

PRUEBA FINAL DE CURSO

Evaluación A

1. Calcula y simplifica el resultado: $\left(\frac{1}{5}\right)^2 - \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{4}\right) : \frac{2}{3}$

$$\left(\frac{1}{5}\right)^2 - \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{4}\right) : \frac{2}{3} = \frac{1}{25} - \left(\frac{2}{4} - \frac{3}{4}\right) : \frac{2}{3} = \frac{1}{25} - \left(-\frac{1}{4}\right) : \frac{2}{3} = \frac{1}{25} - \left(-\frac{3}{8}\right) = \frac{1}{25} + \frac{3}{8} = \frac{8}{200} + \frac{75}{200} = \frac{83}{200}$$

2. Halla el valor de estas expresiones.

a) $\sqrt[3]{36} : (\sqrt{2})^2 \cdot 12^{1/4}$

b) $3\sqrt{450} - 7\sqrt{50} + \sqrt{98} - 6\sqrt{32}$

a) $\sqrt[3]{36} : (\sqrt{2})^2 \cdot 12^{1/4} = \sqrt[3]{2^2 \cdot 3^2} : \sqrt{2^2} \cdot \sqrt[4]{2^2 \cdot 3} = \sqrt[12]{2^8 \cdot 3^8} : \sqrt[12]{2^{12} \cdot 3^3} = \sqrt[12]{2^8 \cdot 3^8} : \sqrt[12]{2^{12} \cdot 3^3} = \sqrt[12]{2^2 \cdot 3^5}$

b) $3\sqrt{450} - 7\sqrt{50} + \sqrt{98} - 6\sqrt{32} = 3\sqrt{2 \cdot 3^2 \cdot 5^2} - 7\sqrt{2 \cdot 5^2} + \sqrt{2 \cdot 7^2} - 6\sqrt{2^5} = 3 \cdot 3 \cdot 5\sqrt{2} - 7 \cdot 5\sqrt{2} + 7\sqrt{2} - 6 \cdot 2^2\sqrt{2} = 45\sqrt{2} - 35\sqrt{2} + 7\sqrt{2} - 24\sqrt{2} = -7\sqrt{2}$

3. Desarrolla las siguientes identidades notables.

a) $(-2x - 4y)^2$

b) $(-2y^2 + 5)^2$

c) $(-3z + 2y^2)(-3z - 2y^2)$

d) $\left(x^2y + \frac{1}{2}x\right)^2$

a) $(-2x - 4y)^2 = (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 4y + (4y)^2 = 4x^2 + 16xy + 16y^2$

b) $(-2y^2 + 5)^2 = (2y^2)^2 - 2 \cdot 2y^2 \cdot 5 + 5^2 = 4y^4 - 20y^2 + 25$

c) $(-3z + 2y^2)(-3z - 2y^2) = (-3z)^2 - (2y^2)^2 = 9z^2 - 4y^4$

d) $\left(x^2y + \frac{1}{2}x\right)^2 = (x^2y)^2 + 2 \cdot x^2y \cdot \frac{1}{2}x + \left(\frac{1}{2}x\right)^2 = x^4y^2 + x^3y + \frac{1}{4}x^2$

4. Resuelve la siguiente ecuación: $2x^4 - 2x^2 - 24 = 0$

Es una ecuación bicuadrada. Haciendo el cambio de variable $x^2 = p$ y resolvemos la ecuación $2p^2 - 2p - 24 = 0$.

$$p = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-24)}}{2 \cdot 2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 192}}{4} = \frac{2 \pm 14}{4} \rightarrow \begin{cases} p_1 = 4 \\ p_2 = -3 \end{cases}$$

Deshaciendo el cambio de variable con cada solución: $\begin{cases} x^2 = 4 \rightarrow x = \pm\sqrt{4} = \pm 2 \\ x^2 = -3 \rightarrow \text{No tiene solución.} \end{cases}$

Las soluciones son $x_1 = 2$ y $x_2 = -2$.

5. Simplifica y resuelve el siguiente sistema:
$$\begin{cases} \frac{-x+2}{3} + \frac{y-1}{4} = \frac{1}{2} \\ \frac{2x+1}{4} - \frac{3y}{5} = -\frac{11}{20} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{-x+2}{3} + \frac{y-1}{4} = \frac{1}{2} \\ \frac{2x+1}{4} - \frac{3y}{5} = -\frac{11}{20} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{-4x+8}{12} + \frac{3y-3}{12} = \frac{6}{12} \\ \frac{10x+5}{20} - \frac{12y}{20} = -\frac{11}{20} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -4x+8+3y-3=6 \\ 10x+5-12y=-11 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -4x+3y=1 \\ 10x-12y=-16 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -4x+3y=1 \\ 5x-6y=-8 \end{cases}$$

Multiplicamos la primera ecuación por 2, sumamos las ecuaciones y resolvemos para hallar x .

$$\begin{cases} -8x+6y=2 \\ 5x-6y=-8 \end{cases} \rightarrow -3x=-6 \rightarrow x = \frac{-6}{-3} = 2$$

Sustituimos el valor obtenido en cualquiera de las ecuaciones y hallamos y .

$$-4 \cdot 2 + 3y = 1 \rightarrow 3y = 9 \rightarrow y = 3$$

6. Halla el primer término, el término general y la suma de los 50 primeros términos de una progresión aritmética cuya diferencia es 5 y su décimo término es 29.

Hallamos el primer término sustituyendo los datos en la expresión del término general.

$$a_n = a_1 + (n-1)d \rightarrow a_{10} = a_1 + (10-1) \cdot 5 \rightarrow 29 = a_1 + 45 \rightarrow a_1 = -16$$

Por tanto, el término general es: $a_n = a_1 + (n-1)d \rightarrow a_n = -16 + (n-1) \cdot 5 \rightarrow a_n = 5n - 21$

Para calcular la suma de los 50 primeros términos necesitamos hallar a_{50} .

$$a_{50} = 5 \cdot 50 - 21 = 229$$

$$\text{Sustituyendo en la fórmula: } S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} \rightarrow S_{50} = \frac{(a_1 + a_{50}) \cdot 50}{2} = \frac{(-16 + 229) \cdot 50}{2} = 5325$$

7. Halla el área y el volumen de un cono de 12 cm de diámetro y 18 cm de generatriz.

Calculamos la longitud de la altura aplicando el teorema de Pitágoras con el radio y la generatriz.

$$h^2 = g^2 - r^2 = 18^2 - 6^2 = 324 - 36 = 288 \rightarrow h = \sqrt{288} = 16,97 \text{ cm}$$

Hallamos el área y el volumen sustituyendo los datos en las fórmulas.

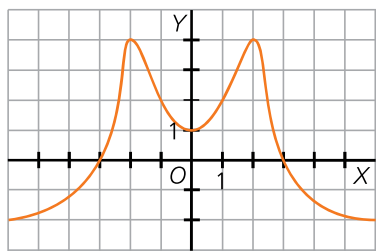
$$A_b = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot 6^2 = 113,1 \text{ cm}^2$$

$$A_L = \pi \cdot r \cdot g = \pi \cdot 6 \cdot 18 = 339,29 \text{ cm}^2$$

$$A_T = A_L + A_b = 339,29 + 113,1 = 452,39 \text{ cm}^2$$

$$V = \frac{A_b \cdot h}{3} = \frac{113,1 \cdot 16,97}{3} = \frac{1919,307}{3} = 639,769 \text{ cm}^3$$

8. Describe las características de esta gráfica.



Dominio: $[-6, 6]$; Recorrido: $[-2, 4]$

Puntos de corte: $(-3, 0)$, $(0, 1)$, $(3, 0)$

Creciente en $(-6, -2)$ y $(0, 2)$.

Decreciente en $(-2, 0)$ y $(2, 6)$.

Máximos: $(-2, 4)$ y $(2, 4)$; Mínimo: $(0, 1)$

La función es continua, simétrica par y no es periódica.

9. Representa la función cuadrática $f(x) = x^2 - 2x - 8$.

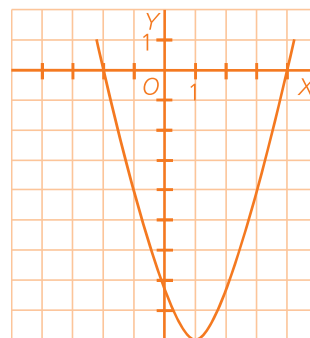
Como $a = 1 > 0$, la parábola tiene las ramas abiertas hacia arriba.

$$\text{Vértice: } -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2} = 1 \rightarrow V(1, -9)$$

Eje de simetría: $x = 1$

$$\begin{aligned} f(1) &= 1 - 2 - 8 = -9 \\ \text{Puntos de corte con el eje X: } x^2 - 2x - 8 &= 0 \rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8)}}{2 \cdot 1} = \\ &= \frac{2 \pm \sqrt{4 + 32}}{2} = \frac{2 \pm 6}{2} \rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = -2 \end{cases} \rightarrow (4, 0) \text{ y } (-2, 0) \end{aligned}$$

$$\text{Puntos de corte con el eje Y: } f(0) = 0^2 - 2 \cdot 0 - 8 = -8 \rightarrow (0, -8)$$



10. Dada la siguiente tabla, halla la media, la mediana, la varianza y la desviación típica.

x_i	f_i	F_i	$x_i \cdot f_i$	$x_i \cdot f_i^2$
3	2	2	6	18
4	5	7	20	80
5	10	17	50	250
6	12	29	72	432
7	8	37	56	392
8	3	40	24	192
Suma	40		228	1364

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i \cdot f_i}{N} = \frac{228}{40} = 5,7$$

La mediana es la media de los datos que se encuentran en las posiciones 20 y 21. Como en estas dos posiciones el dato es el mismo (6) se concluye que la mediana es 6.

$$\sigma^2 = \frac{\sum x_i \cdot f_i^2}{N} - \bar{x}^2 = \frac{1364}{40} - 5,7^2 = 34,1 - 32,49 = 1,61$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{1,61} = 1,27$$

Evaluación B

1. Un grupo de amigos ha realizado una ruta en tres etapas. El primer día hicieron la tercera parte del recorrido, y el segundo, las tres octavas partes de lo que quedaba. Si aún les quedan 175 km por recorrer, ¿cuál es la longitud total del trayecto?

Si el primer día recorrieron la tercera parte, el segundo día recorren: $\frac{3}{8}$ de $\frac{2}{3} = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$

Sumando el recorrido del primer y segundo día tenemos: $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{4}{12} + \frac{3}{12} = \frac{7}{12}$

Quedan $\frac{5}{12}$ por recorrer que equivalen a 175 km. Por tanto, el trayecto total es: $\frac{175 \cdot 12}{5} = 420$ km

2. Expresa en forma de una única potencia.

a) $(-2)^{-7} \cdot (-2)^4 : [(-2)^3]^3$ b) $5^4 : 5^{-3} \cdot 5^0 \cdot 5$ c) $(7^{-3})^5 : \frac{1}{7^{-1}}$ d) $\frac{3}{((3^2)^{-6})^{-3}}$

a) $(-2)^{-7} \cdot (-2)^4 : [(-2)^3]^3 = (-2)^{-7+4-9} = (-2)^{-12}$

c) $(7^{-3})^5 : \frac{1}{7^{-1}} = 7^{-15} : 7 = 7^{-15-1} = 7^{-16}$

b) $5^4 : 5^{-3} \cdot 5^0 \cdot 5 = 5^{4-(-3)+0+1} = 5^8$

d) $\frac{3}{((3^2)^{-6})^{-3}} = \frac{3}{3^{36}} = 3^{1-36} = 3^{-35}$

3. Encuentra las raíces y factoriza el polinomio $x^3 - 9x^2 + 24x - 20$.

Los candidatos a raíz del polinomio son los divisores de -20 , es decir, $\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 5, \pm 10$ y ± 20 . Probamos mediante el método de Ruffini cuál de ellos es raíz del polinomio.

	1	-9	24	-20
2		2	-14	20
	1	-7	10	0

El número 2 es raíz por lo que $x - 2$ es un factor.
 Para encontrar las otras dos raíces, resolvemos la ecuación de segundo grado que nos ha quedado como cociente.
 $x^2 - 7x + 10 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 5 \end{cases} \rightarrow x - 2 \text{ y } x - 5 \text{ son factores.}$
 Luego: $x^3 - 9x^2 + 24x - 20 = (x - 2)^2(x - 5)$

4. Resuelve esta ecuación: $x^4 - 11x^2 + 18 = 0$

Hacemos el cambio de variable $x^2 = p$ y resolvemos la ecuación de segundo grado $p^2 - 11p + 18 = 0$.

$$p = \frac{11 \pm \sqrt{(-11)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 18}}{2 \cdot 1} = \frac{11 \pm \sqrt{121 - 72}}{2} = \frac{11 \pm 7}{2} \rightarrow \begin{cases} p_1 = 9 \\ p_2 = 2 \end{cases}$$

Deshaciendo el cambio de variable: $\begin{cases} x^2 = 9 \rightarrow x = \pm \sqrt{9} = \pm 3 \\ x^2 = 2 \rightarrow x = \pm \sqrt{2} \end{cases} \rightarrow x_1 = 3, x_2 = -3, x_3 = \sqrt{2}, x_4 = -\sqrt{2}$

5. Simplifica y resuelve este sistema:
$$\begin{cases} \frac{x-4}{3} + \frac{2y+1}{5} = 6 \\ \frac{2x-1}{5} + \frac{3y-1}{4} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{x-4}{3} + \frac{2y+1}{5} = 6 \\ \frac{2x-1}{5} + \frac{3y-1}{4} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{5x-20}{15} + \frac{6y+3}{15} = \frac{90}{15} \\ \frac{8x-4}{20} - \frac{15y-5}{20} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 5x-20+6y+3=90 \\ 8x-4-15y+5=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 5x+6y=107 \\ 8x-15y=-1 \end{cases}$$

Resolviendo por cualquier método nos queda como solución $x = 13, y = 7$.

6. Halla la suma de los cinco primeros términos de una progresión geométrica cuya razón es $\frac{2}{3}$ y su cuarto término $\frac{3}{8}$.

Calculamos el primer término de la progresión y, después, la suma de los cinco primeros términos.

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1} \rightarrow a_4 = a_1 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{4-1} \rightarrow \frac{3}{8} = a_1 \cdot \frac{8}{27} \rightarrow a_1 = \frac{3}{8} : \frac{8}{27} = \frac{81}{64}$$

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (r^n - 1)}{r - 1} \rightarrow S_5 = \frac{a_1 \cdot (r^5 - 1)}{r - 1} = \frac{\frac{81}{64} \cdot \left[\left(\frac{2}{3}\right)^5 - 1\right]}{\frac{2}{3} - 1} = \frac{211}{64}$$

7. Halla el área total y el volumen de un prisma hexagonal regular sabiendo que la longitud del lado de la base es 10 cm, y su altura, 5 cm.

Calculamos la apotema de la base aplicando el teorema de Pitágoras.

$$a^2 = 10^2 - 5^2 = 100 - 25 = 75 \rightarrow a = \sqrt{75} = 8,66 \text{ cm}$$

$$A_b = A_{\text{Hexágono}} = \frac{P \cdot a}{2} = \frac{6 \cdot 10 \cdot 8,66}{2} = 259,8 \text{ cm}^2$$

$$A_L = P \cdot h = 6 \cdot 10 \cdot 5 = 300 \text{ cm}^2$$

$$A_T = A_L + 2A_b = 300 + 2 \cdot 259,8 = 819,6 \text{ cm}^2$$

$$V = A_b \cdot h = 259,8 \cdot 5 = 1299 \text{ cm}^3$$

8. Dada la recta $\frac{x-4}{5-4} = \frac{y+1}{6+1}$ halla las ecuaciones punto pendiente, explícita y general de la recta.

$$\text{Ecuación punto pendiente: } \frac{x-4}{5-4} = \frac{y+1}{6+1} \rightarrow x-4 = \frac{y+1}{7} \rightarrow y+1 = 7(x-4)$$

$$\text{Ecuación explícita: } y+1 = 7(x-4) \rightarrow y+1 = 7x-28 \rightarrow y = 7x-29$$

$$\text{Ecuación general: } y = 7x-29 \rightarrow -7x+y+29 = 0$$

9. Representa esta función cuadrática: $f(x) = x^2 + 2x$

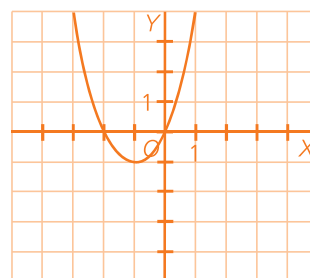
Como $a = 1 > 0$, la parábola tiene las ramas abiertas hacia arriba.

$$\text{Vértice: } \left. \begin{aligned} -\frac{b}{2a} &= -\frac{2}{2} = -1 \\ f(-1) &= 1 - 2 = -1 \end{aligned} \right\} \rightarrow V(-1, -1)$$

$$\text{Eje de simetría: } x = -1$$

$$\text{Puntos de corte con el eje X: } x^2 + 2x = 0 \rightarrow x(x+2) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x+2 = 0 \rightarrow x = -2 \end{cases} \rightarrow (0, 0), (-2, 0)$$

$$\text{Puntos de corte con el eje Y: } f(0) = 0^2 + 2 \cdot 0 = 0 \rightarrow (0, 0)$$



10. Miriam, Ruth y Susana lanzan dos dados y suman sus resultados. Si la suma es 7 gana Miriam, si la suma es 2, 3 o 12 gana Ruth, y si la suma es 4 o 11, gana Susana. ¿Quién tiene mayor probabilidad de ganar?

Al lanzar dos dados el número de posibles resultados es $6 \cdot 6 = 36$.

Miriam gana si sale (1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2) o (6, 1). Entonces, $P(\text{gana Miriam}) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

Ruth gana si sale (1, 1), (1, 2), (2, 1) o (6, 6). Luego, $P(\text{gana Ruth}) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$.

Susana gana si sale (1, 3), (2, 2), (3, 1), (5, 6) o (6, 5). Entonces, $P(\text{gana Susana}) = \frac{5}{36}$.

Miriam es quien tiene más probabilidad de ganar.