PRUEBA FINAL DE CURSO

Evaluación A

1. Calcula y simplifica el resultado: $\left(\frac{1}{5}\right)^2 - \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{4}\right) : \frac{2}{3}$

$\left(\frac{1}{5}\right)^2 - \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{4}\right) : \frac{2}{3} = \frac{1}{25} - \left(\frac{2}{4} - \frac{3}{4}\right) : \frac{2}{3} = \frac{1}{25} - \left(-\frac{1}{4}\right) : \frac{2}{3} = \frac{1}{25} - \left(-\frac{3}{8}\right) = \frac{1}{25} + \frac{3}{8} = \frac{8}{200} + \frac{75}{200} = \frac{83}{200}$

2. Expresa en forma de una única potencia.

a) $5^{-2} : \left(5^3\right)^4 \cdot \left(20^4 : 4^4\right)$ b) $\frac{2^3 \cdot 2^{-1} \cdot 2^0}{2^4 \cdot 2^{-1}}$ c) $\left(\left(11^{-2}\right)^3\right)^4 : 11$ d) $\frac{\left(2^3\right)^4}{6^2 : 3^2}$

a) $5^{-2} : \left(5^3\right)^4 \cdot \left(20^4 : 4^4\right) = 5^{-2} : 5^{12} \cdot \left(5^4 \cdot 4^4 : 4^4\right) = 5^{-2} : 5^{12} \cdot 5^4 = 5^{-2-12+4} = 5^{-10}$

b) $\frac{2^3 \cdot 2^{-1} \cdot 2^0}{2^4 \cdot 2^{-1}} = \frac{2^{3-1+0}}{2^{4-1}} = \frac{2^2}{2^3} = 2^{-1}$

c) $\left(\left(11^{-2}\right)^3\right)^4 : 11 = 11^{-24} : 11 = 11^{-24-1} = 11^{-25}$

d) $\frac{\left(2^3\right)^4}{6^2 : 3^2} = \frac{2^{12}}{2^2 \cdot 3^2 : 3^2} = \frac{2^{12}}{2^2} = 2^{12-2} = 2^{10}$

3. Desarrolla las siguientes identidades notables.

a) $(-2x - 4y)^2$ b) $(-2y^2 + 5)^2$ c) $(-3z + 2y^2)(-3z - 2y^2)$ d) $\left(x^2y + \frac{1}{2}x\right)^2$

a) $(-2x - 4y)^2 = (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 4y + (4y)^2 = 4x^2 + 16xy + 16y^2$

b) $(-2y^2 + 5)^2 = (2y^2)^2 - 2 \cdot 2y^2 \cdot 5 + 5^2 = 4y^4 - 20y^2 + 25$

c) $(-3z + 2y^2)(-3z - 2y^2) = (-3z)^2 - (2y^2)^2 = 9z^2 - 4y^4$

d) $\left(x^2y + \frac{1}{2}x\right)^2 = (x^2y)^2 + 2 \cdot x^2y \cdot \frac{1}{2}x + \left(\frac{1}{2}x\right)^2 = x^4y^2 + x^3y + \frac{1}{4}x^2$

4. Resuelve la siguiente ecuación: $2x^2 - 2x - 24 = 0$

Es una ecuación de segundo grado.

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-24)}}{2 \cdot 2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 192}}{4} = \frac{2 \pm 14}{4} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = -3 \end{cases}$$

5. Simplifica y resuelve el siguiente sistema: $\left.\begin{aligned} \frac{-x+2}{3} + \frac{y-1}{4} &= \frac{1}{2} \\ \frac{2x+1}{4} - \frac{3y}{5} &= -\frac{11}{20} \end{aligned}\right\}$

$$\left.\begin{aligned} \frac{-x+2}{3} + \frac{y-1}{4} &= \frac{1}{2} \\ \frac{2x+1}{4} - \frac{3y}{5} &= -\frac{11}{20} \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} \frac{-4x+8}{12} + \frac{3y-3}{12} &= \frac{6}{12} \\ \frac{10x+5}{20} - \frac{12y}{20} &= -\frac{11}{20} \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} -4x+8+3y-3 &= 6 \\ 10x+5-12y &= -11 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} -4x+3y &= 1 \\ 10x-12y &= -16 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} -4x+3y &= 1 \\ 5x-6y &= -8 \end{aligned}\right\}$$

Multiplicamos la primera ecuación por 2, sumamos las ecuaciones y resolvemos para hallar x.

$$\left.\begin{aligned} -8x+6y &= 2 \\ 5x-6y &= -8 \end{aligned}\right\} \rightarrow -3x = -6 \rightarrow x = \frac{-6}{-3} = 2$$

Sustituimos el valor obtenido en cualquiera de las ecuaciones y hallamos y.

$-4 \cdot 2 + 3y = 1 \rightarrow 3y = 9 \rightarrow y = 3$

6. Halla el primer término, el término general y el término veinteavo de una progresión aritmética cuya diferencia es $d = 5$ y su décimo término vale 29.

Hallamos el primer término de la progresión aritmética sustituyendo los datos que nos dan en la expresión del término general.

$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d \rightarrow a_{10} = a_1 + (10 - 1) \cdot 5 \rightarrow 29 = a_1 + 45 \rightarrow a_1 = -16$

Por tanto, el término general es: $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d \rightarrow a_n = -16 + (n - 1) \cdot 5 \rightarrow a_n = 5n - 21$

Para hallar el término a_{20} sustituimos en la expresión del término general.

$a_n = 5n - 21 \rightarrow a_{20} = 5 \cdot 20 - 21 = 79$

7. Halla el área y el volumen de un cono de 12 cm de diámetro y 18 cm de generatriz.

Calculamos la longitud de la altura aplicando el teorema de Pitágoras con el radio y la generatriz.
$h^2 = g^2 - r^2 = 18^2 - 6^2 = 324 - 36 = 288 \rightarrow h = \sqrt{288} = 16{,}97$ cm
Hallamos el área y el volumen sustituyendo los datos en las fórmulas.

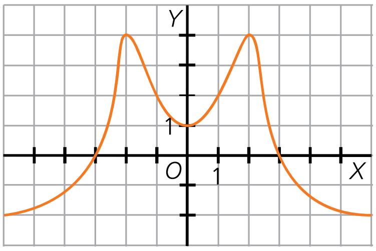
$A_b = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot 6^2 = 113{,}1$ cm^2

$A_L = \pi \cdot r \cdot g = \pi \cdot 6 \cdot 18 = 339{,}29$ cm^2

$A_T = A_L + A_b = 339{,}29 + 113{,}1 = 452{,}39$ cm^2

$V = \dfrac{A_b \cdot h}{3} = \dfrac{113{,}1 \cdot 16{,}97}{3} = \dfrac{1919{,}307}{3} = 639{,}769$ cm^3

8. Describe las características de esta gráfica.



Dominio: [–6, 6]; Recorrido: [–2, 4]

Puntos de corte: (–3, 0), (0, 1), (3, 0)

Creciente en (–6, –2) y (0, 2).

Decreciente en (–2, 0) y (2, 6).

Máximos: (–2, 4) y (2, 4); Mínimo: (0, 1)

La función es continua, simétrica par y no es periódica.

9. Representa la función cuadrática $f(x) = x^2 - 2x - 8$.

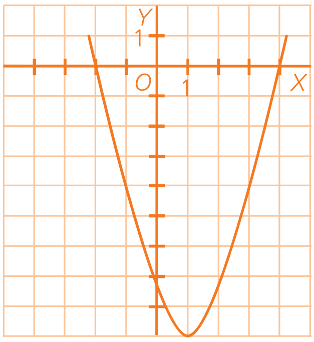
Como $a = 1 > 0$, la parábola tiene las ramas abiertas hacia arriba.

Vértice: $\left.\begin{array}{l} -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{-2}{2} = 1 \\ f(1) = 1 - 2 - 8 = -9 \end{array}\right\} \rightarrow V(1, -9)$ Eje de simetría: $x = 1$

Puntos de corte con el eje X: $x^2 - 2x - 8 = 0 \rightarrow x = \dfrac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8)}}{2 \cdot 1} =$

$= \dfrac{2 \pm \sqrt{4 + 32}}{2} = \dfrac{2 \pm 6}{2} \rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = -2 \end{cases} \rightarrow (4, 0)$ y $(-2, 0)$

Puntos de corte con el eje Y: $f(0) = 0^2 - 2 \cdot 0 - 8 = -8 \rightarrow (0, -8)$



10. Dada la siguiente tabla, halla la media, la mediana, la varianza y la desviación típica.

x_i	f_i	F_i	$x_i \cdot f_i$	$x_i \cdot f_i^2$
3	2	2	6	18
4	5	7	20	80
5	10	17	50	250
6	12	29	72	432
7	8	37	56	392
8	3	40	24	192
Suma	40		228	1 364

$\bar{x} = \dfrac{\sum x_i \cdot f_i}{N} = \dfrac{228}{40} = 5{,}7$

La mediana es la media de los datos que se encuentran en las posiciones 20 y 21. Como en estas dos posiciones el dato es el mismo (6) se concluye que la mediana es 6.

$\sigma^2 = \dfrac{\sum x_i \cdot f_i^2}{N} - \bar{x}^2 = \dfrac{1\,364}{40} - 5{,}7^2 = 34{,}1 - 32{,}49 = 1{,}61$

$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{1{,}61} = 1{,}27$

Evaluación B

1. Un grupo de amigos ha realizado una ruta en tres etapas. El primer día hicieron la tercera parte del recorrido, y el segundo, las tres octavas partes de lo que quedaba. Si aún les quedan 175 km por recorrer, ¿cuál es la longitud total del trayecto?

Si el primer día recorrieron la tercera parte, el segundo día recorren: $\frac{3}{8}$ de $\frac{2}{3} = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$

Sumando el recorrido del primer y segundo día tenemos: $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{4}{12} + \frac{3}{12} = \frac{7}{12}$

Quedan $\frac{5}{12}$ por recorrer que equivalen a 175 km. Por tanto, el trayecto total es: $\frac{175 \cdot 12}{5} = 420$ km

2. Expresa en forma de una única potencia.

a) $(-2)^{-7} \cdot (-2)^4 : \left[(-2)^3\right]^3$ b) $5^4 : 5^{-3} \cdot 5^0 \cdot 5$ c) $\left(7^{-3}\right)^5 : \frac{1}{7^{-1}}$ d) $\frac{3}{\left((3^2)^{-6}\right)^{-3}}$

a) $(-2)^{-7} \cdot (-2)^4 : \left[(-2)^3\right]^3 = (-2)^{-7+4-9} = (-2)^{-12}$

b) $5^4 : 5^{-3} \cdot 5^0 \cdot 5 = 5^{4-(-3)+0+1} = 5^8$

c) $\left(7^{-3}\right)^5 : \frac{1}{7^{-1}} = 7^{-15} : 7 = 7^{-15-1} = 7^{-16}$

d) $\frac{3}{\left((3^2)^{-6}\right)^{-3}} = \frac{3}{3^{36}} = 3^{1-36} = 3^{-35}$

3. Desarrolla las siguientes identidades notables.

a) $\left(x^2 - 3y\right)^2$ b) $\left(2y^3 + y^2\right)^2$ c) $\left(1 + y^2\right)\left(1 - y^2\right)$ d) $\left(\frac{2}{x} + xyz\right)^2$

a) $\left(x^2 - 3y\right)^2 = \left(x^2\right)^2 - 2 \cdot x^2 \cdot 3y + \left(3y\right)^2 = x^4 - 6x^2y + 9y^2$

b) $\left(2y^3 + y^2\right)^2 = \left(2y^3\right)^2 + 2 \cdot 2y^3 \cdot y^2 + \left(y^2\right)^2 = 4y^6 + 4y^5 + y^4$

c) $\left(1 + y^2\right)\left(1 - y^2\right) = 1^2 - \left(y^2\right)^2 = 1 - y^4$

d) $\left(\frac{2}{x} + xyz\right)^2 = \left(\frac{2}{x}\right)^2 + 2 \cdot \frac{2}{x} \cdot xyz + (xyz)^2 = \frac{4}{x^4} + 4yz + x^2y^2z^2$

4. Resuelve la siguiente ecuación: $\frac{2x-1}{3} - \frac{3x+2}{4} = \frac{x-6}{6} - \frac{2x+8}{9}$

Es una ecuación de primer grado con denominadores.

$\frac{2x-1}{3} - \frac{3x+2}{4} = \frac{x-6}{6} - \frac{2x+8}{9} \rightarrow \frac{24x+12}{36} - \frac{27x+18}{36} = \frac{6x-36}{36} - \frac{8x+32}{36} \rightarrow 24x - 12 - 27x - 18 =$
$= 6x - 36 - 8x - 32 \rightarrow 24x - 27x - 6x + 8x = -36 - 32 + 12 + 18 \rightarrow -x = -38 \rightarrow x = 38$

5. Simplifica y resuelve este sistema: $\left.\begin{array}{l} \frac{x-4}{3} + \frac{2y+1}{5} = 6 \\ \frac{2x-1}{5} + \frac{3y-1}{4} = 0 \end{array}\right\}$

$\left.\begin{array}{l} \frac{x-4}{3} + \frac{2y+1}{5} = 6 \\ \frac{2x-1}{5} - \frac{3y-1}{4} = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} \frac{5x-20}{15} + \frac{6y+3}{15} = \frac{90}{15} \\ \frac{8x-4}{20} - \frac{15y-5}{20} = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} 5x - 20 + 6y + 3 = 90 \\ 8x - 4 - 15y + 5 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} 5x + 6y = 107 \\ 8x - 15y = -1 \end{array}\right\}$

Resolviendo por cualquier método nos queda como solución $x = 13$, $y = 7$.

6. Halla el término general y el séptimo término de una progresión geométrica cuya razón es $r = \frac{2}{3}$ y su cuarto término vale $\frac{3}{8}$.

Hallamos el primer término de la progresión geométrica mediante la expresión del término general.

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1} \rightarrow a_4 = a_1 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{4-1} \rightarrow \frac{3}{8} = a_1 \cdot \frac{8}{27} \rightarrow a_1 = \frac{3}{8} : \frac{8}{27} = \frac{81}{64}$$

Por tanto, el término general es: $a_n = a_1 \cdot r^{n-1} \rightarrow a_n = \frac{81}{64} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

El término séptimo es: $a_7 = \frac{81}{64} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{7-1} = \frac{1}{9}$

7. Halla el área total y el volumen de un prisma hexagonal regular sabiendo que la longitud del lado de la base es 10 cm, y su altura, 5 cm.

Calculamos la apotema de la base aplicando el teorema de Pitágoras.

$a^2 = 10^2 - 5^2 = 100 - 25 = 75 \rightarrow a = \sqrt{75} = 8,66$ cm

$A_b = A_{Hexágono} = \frac{P \cdot a}{2} = \frac{6 \cdot 10 \cdot 8,66}{2} = 259,8 \text{ cm}^2$ $\qquad$ $A_L = P \cdot h = 6 \cdot 10 \cdot 5 = 300 \text{ cm}^2$

$A_T = A_L + 2A_b = 300 + 2 \cdot 259,8 = 819,6 \text{ cm}^2$ $\qquad$ $V = A_b \cdot h = 259,8 \cdot 5 = 1\,299 \text{ cm}^3$

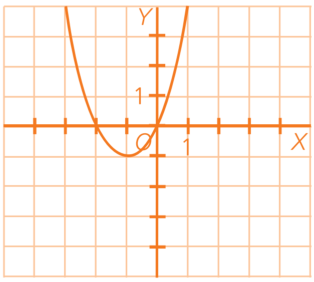
8. Dada la recta $\frac{x-4}{5-4} = \frac{y+1}{6+1}$ halla las ecuaciones punto-pendiente, explícita y general de la recta.

Ecuación punto-pendiente: $\frac{x-4}{5-4} = \frac{y+1}{6+1} \rightarrow x - 4 = \frac{y+1}{7} \rightarrow y + 1 = 7(x-4)$

Ecuación explícita: $y + 1 = 7(x-4) \rightarrow y + 1 = 7x - 28 \rightarrow y = 7x - 29$

Ecuación general: $y = 7x - 29 \rightarrow -7x + y + 29 = 0$

9. Representa esta función cuadrática: $f(x) = x^2 + 2x$



Como $a = 1 > 0$, la parábola tiene las ramas abiertas hacia arriba.

Vértice: $\left.\begin{array}{r} -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{2} = -1 \\ f(-1) = 1 - 2 = -1 \end{array}\right\} \rightarrow V(-1, -1)$ $\qquad$ Eje de simetría: $x = -1$

Puntos de corte con el eje *X*: $x^2 + 2x = 0 \rightarrow x(x+2) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x + 2 = 0 \rightarrow x = -2 \end{cases} \rightarrow (0, 0), (-2, 0)$

Puntos de corte con el eje *Y*: $f(0) = 0^2 + 2 \cdot 0 = 0 \rightarrow (0, 0)$

10. Elvira necesita obtener un 8 de media en cuatro exámenes para poder optar a estudiar la carrera que desea. Si en tres de ellos las notas han sido 7,2; 8,5 y 8,7, ¿qué nota tendrá que sacar en el cuarto examen como mínimo para conseguir la media deseada?

Si llamamos *x* a la nota del cuarto examen tenemos: $\frac{7,2 + 8,5 + 8,7 + x}{4} = 8$

Resolvemos la ecuación.

$$\frac{7,2 + 8,5 + 8,7 + x}{4} = 8 \rightarrow \frac{24,4 + x}{4} = 8 \rightarrow 24,4 + x = 32 \rightarrow x = 32 - 24,4 = 7,6$$

Necesita obtener al menos un 7,6 en el último examen.