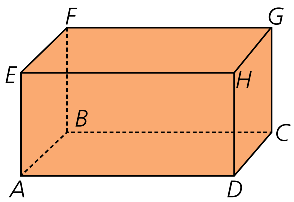
GEOMETRÍA DEL ESPACIO. POLIEDROS

Evaluación A

1. Indica las caras, vértices y aristas de esta figura. ¿Qué posición tienen entre sí las rectas que forman las aristas *AB* y *EH*? ¿Y las caras *ABCD* y *EFGH*?



Caras: *ABCD, EFGH, AEFB, DHGC, AEHD, BFGC*

Vértices: *A, B, C, D, E, F, G, H*

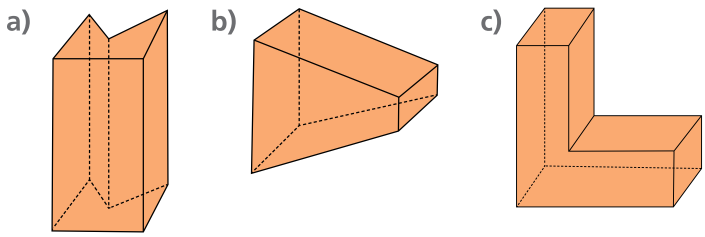
Aristas: *AD, BC, EH, FG, AB, DC, EF, HG, AE, DH, BF, CG*

Las rectas *AB* y *EH* se cruzan. Las caras *ABCD* y *EFGH* son paralelas.

Ten en cuenta

Las caras y las aristas las nombramos mediante los vértices que las forman.

2. Clasifica estos poliedros en cóncavos o convexos.

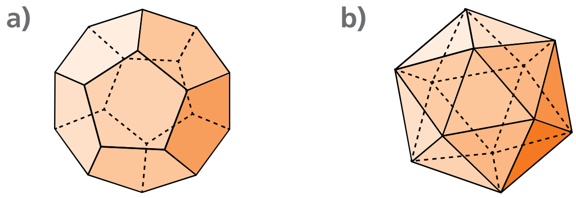


a) Cóncavo **b)** Convexo **c)** Cóncavo

Recuerda

- **Convexo:** cualquier segmento que une dos puntos está contenido en él.
- **Cóncavo:** se puede trazar un segmento uniendo dos puntos y no queda contenido en él.

3. Comprueba que se verifica el teorema de Euler en estos poliedros.



Recuerda

Teorema de Euler

En un poliedro convexo, $C + V = A + 2$ donde C es el número de caras, V número de vértices y A número de aristas.

a) El dodecaedro tiene 12 caras, 30 aristas y 20 vértices. Se cumple el teorema de Euler: 12 + 20 = 30 + 2

b) El icosaedro tiene 20 caras, 30 aristas y 12 vértices. Se cumple el teorema de Euler: 20 + 12 = 30 + 2

4. Dibuja un prisma que tenga 12 vértices.

Comprobar que los alumnos dibujan un prisma hexagonal ya que los vértices de un prisma son los vértices que tienen las dos bases.

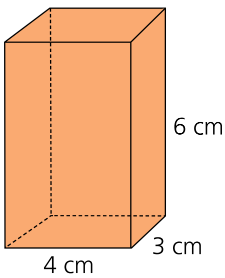
5. Halla el área total y volumen del prisma de la figura.

$A_b = b \cdot h = 4 \cdot 3 = 12 \text{ cm}^2$

$A_L = P \cdot h = 14 \cdot 6 = 84 \text{ cm}^2$

$A_T = A_L + 2A_b = 84 + 2 \cdot 12 = 108 \text{ cm}^2$

$V = A_b \cdot h = 12 \cdot 6 = 72 \text{ cm}^3$



Recuerda

Área y volumen de prismas:

$A_L = P \cdot h$

$A_T = A_L + 2A_b$

$V = A_b \cdot h$

6. Halla la diagonal de un cubo si el área total es 150 m².

En primer lugar, hallamos la medida del lado del cubo. El área del cubo es 6 veces el área de una cara.

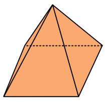
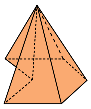
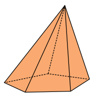
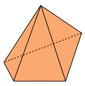
$A = 6 \cdot l^2 = 150 \rightarrow l^2 = \frac{150}{6} = 25 \rightarrow l = \sqrt{25} = 5$ cm

Cada lado mide 5 cm. Aplicando el teorema de Pitágoras, hallamos la longitud de la diagonal de la base: $d^2 = l^2 + l^2 \rightarrow d^2 = 5^2 + 5^2 \rightarrow d^2 = 50 \rightarrow d = \sqrt{50} = 7{,}07$ cm

Aplicamos de nuevo Pitágoras para hallar D: $D^2 = d^2 + l^2 \rightarrow D^2 = 7{,}07^2 + 5^2 \rightarrow D^2 = 75 \rightarrow D = \sqrt{75} = 8{,}66$ cm

Por tanto, la diagonal del cubo mide 8,66 cm.

7. Completa la siguiente tabla sobre clasificación de pirámides.

Pirámide	Tipo	Recta u oblicua	Regular o irregular	Cóncava o convexa
	Cuadrangular	Recta	Regular	Convexa
	Hexagonal	Recta	Irregular	Cóncava
	Pentagonal	Oblicua	Regular	Convexa
	Cuadrangular	Recta	Irregular	Convexa

8. Halla el área total y el volumen de una pirámide regular pentagonal cuyo lado de la base mide 12 cm, la apotema de la base 8,26 cm y la apotema de la pirámide 16 cm.

$$A_b = \frac{P \cdot a}{2} = \frac{12 \cdot 5 \cdot 8{,}26}{2} = 247{,}8 \text{ cm}^2$$

$$A_L = \frac{P \cdot A_p}{2} = \frac{12 \cdot 5 \cdot 16}{2} = 480 \text{ cm}^2$$

$$A_T = A_b + A_L = 247{,}8 + 480 = 727{,}8 \text{ cm}^2$$

Por tanto, el área total es de 727,8 cm².

$$h^2 = A_p^2 - a^2 = 16^2 - 8{,}26^2 = 187{,}77 \rightarrow h = \sqrt{187{,}77} = 13{,}7 \text{ cm}$$

$$V = \frac{A_b \cdot h}{3} = \frac{247{,}8 \cdot 13{,}7}{3} = 1\,131{,}62 \text{ cm}^3$$

Por tanto, el volumen es de 1 131,62 cm³.

Recuerda

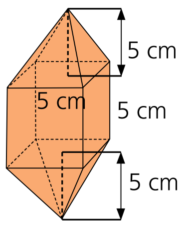
Área y volumen de pirámides:

$$A_L = \frac{P \cdot A_P}{2}$$

$$A_T = A_L + A_b$$

$$V = \frac{A_b \cdot h}{3}$$

9. Halla el volumen de la siguiente figura.



La figura se compone de un cubo y dos pirámides, por tanto:

$$V_T = V_C + 2 \cdot V_P = l^3 + 2 \cdot \frac{A_b \cdot h}{3} = 5^3 + 2 \cdot \frac{5^2 \cdot 5}{3} = 208{,}33 \text{ cm}^3$$

10. Halla la altura de una pirámide de base cuadrada de lado 4 cm si sabemos que su volumen es 96 cm³.

Si llamamos h a la altura, tenemos: $V = \frac{A_b \cdot h}{3} = \frac{4^2 \cdot h}{3} = 96$ cm³

Resolviendo la ecuación: $\frac{4^2 \cdot h}{3} = 96 \rightarrow h = \frac{96 \cdot 3}{16} = 18$ cm

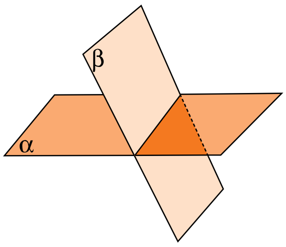
Ten en cuenta

Sustituye los datos en la fórmula del volumen y resuelve la ecuación.

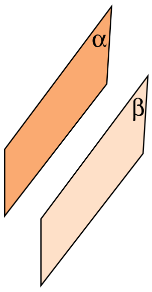
Evaluación B

1. Determina la posición relativa entre los planos α y β.

a)



b)

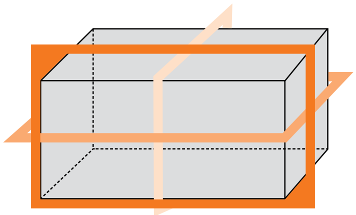


a) Los planos son secantes.

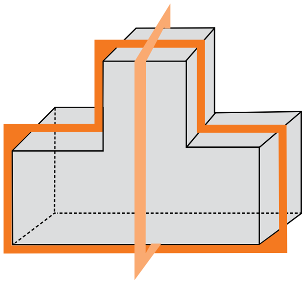
b) Los planos son paralelos.

2. Dibuja los planos de simetría de los siguientes poliedros.

a)



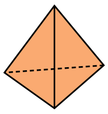
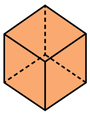
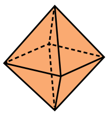
b)



Recuerda

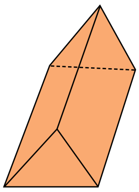
Un plano de simetría es un plano que divide al poliedro en dos partes iguales.

3. Completa la tabla y comprueba que se verifica el teorema de Euler.

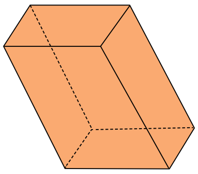
	N.º de caras	N.º de vértices	N.º de aristas	T. de Euler
	4	4	6	4 + 4 = 6 + 2
	6	8	12	6 + 8 = 12 + 2
	8	6	12	8 + 6 = 12 + 2

4. Clasifica estos prismas según su base; si son rectos u oblicuos; regulares o irregulares; y cóncavos o convexos.

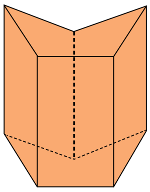
a)



b)



c)

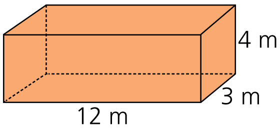


a) Prisma triangular recto, regular y convexo.

b) Prisma rectangular oblicuo, irregular y convexo.

c) Prisma pentagonal recto, irregular y cóncavo.

5. Calcula la diagonal de la siguiente figura.



Aplicando el teorema de Pitágoras en el espacio:

$d^2 = 12^2 + 3^2 + 4^2 = 169 \rightarrow d = \sqrt{169} = 13$ cm

La diagonal mide 13 cm.

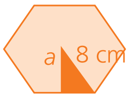
Recuerda

Teorema de Pitágoras en el espacio:

$d^2 = a^2 + b^2 + c^2$

6. Halla el área total y el volumen de un prisma hexagonal regular cuyo lado de la base mide 8 y la altura 6 cm.

> **Recuerda**
> En un hexágono regular, la longitud del radio es igual a la del lado.



Calculamos la apotema de la base mediante el teorema de Pitágoras.

$a^2 = 8^2 - 4^2 = 64 - 16 = 48 \rightarrow a = \sqrt{48} = 6{,}93$ cm

$A_b = A_{HEXÁGONO} = \dfrac{P \cdot a}{2} = \dfrac{6 \cdot 6 \cdot 6{,}93}{2} = 124{,}74$ cm^2 $\qquad A_L = P \cdot h = 6 \cdot 6 \cdot 8 = 288$ cm^2

$A_T = A_L + 2A_b = 288 + 2 \cdot 124{,}74 = 537{,}48$ cm^2 $\qquad V = A_b \cdot h = 124{,}74 \cdot 8 = 997{,}92$ cm^2

7. ¿Cuál es el área total y el volumen de una pirámide hexagonal regular cuyo lado de la base mide 5 cm y la arista lateral 12 cm?

Calculamos la apotema de la base, a, la apotema de la pirámide, A_p, y la altura, h.

$a^2 = 5^2 - 2{,}5^2 \rightarrow a^2 = 25 - 6{,}25 = 18{,}75 \rightarrow a = \sqrt{18{,}75} = 4{,}33$ cm

$A_p^2 = 12^2 - 2{,}5^2 \rightarrow A_p^2 = 144 - 6{,}25 = 137{,}75 \rightarrow A_p = \sqrt{137{,}75} = 11{,}74$ cm

$h^2 = 12^2 - 5^2 \rightarrow h^2 = 144 - 25 = 119 \rightarrow h = \sqrt{119} = 10{,}91$ cm

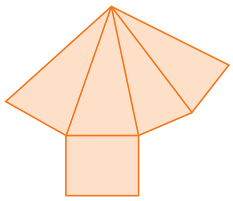
Ahora calculamos el área y el volumen.

$A_b = \dfrac{P \cdot a}{2} = \dfrac{6 \cdot 5 \cdot 4{,}33}{2} = 64{,}95$ cm^2 $\qquad A_L = \dfrac{P \cdot A_p}{2} = \dfrac{6 \cdot 5 \cdot 11{,}74}{2} = 176{,}1$ cm^2

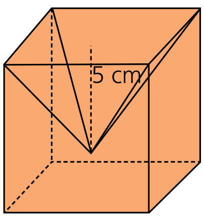
$A_T = A_b + A_L = 64{,}95 + 176{,}1 = 241{,}05$ cm^2 $\qquad V = \dfrac{A_b \cdot h}{3} = \dfrac{64{,}95 \cdot 10{,}91}{3} = 236{,}2$ cm^3

8. Dibuja el desarrollo plano de una pirámide cuadrangular recta y regular.

> **Ten en cuenta**
> El desarrollo plano de un poliedro es la figura formada por los polígonos de sus caras.



9. Halla el área total y el volumen de esta figura.



Para hallar el área total de la figura sumamos el área de 5 caras del cubo y el área de las caras laterales de la pirámide. La apotema de la pirámide la calculamos por Pitágoras: $A_p^2 = 5^2 + 5^2 = 50 \rightarrow A_p = \sqrt{50} = 7{,}07$ cm. Por tanto:

$A_T = A_{CUBO} + A_{PIRÁMIDE} = 5l^2 + \dfrac{P \cdot A_p}{2} = 5 \cdot 10^2 + \dfrac{4 \cdot 10 \cdot 7{,}07}{2} = 500 + 141{,}4 = 641{,}4$ cm^2

Para hallar el volumen restamos el volumen de la pirámide a la del cubo.

$V_T = V_{CUBO} - V_{PIRÁMIDE} = l^3 - \dfrac{A_b \cdot h}{3} = 10^3 - \dfrac{10^2 \cdot 5}{3} = 1\,000 - 166{,}67 = 833{,}33$ cm^3

10. Halla el área y volumen de un tronco de pirámide recta de bases cuadradas de lados 4 cm y 6 cm, y apotema del tronco 5 cm.

> **Recuerda**
> Volumen de un tronco de pirámide:
> $V = \dfrac{\left(A_{b1} + A_{b2} + \sqrt{A_{b1} + A_{b2}}\right) \cdot h}{3}$

Calculamos la altura del tronco de pirámide por Pitágoras.

$h^2 = 5^2 - l^2 = 24 \rightarrow h = \sqrt{24} = 4{,}9$ cm

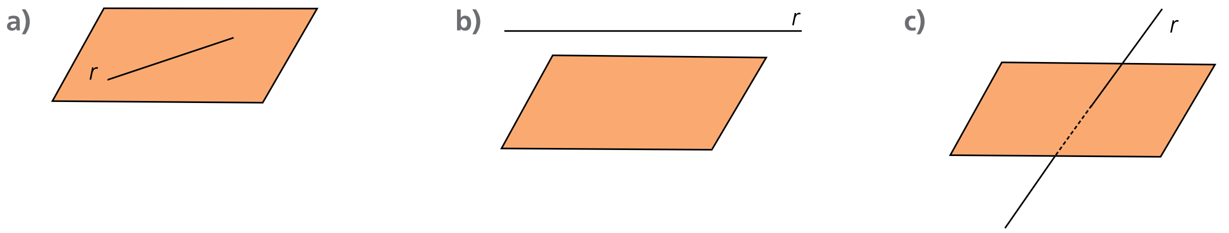
Calculamos el área, formada por las dos bases y cuatro trapecios.

$A_T = A_{b1} + A_{b2} + A_L = l_{b1}^2 + l_{b2}^2 + 4 \cdot \dfrac{(B_1 + B_2) \cdot a}{2} = 6^2 + 4^2 + \dfrac{(6 + 4) \cdot 5}{2} = 36 + 16 + 25 = 77$ cm^2

Calculamos el volumen: $V = \dfrac{\left(A_{b1} + A_{b2} + \sqrt{A_{b1} \cdot A_{b2}}\right) \cdot h}{3} = \dfrac{\left(6^2 + 4^2 + \sqrt{6^2 \cdot 4^2}\right) \cdot 4{,}9}{3} = 124{,}13$ cm^3

Evaluación C

1. Determina la posición relativa de estas rectas y planos.



a) Recta contenida en el plano. **b)** Recta y plano paralelos. **c)** Recta y plano secantes.

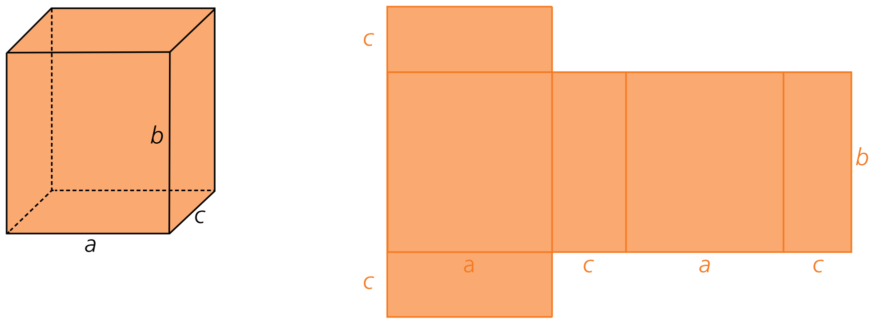
2. Dibuja un poliedro cóncavo y otro convexo con 12 aristas cada uno.

Comprobar que los alumnos dibujan un poliedro con 12 aristas donde cualquier segmento que une dos de sus puntos está contenido en él, y otro con 12 aristas donde se puede trazar un segmento que una dos de sus puntos que no esté contenido en él.

3. Completa la siguiente tabla teniendo en cuenta que se trata de poliedros convexos y que cumplen el teorema de Euler.

Poliedro	N.° de caras	N.° de vértices	N.° de aristas
A	8	6	12
B	12	20	30
C	6	5	9
D	5	5	8

4. Observa este ortoedro y dibuja su desarrollo plano.



5. Calcula el área total y el volumen de un prisma de 7 cm de altura cuyas bases son triángulos equiláteros de 5 cm de lado.

Para hallar el área de las bases, tenemos en cuenta el triángulo rectángulo que corresponde a la mitad de cada base. Mediante el teorema de Pitágoras:

$h^2 = 5^2 - 2{,}5^2 = 25 - 6{,}25 = 18{,}75 \rightarrow h = \sqrt{18{,}75} = 4{,}33$ cm

$A_b = \dfrac{b \cdot h}{2} = \dfrac{5 \cdot 4{,}33}{2} = 10{,}83$ cm^2 $\qquad A_L = P \cdot h = 5 \cdot 3 \cdot 7 = 105$ cm^2

$A_T = A_L + 2A_b = 105 + 2 \cdot 10{,}83 = 126{,}66$ cm^2 $\qquad V = A_b \cdot h = 10{,}83 \cdot 7 = 75{,}81$ cm^3

6. **Calcula la cantidad de acero que se necesita para construir un cubo de 10 m de arista sin tapa.**

Para calcular la cantidad de acero tenemos que calcular el área las 5 caras que tenemos que cubrir.

$A = 5 \cdot l^2 = 5 \cdot 10^2 = 500 \text{ m}^2$

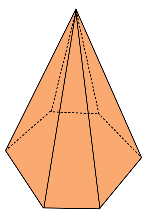
Necesitamos 500 m² de acero.

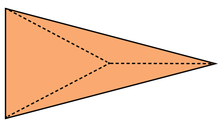
7. **Averigua la altura de un ortoedro cuya base mide 80 cm de largo y 50 cm de ancho y, además, en él se pueden introducir hasta 360 L de agua.**

Sabemos que 1 L = 1 dm³. Por tanto, 360 L de agua equivalen a un volumen de 360 dm³, o lo que es lo mismo, 360 000 cm³. Hallamos qué altura corresponde a un volumen de 360 000 cm³.

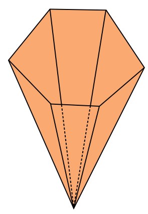
$$V = a \cdot b \cdot h = 80 \cdot 50 \cdot h = 360\,000 \rightarrow 4\,000 \cdot h = 360\,000 \rightarrow h = \frac{360\,000}{4\,000} = 90 \text{ cm}$$

8. **Clasifica los siguientes poliedros según sean prismas o pirámides.**

a) 

b) 

c) 

d) 

a) Pirámide **b)** Pirámide **c)** Prisma **d)** Pirámide

9. **Calcula el área total y el volumen de una pirámide de altura 4 cm cuya base es un hexágono regular de lado 8 cm.**

En primer lugar vamos a calcular la apotema de la base, a, y la apotema de la pirámide, A_p, mediante el teorema de Pitágoras.

$$a^2 = 8^2 - 4^2 \rightarrow a^2 = 64 - 16 = 48 \rightarrow a = \sqrt{48} = 6{,}93 \text{ cm}$$

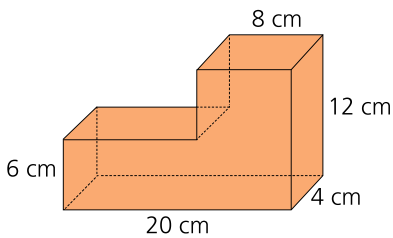
$$A_p^2 = 4^2 + 6{,}93^2 \rightarrow A_p^2 = 16 + 48 = 64 \rightarrow A_p = \sqrt{64} = 8 \text{ cm}$$

Ahora, calculamos el área y el volumen.

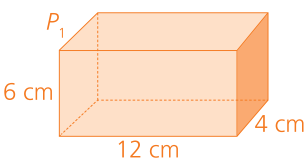
$$A_b = \frac{P \cdot a}{2} = \frac{6 \cdot 8 \cdot 6{,}93}{2} = 166{,}32 \text{ cm}^2 \qquad A_L = \frac{P \cdot A_p}{2} = \frac{6 \cdot 8 \cdot 8}{2} = 192 \text{ cm}^2$$

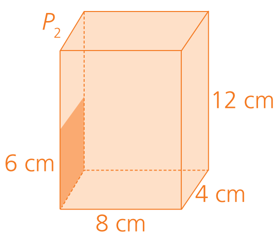
$$A_T = A_b + A_L = 166{,}32 + 192 = 358{,}32 \text{ cm}^2 \qquad V = \frac{A_b \cdot h}{3} = \frac{166{,}32 \cdot 4}{3} = 221{,}76 \text{ cm}^3$$

10. **Halla el área total y el volumen de la siguiente figura.**



En primer lugar, dividimos la figura inicial en dos prismas P_1 y P_2. Para calcular el área de la figura, sumamos las áreas de los dos prismas y restamos el área de la zona coloreada, ya que es interior en los dos prismas. Para calcular el volumen, simplemente sumamos los volúmenes de los dos prismas.





$$A_{P_1} = A_L + 2A_b - 6 \cdot 4 = 32 \cdot 6 + 2 \cdot 12 \cdot 4 - 6 \cdot 4 = 264 \text{ cm}^2$$

$$A_{P_2} = A_L + 2A_b - 6 \cdot 4 = 24 \cdot 12 + 2 \cdot 8 \cdot 4 - 6 \cdot 4 = 328 \text{ cm}^2$$

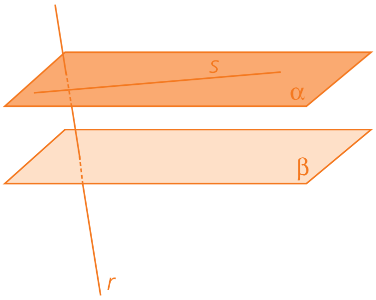
$$A_T = A_{P_1} + A_{P_2} = 264 + 328 = 592 \text{ cm}^2$$

$$V_T = V_{P_1} + V_{P_2} = A_{P_1} \cdot h_1 + A_{P_2} \cdot h_2 = 12 \cdot 4 \cdot 6 + 8 \cdot 4 \cdot 12 =$$
$$= 288 + 384 = 672 \text{ cm}^3$$

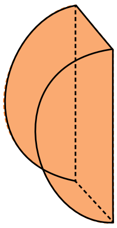
Evaluación D

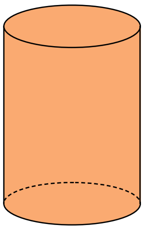
1. **Dibuja dos planos paralelos, una recta secante a ellos, y otra recta que esté contenida en uno de los planos y se cruce con la anterior.**

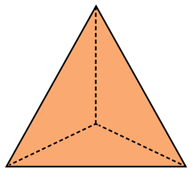
Respuesta abierta.

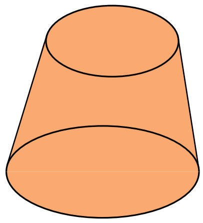


2. **¿Cuáles de las siguientes figuras no son poliedros? Explica por qué.**

a) 

b) 

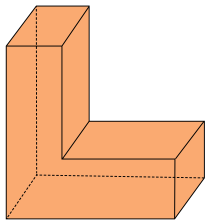
c) 

d) 

Los poliedros son figuras cuyas caras son polígonos. Por tanto, la figura que tenga una cara con líneas curvas no será un poliedro.

a) No es poliedro. **b)** No es poliedro. **c)** Sí es poliedro. **d)** No es poliedro.

3. **Observa esta figura y contesta a las siguientes preguntas.**



a) La figura, ¿es cóncava o convexa?

b) ¿Se cumple el teorema de Euler?

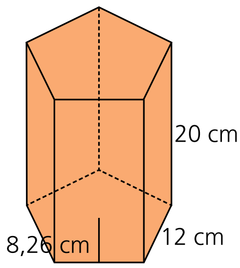
c) En vista de tus respuestas anteriores, ¿se contradice el teorema de Euler?

a) Es cóncava.

b) La figura tiene 8 caras, 12 vértices y 18 aristas, por tanto $8 + 12 = 18 + 2$ y sí se cumple el teorema de Euler.

c) El teorema de Euler dice que en un poliedro convexo, se cumple $C + V = A + 2$, pero no dice que si el poliedro no es convexo no se cumpla, por tanto, no se contradice.

4. **Halla el área y el volumen de este prisma pentagonal regular.**



$A_b = A_{PENTÁGONO} = \frac{P \cdot a}{2} = \frac{12 \cdot 5 \cdot 8{,}26}{2} = 247{,}8\ \text{cm}^2$

$A_L = P \cdot h = 12 \cdot 5 \cdot 20 = 1\,200\ \text{cm}^2$

$A_T = A_L + 2A_b = 1\,200 + 2 \cdot 247{,}8 = 1\,695{,}6\ \text{cm}^2$

$V = A_b \cdot h = 247{,}8 \cdot 20 = 4\,956\ \text{cm}^3$

5. **Calcula los litros de agua que caben en un prisma hexagonal de 7 cm de lado y 10 cm de altura.**

Para calcular los litros de agua que caben, calculamos el volumen del prisma.
Necesitamos calcular la apotema de la base. Lo hacemos mediante el teorema de Pitágoras:

$a^2 = 7^2 - 3{,}5^2 = 49 - 12{,}25 = 36{,}75 \rightarrow a = \sqrt{36{,}75} = 6{,}06\ \text{cm}$

Por tanto, el volumen es: $V = A_b \cdot h = \frac{P \cdot a}{2} \cdot h = \frac{6 \cdot 7 \cdot 6{,}06}{2} \cdot 10 = 1272{,}6\ \text{cm}^3 = 1272{,}6\ \text{ml} = 1{,}2726\ \text{L}$

Caben 1,2726 L.

6. Dibuja una pirámide que tenga 12 aristas.

En una pirámide, las aristas están en la base y en cada una de las caras laterales partiendo de cada vértice de la base.

Como la pirámide tiene que tener 12 aristas, comprobar que los alumnos dibujan una pirámide hexagonal.

7. Halla el área total y el volumen de una pirámide de base cuadrada de 4 cm de lado cuya altura es 10 cm.

En primer lugar, calculamos la apotema de la pirámide, A_p, mediante el teorema de Pitágoras, tomando como catetos la altura y la mitad de la base.

$A_p^2 = 10^2 + 2^2 = 100 + 4 = 104 \rightarrow A_p = \sqrt{104} = 10{,}2$ cm

Después, calculamos el área y el volumen.

$A_b = l^2 = 4^2 = 16$ cm^2 $\qquad A_L = \dfrac{P \cdot A_p}{2} = \dfrac{4 \cdot 4 \cdot 10{,}2}{2} = 81{,}6$ cm^2

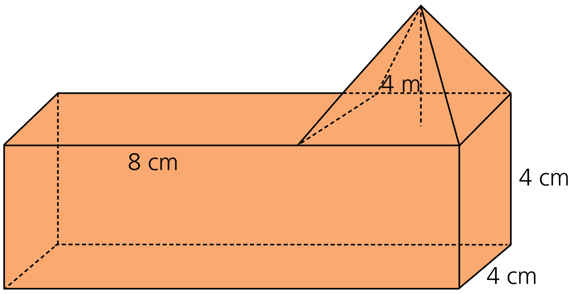
$A_T = A_b + A_L = 16 + 81{,}6 = 97{,}6$ cm^2 $\qquad V = \dfrac{A_b \cdot h}{3} = \dfrac{16 \cdot 10}{3} = 53{,}33$ cm^3

8. Halla el volumen de la pirámide de Keops en Egipto, si sabemos que tiene una base cuadrada de 230 m de lado y una altura de 146 m.

Para hallar este volumen simplemente aplicamos la fórmula, ya que tenemos todos los datos.

$$V = \frac{A_b \cdot h}{3} = \frac{230^2 \cdot 146}{3} = 2\,574\,466{,}67 \text{ m}^3$$

9. Halla el área total y volumen de la siguiente figura.



El único dato que nos falta es la apotema de la pirámide, que se calcula mediante el teorema de Pitágoras utilizando como catetos la mitad de la base de la pirámide y su altura.

$A_p^2 = 4^2 + 2^2 = 16 + 4 = 20 \rightarrow A_p = \sqrt{20} = 4{,}47$ cm

El área de la figura será el área del prisma más el área lateral de la pirámide menos el área de la base de la pirámide, ya que esa cara falta en el prisma.

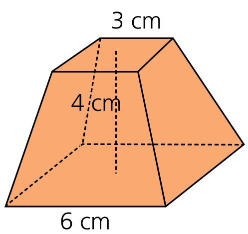
Calculamos el volumen total sumando los volúmenes del prisma y la pirámide.

$A_{PRISMA} = A_L + 2A_b = 32 \cdot 4 + 2 \cdot 12 \cdot 4 = 224$ cm^2 $\qquad A_{LPIRÁMIDE} = \dfrac{16 \cdot 4{,}47}{2} = 35{,}76$ cm^2

$A_T = A_{PRISMA} + A_{LPIRÁMIDE} - A_{bPIRÁMIDE} = 224 + 35{,}76 - 42 = 243{,}76$ cm^2

$V_T = V_{PRISMA} + V_{PIRÁMIDE} = 12 \cdot 4 \cdot 4 + \dfrac{4^2 \cdot 4}{3} = 213{,}33$ cm^3

10. Un contenedor tiene la forma de la figura. ¿Se puede introducir en él un cuarto de litro de agua?



La figura es un tronco de pirámide y tenemos que calcular su volumen.

Para calcular el volumen utilizamos la fórmula.

$$V = \frac{\left(A_{b1} + A_{b2} + \sqrt{A_{b1} \cdot A_{b2}}\right) \cdot h}{3} = \frac{\left(6^2 + 3^2 + \sqrt{6^2 \cdot 3^2}\right) \cdot 4}{3} = 84 \text{ cm}^3$$

Como equivale 84 ml de agua, no podremos introducir un cuarto de litro.