarrow z=10 \text{ cm}\end{cases}$$

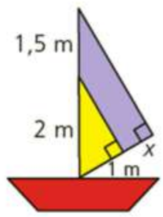
69 Esteban toma un autobús al pie de una montaña para subir hasta su cima. Cuando ya ha recorrido 1 000 m por la ladera de la montaña, el autobús se detiene en un mirador situado a 500 m de altura para permitir que los viajeros tomen fotografías. Después, continúa 2 000 m más hasta alcanzar la cima de la montaña. ¿Qué altura tiene la montaña?



Se observa en la figura que hay dos triángulos rectángulos en posición de Tales. Por tanto:

$$\frac{1000}{500}=\frac{3000}{\text{h}}\Rightarrow \text{h}=\frac{3000\cdot 500}{1000}=1500\Rightarrow \text{h}=1500\ \text{m}$$

70 Calcula cuántos metros cuadrados de lona amarilla y azul se necesitan para fabricar la vela de este barco.



Para calcular la altura del triángulo de lona amarilla se aplica el teorema de Pitágoras:

Altura vela amarilla = $\sqrt{2^2-1^2}$ = 1,73 m

Las dos lonas están en posición de Tales. Por lo tanto, se establece la proporción:

$$\frac{1}{1+x}=\frac{2}{3,5}\Rightarrow 2+2x=3,5\Rightarrow x=\frac{1,5}{2}=0,75\Rightarrow x=0,75\ \text{m}$$

Se aplica el teorema de Tales para calcular la altura del triángulo de lona azul:

$$\frac{2}{1,73}=\frac{3,5}{\text{h}}\Rightarrow \text{h}=\frac{3,5\cdot 1,73}{2}=3,03\Rightarrow \text{h}=3,03\ \text{m}$$

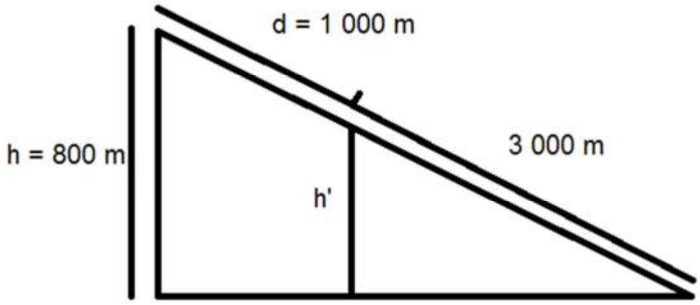
Se calculan las áreas

Área vela amarilla = $\frac{1\cdot 1,73}{2}$ = 0,865 m^2

Área de la vela = $\frac{1,75\cdot 3,03}{2}$ = 2,65 m^2

Área vela azul = 2,65 – 0,865 = 1,785 m^2

71 Un camión baja un puerto, situado a 800 m de altura, por una carretera recta de 4 km de longitud. Cuando ha recorrido 1 km, se detiene a repostar en una gasolinera. Dibuja un esquema de situación y calcula la altitud a la que se encuentra la gasolinera.



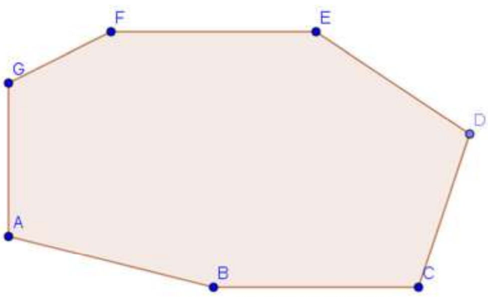
Se observa en la figura que hay dos triángulos rectángulos en posición de Tales. Por tanto:

$$\frac{4000}{800} = \frac{3000}{h'} \Rightarrow h' = \frac{3000 \cdot 800}{4000} = 600 \Rightarrow h' = 600 \text{ m}$$

SOLUCIONES PÁG. 218

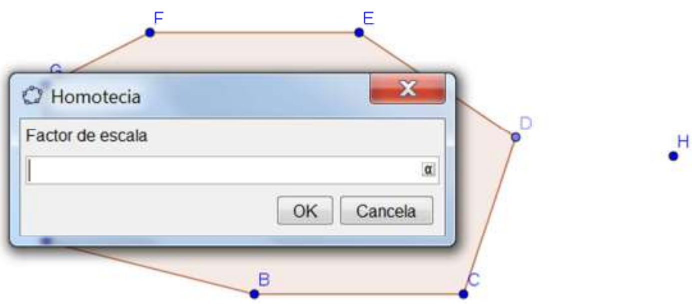
1 Dibuja un polígono irregular convexo de siete lados y obtén dos polígonos semejantes cuyas razones de semejanza sean 0,75 y 1,5, respectivamente.

Se dibuja un polígono convexo:

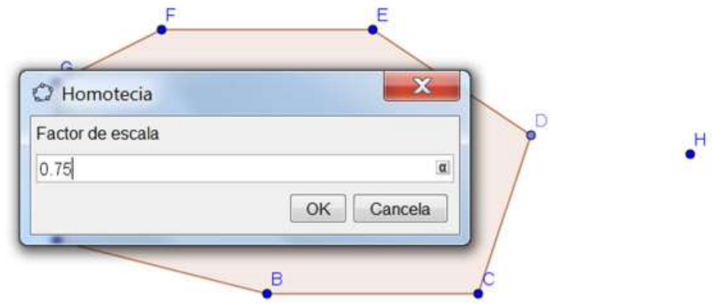


Se pulsa sobre el comando  y se selecciona *Homotecia.*

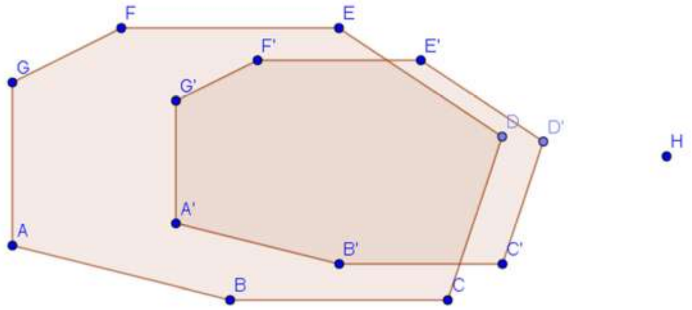
Se hace clic sobre el polígono y se fija el punto H



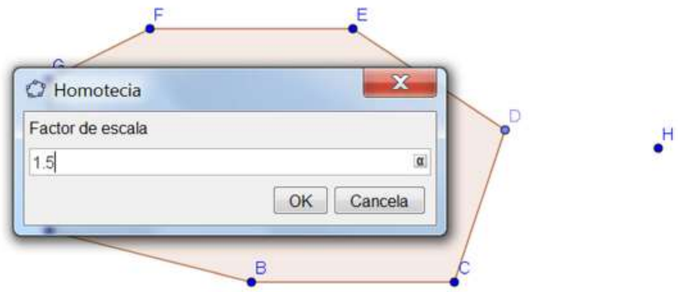
Se indica el factor de escala, en este caso 0,75:



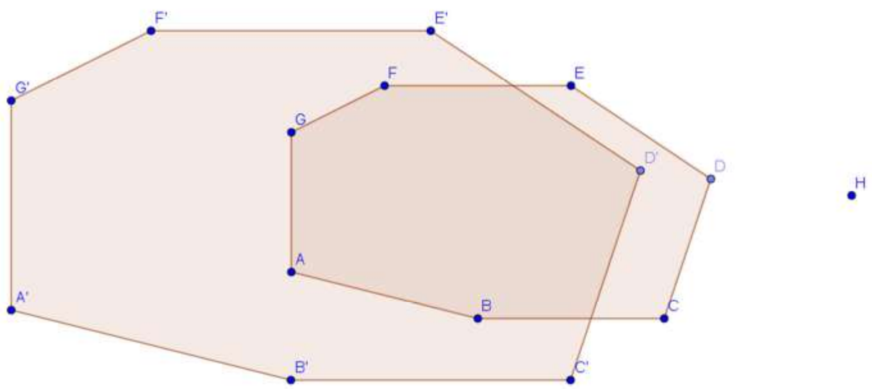
Se pincha en OK y aparece el nuevo polígono:



Para el polígono con factor de escala 1,75:

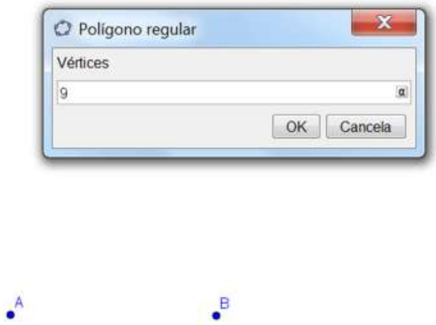


Se pincha en OK y aparece el nuevo polígono:

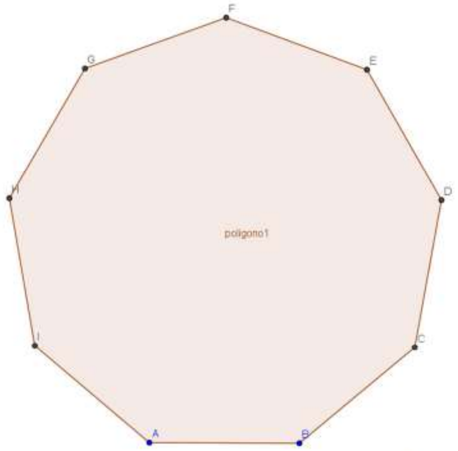


2 Dibuja un polígono regular de nueve lados y obtén dos polígonos semejantes con una razón de semejanza de 0,3 y 1,75, respectivamente.

Se pulsa sobre el comando *Polígono regular* y se escribe el número de lados del polígono:

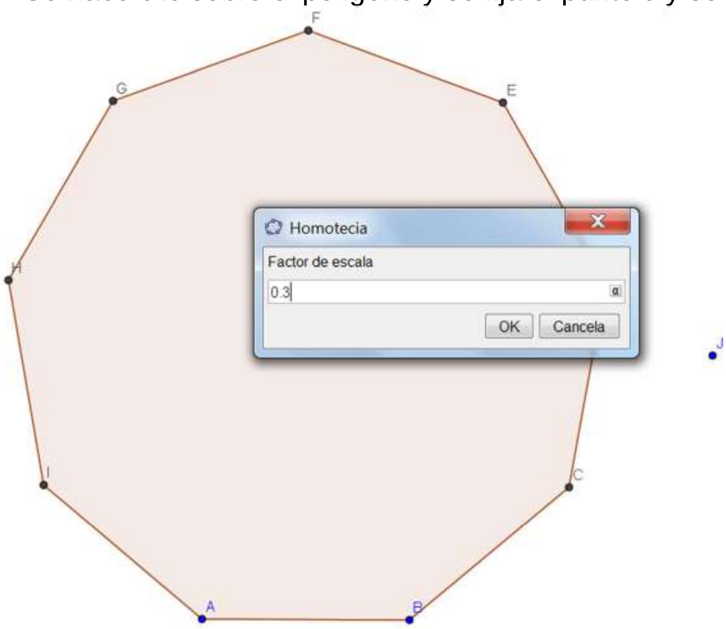


Se pincha en OK y aparece el polígono:

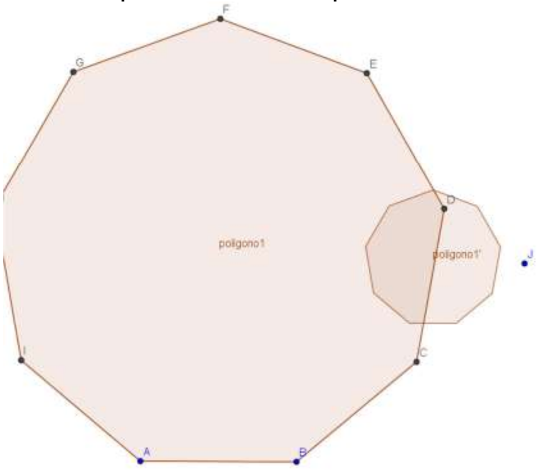


Se pulsa sobre el comando  y se selecciona *Homotecia.*

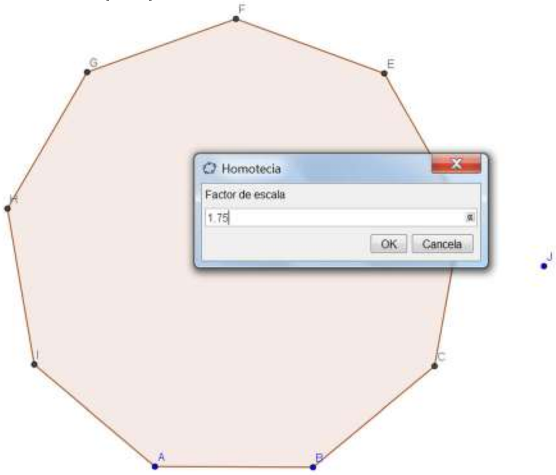
Se hace clic sobre el polígono y se fija el punto J y se indica el factor de escala, 0,3:



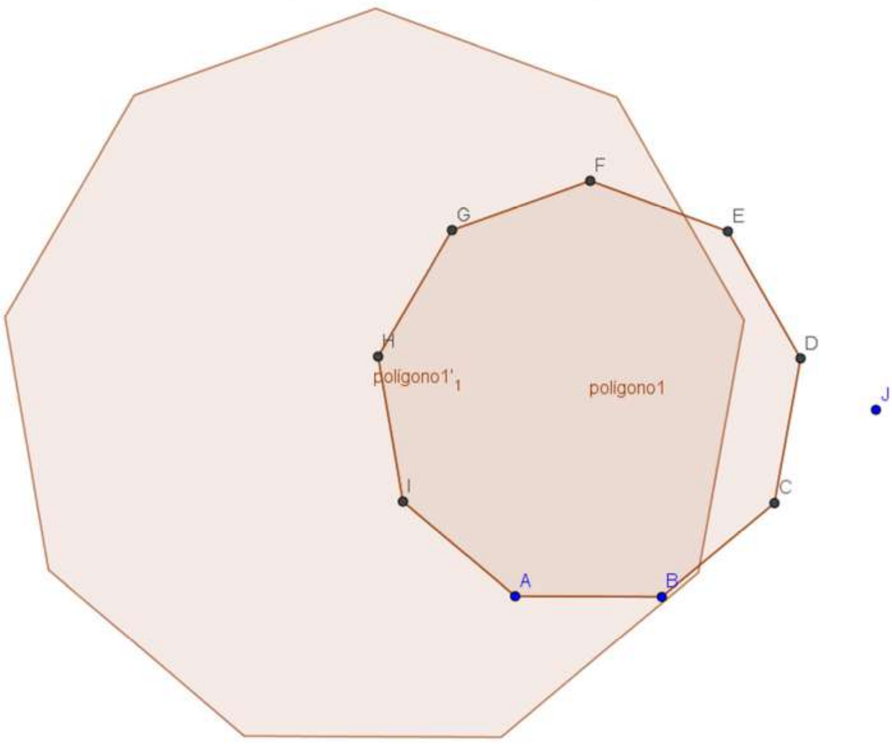
Y al pinchar en OK aparece el nuevo polígono:



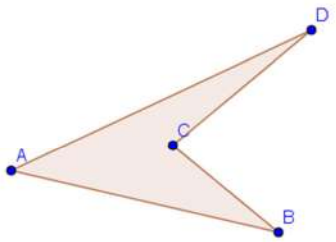
Se le proporciona el nuevo factor de escala, 1,75:



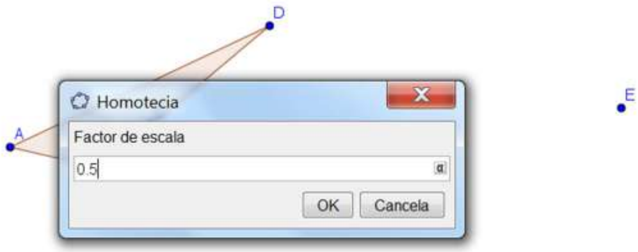
Se pincha en OK y aparece el nuevo polígono:



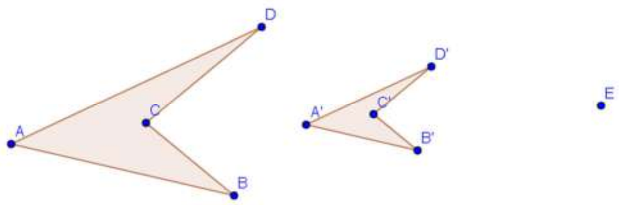
3. Dibuja un polígono cóncavo de cuatro lados y obtén dos polígonos semejantes que tengan como razón de semejanza uno 0,5 y el otro 2.
Se dibuja un polígono de 4 lados cóncavo:



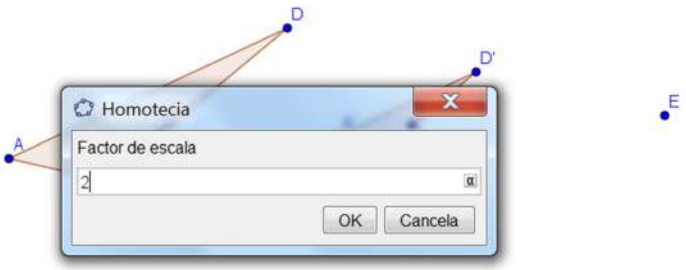
Se pulsa sobre el comando  y se selecciona *Homotecia.*
Se hace clic sobre el polígono y se fija el punto E y se indica el factor de escala, 0,5:



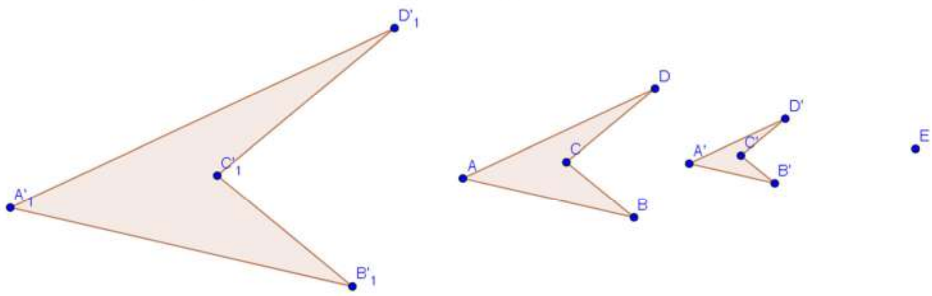
Se pincha el OK y aparece el nuevo polígono:



Se pincha en el polígono, en el punto E y se indica el nuevo factor de escala, 2:



Se pincha en OK y aparece el nuevo polígono:



SOLUCIONES PÁG. 219

1 **Escribe las distintas posiciones que pueden tener dos rectas en el plano.**
Según su posición relativa, las rectas pueden ser:

- Secantes: se cortan en un único punto.
- Paralelas: no se cortan.
- Coincidentes: tienen infinitos puntos en común.

2 **Define ángulos opuestos por el vértice, ángulos alternos, internos y externos, e indica las relaciones que se establecen entre ellos.**

- Ángulos opuestos por el vértice: son los que tienen el mismo vértice y los lados de uno de los ángulos son prolongación de los lados del otro.
- Ángulos alternos internos: al trazar dos rectas paralelas y una tercera secante a las dos primeras, aparecen ocho ángulos. Los ángulos alternos internos son los que están entre las paralelas a distinto lado de ellas y a distinto lado de la transversal.
- Ángulos alternos internos: al trazar dos rectas paralelas y una tercera secante a las dos primeras, aparecen ocho ángulos. Los ángulos alternos internos son los que están en la parte exterior de las paralelas a distinto lado de ellas y a distinto lado de la transversal.

3 **¿Qué es la mediatriz de un segmento? ¿Qué propiedad cumple? ¿Qué es la bisectriz de un ángulo? ¿Qué propiedad cumple? Asegúrate de que conoces la construcción gráfica de la mediatriz y la bisectriz.**

- La mediatriz de un segmento $\overline{AB}$, es la recta perpendicular al mismo que pasa por su punto medio. Cumple la propiedad de que cualquier punto situado sobre esta, se encuentra a la misma distancia de los extremos del segmento.
- La bisectriz de un ángulo es la recta que divide el ángulo por la mitad. Cumple la propiedad de que cualquier punto de esta, equidista de los lados que constituyen el ángulo.

4 **Añade las fórmulas del número de diagonales y de la suma de ángulos de un polígono convexo. ¿Cuándo son semejantes dos polígonos? ¿Qué es una escala?**

- El número de diagonales de un polígono se determina: $\frac{n\cdot(n-3)}{2}$
- La suma de los ángulos de un polígono convexo se determina con: $(n-2)\cdot 180^{\circ}$
- Dos polígonos son semejantes cuando los ángulos homólogos son iguales y los segmentos homólogos son proporcionales.
- Una escala es la razón de semejanza que existe entre las dimensiones de una figura representada y las dimensiones de la figura real.

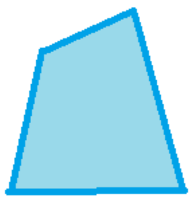
5 **¿Cuándo son semejantes dos triángulos? ¿Qué criterios de semejanza existen?**
Dos triángulos son semejantes cuando sus ángulos homólogos son iguales y sus lados homólogos son proporcionales.
Hay tres criterios de semejanza:

- Dos triángulos son semejantes si tienen los tres lados proporcionales.
- Dos triángulos son semejantes si dos ángulos son iguales.
- Dos triángulos son semejantes si dos lados homólogos son proporcionales y el ángulo comprendido entre ellos es igual.

6 ¿Qué es un cuadrilátero? ¿Cuántos tipos de cuadriláteros distintos conoces? Escribe la fórmula del área en cada caso y añade un dibujo.

Un cuadrilátero es cualquier polígono de cuatro lados y cuatro ángulos, cuyos ángulos interiores suman 360º.

Los tipos de cuadriláteros son:

Nombre	Área	Figura
Cuadrado	$A = l^2$	
Rectángulo	$A = b \cdot h$	
Rombo	$A = \frac{D \cdot d}{2}$	
Romboide	$A = b \cdot h$	
Trapecio	$A = \frac{(B + b) \cdot h}{2}$	
Trapezoide		

7 ¿Cuándo es regular un polígono? ¿Qué tipos de polígonos regulares conoces? ¿Cuál es la fórmula del área de estos polígonos? ¿Cuánto valen los ángulos interiores y centrales?

Un polígono es regular cuando todos los lados miden la misma longitud y todos los ángulos interiores tienen la misma amplitud. Por ejemplo, el hexágono regular, el pentágono regular.

El área se calcula con la expresión: $A = \frac{P \cdot ap}{2}$

La amplitud de los ángulos interiores se obtiene con la expresión: $\frac{(n-2) \cdot 180^o}{n}$, y la de los ángulos centrales: $\frac{360^o}{n}$

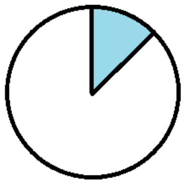
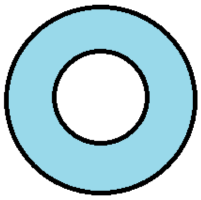
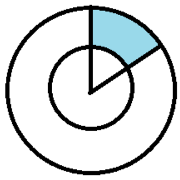
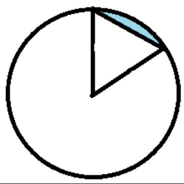
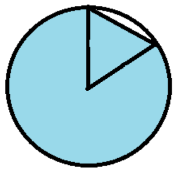
8 Escribe las fórmulas de la longitud de la circunferencia y del arco, así como la del área del círculo, en función del radio.

$l_{circunferencia} = 2\pi r$

$l_{arco} = \frac{2\pi r \cdot n}{360^o}$

$A_{círculo} = \pi r^2$

9 Define los conceptos de sector, corona, trapecio y segmento circular. Ayúdate de un dibujo. Escribe las fórmulas de las áreas correspondientes.

Nombre	Área	Figura
Sector circular	$A = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot n}{360^o}$	
Corona circular	$A = \pi \cdot (R^2 - r^2)$	
Trapecio circular	$A = \frac{\pi \cdot (R^2 - r^2) \cdot n}{360^o}$	
Segmento circular	Si $n < 180^o$ $A = A_{sector\ circular} - A_{triángulo}$	
	Si $n > 180^o$ $A = A_{sector\ circular} + A_{triángulo}$	

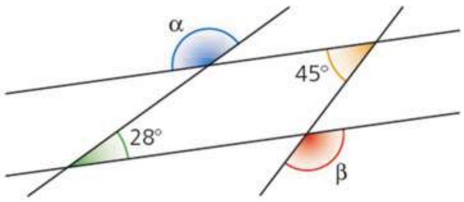
10 Busca información sobre las principales contribuciones de Pitágoras y de Tales de Mileto a las disciplinas matemáticas.
Respuesta abierta.

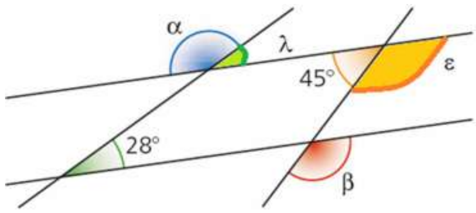
SOLUCIONES PÁG. 220 – REPASO FINAL

RECTAS Y ÁNGULOS

1 Calcula el valor de los ángulos indicados.

a.



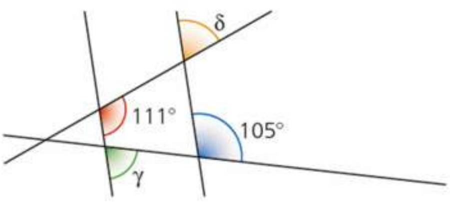
$\Rightarrow$


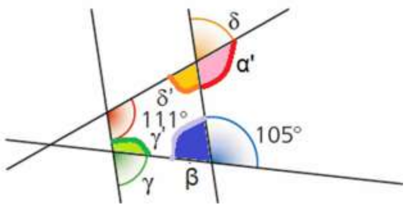
El ángulo λ y el ángulo de 28º son ángulos correspondientes. Por lo tanto, miden lo mismo: λ = 28º. Los ángulos λ y α son ángulos suplementarios y suman 180º. Así: $\lambda + \alpha = 180^{\circ} \Rightarrow \alpha = 180^{\circ} - 28^{\circ} = 152^{\circ}$.

Los ángulos ε y de 45º son ángulos suplementarios y suman 180º. Así:
$\varepsilon + 45 = 180^{\circ} \Rightarrow \varepsilon = 180^{\circ} - 45^{\circ} = 135^{\circ}$.

El ángulo ε y el ángulo de β son ángulos correspondientes. Por lo tanto, miden lo mismo, es decir: $\varepsilon = \beta = 135^{\circ}$

b.



$\Rightarrow$


Los ángulos β y de 105º son ángulos suplementarios y suman 180º. Así:
$\beta + 105^{\circ} = 180^{\circ} \Rightarrow \beta = 180^{\circ} - 105^{\circ} = 75^{\circ}$.

El ángulo α' y el ángulo de 111º son ángulos correspondientes. Por lo tanto, miden lo mismo: $\alpha' = 111^{\circ}$.

Los ángulos α' y δ' son ángulos suplementarios y suman 180º. Así: $\alpha' + \delta' = 180^{\circ} \Rightarrow$
$\Rightarrow \delta' = 180^{\circ} - 111^{\circ} = 69^{\circ}$.

Los ángulos δ y δ', son opuestos por el vértice, así pues, miden lo mismo: $\delta = 69^{\circ}$.

El ángulo γ' y el ángulo de 105º son ángulos correspondientes, y miden lo mismo: $\gamma' = 105^{\circ}$.

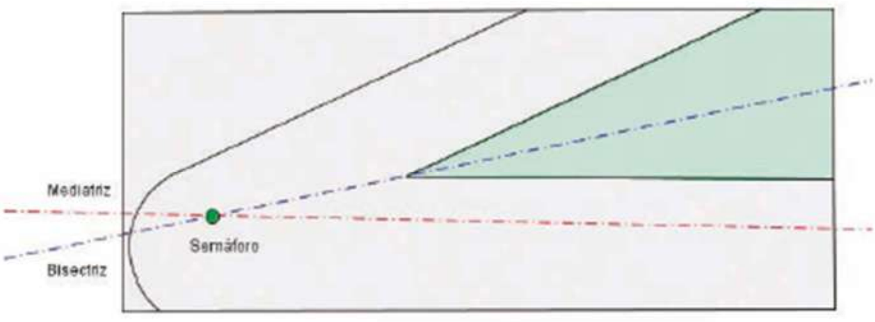
Los ángulos γ' y γ son ángulos suplementarios y suman 180º. De esta manera:
$\gamma' + \gamma = 180^{\circ} \Rightarrow \gamma = 180^{\circ} - 105^{\circ} = 75^{\circ}$

LUGAR GEOMÉTRICO

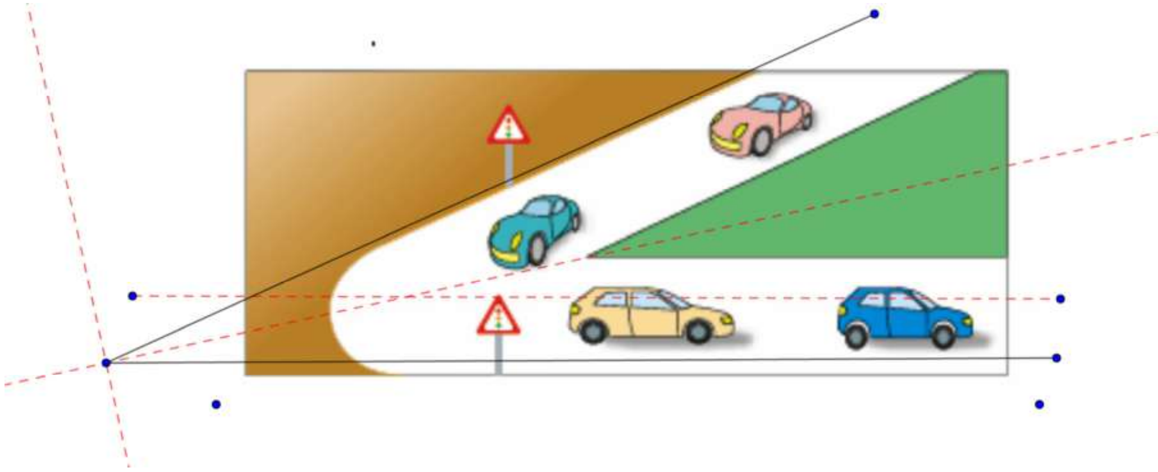
2 La figura adjunta muestra una calle en la que se quiere colocar un semáforo de manera que esté a la misma distancia de ambos lados de la calle y que a su vez equidiste de las dos señales de tráfico.

a. Razona, de forma geométrica, dónde se debe instalar el semáforo.
El semáforo se debe colocar en el punto intersección de la bisectriz de los dos lados rectos de la calle con la mediatriz del segmento que une las dos señales de tráfico.

b. Traza con regla y compás el punto exacto.



c. Usando GeoGebra, comprueba que el resultado es el correcto.



POLÍGONOS

3 Copia en tu cuaderno y completa la siguiente tabla:

N.º de lados del polígono	N.º de diagonales desde un vértice	N.º total de diagonales	Suma de ángulos interiores
20	(1)	(2)	(3)
(4)	13	(5)	(6)
(7)	(8)	44	(9)
(10)	(11)	(12)	2 880°

$\Rightarrow$

(1) n – 3 = 20 – 3 = 17

(2) $\frac{n(n-3)}{2} = \frac{20\cdot(20-3)}{2} = 170$

(3) (n – 2) · 180º = (20 – 2) · 180º = 3 240º

(4) n – 3 = 13 $\Rightarrow$ n = 16

(5) $\frac{n(n-3)}{2} = \frac{16\cdot(16-3)}{2} = 104$

(6) (n – 2) · 180º = (16 – 2) · 108º = 1 512º

(7) $\frac{n(n-3)}{2} = 44 \Rightarrow n^2 - 3n - 88 = 0 \Rightarrow$

$$n = \frac{3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-88)}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm 19}{2} \Rightarrow \begin{cases} n = \frac{3+19}{2} = 11 \\ n = \frac{3-19}{2} \Rightarrow \text{Solución negativa no válida.} \end{cases}$$

(8) n – 3 = 11 – 3 = 8
(9) (n – 2) · 180º = (11 – 2) · 180º = 1 620º
(10) (n – 2) · 180º = 2 880º ⇒ n = 18
(11) n – 3 = 18 – 3 = 15
(12) $\frac{n(n-3)}{2} = \frac{18 \cdot (18-3)}{2} = 135$

N.º de lados polígono convexo	N.º de diagonales desde un vértice	N.º total de diagonales	Suma de ángulos interiores
20	17	170	3 240º
16	**13**	104	2 520º
11	8	**44**	1 620º
18	15	135	**2 880º**

4 Copia en tu cuaderno y completa la siguiente tabla:

N.º de lados del polígono regular	Amplitud de cada ángulo central	Amplitud de cada ángulo interior	Suma de ángulos interiores
15	(1)	(2)	(3)
(4)	40º	(5)	(6)
(7)	(8)	165º	(9)
(10)	(11)	(12)	4 500º

(1) $\frac{360^\circ}{n} \Rightarrow \frac{360^\circ}{15} = 24^\circ$

(2) $\frac{n-2}{n} \cdot 180^\circ \Rightarrow \frac{15-2}{15} \cdot 180^\circ = 156^\circ$

(3) (n – 2) · 180º ⇒ (15 – 2) · 180º = 2 340º

(4) $\frac{360^\circ}{n} = 40^\circ \Rightarrow n = 9$

(5) $\frac{n-2}{n} \cdot 180^\circ \Rightarrow \frac{9-2}{9} \cdot 180^\circ = 140^\circ$

(6) (n – 2) · 180º ⇒ (9 – 2) · 180º = 1 260º

(7) $\frac{n-2}{n} \cdot 180^\circ = 165^\circ \Rightarrow 180^\circ \cdot n - 165^\circ \cdot n = 360^\circ \Rightarrow n = 24$

(8) $\frac{360^\circ}{n} \Rightarrow \frac{360^\circ}{24} = 15^\circ$

(9) (n – 2) · 180º ⇒ (24 – 2) · 180º = 3 960º
(10) (n – 2) · 180º = 4 500º ⇒ 180º · n = 4 500º + 360º ⇒ n = 27
(11) $\frac{360^\circ}{n} \Rightarrow \frac{360^\circ}{27} = 13,33^\circ$
(12) $\frac{n-2}{n} \cdot 180^\circ \Rightarrow \frac{27-2}{27} \cdot 180^\circ = 166,67^\circ$

N.º de lados polígono regular	Amplitud de cada ángulo central	Amplitud de cada ángulo interior	Suma de ángulos interiores
15	24°	156°	2 340°
9	**40°**	140°	1 260°
24	15°	**165°**	3 960°
27	13,33°	166,67°	**4 500°**

5 Calcula el área de los siguientes polígonos:

a. Rombo cuyas diagonales miden 6 cm y 9 cm.

$A = \frac{9 \cdot 6}{2} = 27$ cm^2

b. Trapecio con bases de 12 cm y 7 cm y altura de 9 cm

$A = \frac{(12+7) \cdot 9}{2} = 85,5$ cm^2

c. Triángulo rectángulo cuyos catetos miden 4 cm y 11 cm.

$A = \frac{4 \cdot 11}{2} = 22$ cm^2

d. Hexágono regular de 10 cm de lado y 8,66 cm de apotema.

$A = \frac{6 \cdot 10 \cdot 8,66}{2} = 259,8$ cm^2

CIRCUNFERENCIA Y CÍRCULO. FIGURAS CIRCULARES

6 Calcula el área de las siguientes figuras circulares:

a. Un sector con un radio de 4 m y una amplitud de 75°.

$A = \frac{\pi \cdot 4^2 \cdot 75^\circ}{360^\circ} = \frac{10\pi}{3} = 10,47$ m^2

b. Una corona cuyos radios miden 3 cm y 10 cm.

$A = \pi \cdot (10^2 - 3^2) = 91\pi = 285,88$ cm^2

c. Un trapecio cuyos radios miden 5 m y 9 m y que tiene una amplitud de 40°.

$A = \frac{\pi \cdot (9^2 - 5^2) \cdot 40}{360^\circ} = \frac{56\pi}{9} = 19,55$ m^2

d. Un segmento de 10 cm de radio y 90° de amplitud.

Área del sector = $\frac{\pi \cdot 10^2 \cdot 90^\circ}{360^\circ} = 25\pi = 78,54$ cm^2

Área del triángulo = $\frac{b \cdot h}{2} = \frac{10 \cdot 10}{2} = 50$ cm^2

Área del segmento circular = 78,54 – 50 = 28,54 cm^2

7 ¿Cuántas vueltas tiene que dar una rueda de 1 m de diámetro para desplazarse 50 m?

Se calcula la longitud de la rueda:

L = 2 · π · r = 2 · π · 0,5 = π

El número de vueltas es:

n.º vueltas = $\frac{50}{\pi}$ = 15,92

16 vueltas aproximadamente

8 Calcula la amplitud del ángulo inscrito en una circunferencia de 5 cm de radio, sabiendo que abarca un arco de 9π cm.

Se calcula la longitud de la circunferencia:

L = 2 · π · 5 = 10π

A partir de la expresión de la longitud del arco de una circunferencia se halla la amplitud del ángulo central:

$$l_{arco} = \frac{2\pi r \cdot n}{360º} \Rightarrow 9\pi = \frac{10\pi \cdot n}{360º} \Rightarrow n = \frac{9\pi \cdot 360º}{10\pi} = 324º$$

El ángulo central mide 324º y, por tanto, el inscrito mide 162º.

9 Un ángulo de 45° que está inscrito en una circunferencia abarca un arco de 8π cm. ¿Cuánto mide el radio de la circunferencia?

El ángulo central mide el doble del ángulo inscrito:

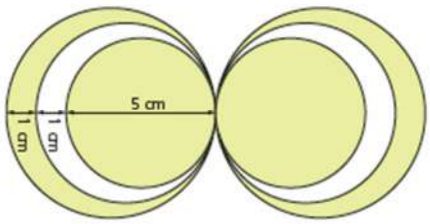
$A_c = 2 \cdot A_i \Rightarrow A_c = 90º$

A partir de la expresión de la longitud del arco de una circunferencia se halla el radio:

$$l_{arco} = \frac{2\pi r \cdot n}{360º} \Rightarrow 8\pi = \frac{2\pi r \cdot 90º}{360º} \Rightarrow r = \frac{8\pi \cdot 360º}{2\pi \cdot 90º} = 16 \text{ cm}$$

El ángulo central mide 90º, y el radio de la circunferencia, 16 cm.

10 Determina el área de la parte coloreada de este dibujo:



El círculo grande tiene un diámetro de 7 cm, por lo que su radio mide 3,5 cm.

$A_{\text{círculo grande}} = \pi r^2 = 12{,}25\pi \text{ cm}^2$

El círculo mediano tiene un diámetro de 6 cm, por lo que su radio mide 3 cm.

$A_{\text{círculo mediano}} = \pi r^2 = 9\pi \text{ cm}^2$

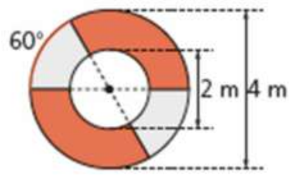
El círculo pequeño tiene un diámetro de 5 cm, por lo que su radio mide 2,5 cm.

$A_{\text{círculo pequeño}} = \pi r^2 = 6{,}25\pi \text{ cm}^2$

Área pedida = 2 · (12,25 π – 9π + 6,25π) = 2 · 9,5π cm^2 = 59,69 cm^2

SOLUCIONES PÁG. 221

11 Ana quiere construir en su jardín un parterre como el representado en el dibujo. En el círculo interior quiere plantar rosales; en la zona roja, geranios, y en la gris, hortensias.



a. ¿Qué superficie ocupará cada tipo de planta?

$A_{ci} = \pi \cdot 1^2 = \pi\ m^2$

La superficie plantada de rosales es: $\pi\ m^2 = 3{,}14\ m^2$

$A_{cc} = \pi \cdot (2^2 - 1^2) = 3\pi \Rightarrow 3\pi \cdot \frac{240}{360} = 2\pi$

La superficie plantada de geranios es: $2\pi\ m^2 = 6{,}28\ m^2$

$3\pi \cdot \frac{120}{360} = \pi$

La superficie plantada de hortensias es: $\pi\ m^2 = 3{,}14\ m^2$

b. Si cada planta requiere 4 dm^2 de terreno, ¿cuántas plantas de cada tipo necesitará Ana para cubrir todas las áreas?

$\frac{3{,}14}{0{,}04} =$ 78 rosales; $\frac{6{,}28}{0{,}04} =$ 157 geranios; $\frac{3{,}14}{0{,}04} =$ 78 hortensias

c. El precio de las plantas por unidad es de 2 € los rosales, 1 € los geranios y 1,5 € las hortensias; ¿cuánto le costará a Ana el parterre?

$78 \cdot 2 + 157 + 78 \cdot 1{,}5 = 430$ €

TEOREMA DE PITÁGORAS

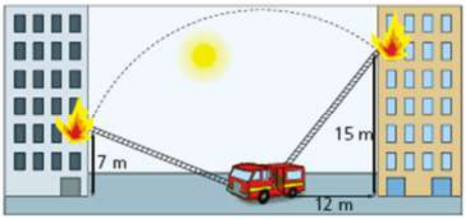
12 Un gran vendaval tira un árbol de 3 m de altura que impacta contra la pared de un edificio situado a 2 m de él. ¿A qué altura impacta el árbol contra la pared del edificio?

Se aplica el teorema de Pitágoras:

$3^2 = 2^2 + h^2 \Rightarrow h = \sqrt{5} = 2{,}24$ m

13 Actividad resuelta.

14 Los bomberos acuden a un siniestro y posicionan la base de una escalera a 12 m de un edificio. La parte superior de la escalera reposa contra la pared del edificio a una altura de 15 m. Sin mover la base de la escalera, la inclinan sobre el edificio situado justo enfrente del primero y la parte superior de la escalera reposa contra el edificio a una altura de 7 m. Halla la longitud de la escalera y la anchura de la calle.



Se aplica el teorema de Pitágoras para calcular la longitud de la escalera al triángulo formado por el edificio de la derecha, el suelo y la pared.

$h_1^2 = 15^2 + 12^2 \Rightarrow h = \sqrt{369} = 19,21$ m

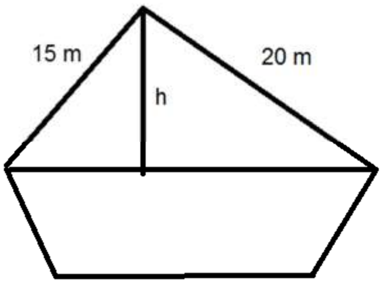
Se aplica el teorema de Pitágoras para calcular la distancia del edificio de la izquierda al coche de bomberos, al triángulo formado por dicho edificio, el suelo y la escalera.

$19,21^2 = 7^2 + c^2 \Rightarrow c = \sqrt{320,02} = 17,89$ m

Ancho calle = 17,89 + 12 = 29,89 m

La escalera mide 19,21 m. La calle tiene 29,89 m de ancho.

15 El mástil de un barco está unido a proa y a popa por dos cables de 15 m y 20 m de longitud, respectivamente, que forman entre sí un ángulo de 90º. Halla la longitud del barco y la altura del mástil.



Se aplica el teorema de Pitágoras para hallar la longitud del barco, pues es la hipotenusa del triángulo rectángulo formado por los dos cables.

$L = \sqrt{15^2 + 20^2} = \sqrt{625} = 25$

Se calcula la altura del mástil:

$\frac{15 \cdot 20}{2} = \frac{25 \cdot h}{2} \Rightarrow h = 12$ m

El barco mide 25 m de largo. El mástil mide 12 m.

16 Valeriano es un granjero que necesita colocar una valla nueva a su gallinero, que tiene forma de rombo con unas diagonales de 14 m y 20 m. Si el precio de la valla es de 15 €/m, ¿cuánto le cuesta a Valeriano el vallado?

Se aplica el teorema de Pitágoras para calcular la longitud del lado del rombo.

$L = \sqrt{7^2 + 10^2} = \sqrt{149} = 12,21$ m

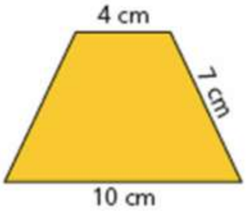
El perímetro del rombo es:

P = 12,21 · 4 = 48,84

La valla cuesta: 48,84 · 15 = 732,6 €

17 Halla el área de los siguientes trapecios:

a.



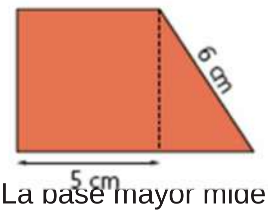
Se aplica el teorema de Pitágoras para calcular la altura:

h = $\sqrt{7^2 - 3^2} = \sqrt{40} = 6,32$ cm

Se aplica la expresión del área para calcularla:

$$A = \frac{(B+b)\cdot h}{2} \Rightarrow A = \frac{(10+4)\cdot 6,32}{2} = 44,24 \text{ cm}^2.$$

b.



La base mayor mide:

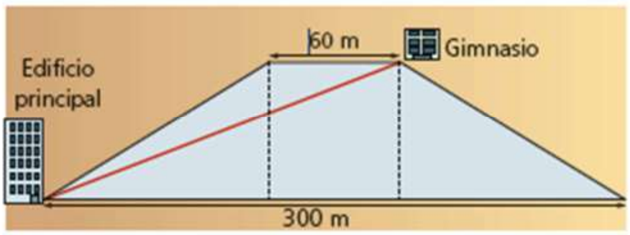
a = $\sqrt{6^2 - 5^2} = \sqrt{11} = 3,32$ cm

5 + 3,32 = 8,32 cm

El área es:

A = $25 + \frac{(3,32 \cdot 5)}{2}$ = 33,3 cm^2

18 El patio del colegio de Luisa tiene forma de trapecio isósceles con unas bases de 300 m y 60 m. Se quiere construir una pasarela que comunique el edificio principal, situado en un extremo de la base mayor, con el gimnasio, localizado en el extremo opuesto de la base menor, tal y como muestra el dibujo. Calcula la longitud de la pasarela, sabiendo que el perímetro total del patio es de 660 m.



Se calcula la hipotenusa del triángulo rectángulo:

h = $\frac{660 - 300 - 60}{2} = 150$ m

Se aplica el teorema de Pitágoras para hallar la altura del trapecio:

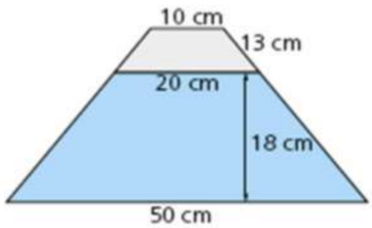
$h_{trapecio} = \sqrt{150^2 - 120^2} = \sqrt{8100} = 90$ m

La pasarela es la hipotenusa del triángulo rectángulo de catetos 90 m y 180 m. Se aplica el teorema de Pitágoras:

Pasarela = $\sqrt{90^2 + 180^2} = \sqrt{40\,500} = 201,25$ m

SOLUCIONES PÁG. 222

19 El siguiente dibujo representa la planta de la vivienda de Andrés: la parte coloreada de azul corresponde al jardín, y la gris, a la casa.



Calcula la superficie de la casa, la superficie del jardín y los metros de valla necesarios para cercar el jardín.

La casa tiene forma de trapecio. Se aplica el teorema de Pitágoras para hallar la altura del trapecio:

$h = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{144} = 12$ m

Superficie de la casa = $\frac{(20+10)\cdot 12}{2}$ = 180 m^2

El jardín tiene forma de trapecio. Se aplica el teorema de Pitágoras para hallar la altura del trapecio:

$y = \sqrt{18^2 + 15^2} = \sqrt{549}$ = 23,43 m

Superficie del jardín = $\frac{(50+20)\cdot 18}{2}$ = 630 m^2

La cantidad de valla que se necesita para cercar el jardín es:

50 + 2 · 23,43 = 96,86 m

20 Un hexágono regular está inscrito en una circunferencia de 4π cm de longitud. ¿Cuánto vale su área?

El radio de la circunferencia circunscrita es: 2π · r = 4π ⇒ r = 2 cm

Se aplica el teorema de Pitágoras para hallar la apotema del hexágono:

ap = $\sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$ = 1,73 cm

El área es:

$A = \frac{6 \cdot 2 \cdot 1{,}73}{2}$ = 10,38 cm^2

21 Calcula el área de un octógono regular cuyo lado mide 3,42 m y que está inscrito en una circunferencia cuyo círculo asociado tiene un área de 20π m^2.

El radio de la circunferencia circunscrita es: 20π = π · r^2 ⇒ r = $\sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ = 4,47 cm

Se aplica el teorema de Pitágoras para calcular la apotema:

ap $= \sqrt{4{,}47^2 - 1{,}71^2} = \sqrt{17{,}06}$ = 4,13 cm

El área del octógono es:

$A = \frac{8 \cdot 3{,}42 \cdot 4{,}13}{2}$ = 56,5 cm^2

22 Determina el área de los siguientes polígonos regulares:

a. Un pentágono tal que su circunferencia inscrita tiene 13 cm de radio, y su circunferencia circunscrita, 15 cm.

Se aplica el teorema de Pitágoras para calcular la mitad del lado del pentágono:

a = $\sqrt{15^2 - 13^2} = \sqrt{56}$ = 7,48 cm

El lado del pentágono mide el doble: 7,48 · 2 = 14,96 cm

El área del pentágono es:

$A = \frac{5 \cdot 14,96 \cdot 13}{2}$ = 486,2 cm^2

b. Un hexágono de 4 cm de lado.

Se aplica el teorema de Pitágoras para hallar la apotema:

ap = $\sqrt{4^2 - 2^2} = \sqrt{12}$ = 3,46 cm

El área del hexágono es:

$A = \frac{6 \cdot 4 \cdot 3,46}{2}$ = 41,52 cm^2

c. Un octógono con un lado de 10 m y una circunferencia circunscrita de 13 m de radio.

Se aplica el teorema de Pitágoras para calcular la apotema:

ap = $\sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{144}$ = 12 m

El área del octógono es:

$A = \frac{8 \cdot 10 \cdot 12}{2}$ = 480 m^2

d. Un decágono con un lado de 4 cm y una circunferencia inscrita de 6,16 cm de radio.

Se aplica el teorema de Pitágoras para calcular la apotema del decágono:

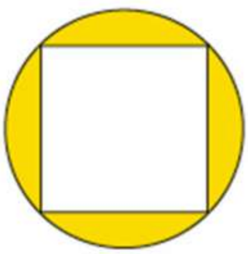
ap = $\sqrt{6,16^2 - 2^2} = \sqrt{33,95}$ = 5,83 cm

El área del decágono es:

$A = \frac{10 \cdot 4 \cdot 5,83}{2}$ = 116,6 cm^2

23 En las figuras adjuntas, el lado del cuadrado es de 12 cm. ¿Cuánto mide el área de las partes sombreadas?

a.



Se aplica el teorema de Pitágoras para calcular la diagonal del cuadrado:

$\sqrt{12^2 + 12^2} = \sqrt{288}$ = 16,97 cm.

El radio del círculo mide la mitad de la diagonal del cuadrado: 8,485 cm.

El área del círculo es:

$A = \pi \cdot 8,485^2$ = 226,18 cm^2.

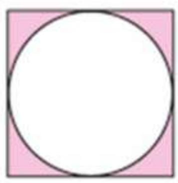
El área del cuadrado es:

$A = 12^2$ = 144 cm^2

El área pedida es:

$A_{círculo} - A_{cuadrado}$ = 226,18 cm^2 – 144 cm^2 = 82,18 cm^2

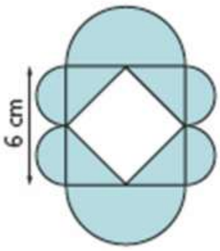
b.



El área del círculo es:
$A = \pi \cdot 6^2 = 113{,}1\ \text{cm}^2$
El área del cuadrado es:
$A = 12^2 = 144\ \text{cm}^2$
El área pedida es:
$A_{\text{cuadrado}} - A_{\text{círculo}} = 144\ \text{cm}^2 - 113{,}1\ \text{cm}^2 = 30{,}9\ \text{cm}^2$.

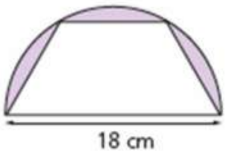
24 Calcula, en cada caso, el área y el perímetro de la zona coloreada.

a.



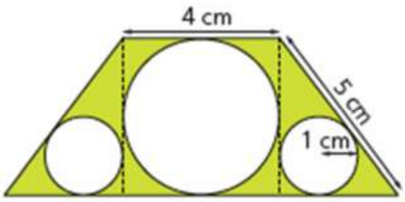
$A_{\text{círculo grande}} = \pi \cdot 3^2 = 28{,}27\ \text{cm}^2$
$A_{\text{círculos pequeños}} = \pi \cdot 1{,}5^2 = 7{,}07\ \text{cm}^2 \Rightarrow 2 \cdot 7{,}07 = 14{,}14\ \text{cm}^2$
$A_{\text{triángulos}} = 4 \cdot \dfrac{3 \cdot 3}{2} = 4 \cdot 4{,}5 = 18\ \text{cm}^2$
$A_{\text{total}} = 28{,}27\ \text{cm}^2 + 14{,}14\ \text{cm}^2 + 18\ \text{cm}^2 = 60{,}41\ \text{cm}^2$
$l_{\text{circunferencia grande}} = 2\pi \cdot 3 = 6\pi = 18{,}85\ \text{cm}$
$l_{\text{círculos pequeños}} = 2 \cdot 3\pi = 6\pi = 18{,}85\ \text{cm}$
Se aplica el teorema de Pitágoras para hallar el lado del cuadrado interior:
$h = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18} = 4{,}24$
$P_{\text{cuadrado}} = 4 \cdot 4{,}24 = 16{,}96\ \text{cm}$
$P_{\text{total}} = 18{,}85 + 18{,}85 + 16{,}96 = 54{,}66\ \text{cm}$

b.



$A_{\text{medio círculo}} = \dfrac{9^2 \cdot \pi}{2} = 127{,}23\ \text{cm}^2$
Se aplica el teorema de Pitágoras para hallar la apotema del hexágono:
$ap = \sqrt{9^2 - 4{,}5^2} = \sqrt{60{,}75} = 7{,}79\ \text{cm}$
$A_{\text{medio hexágono}} = \dfrac{6 \cdot 9 \cdot 7{,}79}{4} = 105{,}165\ \text{cm}^2$
$A_{\text{total}} = 127{,}23\ \text{cm}^2 - 105{,}165\ \text{cm}^2 = 22{,}065\ \text{cm}^2$
$l_{\text{media circunferencia}} = 9\pi = 28{,}27\ \text{cm}$
$P_{\text{medio hexágono}} = 9 \cdot 3 = 27\ \text{cm}$
$P_{\text{total}} = 28{,}27\ \text{cm} + 27\ \text{cm} = 55{,}27\ \text{cm}$

25 ¿Qué área tiene la zona coloreada de la figura?



Se aplica el teorema de Pitágoras para calcular la base del triángulo rectángulo:

b = $\sqrt{5^2-4^2}=\sqrt{9}$ = 3 cm

La base mayor del trapecio mide: 4 + 3 + 3 = 10 cm

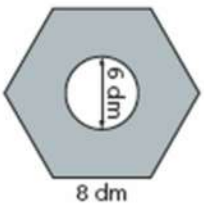
$A_{\text{trapecio}} = \dfrac{(10+4)\cdot 4}{2}$ = 28 cm^2

$A_{\text{círculo grande}}$ = 4π = 12,57 cm^2

$A_{\text{círculos pequeños}}$ = 2π = 6,28 cm^2

El área pedida es: 28 cm^2 – 12,57 cm^2 – 6,28 cm^2 = 9,15 cm^2

26 Calcula la superficie de madera, expresada en metros cuadrados, necesaria para construir un marco en forma de hexágono regular para el espejo circular representado en la ilustración.



A_{espejo} = 9π = 28,27 dm^2

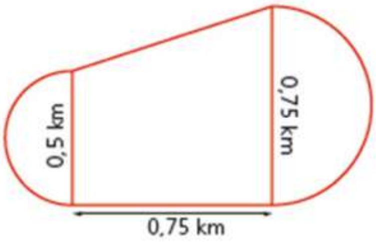
Se aplica el teorema de Pitágoras para hallar la apotema del hexágono:

ap = $\sqrt{8^2-4^2}=\sqrt{48}$ = 6,93 dm

$A_{\text{hexágono}} = \dfrac{6\cdot 8\cdot 6{,}93}{2}$ = 166,32 dm^2

Se necesitan 166,32 – 28,27 = 138,05 dm^2 = 1,380 5 m^2 de madera.

27 En una carrera popular, los participantes deben dar dos vueltas a un circuito como el que muestra la ilustración.



a. ¿Cuántos kilómetros recorrerán los participantes?

$l_{\text{semicírculo pequeño}} = 0{,}25\pi = 0{,}79$ km $\quad l_{\text{semicírculo grande}} = 0{,}375\pi = 1{,}18$ km

Se aplica el teorema de Pitágoras para calcular la zona oblicua de la pista:

$a = \sqrt{0{,}75^2 + 0{,}25^2} = \sqrt{0{,}625} = 0{,}79$ km

Los kilómetros que recorren los participantes son:

$2 \cdot (0{,}79 + 0{,}79 + 0{,}75 + 1{,}18) = 7{,}02$ km

b. Si el corredor que va en cabeza avanza con una velocidad media de 5 km/h, ¿cuánto tardará en alcanzar la meta?

$t = \frac{7{,}02}{5} = 1{,}404$ h = 1 h 24 min 14,4 s

SEMEJANZA

28 Entra en esta página web:
http://www.juntadeandalucia.es/averroes/san_felipe_neri/Depmat/calculo_de_la_altura_de_las_pirmides_de_egipto_por_ thales_de_mileto.html

Lee el texto en el que se explica el sistema que usó Tales de Mileto para medir la altura de la gran pirámide de Keops. Después responde a estas preguntas:

a. ¿Qué método utilizó Tales de Mileto para medir la altura de la pirámide?

Tales colocó un bastón en posición vertical y esperó hasta que, a media mañana, la sombra del bastón tuviera una longitud igual a la del bastón. Entonces, concluyó que la longitud de la sombra de la Gran Pirámide en ese momento era tan larga como la altura de dicha pirámide.

b. ¿Se podría haber calculado el tamaño de la pirámide a cualquier otra hora del día? Justifica tu respuesta.

Sí, aunque de forma más costosa. Tendría que haber calculado la proporción que mantenía la longitud del bastón con su sombra y haber establecido esa misma proporción entre la altura de la pirámide y la longitud de su sombra.

SOLUCIONES PÁG. 223

29 Un rectángulo de 8 cm de largo y 4 cm de ancho es semejante a otro de 18 cm² de superficie. Halla la razón de semejanza y las dimensiones del segundo rectángulo.

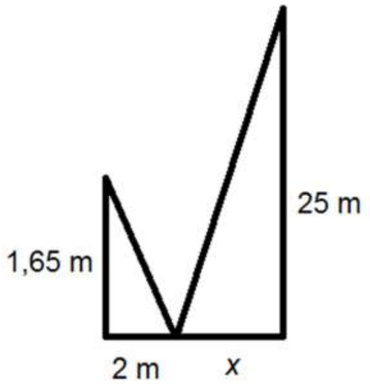
Se calcular el área del rectángulo semejante:

$A = 8 \cdot 4 = 32$ cm^2

La razón de semejanza entre las áreas es: $k = \sqrt{\frac{18}{32}} = \sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{3}{4}$

El nuevo rectángulo mide: $8 \cdot \frac{3}{4} = 6$ cm de largo y $4 \cdot \frac{3}{4} = 3$ cm de ancho.

30 Desde una acera, Juan observa, bajo un ángulo de 37°, una señal de tráfico pintada en el suelo que se encuentra a 2 m de él. Justo en el edificio de enfrente, su amigo Pedro, asomado a la azotea, también ve la señal bajo el mismo ángulo. Halla la anchura de la calle sabiendo que Juan mide 1,65 m y que el edificio en el que se encuentra Pedro tiene 25 m de altura.



Se halla la razón de semejanza:

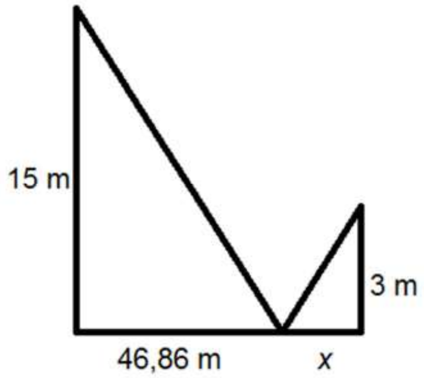
$$k = \frac{1,65}{2} = 0,825$$

Como son dos triángulos semejantes:

$$0,825 = \frac{25}{x} \Rightarrow x = 30,3$$

La anchura de la calle es: 30,3 + 2 = 32,3 m

31 En un parque de aventuras se han colocado dos tirolinas. La primera cuelga de un árbol de 15 m de altura, y la segunda, de un árbol de 3 m de altura. Si las dos están ancladas a un mismo punto del suelo, situado a 46,86 m del árbol más alto y ambas tirolinas forman un ángulo de 60° con la vertical, ¿qué distancia separa los dos árboles?



Se halla la razón de semejanza:

$$k = \frac{15}{46,86} = 0,32$$

Como son dos triángulos semejantes:

$$0,32 = \frac{3}{x} \Rightarrow x = 9,375$$

La distancia es = 9,375 + 46,86 = 56,235 m

32 Una postal tiene unas dimensiones de 10,5 cm × 15 cm. Si hacemos una fotocopia ampliada un 50 %, ¿cuáles serán las dimensiones de la fotocopia? ¿Cuál es el factor de escala que pasa del original a la fotocopia?

a = 10,5 + 10,5 · 0,5 = 15,75

b = 15 + 15 · 0,5 = 22,5

15,75 × 22,5 cm

El factor de escala es $\frac{15,75}{10,5} = 1,5$

33 La maqueta de un coche de Fórmula 1 mide 3 cm de largo. Si la escala es 1:150, ¿cuánto mide el coche en la realidad?

Que la escala sea 1 : 150 significa que cada unidad de la maqueta mide 150 unidades en la realidad.

$\frac{1}{150} = \frac{3}{x} \Rightarrow x = 450$ cm = 4,5 m

34 El mapa muestra parte de la costa este de los Estados Unidos. Calcula la escala a la que está realizado, sabiendo que la distancia entre Nueva York y Filadelfia es de 150 km. ¿Cuál es la distancia real entre Nueva York y Stamford?

La distancia entre Nueva York y Filadelfia en el mapa es de 2,2 cm. Se aplica el teorema de Tales:

$\frac{1}{x} = \frac{2,2}{15\,000\,000} \Rightarrow x = 6\,818\,181$

La escala es 1 : 6 818 181.

La distancia entre Nueva York y Stamford es:

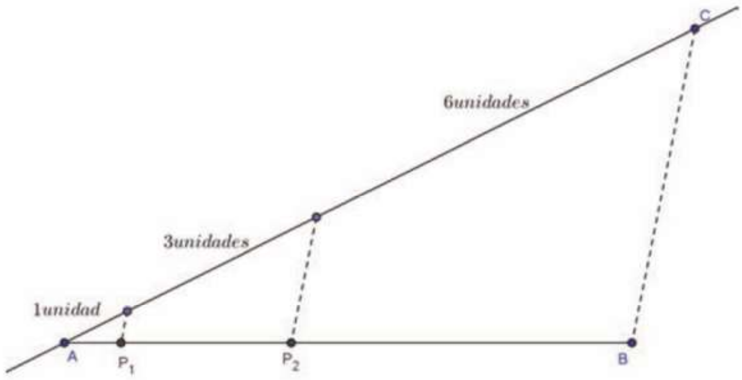
$\frac{1}{6\,818\,181} = \frac{1}{x} \Rightarrow x = 6\,818\,181$ cm = 68 km

TEOREMA DE TALES

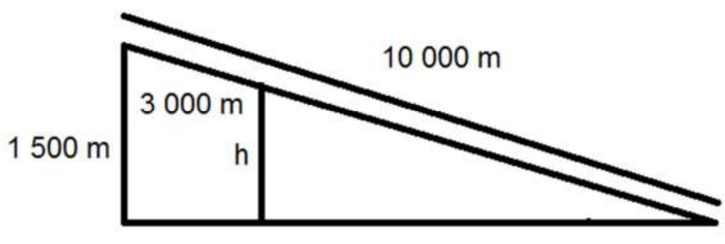
35 Dibuja en tu cuaderno un segmento, AB, de 9 cm de longitud y divídelo en 3 partes proporcionales a 1, 3 y 6. Comprueba el resultado que has obtenido con GeoGebra.
partes iguales.

Para realizar el dibujo se siguen estos pasos:

1. Se dibuja un segmento $\overline{AB}$ de 9 cm de longitud.
2. Con origen en el extremo A del segmento, se traza una recta auxiliar con la inclinación que se desee.
3. Sobre la recta auxiliar, y comenzando en A, se marcan de forma consecutiva los extremos de 3 segmentos de longitudes 1, 3 y 6 unidades. El último extremo se designa con la letra C.
4. Se une el extremo C de la recta auxiliar con el extremo B del segmento que se va a dividir y se trazan paralelas a $\overline{CB}$ que pasen por las marcas que se han realizado en la recta auxiliar. El segmento queda así, dividido en tres partes proporcionales a 1, 3 y 6.



36 En una prueba de esquí, los deportistas parten de un punto situado a 1 500 m de altura y se deslizan por una ladera de 10 km de longitud. Cuando han recorrido 3 km, pasan por el primer banderín de control. Calcula la altura a la que se encuentra dicho punto de control.



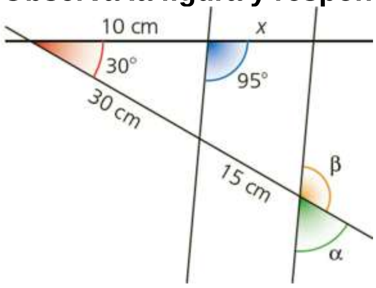
Son dos triángulos que están en posición de Tales.

$$\frac{10\,000}{1500} = \frac{7\,000}{h} \Rightarrow h = 1050$$

El primer banderín está a una altura de 1 500 m

EVALUACIÓN

1 Observa la figura y responde.



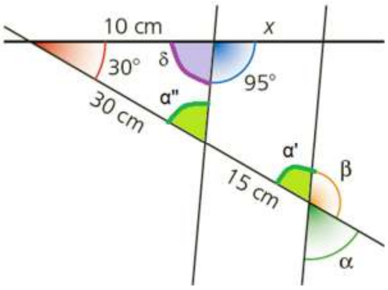
El segmento *x* mide:

a. 30 cm **b. 3 cm** c. 5 cm **d. 4,5 cm**

$$\frac{10}{30}=\frac{10+x}{45}\Rightarrow 450=300+30x\Rightarrow x=5$$

El ángulo α mide:

a. 65° **b. 75°** **c. 45°** **d. 60°**



Los ángulos δ y de 95º son suplementarios y suman 180º. Por tanto: δ + 95º = 180º ⇒ ⇒ δ = 85º

La suma de los ángulos internos en un triángulo suma 180º:

30º + δ + α'' = 180º ⇒ 30º + 85º + α'' = 180º ⇒ α'' = 65º

Los ángulos α'' y α' son ángulos correspondientes, y miden lo mismo: α' = 65º

Los ángulos α' y α son ángulos opuestos por el vértice, y por lo tanto miden lo mismo: α = 65º

El ángulo β mide:

a. 65° **b. 75°** c. 115° **d. 60°**

Los ángulos α y β son suplementarios y suman 180º. Por tanto:

α + β = 180º ⇒ β = 180º – 65º = 115º

2 El área de un hexágono regular de 60 cm de perímetro es:

a. 180 cm^2 **b. 298,5 cm^2** c. 259,8 cm^2 **d. 360 cm^2**

Si el perímetro mide 60 cm, el lado mide:

$l=\frac{60}{6}$ = 10 cm

Se aplica el teorema de Pitágoras para calcular la apotema:

ap = $\sqrt{10^2-5^2}=\sqrt{75}$ = 8,66 cm

El área es:

$A=\frac{6\cdot 10\cdot 8,66}{2}$ = 259,8 cm^2

3 El área de un trapecio circular con radios de 5 cm y 10 cm y amplitud de 60º es:

a. 300 cm² b. $\frac{25}{2}\pi$ cm² **c. $\frac{25}{36}$ cm²** **d. $\frac{5}{4}\pi$ cm²**

$$A = \frac{\pi\cdot(R^2 - r^2)\cdot n}{360º} \Rightarrow A = \frac{\pi\cdot(10^2 - 5^2)\cdot 60º}{360º} = \frac{25}{2}\pi \text{ cm}^2$$

4 Un globo aerostático está anclado a tierra por dos cables cuyas longitudes son de 80 m y 60 m, respectivamente, que forman entre sí un ángulo de 90º. La altura a la que se encuentra el globo es:

a. 48 m **b. 140 m** **c. 100 m** **d. 480 m**

Se aplica el teorema de Pitágoras para hallar la distancia que hay entre los dos cables anclados en el suelo:

b = $\sqrt{80^2 + 60^2} = \sqrt{10\,000}$ = 100 m

Se igualan las áreas:

$$\frac{80\cdot 60}{2} = \frac{100\cdot h}{2} \Rightarrow h = 48 \text{ m}$$

5 La distancia que separa en la realidad dos puntos que distan 1,5 cm en un mapa a escala 1:500 000 es:

a. 75 km b. 7,5 km **c. 30 km** **d. 3 km**

$$\frac{1}{500\,000} = \frac{1{,}5}{x} \Rightarrow x = 750\,000 \text{ cm} = 7{,}5 \text{ km}$$

6 Una señal de tráfico de 2,10 m de altura proyecta una sombra de 1,20 m. A la misma hora del día, un edificio de 140 m de altura proyecta una sombra de:

a. 1,8 m b. 80 m **c. 105 m** **d. 10,5 m**

Se calcula la razón de semejanza:

k = $\frac{1{,}20}{2{,}10}$ = 0,57

x = 140 · 0,57 = 79,8 m ≈ 80 m