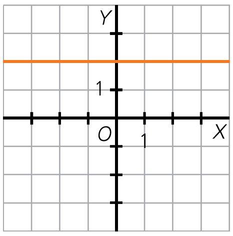
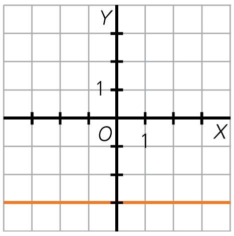
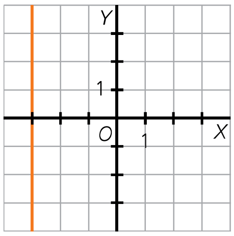
FUNCIONES LINEALES Y CUADRÁTICAS

Evaluación A

1. Escribe la expresión algebraica de estas gráficas. ¿Cuáles no se corresponden con una función?

a) 

b) 

c) 

> **Recuerda**
> La función constante tiene como expresión algebraica $\boldsymbol{y = n}$.

a) $y = 2$ **b)** $y = -3$ **c)** No es función.

2. Representa gráficamente las funciones de proporcionalidad directa dadas por las siguientes tablas. Indica la expresión algebraica que corresponde en cada caso.

a)

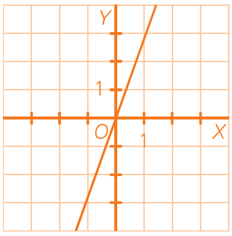
x	0	1	–1	2
y	0	3	–3	6

b)

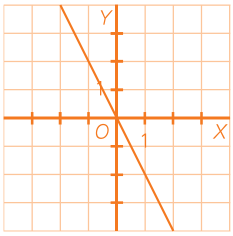
x	–2	–1	0	2
y	4	2	0	–4

> **Recuerda**
> La función de proporcionalidad directa tiene como ecuación $\boldsymbol{y = mx}$ donde m es la pendiente.

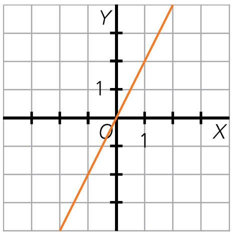
a) $y = 3x$

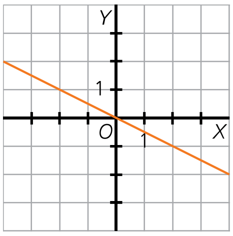


b) $y = -2x$



3. Halla la ecuación de estas gráficas, indica su pendiente y si son crecientes o decrecientes.

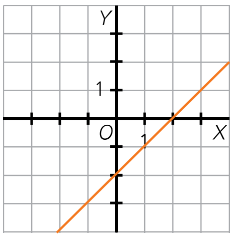
a) 

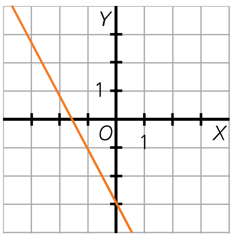
b) 

a) $y = 2x$; $m = 2$; Creciente

b) $y = -\frac{1}{2}x$; $m = -\frac{1}{2}$; Decreciente

4. Determina la ecuación de estas gráficas, indica su pendiente y su ordenada en el origen.

a) 

b) 

> **Recuerda**
> Una función lineal tiene como ecuación $\boldsymbol{y = mx + n}$ donde m es la pendiente y n la ordenada en el origen.

a) $y = x - 2$

$m = 1$; $n = -2$

b) $y = -2x - 3$

$m = -2$; $n = -3$

5. Escribe la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(2, 3)$ si su pendiente es –2.

La recta es de la forma $y = mx + n$. Como $m = -2$, la recta es $y = -2x + n$. Calculamos n sustituyendo el punto (2, 3) en la ecuación anterior: $3 = -2 \cdot 2 + n \rightarrow n = 7$. Luego $y = -2x + 7$.

6. Halla la ecuación punto-pendiente y la ecuación explícita de la recta que pasa por el punto $A(-1, 4)$ cuya pendiente es 2.

La ecuación punto-pendiente es: $y - 4 = 2(x + 1)$

Hallamos la ecuación explícita desarrollando la ecuación anterior y despejando.

$y - 4 = 2(x + 1) \rightarrow y - 4 = 2x + 2 \rightarrow y = 2x + 6$

Recuerda

Ecuación punto-pendiente:

$$y - a_2 = m(x - a_1)$$

Ecuación explícita:

$$y = mx + n$$

7. Dada la recta $\frac{x-2}{3-2} = \frac{y-3}{1-3}$, escribe la ecuación explícita, la punto-pendiente y la general.

Ecuación punto-pendiente: $\frac{x-2}{3-2} = \frac{y-3}{1-3} \rightarrow x - 2 = \frac{y-3}{-2} \rightarrow$
$\rightarrow y - 3 = -2(x - 2)$

Ecuación explícita: $y - 3 = -2(x - 2) \rightarrow y - 3 = -2x + 4 \rightarrow$
$\rightarrow y = -2x + 7$

Ecuación implícita: $y = -2x + 7 \rightarrow 2x + y - 7 = 0$

Recuerda

Ecuación de la recta que pasa por dos puntos:

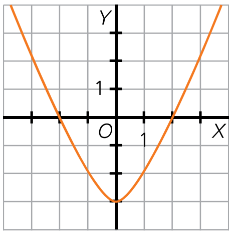
$$\frac{x - a_1}{b_1 - a_1} = \frac{y - a_2}{b_2 - a_2}$$

Ecuación general o implícita:

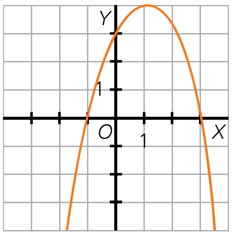
$$Ax + By + C = 0$$

8. Observa las gráficas y determina el vértice, el eje de simetría y los puntos de corte con los ejes.

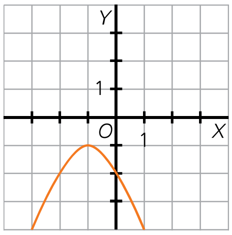
a)



b)



c)



a) Vértice: $(0, -3)$. Eje de simetría: $x = 0$. Puntos de corte con los ejes: $(-2, 0)$, $(2, 0)$, $(0, -3)$

b) Vértice: $(1, 4)$. Eje de simetría: $x = 1$. Puntos de corte con los ejes: $(-1, 0)$, $(3, 0)$, $(0, 3)$

c) Vértice: $(-1, -1)$. Eje de simetría: $x = -1$. Puntos de corte con los ejes: $(0, -2)$

9. Indica los elementos característicos de la función $f(x) = x^2 - 5x + 4$ y represéntala gráficamente.

Como $a = 1 > 0$, la parábola tiene las ramas abiertas hacia arriba.

Vértice: $\left.\begin{array}{l} -\frac{b}{2a} = -\frac{-5}{2} = \frac{5}{2} \\ f\left(\frac{5}{2}\right) = \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 5 \cdot \frac{5}{2} + 4 = -\frac{9}{4} \end{array}\right\} \rightarrow V\left(\frac{5}{2}, -\frac{9}{4}\right)$

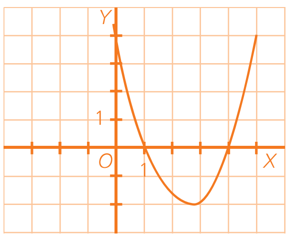
Eje de simetría: $x = \frac{5}{2}$

Puntos de corte con el eje X: $x^2 - 5x + 4 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 4 \end{cases} \rightarrow (1, 0)$ y $(4, 0)$

Puntos de corte con el eje Y: $f(0) = 0^2 - 5 \cdot 0 + 4 = 4 \rightarrow (0, 4)$

Recuerda

- La abscisa del vértice es $-\frac{b}{2a}$.
- El eje de simetría es $x = -\frac{b}{2a}$.



10. En una tienda hacen un descuento del 20 %. Escribe las ecuaciones de las funciones que expresan el descuento y el precio a pagar según el precio del artículo. ¿Qué tipo de funciones son?

Si llamamos x al precio del artículo y $f(x)$ al descuento, la ecuación que expresa el descuento es $f(x) = 0{,}20x$, y la que expresa el precio a pagar, $f(x) = 0{,}80x$.

Son funciones de proporcionalidad directa.

Evaluación B

1. Halla la ecuación de la recta que pasa por los puntos $A(-2, 3)$ y $B(5, 3)$.

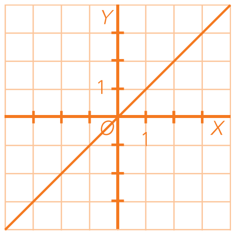
Como la ordenada de los puntos es la misma, 3, la ecuación es constante: $y = 3$

2. Escribe y representa las ecuaciones de las rectas que pasan por:

a) El origen y el punto (2, 3). **b)** El origen y el punto (–1, 3).

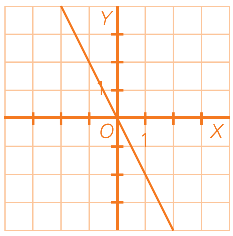
a) Al pasar por el origen es una función de proporcionalidad directa de la forma $y = mx$.

$$m = \frac{3-0}{2-0} = \frac{3}{2} \rightarrow y = \frac{3}{2}x$$



b) Al pasar por el origen es una función de proporcionalidad directa de la forma $y = mx$.

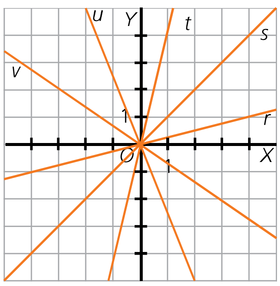
$$m = \frac{3-0}{-1-0} = \frac{3}{-1} = -3 \rightarrow y = -3x$$



Recuerda

Dados dos puntos $A(a_1, a_2)$ y $B(b_1, b_2)$, la pendiente de la recta que pasa por ellos es $m = \frac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1}$.

3. Determina la expresión algebraica de cada una de estas funciones de proporcionalidad directa.



r: $y = \frac{1}{4}x$

s: $y = x$

t: $y = 4x$

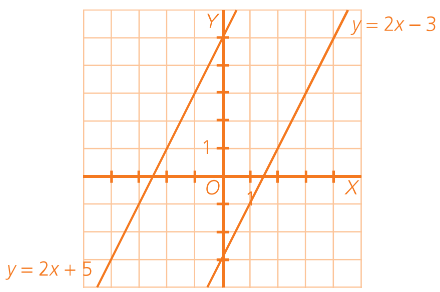
u: $y = -\frac{5}{2}x$

v: $y = -\frac{2}{3}x$

Ten en cuenta

Para hallar la pendiente, busca dos puntos de la misma recta y divide la variación que hay entre ellos en el eje *Y* por la variación que hay en el eje *X*.

4. Representa las funciones lineales $y = 2x - 3$ e $y = 2x + 5$ en un mismo eje de coordenadas. ¿Cómo son las rectas? ¿Cómo son sus pendientes?



Las rectas son paralelas, por lo que las pendientes son iguales.

5. Halla la ecuación de la recta que pasa por los puntos $A(1, -2)$ y $B(3, -10)$.

La recta es de la forma $y = mx + n$. En primer lugar hallamos la pendiente: $m = \frac{-10-(-2)}{3-1} = \frac{-8}{2} = 4$

Luego la recta es de la forma: $y = -4x + n$

Sustituimos el punto (1, –2) en la ecuación para hallar n: $-2 = -4 \cdot 1 + n \rightarrow n = 2$

Entonces, la ecuación de la recta es $y = -4x + 2$.

6. Halla la recta que pasa por los puntos $A(1, 3)$ y $B(3, -1)$ y escríbela en forma implícita.

La ecuación de la recta que pasa por esos puntos es: $\dfrac{x-1}{3-1} = \dfrac{y-3}{-1-3}$

Simplificamos y multiplicamos en cruz para hallar la forma general de la recta.

$$\frac{x-1}{3-1} = \frac{y-3}{-1-3} \rightarrow \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{-4} \rightarrow -4(x-1) = 2(y-3) \rightarrow -4x+4 = 2y-6 \rightarrow -4x-2y+10=0$$

7. Indica la pendiente de estas rectas.

a) $3x + 2y - 5 = 0$ **b)** $\dfrac{x-2}{3-2} = \dfrac{y+4}{5+4}$ **c)** $y + 2 = 3(x-1)$ **d)** $y = -2x - 5$

a) $3x + 2y - 5 = 0 \rightarrow 2y = -3x + 5 \rightarrow y = -\dfrac{3}{2}x + \dfrac{5}{2} \rightarrow$ La pendiente es $m = \dfrac{3}{2}$.

b) $\dfrac{x-2}{3-2} = \dfrac{y+4}{5+4} \rightarrow x - 2 = \dfrac{y+4}{9} \rightarrow y + 4 = 9(x-2) \rightarrow$ La pendiente es $m = 9$.

c) La ecuación ya está expresada en forma punto-pendiente, luego $m = 3$.

d) La ecuación está dada de forma explícita, por lo que $m = -2$.

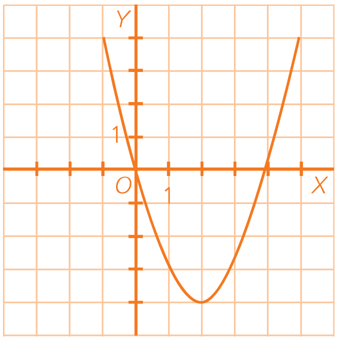
8. Representa la función cuadrática $f(x) = x^2 - 4x$ hallando sus elementos característicos.

Como $a = 1 > 0$, la parábola tiene las ramas abiertas hacia arriba.

Vértice: $\left.\begin{array}{l} -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{-4}{2} = 2 \\ f(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 = -4 \end{array}\right\} \rightarrow V(2, -4)$ Eje de simetría: $x = 2$

Puntos de corte con el eje X: $x^2 - 4x = 0 \rightarrow x(x-4) = 0 \rightarrow (0, 0)$ y $(4, 0)$

Puntos de corte con el eje Y: $f(0) = 0^2 - 4 \cdot 0 = 0 \rightarrow (0, 0)$



9. Se lanza una pelota que sigue una trayectoria parabólica dada por $f(x) = -2x^2 + 16x$, donde x son los metros recorridos y $f(x)$ la altura que alcanza en metros. Indica la altura máxima a la que llega la pelota.

Calculamos el vértice: $\left.\begin{array}{l} -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{16}{2 \cdot (-2)} = 4 \\ f(4) = -2 \cdot 4^2 + 16 \cdot 4 = 32 \end{array}\right\} \rightarrow V(4, 32)$

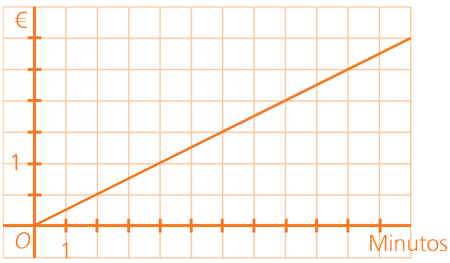
Luego la altura máxima que alcanza son 32 m.

Ten en cuenta

El máximo o el mínimo de una función cuadrática se encuentra en el vértice.

10. Una compañía telefónica cobra 25 CENT por cada minuto de llamada. Completa la tabla y representa gráficamente la función que representa el precio por minuto. ¿Qué tipo de función es?

Minutos	1	2	4	6	10
Precio (€)	0,25	0,50	1	1,50	2,50



Es una función de proporcionalidad directa.

Evaluación C

1. Halla la ecuación de una función constante que pase por el punto $A(3, -1)$. Escribe la ecuación de una recta paralela a la anterior que pase por el punto $B(2, 5)$.

Para hallar la ecuación de la función constante, nos fijamos en segunda coordenada del punto. Entonces, $y = -1$.

La recta paralela que pasa por el punto (2, 5) es $y = 5$.

2. Representa gráficamente las funciones dadas por las siguientes tablas. Indica la expresión algebraica que corresponde en cada caso.

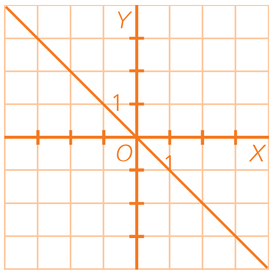
a)

x	1	2	3	4
y	–1	–2	–3	–4

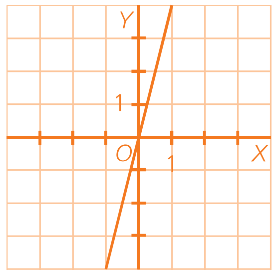
b)

x	–1	0	1	2
y	–4	0	4	8

a) $y = -x$



b) $y = 4x$



3. Determina la pendiente de las funciones de proporcionalidad directa que pasan por:

a) El punto (2, 5).

b) El punto (–1, 3).

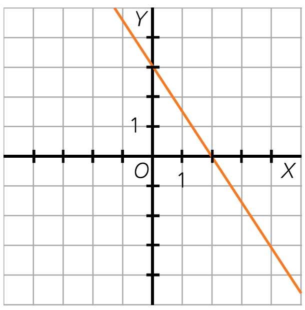
En ambos casos al ser funciones de proporcionalidad directa pasan por el (0, 0).

a) $m = \dfrac{5 - 0}{2 - 0} = \dfrac{5}{2}$

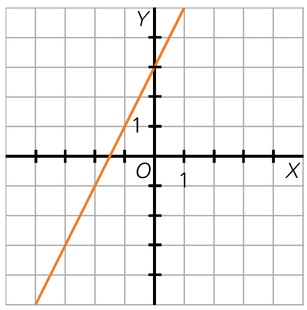
b) $m = \dfrac{3 - 0}{-1 - 0} = -3$

4. Escribe la expresión algebraica de las siguientes funciones lineales. ¿Cuál es la pendiente? ¿Y la ordenada en el origen?

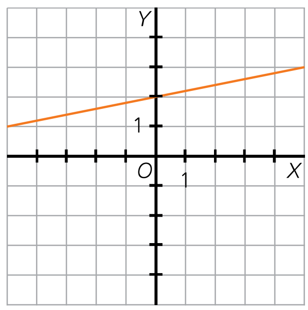
a)



b)



c)



a) $y = -\dfrac{3}{2}x + 3;\ m = -\dfrac{3}{2};\ n = 3$

b) $y = 2x + 3;\ m = 2;\ n = 3$

c) $y = \dfrac{1}{5}x + 2;\ m = \dfrac{1}{5};\ n = 2$

5. Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(1, -5)$ cuya pendiente es 3.

La recta es de la forma $y = mx + n$. Como $m = 3$, la recta es $y = 3x + n$.

Calculamos n sustituyendo el punto (1, –5) en la ecuación anterior: $-5 = 3 \cdot 1 + n \rightarrow n = -8$

Luego la ecuación de la recta es: $y = 3x - 8$

6. Escribe la recta que pasa por los puntos $A(2, -1)$ y $B(3, -4)$, y escríbela en forma implícita.

La ecuación de la recta que pasa por esos puntos es: $\dfrac{x-2}{3-2} = \dfrac{y+1}{-4+1}$

$\dfrac{x-2}{3-2} = \dfrac{y+1}{-4+1} \rightarrow x - 2 = \dfrac{y+1}{-3} \rightarrow -3(x-2) = y + 1 \rightarrow -3x + 6 = y + 1 \rightarrow -3x - y + 5 = 0$

7. Halla la ecuación de una recta paralela a $y = 3x - 2$ que pase por el punto $A(2, 5)$.

Una recta paralela a ella tiene la misma pendiente; luego buscamos una recta de ecuación $y = 3x + n$.

Sustituimos el punto (2, 5) en la ecuación para hallar n: $5 = 3 \cdot 2 + n \rightarrow 5 = 6 + n \rightarrow n = -1$

Entonces, la ecuación es: $y = 3x - 1$

8. Representa la función cuadrática $f(x) = -x^2 - 4x - 3$ hallando sus elementos característicos.

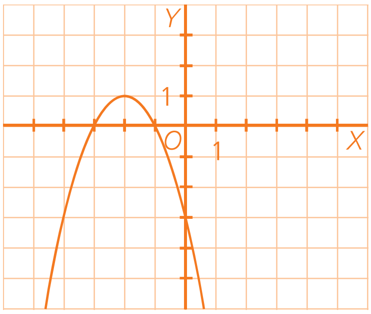
Como $a = -1 < 0$, la parábola tiene las ramas abiertas hacia abajo.

Vértice: $\left.\begin{array}{l} -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{-4}{2 \cdot (-1)} = -2 \\ f(-2) = -(-2)^2 - 4 \cdot (-2) - 3 = 1 \end{array}\right\} \rightarrow V(-2, 1)$

Eje de simetría: $x = -2$

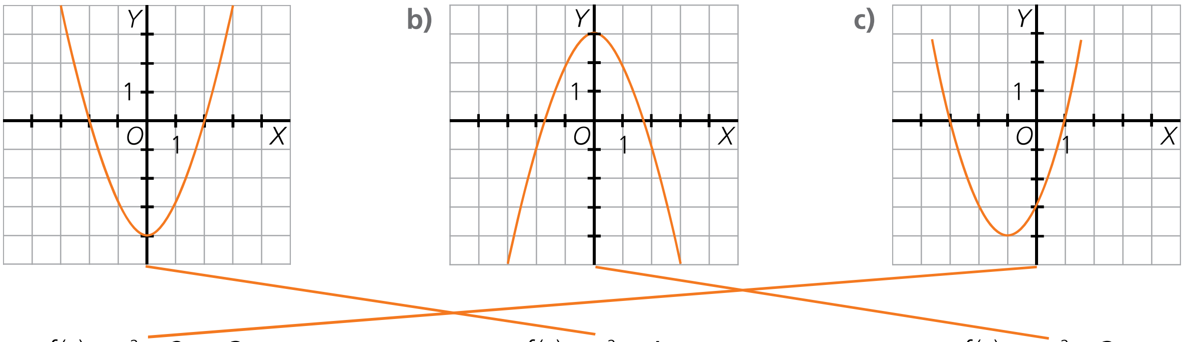
Puntos de corte con el eje X: $-x^2 - 4x - 3 = 0 \rightarrow x_1 = -1,\ x_2 = -3 \rightarrow$
$\rightarrow (-1, 0)$ y $(-3, 0)$

Puntos de corte con el eje Y: $f(0) = -0^2 - 4 \cdot 0 - 3 = -3 \rightarrow (0, -3)$



9. Relaciona cada una de las siguientes gráficas con su ecuación correspondiente.

a) b) c)



$f(x) = x^2 + 2x - 3$ $f(x) = x^2 - 4$ $f(x) = -x^2 + 3$

10. Dos gimnasios ofertan los siguientes precios:

GIMNASIO A: 40 € matrícula + 40 €/mes GIMNASIO B: No se paga matrícula. 50 €/mes

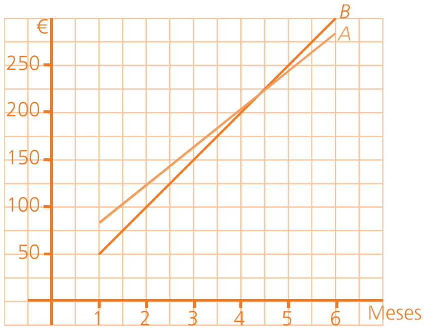
a) Indica la expresión que relaciona el número de meses y el precio en cada uno de los gimnasios.

b) Realiza una tabla de valores para cada gimnasio con el precio para 6 meses y representa en unos mismos ejes de coordenadas las dos gráficas. ¿Qué opción sería más económica según el número de meses?

a) GIMNASIO A: $y = 40x + 40$ GIMNASIO B: $y = 50x$

b)

N.º meses	1	2	3	4	5	6
Precio A	80	120	160	200	240	280
Precio B	50	100	150	200	250	300



Para menos de 4 meses es más económico el gimnasio B; para 4 meses tendrían el mismo precio, y para más de 4 meses, sería más económico el gimnasio A.

Evaluación D

1. Escribe las ecuaciones de los ejes de coordenadas. ¿Cuál de ellos podría representar una función y cuál no?

Eje X: $y = 0$ Eje Y: $x = 0$

El eje X podría representar una función constante.

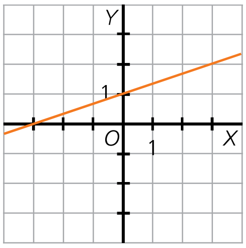
2. Clasifica estas funciones según sean constantes, de proporcionalidad directa o lineales.

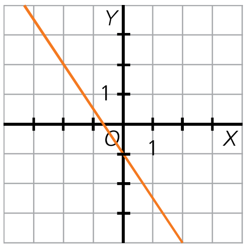
a) $y = 0{,}25x$ **b)** $y = -3x + 2$ **c)** $y = 5$ **d)** $y = 2x$ **e)** $y = -1$ **f)** $y = 4x - 1$

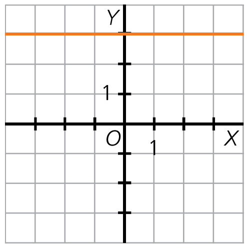
Constantes: $y = 5$, $y = -1$ Lineales: $y = -3x + 2$, $y = 4x - 1$

Proporcionalidad directa: $y = 0{,}25x$, $y = 2x$

3. Halla la ecuación de las siguientes gráficas, indica su pendiente y si son crecientes o decrecientes.

a)


b)


c)


a) $y = \frac{1}{3}x + 1$

$m = \frac{1}{3}$; Creciente

b) $y = -\frac{3}{2}x - 1$

$m = -\frac{3}{2}$; Decreciente

c) $y = 3$

$m = 0$; Constante

4. Determina la ecuación de la recta que pasa por los puntos $A(-2, 3)$ y $B(1, 6)$. Escribe la ecuación de la recta paralela a ella que corta al eje Y en el punto $C(0, -2)$.

La recta que pasa por los puntos $(-2, 3)$ y $(1, 6)$ es de la forma $y = mx + n$.

La pendiente es $m = \frac{6 - 3}{1 - (-2)} = \frac{3}{3} = 1$, por lo que la recta es de la forma $y = x + n$.

Sustituimos el punto $(-2, 3)$ en la ecuación para hallar n: $3 = -2 + n \rightarrow n = 5$

Entonces la ecuación es: $y = x + 5$

Una recta paralela a esta tiene pendiente 1 y, si corta al eje Y en el punto $(0, -2)$, la ordenada en el origen es -2. Luego la ecuación de la recta paralela es: $y = x - 2$

5. Indica razonadamente si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

a) Una función constante tiene pendiente 0.

b) Una función cuadrática puede no cortar a ninguno de los ejes de coordenadas.

c) En la ecuación de la recta $y = mx + n$, m indica la pendiente y n la ordenada en el origen.

d) La recta dada de la forma $Ax + By + C = 0$ se llama ecuación explícita.

a) VERDADERO. Las funciones constantes ni crecen ni decrecen por lo que tienen pendiente 0.

b) FALSO. Puede no cortar al eje X pero siempre corta al eje Y.

c) VERDADERO. El coeficiente de x indica la pendiente, y el término independiente, la ordenada en el origen.

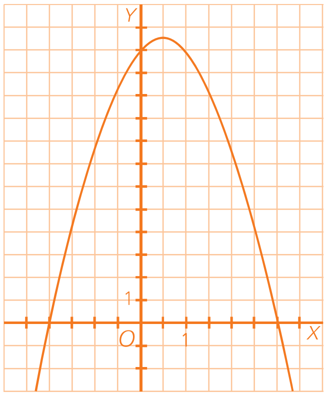
d) FALSO. Esa forma de la recta se llama ecuación implícita.

6. Halla las ecuaciones punto-pendiente y explícita de la recta que pasan por $A(1, 5)$ y $B(-2, 3)$.

La pendiente es $m = \dfrac{3-5}{-2-1} = \dfrac{-2}{-3} = \dfrac{2}{3}$. Entonces, la ecuación punto-pendiente es: $y - 5 = \dfrac{2}{3}(x-1)$

La ecuación explícita es: $y - 5 = \dfrac{2}{3}(x-1) \rightarrow y - 5 = \dfrac{2}{3}x - \dfrac{2}{3} \rightarrow y = \dfrac{2}{3}x + \dfrac{13}{3}$

7. Representa la función cuadrática $f(x) = -2x^2 + 2x + 12$ hallando sus elementos característicos.



Como $a = -2 < 0$, la parábola tiene las ramas abiertas hacia abajo.

Vértice: $\left.\begin{array}{l} -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{2}{2\cdot(-2)} = \dfrac{1}{2} \\ f\left(\dfrac{1}{2}\right) = -2\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + 2\cdot\dfrac{1}{2} + 12 = \dfrac{25}{2} \end{array}\right\} \rightarrow V\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{25}{2}\right)$ Eje de simetría: $x = \dfrac{1}{2}$

Puntos de corte con el eje X: $-2x^2 + 2x + 12 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -2 \end{cases} \rightarrow (3, 0)$ y $(-2, 0)$

Puntos de corte con el eje Y: $f(0) = -2\cdot 0^2 + 2\cdot 0 + 12 = 12 \rightarrow (0, 12)$

8. Halla los puntos de corte de las funciones $f(x) = x^2 + x - 1$ y $g(x) = -x^2 + 9$.

Igualamos las expresiones y resolvemos: $x^2 + x - 1 = -x^2 + 9 \rightarrow 2x^2 + x - 10 = 0 \rightarrow x_1 = 2,\ x_2 = -\dfrac{5}{2}$

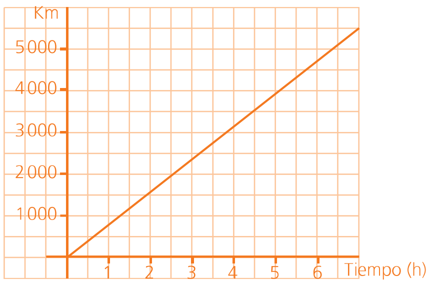
Sustituimos los valores en una de las expresiones: $f(2) = 2^2 + 2 - 1 = 5$; $f\left(-\dfrac{5}{2}\right) = \left(-\dfrac{5}{2}\right)^2 + \left(-\dfrac{5}{2}\right) - 1 = \dfrac{11}{4}$

Por tanto, los puntos de corte son $(2, 5)$ y $\left(-\dfrac{5}{2}, \dfrac{11}{4}\right)$.

9. Un avión se desplaza a 800 km/h. Escribe y representa la ecuación de la función que relaciona el espacio recorrido y el tiempo empleado. ¿Qué tipo de función es?

Si llamamos x al tiempo empleado e y al espacio recorrido, la ecuación es $y = 800x$.

Es una función de proporcionalidad directa.



10. Se lanza una pelota desde la ventana de un edificio siguiendo una trayectoria dada por la ecuación $f(x) = -x^2 + 3x + 10$, donde x representa el espacio recorrido e y la altura que alcanza en metros. ¿A qué altura se encuentra la ventana? ¿A qué distancia del edificio cae la pelota? ¿Cuál es la altura máxima que alcanza?

La ventana se encuentra a $f(0) = -0^2 + 3\cdot 0 + 10 = 10$ m de altura.

Hallamos el punto de corte con el eje X: $-x^2 + 3x + 10 = 0 \rightarrow x_1 = 5,\ x_2 = -2 \rightarrow$ La pelota cae a 5 m.

Vértice: $\left.\begin{array}{l} -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{2}{2\cdot(-1)} = \dfrac{3}{2} \\ f\left(\dfrac{3}{2}\right) = -\left(\dfrac{3}{2}\right)^2 + 3\cdot\dfrac{3}{2} + 10 = \dfrac{49}{4} = 12{,}25 \end{array}\right\} \rightarrow V\left(\dfrac{3}{2}; 12{,}25\right) \rightarrow$ Alcanza 12,25 m de altura.