SUCESIONES

Evaluación A

1. Escribe los cinco siguientes términos de las siguientes sucesiones.

a) 3, 6, 12, 24, $\boxed{48}$, $\boxed{96}$, $\boxed{192}$, $\boxed{384}$, $\boxed{768}$

b) 2, 3, 5, 8, $\boxed{13}$, $\boxed{21}$, $\boxed{34}$, $\boxed{55}$, $\boxed{89}$

c) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \boxed{\frac{5}{6}}, \boxed{\frac{6}{7}}, \boxed{\frac{7}{8}}, \boxed{\frac{8}{9}}, \boxed{\frac{9}{10}}$

d) 7, 3, –1, –5, –9, $\boxed{-13}$, $\boxed{-17}$, $\boxed{-21}$, $\boxed{-25}$, $\boxed{-29}$

2. Encuentra el término general estas sucesiones.

a) 1, 4, 9, 16, 25,… **b)** $\frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \ldots$ **c)** 5, 10, 15, 20, 25,… **d)** 1, 3, 9, 27, 81,…

a) Los términos de esta sucesión son los cuadrados de los números naturales. Entonces, $a_n = n^2$.

b) El numerador es el número del término más 2, y el denominador, más 1. Luego, $b_n = \frac{n+2}{n+1}$.

c) Los términos de esta sucesión son los múltiplos de 5. Entonces, $c_n = 5n$.

d) Los términos de esta sucesión son las potencias de 3 empezando con exponente 0. Luego, $d_n = 3^{n-1}$.

3. Clasifica las siguientes progresiones en aritméticas o geométricas, e indica la diferencia o la razón en cada caso.

a) 7, 11, 15, 19, 23,… **c)** $\frac{2}{5}, \frac{11}{15}, \frac{16}{15}, \frac{7}{5}, \ldots$

b) –4, 8, –16, 32, –64,… **d)** 32, 16, 8, 4, 2,…

a) Progresión aritmética de diferencia $d = 4$.

b) Progresión geométrica de razón $r = -2$.

c) Progresión aritmética de diferencia $d = \frac{1}{3}$.

d) Progresión geométrica de razón $r = \frac{1}{2}$.

Recuerda

- Una **progresión aritmética** es una sucesión en la que cada término, excepto el primero, se obtiene sumándole al anterior un mismo número llamado **diferencia, d**.
- Una **progresión geométrica** es una sucesión cuyos términos, excepto el primero, se obtienen multiplicando el anterior por un mismo número llamado **razón, r**.

4. Calcula el término general de una progresión aritmética que tiene por diferencia $d = 3$ y cuyo primer término vale 10. Halla a_{12} y a_{15}.

Hallamos el término general.

$$a_n = a_1 + (n-1)\cdot d = 10 + (n-1)\cdot 3 = 10 + 3n - 3 = 3n + 7 \rightarrow a_n = 3n + 7$$

A partir del término general, calculamos los términos a_{12} y a_{15}.

$a_{12} = 3\cdot 12 + 7 = 36 + 7 = 43$ $\qquad a_{15} = 3\cdot 15 + 7 = 45 + 7 = 52$

Recuerda

El término general de las progresiones aritméticas es:

$$a_n = a_1 + (n-1)\cdot d$$

5. Halla el término a_8 de una progresión aritmética si su tercer término vale 5, y el quinto, 13.

Sabemos que $a_3 = 5$ y $a_5 = 13$. Sustituimos estos datos en la fórmula del término general para hallar el primer término y la diferencia.

$$\left.\begin{array}{l} a_3 = a_1 + (3-1)\cdot d \rightarrow a_1 + 2d = 5 \\ a_5 = a_1 + (5-1)\cdot d \rightarrow a_1 + 4d = 13 \end{array}\right\}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones obtenemos $a_1 = -3$ y $d = 4$.

Por lo tanto, el término general tiene por ecuación $a_n = -3 + (n-1)\cdot 4$.

Para calcular el término a_8 sustituimos en la expresión del término general.

$a_8 = -3 + (8-1)\cdot 4 = -3 + 7\cdot 4 = -3 + 28 = 25$

6. Halla la suma de los 30 primeros términos de la progresión aritmética: 9, 6, 3, 0, –3,…

En primer lugar necesitamos los términos a_1 y a_{30}.

$a_1 = 9$ y $d = -3$

Con estos datos hallamos el término general para calcular a_{30}.

$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d = 9 + (n-1) \cdot (-3) = 9 - 3n + 3 = -3n + 12 \rightarrow a_n = -3n + 12$

$a_{30} = -3 \cdot 30 + 12 = -90 + 12 = -78$

Sustituyendo en la fórmula:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} \rightarrow S_{30} = \frac{(9-78) \cdot 30}{2} = \frac{-2070}{2} = -1035$$

Recuerda

La suma de los n primeros términos de una progresión aritmética es:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

7. Calcula el término general de una progresión geométrica de razón $r = 5$ cuyo primer término vale 2. Halla a_7 y a_{10}.

Hallamos el término general.

$a_n = a_1 \cdot r^{n-1} \rightarrow a_n = 2 \cdot 5^{n-1}$

A partir del término general, calculamos los términos a_7 y a_{10}.

$a_7 = 2 \cdot 5^{7-1} = 2 \cdot 56 = 31\,250$ $\qquad$ $a_{10} = 2 \cdot 5^{10-1} = 2 \cdot 5^9 = 3\,906\,250$

Recuerda

El término general de las progresiones geométricas es:

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$

8. Halla la razón y el término general de una progresión geométrica si su segundo término es $\frac{3}{2}$ y el cuarto vale $\frac{27}{2}$.

Sustituimos $a_2 = \frac{3}{2}$ y $a_4 = \frac{27}{2}$ en la expresión del término general para hallar a_1 y la razón, r.

$a_2 = a_1 \cdot r^{2-1} = \frac{3}{2} \rightarrow a_1 \cdot r = \frac{3}{2}$ $\qquad$ $a_4 = a_1 \cdot r^{4-1} = \frac{27}{2} \rightarrow a_1 \cdot r^3 = \frac{27}{2}$

Dividiendo la segunda ecuación entre la primera obtenemos $r^2 = 9$. Entonces, $r = 3$.

Sustituyendo en la primera ecuación obtenemos $a_1 = \frac{1}{2}$.

Por lo tanto el término general es: $a_n = \frac{1}{2} \cdot 3^{n-1}$

9. Halla la suma de los 5 primeros términos de una progresión geométrica de razón 1,5 cuyo primer término es 8.

Sustituimos los datos en la expresión.

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (r^n - 1)}{r-1} \rightarrow S_5 = \frac{8 \cdot (1{,}5^5 - 1)}{1{,}5 - 1} = \frac{52{,}75}{0{,}5} = 105{,}5$$

Recuerda

La suma de los n primeros términos de una progresión geométrica es:

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (r^n - 1)}{r - 1}$$

10. Los primeros términos de una sucesión son $a_1 = 11$, $a_2 = 16$, $a_3 = 21$. Halla el término general. ¿Hay algún término cuyo valor sea 83? ¿Y 2001?

Como $a_1 = 11$, $a_2 = 16$ y $a_3 = 21$, la diferencia es $d = 5$.

El término general es $S_n = S_1 + (n-1) \cdot d = 11 + (n-1) \cdot 5 = 5n + 6$.

Ningún término valdrá 83 ya que si sustituimos en la expresión del término general la ecuación resultante es $5n + 6 = 83$ que no tiene solución natural.

El valor del término a_{399} es 2001 ya que si sustituimos en la expresión del término general, la ecuación resultante $5n + 6 = 83$ tiene como solución natural $n = 399$.

Evaluación B

1. Completa las siguientes sucesiones con los términos que faltan.

a) 3, $\boxed{6}$, 12, 24, $\boxed{48}$, 96,…

b) $-16, 4, -1, \frac{1}{4}, -\frac{1}{16}, \boxed{\frac{1}{64}}, -\frac{1}{256},\ldots$

c) $\frac{1}{5}, \frac{2}{7}, \boxed{\frac{3}{9}}, \frac{4}{11}, \boxed{\frac{5}{13}}, \frac{6}{15},\ldots$

d) 0, 3, 8, $\boxed{15}$, $\boxed{24}$, 35,…

2. Escribe los cuatro primeros términos de estas sucesiones.

a) $a_n = (n-1)^2$ b) $a_n = 3n - 2$ c) $a_n = \frac{n-1}{n+2}$ d) $a_n = n^3 - 1$

a) $a_1 = (1-1)^2 = 0$, $a_2 = (2-1)^2 = 1$, $a_3 = (3-1)^2 = 4$, $a_4 = (4-1)^2 = 9$

b) $a_1 = 3 \cdot 1 - 2 = 1$, $a_2 = 3 \cdot 2 - 2 = 4$, $a_3 = 3 \cdot 3 - 2 = 7$, $a_4 = 3 \cdot 4 - 2 = 10$

c) $a_1 = \frac{1-1}{1+2} = 0$, $a_2 = \frac{2-1}{2+2} = \frac{1}{4}$, $a_3 = \frac{3-1}{3+2} = \frac{2}{5}$, $a_4 = \frac{4-1}{4+2} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

d) $a_1 = 1^3 - 1 = 0$, $a_2 = 2^3 - 1 = 7$, $a_3 = 3^3 - 1 = 26$, $a_4 = 4^3 - 1 = 63$

3. Halla los cinco primeros términos de estas sucesiones recurrentes.

a) $a_1 = 5$, $a_n = a_{n-1} + 2$

b) $a_1 = 5$, $a_2 = 2$, $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$

c) $a_1 = -2$, $a_n = a_{n-1}^2$

d) $a_1 = 3$, $a_2 = 2$, $a_n = 3a_{n-1} + a_{n-2}$

Recuerda

Una sucesión recurrente es aquella en la que cada término se define a partir de los anteriores.

a) $a_1 = 5$, $a_2 = a_1 + 2 = 5 + 2 = 7$, $a_3 = a_2 + 2 = 7 + 2 = 9$,
$a_4 = a_3 + 2 = 9 + 2 = 11$, $a_5 = a_4 + 2 = 11 + 2 = 13$

b) $a_1 = 5$, $a_2 = 2$, $a_3 = a_2 - a_1 = 2 - 5 = -3$, $a_4 = a_3 - a_2 = -3 - 2 = -5$, $a_5 = a_4 - a_3 = -5 - (-3) = -2$

c) $a_1 = -2$, $a_2 = a_1^2 = (-2)^2 = 4$, $a_3 = a_2^2 = 4^2 = 16$, $a_4 = a_3^2 = 16^2 = 256$, $a_5 = a_4^2 = 256^2 = 65\,536$

d) $a_1 = 3$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3a_2 + a_1 = 3 \cdot 2 + 3 = 9$, $a_4 = 3a_3 + a_2 = 3 \cdot 9 + 2 = 29$, $a_5 = 3a_4 + a_3 = 3 \cdot 29 + 9 = 96$

4. Encuentra el término general de las siguientes progresiones aritméticas. Halla a_{13} y a_{25}.

a) $-5, -3, -1, 1, 3,\ldots$

b) $3, \frac{7}{2}, 4, \frac{9}{2}, 5, \frac{11}{2},\ldots$

a) $a_1 = -5$, $d = 2 \rightarrow a_n = a_1 + (n-1) \cdot d = -5 + (n-1) \cdot 2 = 2n - 7 \rightarrow a_n = 2n - 7$

Sustituyendo en la expresión anterior: $a_{13} = 2 \cdot 13 - 7 = 19$, $a_{25} = 2 \cdot 25 - 7 = 43$

b) $a_1 = 3$, $d = \frac{1}{2} \rightarrow a_n = a_1 + (n-1) \cdot d = 3 + (n-1) \cdot \frac{1}{2} = \frac{n}{2} + \frac{5}{2} \rightarrow a_n = \frac{n}{2} + \frac{5}{2}$

Sustituyendo en la expresión anterior: $a_{13} = \frac{13}{2} + \frac{5}{2} = 9$, $a_{25} = \frac{25}{2} + \frac{5}{2} = 15$

5. En una progresión aritmética conocemos los términos $a_5 = 31$ y $a_{12} = 59$. Halla en qué posición está el término cuyo valor es 135.

Ten en cuenta

Si a_m y a_n son términos de una progresión aritmética, entonces:

$$d = \frac{a_m - a_n}{m - n}$$

Calculamos la diferencia: $d = \frac{a_{12} - a_5}{12 - 5} = \frac{59 - 31}{7} = \frac{28}{7} = 4$

Hallamos a_1 sustituyendo en la fórmula del término general el valor de a_5.

$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d \rightarrow a_5 = a_1 + (5-1) \cdot 4 \rightarrow 31 = a_1 + 16 \rightarrow a_1 = 15$

Por tanto, el término general es: $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d = 15 + (n-1) \cdot 4 = 4n + 11$

Calculamos la posición del término cuyo valor es 135: $4n + 11 = 135 \rightarrow 4n = 124 \rightarrow n = 31$

Luego $a_{31} = 135$.

6. Interpola tres términos aritméticos entre los números 17 y 69.

Tenemos que hallar los términos a_2, a_3 y a_4 de la progresión aritmética. Calculamos la diferencia de la progresión.

$$d = \frac{a_m - a_n}{m - n} = \frac{a_5 - a_1}{5 - 1} = \frac{69 - 17}{5 - 1} = \frac{52}{4} = 13$$

Entonces: $a_2 = 17 + 13 = 30$, $a_3 = 30 + 13 = 43$, $a_4 = 43 + 13 = 56$

Ten en cuenta

Interpolar aritméticamente tres términos entre los números 17 y 69 equivale a hallar los términos a_2, a_3 y a_4 de una progresión aritmética sabiendo que $a_1 = 17$ y $a_5 = 69$.

7. Los tres lados de un triángulo rectángulo están en progresión aritmética de diferencia 5 cm. Halla la medida de cada uno de los lados.

Como los lados están en progresión aritmética de diferencia 5, los llamamos x, $x + 5$ y $x + 10$, siendo este último la hipotenusa por ser el mayor. Aplicamos el teorema de Pitágoras.

$$(x + 10)^2 = (x + 5)^2 + x^2 \to x^2 + 20x + 100 = x^2 + 10x + 25 + x^2 \to x^2 - 10x - 75 = 0$$

$$x = \frac{10 \pm \sqrt{10^2 - 4 \cdot (-75)}}{2} = \frac{10 \pm 20}{2} \to \begin{cases} x_1 = 15 \\ x_2 = -5 \end{cases}$$

Por lo tanto, el primer lado mide 15 cm, y los otros dos, 20 cm y 25 cm.

8. Calcula el término general de las siguientes progresiones geométricas. Halla a_8 y a_{11}.

a) 81, 27, 8, 3, 1,…

b) –3, 6, –12, 24, –48,…

La fórmula del término general de una progresión geométrica es $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$.

a) $a_1 = 81$, $r = \frac{1}{3}$, $a_n = 81 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

$$a_8 = 81 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{8-1} = 3^4 \cdot \frac{1}{3^7} = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27},\ a_{11} = 81 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{11-1} = 3^4 \cdot \frac{1}{3^{10}} = \frac{1}{3^6} = \frac{1}{729}$$

b) $a_1 = -3$, $r = -2$, $a_n = (-3) \cdot (-2)^{n-1}$

$$a_8 = (-3) \cdot (-2)^{8-1} = (-3) \cdot (-2)^7 = 384,\ a_{11} = (-3) \cdot (-2)^{11-1} = (-3) \cdot (-2)^{10} = -3072$$

9. Averigua la razón de una progresión geométrica cuyo primer término es 343 y el cuarto 27. Halla el término general.

Sustituimos los valores $a_1 = 343$ y $a_4 = 27$ en la expresión del término general para obtener la razón.

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1} \to a_4 = a_1 \cdot r^{4-1} \to 27 = 343 \cdot r^3 \to r^3 = \frac{27}{343} \to r = \sqrt[3]{\frac{27}{343}} = \frac{3}{7}$$

El término general es: $a_n = a_1 \cdot \left(\frac{3}{7}\right)^{n-1}$

10. Halla el valor de esta suma: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots$

Tenemos que calcular la suma de todos los términos de una progresión geométrica donde $a_1 = 1$ y $r = \frac{1}{2}$.

Sustituyendo los valores en la fórmula: $S_n = \dfrac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$

Recuerda

Si la razón de una progresión geométrica cumple que $-1 < r < 1$, la suma de todos sus términos es:

$$S_n = \frac{a_1}{1 - r}$$

Evaluación C

1. Escribe los cuatro siguientes términos de estas sucesiones.

a) $-1, 3, -9, 27, -81,$ $\boxed{243}$, $\boxed{-729}$, $\boxed{2\,187}$, $\boxed{-6\,561}$

b) $1, 8, 27, 64,$ $\boxed{125}$, $\boxed{216}$, $\boxed{343}$, $\boxed{512}$

c) $\frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \frac{9}{4}, \frac{16}{5},$ $\boxed{\frac{25}{6}}$, $\boxed{\frac{36}{7}}$, $\boxed{\frac{49}{8}}$, $\boxed{\frac{64}{9}}$

d) $\frac{2}{5}, \frac{11}{15}, \frac{16}{15}, \frac{7}{5},$ $\boxed{\frac{26}{15}}$, $\boxed{\frac{31}{15}}$, $\boxed{\frac{12}{5}}$, $\boxed{\frac{41}{15}}$

2. Relaciona cada sucesión con su término general.

$\boxed{\frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \frac{9}{4}, \frac{16}{5}, \ldots} \rightarrow \boxed{\frac{n^2}{n+1}}$

$\boxed{1, 1, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{5}{16}, \ldots} \rightarrow \boxed{\frac{n}{2^{n-1}}}$

$\boxed{\frac{1}{2}, 1, \frac{9}{8}, 1, \frac{25}{32}, \ldots} \rightarrow \boxed{\frac{n^2}{2^n}}$

$\boxed{1, 1, \frac{4}{3}, 2, \frac{16}{5}, \ldots} \rightarrow \boxed{\frac{2^n}{2n}}$

3. Indica si los siguientes números pertenecen a la sucesión $a_n = n^2 - 2n + 3$ y, en caso afirmativo, determina la posición que ocupan.

a) 18 b) 75 c) 2 d) 83

Igualamos la expresión del término general con cada uno de los valores dados y resolvemos la ecuación de segundo grado resultante.

a) $n^2 - 2n + 3 = 18 \rightarrow n^2 - 2n - 15 = 0 \rightarrow n = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 60}}{2} = \frac{2 \pm 8}{2} \rightarrow \begin{cases} n_1 = 5 \\ n_2 = -3 \end{cases}$

Tomando la solución positiva, tenemos que 18 es el quinto término de la sucesión.

b) $n^2 - 2n + 3 = 75 \rightarrow n^2 - 2n - 72 = 0 \rightarrow n = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 288}}{2} = \frac{2 \pm 17{,}09}{2} \rightarrow \begin{cases} n_1 = 9{,}544 \\ n_2 = -7{,}544 \end{cases}$

Como n no es un valor natural, 75 no pertenece a la sucesión.

c) $n^2 - 2n + 3 = 2 \rightarrow n^2 - 2n + 1 = 0 \rightarrow n = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4}}{2} = \frac{2}{2} = 1 \rightarrow$ El primer término de la sucesión es 2.

d) $n^2 - 2n + 3 = 83 \rightarrow n^2 - 2n - 80 = 0 \rightarrow n = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 320}}{2} = \frac{2 \pm 18}{2} \rightarrow \begin{cases} n_1 = 10 \\ n_2 = -8 \end{cases}$

Tomando la solución positiva, tenemos que 83 es el décimo término de la sucesión.

4. El primer término de una progresión aritmética es 80, y la diferencia, –7. ¿Qué lugar ocupar el primer número negativo?

Tenemos que determinar cuál es el primer valor de n que cumpla que $a_n < 0$.

Calculamos el término general: $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d = 80 + (n - 1) \cdot (-7) = -7n + 87 \rightarrow$
$\rightarrow a_n = -7n + 87 - 7n + 87 < 0 \rightarrow 7n > 87 \rightarrow n > 12{,}43$

Por tanto, el primer número negativo ocupa el lugar 13.

5. Halla el término a_{80} de una progresión aritmética sabiendo que $a_5 = 20$ y $a_{10} = 5$.

Hallamos el término general: $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d \rightarrow \begin{cases} a_5 = a_1 + (5-1) \cdot d \rightarrow 20 = a_1 + 4d \\ a_{10} = a_1 + (10-1) \cdot d \rightarrow 5 = a_1 + 9d \end{cases}$

Resolviendo el sistema tenemos que $a_1 = 32$ y $d = -3$.

Por tanto, el término general es: $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d = 32 + (n - 1) \cdot (-3) = -3n + 35$

Luego: $a_{80} = -3 \cdot 80 + 35 = -205$

6. **El décimo término de una progresión aritmética es $a_{10} = 39$ y su diferencia $d = 7$. Halla el primer término, el término general y la suma de los 50 primeros términos.**

Hallamos el término a_1 sustituyendo los datos que nos dan en la expresión del término general.

$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d \rightarrow a_{10} = a_1 + (10 - 1) \cdot 7 \rightarrow 39 = a_1 + 63 \rightarrow a_1 = -24$

Por lo tanto, el término general es: $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d \rightarrow a_n = -24 + (n - 1) \cdot 7 \rightarrow a_n = 7n - 31$

Calculamos el término a_{50} para hallar la suma de los 50 primeros términos: $a_{50} = 7 \cdot 50 - 31 = 319$

Sustituyendo en la fórmula: $S_n = \dfrac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} \rightarrow S_{50} = \dfrac{(a_1 + a_{50}) \cdot 50}{2} = \dfrac{(-24 + 319) \cdot 50}{2} = 7\,375$

7. **Rodrigo hace casitas con palillos. En la primera utiliza 6 palillos, en la segunda el doble, en la tercera el triple y así sucesivamente. Si dispone de una caja con 1 026 palillos, ¿cuántas casitas consecutivas podrá construir?**

Tenemos que calcular el valor de n tal que $S_n = 1\,026$.

El término general de esta sucesión es $a_n = 6n$. Sustituyendo en la fórmula tenemos:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} \rightarrow 1\,026 = \frac{(6 + 6n) \cdot n}{2} \rightarrow n^2 + n - 342 = 0 \rightarrow n = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 1\,368}}{2} = \frac{-1 \pm 37}{2} \rightarrow \begin{cases} n_1 = 18 \\ n_2 = -19 \end{cases}$$

Podrá construir 18 casitas.

8. **Halla el término general y el término a_8 de las siguientes progresiones.**

a) 200, 100, 50, 25,… **b)** 10; 1; 0,1; 0,01;…

a) Es una progresión geométrica cuyo primer término es 200 y su razón $\dfrac{1}{2}$.

Por tanto: $a_n = a_1 \cdot r^{n-1} \rightarrow a_n = 200 \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$ y $a_8 = 200 \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^{8-1} = 1{,}5625$

b) Es una progresión geométrica cuyo primer término es 10 y su razón 0,1.

Entonces: $a_n = a_1 \cdot r^{n-1} \rightarrow a_n = 10 \cdot 0{,}1^{n-1}$ y $a_8 = 10 \cdot 0{,}1^{8-1} = 10 \cdot 0{,}1^7 = 10 \cdot \dfrac{1}{10^7} = 10^{-6}$

9. **Halla la suma de los 5 primeros términos de una progresión geométrica cuya razón es $r = \dfrac{2}{3}$ y su quinto término es $\dfrac{1}{6}$.**

Hallamos el primer término de la progresión mediante la expresión del término general.

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1} \rightarrow a_5 = a_1 \cdot r^{5-1} \rightarrow \frac{1}{6} = a_1 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{5-1} \rightarrow \frac{1}{6} = a_1 \cdot \frac{16}{81} \rightarrow a_1 = \frac{27}{32}$$

Ahora calculamos la suma de los 5 primeros términos mediante la fórmula.

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (r^n - 1)}{r - 1} \rightarrow S_5 = \frac{a_1 \cdot (r^5 - 1)}{r - 1} = \frac{\dfrac{27}{32} \cdot \left[\left(\dfrac{2}{3}\right)^5 - 1\right]}{\dfrac{2}{3} - 1} = \frac{\dfrac{3^3}{2^5} \cdot \dfrac{2^5}{3^5} - \dfrac{3^3}{2^5}}{-\dfrac{1}{3}} = -3 \cdot \left(\frac{1}{3^2} - \frac{3^3}{2^5}\right) = \frac{211}{96}$$

10. **Un coche cuesta 20 000 € y cada año su precio se rebaja un 10 %. ¿Cuál será su precio al cabo de 5 años?**

Si cada año su precio desciende un 10 %, el segundo año pagaríamos un 90 %, lo que supone multiplicar el precio por 0,9. Por tanto, se trata de una progresión geométrica de primer término 20 000 y razón 0,9. El término general es $a_n = 20\,000 \cdot 0{,}9^{n-1}$. Entonces: $a_5 = 20\,000 \cdot 0{,}9^4 = 13\,122$

Al cabo de 5 años su precio será de 13 122 €.

Evaluación D

1. Escribe el tercer, el quinto y el décimo término de las siguientes sucesiones.

a) $a_n = (n-2)(n+1)$ **b)** $a_n = (-1)^n$ **c)** $a_n = \dfrac{n+1}{n^2}$ **d)** $a_n = \dfrac{n-1}{n}$

a) $a_3 = (3-2)(3+1) = 4$, $a_5 = (5-2)(5+1) = 18$, $a_{10} = (10-2)(10+1) = 88$

b) $a_3 = (-1)^3 = -1$, $a_5 = (-1)^5 = -1$, $a_{10} = (-1)^{10} = 1$

c) $a_3 = \dfrac{3+1}{3^2} = \dfrac{4}{9}$, $a_5 = \dfrac{5+1}{5^2} = \dfrac{6}{25}$, $a_{10} = \dfrac{10+1}{10^2} = \dfrac{11}{100}$

d) $a_3 = \dfrac{3-1}{3} = \dfrac{2}{3}$, $a_5 = \dfrac{5-1}{5} = \dfrac{4}{5}$, $a_{10} = \dfrac{10-1}{10} = \dfrac{9}{10}$

2. En una sucesión, cada término cumple que es el triple del término anterior más 2 unidades.

a) Escribe la ley de recurrencia de la sucesión.

b) Halla los 6 primeros términos de ella sabiendo que el primero es 1.

a) La ley de recurrencia es: $a_n = 3 \cdot a_{n-1} + 2$

b) $a_1 = 1$, $a_2 = 3 \cdot 1 + 2 = 5$, $a_3 = 3 \cdot 5 + 2 = 17$, $a_4 = 3 \cdot 17 + 2 = 53$, $a_5 = 3 \cdot 53 + 2 = 161$, $a_6 = 3 \cdot 161 + 2 = 485$

3. Calcula el término general de la progresión aritmética que tiene por diferencia $d = -5$ y cuyo tercer término vale – 6. Halla a_{20}.

Calculamos a_1 mediante la expresión del término general y los datos que nos dan.

$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d \rightarrow a_3 = a_1 + (3-1) \cdot (-5) \rightarrow -6 = a_1 - 10 \rightarrow a_1 = 4$

Por lo tanto, el término general es: $a_n = 4 + (n-1) \cdot (-5) \rightarrow a_n = -5n + 9$ y $a_{20} = -5 \cdot 20 + 9 = -91$

4. Alfonso y Conchi han guardado 100 € en un cajón y cada mes añaden 75 € más.

a) Escribe el término general que indica el dinero que tienen en el mes n.

b) ¿Cuánto dinero tendrán al cabo de 2 años y medio?

c) Si su objetivo es conseguir 850 € para hacer un viaje, ¿cuántos meses tardarán en reunirlo?

a) Se trata de una progresión aritmética que tiene por diferencia $d = 75$ y cuyo primer término vale 100. Entonces: $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d \rightarrow a_n = 100 + (n-1) \cdot 75 \rightarrow a_n = 75n + 25$

b) Dos años y medio son 30 meses por lo que $a_{30} = 75 \cdot 30 + 25 = 2\,275$. Tendrán 2 275 €.

c) Tenemos que calcular n tal que $a_n = 850$. Sustituyendo en la expresión del término general tenemos: $75n + 25 = 850 \rightarrow 75n = 825 \rightarrow n = 11$. Tardarán 11 meses reunir el dinero.

5. Calcula la suma $a_{20} + a_{21} + a_{22} + \ldots + a_{40}$ sabiendo que el primer término de la progresión aritmética vale 15 y la diferencia $d = 7$.

Para calcular la suma tenemos que hallar $S_{40} - S_{19}$. Para ello necesitamos calcular términos a_{40} y a_{19}.

El término general es: $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d \rightarrow a_n = 15 + (n-1) \cdot 7 \rightarrow a_n = 7n + 8$

Entonces $a_{19} = 7 \cdot 19 + 8 = 141$ y $a_{40} = 7 \cdot 40 + 8 = 288$.

Por tanto:

$$S_{40} - S_{19} = \frac{(a_1 + a_{40}) \cdot 40}{2} - \frac{(a_1 + a_{19}) \cdot 19}{2} = \frac{(15 + 288) \cdot 40}{2} - \frac{(15 + 141) \cdot 19}{2} = 6\,060 - 1482 = 4\,578$$

6. **Calcula la suma de los 100 primeros números pares.**

Tenemos que calcular la suma $2+4+6+8+\dots$ que es una progresión aritmética que tiene por diferencia $d=2$ y cuyo primer término vale 2. Esta progresión tiene por término general $a_n=2n$.

Para calcular la suma de los 100 primeros términos utilizamos la fórmula $S_n=\dfrac{(a_1+a_n)\cdot n}{2}$.

$a_{100}=2\cdot 100=100$

Sustituyendo en la fórmula: $S_{100}=\dfrac{(a_1+a_{100})\cdot 100}{2}=\dfrac{(2+200)\cdot 100}{2}=10100$

7. **Partiendo de un triángulo equilátero, construimos otra figura dividiendo cada lado en 4. Repitiendo el proceso, se van formando nuevas figuras cada vez con un número mayor de lados. Escribe la fórmula que nos indica el número de lados que tiene la figura *n*. ¿Cuántos lados tendrá la figura al repetir el proceso 10 veces?**

Como en cada paso cada lado se divide en 4, el número total de lados de cada figura se multiplica por 4. Por tanto, se trata de una progresión geométrica de razón $r=4$ cuyo primer término vale 3.

El término general es $a_n=a_1\cdot r^{n-1}=3\cdot 4^{n-1}$, que da la fórmula que indica el número de lados de la figura n.

Al repetir el proceso 10 veces, tenemos la figura que está en la posición 11.

Esta figura tendrá $a^{11}=3\cdot 4^{11-1}=3\,145\,728$ lados.

8. **Interpola cuatro términos geométricos entre $a_1=486$ y $a_6=2$.**

$a_6=a_1\cdot r^5\rightarrow 2=486\cdot r^5\rightarrow r^5=\dfrac{2}{486}=\dfrac{1}{243}\rightarrow r=\sqrt[5]{\dfrac{1}{243}}=\dfrac{1}{3}$

Por tanto: $a_2=486\cdot\dfrac{1}{3}=162,\ a_3=162\cdot\dfrac{1}{3}=54,\ a_4=54\cdot\dfrac{1}{3}=18,\ a_5=18\cdot\dfrac{1}{3}=6$

9. **Halla la suma de todos los términos de la progresión $3,2,\dfrac{4}{3},\dfrac{8}{9},\dfrac{16}{27},\dots$**

Es una progresión geométrica de razón $r=\dfrac{2}{3}$ cuyo primer término vale 3.

Por tanto, la suma de todos los términos de esta progresión es: $S_n=\dfrac{a_1}{1-r}=\dfrac{3}{1-\dfrac{2}{3}}=\dfrac{3}{\dfrac{1}{3}}=9$

10. **Pablo lanza una pelota desde una ventana que se encuentra a 64 m de altura. Al llegar al suelo, rebota y asciende en cada nuevo bote $\dfrac{2}{3}$ de la altura anterior. ¿A qué altura está la pelota tras rebotar 10 veces?**

Se trata de una progresión geométrica de razón $r=\dfrac{2}{3}$ cuyo primer término vale 64.

Por tanto, el término general es: $a_n=a_1\cdot r^{n-1}\rightarrow a_n=64\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}$

Tras rebotar 10 veces, tenemos que calcular el término 11: $a_{11}=64\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^{11-1}=1{,}11$

La pelota estará a 1,11 m de altura.