SUCESIONES

Evaluación A

1. Escribe los cinco siguientes términos de estas sucesiones.

a) 3, 6, 12, 24, $\boxed{48}$, $\boxed{96}$, $\boxed{192}$, $\boxed{384}$, $\boxed{768}$

b) 2, 3, 5, 8, $\boxed{13}$, $\boxed{21}$, $\boxed{34}$, $\boxed{55}$, $\boxed{89}$

c) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \boxed{\frac{5}{6}}, \boxed{\frac{6}{7}}, \boxed{\frac{7}{8}}, \boxed{\frac{8}{9}}, \boxed{\frac{9}{10}}$

d) 7, 3, –1, –5, –9, $\boxed{-13}$, $\boxed{-17}$, $\boxed{-21}$, $\boxed{-25}$, $\boxed{-29}$

2. Encuentra el término general de estas sucesiones.

a) 1, 4, 9, 16, 25,… b) $\frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \ldots$ c) 5, 10, 15, 20, 25,… d) 1, 3, 9, 27, 81,…

a) Los términos de esta sucesión son los cuadrados de los números naturales. Entonces, $a_n = n^2$.

b) El numerador es el número del término más 2, y el denominador, más 1. Luego, $b_n = \frac{n+2}{n+1}$.

c) Los términos de esta sucesión son los múltiplos de 5. Entonces, $c_n = 5n$.

d) Los términos de esta sucesión son las potencias de 3 empezando con exponente 0. Luego, $d_n = 3^{n-1}$.

3. Clasifica las siguientes progresiones en aritméticas o geométricas, e indica la diferencia o la razón en cada caso.

a) 7, 11, 15, 19, 23,…

b) –4, 8, –16, 32, –64,…

c) $\frac{2}{5}, \frac{11}{15}, \frac{16}{15}, \frac{7}{5}, \ldots$

d) 32, 16, 8, 4, 2,…

a) Progresión aritmética de diferencia $d = 4$.

b) Progresión geométrica de razón $r = -2$.

c) Progresión aritmética de diferencia $d = \frac{1}{3}$.

d) Progresión geométrica de razón $r = \frac{1}{2}$.

Recuerda

- Una **progresión aritmética** es una sucesión en la que cada término, excepto el primero, se obtiene sumándole al anterior un mismo número llamado **diferencia, *d*.**
- Una **progresión geométrica** es una sucesión cuyos términos, excepto el primero, se obtienen multiplicando el anterior por un mismo número llamado **razón, *r*.**

4. Calcula el término general de una progresión aritmética que tiene por diferencia $d = 3$ y cuyo primer término vale 10. Halla a_{12} y a_{15}.

Hallamos el término general.

$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d = 10 + (n-1) \cdot 3 = 10 + 3n - 3 = 3n + 7 \rightarrow a_n = 3n + 7$

A partir del término general, calculamos los términos a_{12} y a_{15}.

$a_{12} = 3 \cdot 12 + 7 = 36 + 7 = 43$ $a_{15} = 3 \cdot 15 + 7 = 45 + 7 = 52$

Recuerda

El término general de las progresiones aritméticas es:

$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$

5. Halla el término a_8 de una progresión aritmética si su tercer término vale 5, y el quinto, 13.

Sabemos que $a_3 = 5$ y $a_5 = 13$. Sustituimos estos datos en la fórmula del término general para hallar el primer término y la diferencia.

$$\left.\begin{array}{l} a_3 = a_1 + (3-1) \cdot d \rightarrow a_1 + 2d = 5 \\ a_5 = a_1 + (5-1) \cdot d \rightarrow a_1 + 4d = 13 \end{array}\right\}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones obtenemos $a_1 = -3$ y $d = 4$.

Por lo tanto, el término general tiene por ecuación $a_n = -3 + (n-1) \cdot 4$.

Para calcular el término a_8 sustituimos en la expresión del término general.

$a_8 = -3 + (8-1) \cdot 4 = -3 + 7 \cdot 4 = -3 + 28 = 25$

6. En una progresión aritmética el primer término es 5 y la diferencia –4. Halla el valor de n sabiendo que $a_n = -115$.

En primer lugar hallamos el término general.

$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d \rightarrow a_n = 5 + (n-1) \cdot (-4) \rightarrow a_n = 5 - 4n + 4 \rightarrow a_n = -4n + 9$

Sustituimos el dato que nos dan.

$$-115 = -4n + 9 \rightarrow -115 - 9 = -4n \rightarrow -124 = -4n \rightarrow n = \frac{-124}{-4} = 31$$

7. Calcula el término general de una progresión geométrica de razón $r = 5$ cuyo primer término vale 2. Halla a_7 y a_{10}.

Hallamos el término general.

$a_n = a_1 \cdot r^{n-1} \rightarrow a_n = 2 \cdot 5^{n-1}$

A partir del término general, calculamos los términos a_7 y a_{10}.

$a_7 = 2 \cdot 5^{7-1} = 2 \cdot 56 = 31\,250$ $\qquad$ $a_{10} = 2 \cdot 5^{10-1} = 2 \cdot 5^9 = 3\,906\,250$

Recuerda

El término general de las progresiones geométricas es:

$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$

8. Halla la razón y el término general de una progresión geométrica si su segundo término es $\frac{3}{2}$ y el cuarto vale $\frac{27}{2}$.

Sustituimos $a_2 \square \frac{3}{2}$ y $a_4 \square \frac{27}{2}$ en la expresión del término general para hallar a_1 y la razón, r.

$a_2 \square a_1 \cdot r^{2-1} \square \frac{3}{2} \rightarrow a_1 \cdot r \square \frac{3}{2}$ $\qquad$ $a_4 \square a_1 \cdot r^{4-1} \square \frac{27}{2} \rightarrow a_1 \cdot r^3 \square \frac{27}{2}$

Dividiendo la segunda ecuación entre la primera obtenemos $r^2 = 9$. Entonces, $r = 3$.

Sustituyendo en la primera ecuación obtenemos $a_1 \square \frac{1}{2}$.

Por lo tanto el término general es: $a_n \square \frac{1}{2} \cdot 3^{n-1}$

9. Determina, si es posible, la razón de una progresión geométrica sabiendo que $a_1 = 1$ y $a_3 = -27$.

El término general de una progresión geométrica es $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$.

Sustituimos los datos que tenemos: $a_3 = 1 \cdot r^2 \rightarrow -27 = r^2$

La ecuación $r^2 = -27$ no tiene solución. Por tanto, no es posible hallar la razón.

10. Los primeros términos de una sucesión son $a_1 = 11$, $a_2 = 16$, $a_3 = 21$. Halla el término general. ¿Hay algún término cuyo valor sea 83? ¿Y 2 001?

Como $a_1 = 11$, $a_2 = 16$ y $a_3 = 21$, la diferencia es $d = 5$.

El término general es $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d = 11 + (n-1) \cdot 5 = 5n + 6$.

Ningún término valdrá 83 ya que si sustituimos en la expresión del término general la ecuación resultante es $5n + 6 = 83$ que no tiene solución natural.

El valor del término a_{399} es 2 001 ya que si sustituimos en la expresión del término general, la ecuación resultante $5n + 6 = 83$ tiene como solución natural $n = 399$.

Evaluación B

1. Completa las siguientes sucesiones con los términos que faltan.

a) 3, $\boxed{6}$, 12, 24, $\boxed{48}$, 96,…

b) $-16, 4, -1, \frac{1}{4}, -\frac{1}{16}, \boxed{\frac{1}{64}}, -\frac{1}{256},\ldots$

c) $\frac{1}{5}, \frac{2}{7}, \boxed{\frac{3}{9}}, \frac{4}{11}, \boxed{\frac{5}{13}}, \frac{6}{15},\ldots$

d) 0, 3, 8, $\boxed{15}$, $\boxed{24}$, 35,…

2. Escribe los cuatro primeros términos de estas sucesiones.

a) $a_n = (n-1)^2$ b) $a_n = 3n - 2$ c) $a_n = \frac{n-1}{n+2}$ d) $a_n = n^3 - 1$

a) $a_1 = (1-1)^2 = 0,\ a_2 = (2-1)^2 = 1,\ a_3 = (3-1)^2 = 4,\ a_4 = (4-1)^2 = 9$

b) $a_1 = 3 \cdot 1 - 2 = 1,\ a_2 = 3 \cdot 2 - 2 = 4,\ a_3 = 3 \cdot 3 - 2 = 7,\ a_4 = 3 \cdot 4 - 2 = 10$

c) $a_1 = \frac{1-1}{1+2} = 0,\ a_2 = \frac{2-1}{2+2} = \frac{1}{4},\ a_3 = \frac{3-1}{3+2} = \frac{2}{5},\ a_4 = \frac{4-1}{4+2} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

d) $a_1 = 1^3 - 1 = 0,\ a_2 = 2^3 - 1 = 7,\ a_3 = 3^3 - 1 = 26,\ a_4 = 4^3 - 1 = 63$

3. Halla los cinco primeros términos de estas sucesiones recurrentes.

a) $a_1 = 5,\ a_n = a_{n-1} + 2$

b) $a_1 = 5,\ a_2 = 2,\ a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$

c) $a_1 = -2,\ a_n = a_{n-1}^2$

d) $a_1 = 3,\ a_2 = 2,\ a_n = 3a_{n-1} + a_{n-2}$

Recuerda

Una sucesión recurrente es aquella en la que cada término se define a partir de los anteriores.

a) $a_1 = 5,\ a_2 = a_1 + 2 = 5 + 2 = 7,\ a_3 = a_2 + 2 = 7 + 2 = 9,$
$a_4 = a_3 + 2 = 9 + 2 = 11,\ a_5 = a_4 + 2 = 11 + 2 = 13$

b) $a_1 = 5,\ a_2 = 2,\ a_3 = a_2 - a_1 = 2 - 5 = -3,\ a_4 = a_3 - a_2 = -3 - 2 = -5,\ a_5 = a_4 - a_3 = -5 - (-3) = -2$

c) $a_1 = -2,\ a_2 = a_1^2 = (-2)^2 = 4,\ a_3 = a_2^2 = 4^2 = 16,\ a_4 = a_3^2 = 16^2 = 256,\ a_5 = a_4^2 = 256^2 = 65\,536$

d) $a_1 = 3,\ a_2 = 2,\ a_3 = 3a_2 + a_1 = 3 \cdot 2 + 3 = 9,\ a_4 = 3a_3 + a_2 = 3 \cdot 9 + 2 = 29,\ a_5 = 3a_4 + a_3 = 3 \cdot 29 + 9 = 96$

4. Encuentra el término general de las siguientes progresiones aritméticas. Halla a_{13} y a_{25}.

a) $-5, -3, -1, 1, 3,\ldots$

b) $3, \frac{7}{2}, 4, \frac{9}{2}, 5, \frac{11}{2},\ldots$

a) $a_1 = -5,\ d = 2 \rightarrow a_n = a_1 + (n-1) \cdot d = -5 + (n-1) \cdot 2 = 2n - 7 \rightarrow a_n = 2n - 7$

Sustituyendo en la expresión anterior: $a_{13} = 2 \cdot 13 - 7 = 19,\ a_{25} = 2 \cdot 25 - 7 = 43$

b) $a_1 = 3,\ d = \frac{1}{2} \rightarrow a_n = a_1 + (n-1) \cdot d = 3 + (n-1) \cdot \frac{1}{2} = \frac{n}{2} + \frac{5}{2} \rightarrow a_n = \frac{n}{2} + \frac{5}{2}$

Sustituyendo en la expresión anterior: $a_{13} = \frac{13}{2} + \frac{5}{2} = 9,\ a_{25} = \frac{25}{2} + \frac{5}{2} = 15$

5. En una progresión aritmética conocemos los términos $a_5 = 31$ y $a_{12} = 59$. Halla en qué posición está el término cuyo valor es 135.

Ten en cuenta

Si a_m y a_n son términos de una progresión aritmética, entonces:

$$d = \frac{a_m - a_n}{m - n}$$

Calculamos la diferencia: $d = \frac{a_{12} - a_5}{12 - 5} = \frac{59 - 31}{7} = \frac{28}{7} = 4$

Hallamos a_1 sustituyendo en la fórmula del término general el valor de a_5.

$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d \rightarrow a_5 = a_1 + (5-1) \cdot 4 \rightarrow 31 = a_1 + 16 \rightarrow a_1 = 15$

Por tanto, el término general es: $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d = 15 + (n-1) \cdot 4 = 4n + 11$

Calculamos la posición del término cuyo valor es 135: $4n + 11 = 135 \rightarrow 4n = 124 \rightarrow n = 31$

Luego $a_{31} = 135$.

6. **Interpola tres términos aritméticos entre los números 17 y 69.**

Tenemos que hallar los términos a_2, a_3 y a_4 de la progresión aritmética.
Calculamos la diferencia de la progresión.

$$d = \frac{a_m - a_n}{m - n} = \frac{a_5 - a_1}{5 - 1} = \frac{69 - 17}{5 - 1} = \frac{52}{4} = 13$$

Entonces: $a_2 = 17 + 13 = 30$, $a_3 = 30 + 13 = 43$, $a_4 = 43 + 13 = 56$

Ten en cuenta

Interpolar aritméticamente tres términos entre los números 17 y 69 equivale a hallar los términos a_2, a_3 y a_4 de una progresión aritmética sabiendo que $a_1 = 17$ y $a_5 = 69$.

7. **Los tres lados de un triángulo rectángulo están en progresión aritmética de diferencia 5 cm. Halla la medida de cada uno de los lados.**

Como los lados están en progresión aritmética de diferencia 5, los llamamos x, $x + 5$ y $x + 10$, siendo este último la hipotenusa por ser el mayor. Aplicamos el teorema de Pitágoras.

$$(x + 10)^2 = (x + 5)^2 + x^2 \rightarrow x^2 + 20x + 100 = x^2 + 10x + 25 + x^2 \rightarrow x^2 - 10x - 75 = 0$$

$$x = \frac{10 \pm \sqrt{10^2 - 4 \cdot (-75)}}{2} = \frac{10 \pm 20}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 15 \\ x_2 = -5 \end{cases}$$

Por lo tanto, el primer lado mide 15 cm, y los otros dos, 20 cm y 25 cm.

8. **Calcula el término general de las siguientes progresiones geométricas. Halla a_8 y a_{11}.**

a) 81, 27, 8, 3, 1,… **b)** –3, 6, –12, 24, –48,…

La fórmula del término general de una progresión geométrica es $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$.

a) $a_1 = 81$, $r = \frac{1}{3}$, $a_n = 81 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

$$a_8 = 81 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{8-1} = 3^4 \cdot \frac{1}{3^7} = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27},\ a_{11} = 81 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{11-1} = 3^4 \cdot \frac{1}{3^{10}} = \frac{1}{3^6} = \frac{1}{729}$$

b) $a_1 = -3$, $r = -2$, $a_n = (-3) \cdot (-2)^{n-1}$

$$a_8 = (-3) \cdot (-2)^{8-1} = (-3) \cdot (-2)^7 = 384,\ a_{11} = (-3) \cdot (-2)^{11-1} = (-3) \cdot (-2)^{10} = -3072$$

9. **Averigua la razón de una progresión geométrica cuyo primer término es 343 y el cuarto 27. Halla el término general.**

Sustituimos los valores $a_1 = 343$ y $a_4 = 27$ en la expresión del término general para obtener la razón.

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1} \rightarrow a_4 = a_1 \cdot r^{4-1} \rightarrow 27 = 343 \cdot r^3 \rightarrow r^3 = \frac{27}{343} \rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{27}{343}} = \frac{3}{7}$$

El término general es: $a_n = a_1 \cdot \left(\frac{3}{7}\right)^{n-1}$

10. **Una balsa pierde cada día un cuarto del agua que contiene. Si al principio tenía 8 960 L, ¿cuántos litros quedarán el quinto día?**

Si cada día pierde un cuarto, conserva tres cuartos del agua que contiene.
Luego la cantidad de agua que conserva cada día es una progresión geométrica de primer término 8 960 y razón $\frac{3}{4}$.

El término general es: $a_n = a_1 \cdot r^{n-1} \rightarrow a_n = 8960 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$

El quinto día quedarán $a_5 = 8960 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{5-1} = 2835$ L.

Evaluación C

1. Escribe los cuatro siguientes términos de estas sucesiones.

a) $-1, 3, -9, 27, -81,$ $\boxed{243}$, $\boxed{-729}$, $\boxed{2\,187}$, $\boxed{-6\,561}$

b) $1, 8, 27, 64,$ $\boxed{125}$, $\boxed{216}$, $\boxed{343}$, $\boxed{512}$

c) $\frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \frac{9}{4}, \frac{16}{5},$ $\boxed{\frac{25}{6}}$, $\boxed{\frac{36}{7}}$, $\boxed{\frac{49}{8}}$, $\boxed{\frac{64}{9}}$

d) $\frac{2}{5}, \frac{11}{15}, \frac{16}{15}, \frac{7}{5},$ $\boxed{\frac{26}{15}}$, $\boxed{\frac{31}{15}}$, $\boxed{\frac{12}{5}}$, $\boxed{\frac{41}{15}}$

2. Relaciona cada sucesión con su término general.

$\boxed{\frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \frac{9}{4}, \frac{16}{5}, \ldots}$ $\boxed{1, 1, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{5}{16}, \ldots}$ $\boxed{\frac{1}{2}, 1, \frac{9}{8}, 1, \frac{25}{32}, \ldots}$ $\boxed{1, 1, \frac{4}{3}, 2, \frac{16}{5}, \ldots}$

$\boxed{\frac{n^2}{2^n}}$ $\boxed{\frac{2^n}{2n}}$ $\boxed{\frac{n}{2^{n-1}}}$ $\boxed{\frac{n^2}{n+1}}$

3. Indica si los siguientes números pertenecen a la sucesión $a_n = n^2 - 2n + 3$ y, en caso afirmativo, determina la posición que ocupan.

a) 18 b) 75 c) 2 d) 83

Igualamos la expresión del término general con cada uno de los valores dados y resolvemos la ecuación de segundo grado resultante.

a) $n^2 - 2n + 3 = 18 \rightarrow n^2 - 2n - 15 = 0 \rightarrow n = \dfrac{2 \pm \sqrt{4 + 60}}{2} = \dfrac{2 \pm 8}{2} \rightarrow \begin{cases} n_1 = 5 \\ n_2 = -3 \end{cases}$

Tomando la solución positiva, tenemos que 18 es el quinto término de la sucesión.

b) $n^2 - 2n + 3 = 75 \rightarrow n^2 - 2n - 72 = 0 \rightarrow n = \dfrac{2 \pm \sqrt{4 + 288}}{2} = \dfrac{2 \pm 17{,}09}{2} \rightarrow \begin{cases} n_1 = 9{,}544 \\ n_2 = -7{,}544 \end{cases}$

Como n no es un valor natural, 75 no pertenece a la sucesión.

c) $n^2 - 2n + 3 = 2 \rightarrow n^2 - 2n + 1 = 0 \rightarrow n = \dfrac{2 \pm \sqrt{4 - 4}}{2} = \dfrac{2}{2} = 1 \rightarrow$ El primer término de la sucesión es 2.

d) $n^2 - 2n + 3 = 83 \rightarrow n^2 - 2n - 80 = 0 \rightarrow n = \dfrac{2 \pm \sqrt{4 + 320}}{2} = \dfrac{2 \pm 18}{2} \rightarrow \begin{cases} n_1 = 10 \\ n_2 = -8 \end{cases}$

Tomando la solución positiva, tenemos que 83 es el décimo término de la sucesión.

4. El primer término de una progresión aritmética es 80, y la diferencia, -7. ¿Qué lugar ocupar el primer número negativo?

Tenemos que determinar cuál es el primer valor de n que cumpla que $a_n < 0$.

Calculamos el término general: $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d = 80 + (n-1) \cdot (-7) = -7n + 87 \rightarrow$
$\rightarrow a_n = -7n + 87 - 7n + 87 < 0 \rightarrow 7n > 87 \rightarrow n > 12{,}43$

Por tanto, el primer número negativo ocupa el lugar 13.

5. Halla el término a_{80} de una progresión aritmética sabiendo que $a_5 = 20$ y $a_{10} = 5$.

Hallamos el término general: $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d \rightarrow \begin{cases} a_5 = a_1 + (5-1) \cdot d \rightarrow 20 = a_1 + 4d \\ a_{10} = a_1 + (10-1) \cdot d \rightarrow 5 = a_1 + 9d \end{cases}$

Resolviendo el sistema tenemos que $a_1 = 32$ y $d = -3$.

Por tanto, el término general es: $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d = 32 + (n-1) \cdot (-3) = -3n + 35$

Luego: $a_{80} = -3 \cdot 80 + 35 = -205$

6. Calcula el primer termino y el término general de una progresión aritmética que tiene por diferencia $d = 7$ y cuyo décimo término vale 39.

Hallamos el primer término sustituyendo los datos que nos dan en la expresión del término general.

$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d \rightarrow a_{10} = a_1 + (10 - 1) \cdot 7 \rightarrow 39 = a_1 + 63 \rightarrow a_1 = 39 - 63 = -24$

Por lo tanto el término general es: $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d \rightarrow a_n = -24 + (n - 1) \cdot 7 = -24 + 7n - 7 = 7n - 31$

7. Halla el término general y el término a_8 de las siguientes progresiones.

a) 200, 100, 50, 25,… **b)** 10; 1; 0,1; 0,01;…

a) Es una progresión geométrica cuyo primer término es 200 y su razón $\frac{1}{2}$.

Por tanto: $a_n \square a_1 \cdot r^{n-1} \rightarrow a_n \square 200 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ y $a_8 \square 200 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{8-1} \square 1{,}5625$

b) Es una progresión geométrica cuyo primer término es 10 y su razón 0,1.

Entonces: $a_n \square a_1 \cdot r^{n-1} \rightarrow a_n \square 10 \cdot 0{,}1^{n-1}$ y $a_8 \square 10 \cdot 0{,}1^{8-1} \square 10 \cdot 0{,}1^7 \square 10 \cdot \frac{1}{10^7} \square 10^{-6}$

8. Halla el término general y el término a_8 de una progresión geométrica sabiendo que $a_5 = \frac{1}{6}$ y la razón es $\frac{2}{3}$.

En primer lugar hallamos el primer término de la progresión mediante la expresión del término general.

$$a_n \square a_1 \cdot r^{n-1} \rightarrow a_5 \square a_1 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{5-1} \rightarrow \frac{1}{6} \square a_1 \cdot \frac{16}{81} \rightarrow a_1 \square \frac{27}{32}$$

Por tanto, el término general viene dado por esta expresión: $a_n \square a_1 \cdot r^{n-1} \rightarrow a_n \square \frac{27}{32} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

El término a_8 es: $a_8 = \frac{27}{32} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{8-1} \square \frac{4}{81}$

9. Averigua la razón de una progresión geométrica cuyo primer término es 243 y el cuarto 72. Halla el término general y el término a_{10}.

Sabemos que $a_1 = 243$ y $a_4 = 72$.

Sustituyendo el término a_4 en la expresión del término general tenemos:

$$a_4 \square a_1 \cdot r^{4-1} \rightarrow 72 \square 243 \cdot r^3 \rightarrow r^3 \square \frac{72}{243} \rightarrow r \square \sqrt[3]{\frac{72}{243}} \square \sqrt[3]{\frac{8}{27}} \square \frac{2}{3}$$

Por tanto, el término general es $a_n \square a_1 \cdot r^{n-1} \rightarrow a_n \square 243 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ y el término $a_{10} \square 243 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{10-1} \square \frac{512}{81}$.

10. Un coche cuesta 20 000 € y cada año su precio se rebaja un 10 %. ¿Cuál será su precio al cabo de 5 años?

Si cada año su precio desciende un 10 %, el segundo año pagaríamos un 90 %, lo que supone multiplicar el precio por 0,9. Por tanto, se trata de una progresión geométrica de primer término 20 000 y razón 0,9. El término general es $a_n = 20\,000 \cdot 0{,}9^{n-1}$. Entonces: $a_5 = 20\,000 \cdot 0{,}9^4 = 13\,122$

Al cabo de 5 años su precio será de 13 122 €.

Evaluación D

1. **Escribe el tercer, el quinto y el décimo término de las siguientes sucesiones.**

a) $a_n = (n - 2)(n + 1)$ **b)** $a_n = (-1)^n$ **c)** $a_n = \frac{n+1}{n^2}$ **d)** $a_n \square \frac{n-1}{n}$

a) $a_3 = (3 - 2)(3 + 1) = 4$, $a_5 = (5 - 2)(5 + 1) = 18$, $a_{10} = (10 - 2)(10 + 1) = 88$

b) $a_3 = (-1)^3 = -1$, $a_5 = (-1)^5 = -1$, $a_{10} = (-1)^{10} = 1$

c) $a_3 = \frac{3+1}{3^2} = \frac{4}{9}$, $a_5 = \frac{5+1}{5^2} = \frac{6}{25}$, $a_{10} = \frac{10+1}{10^2} = \frac{11}{100}$

d) $a_3 \square \frac{3-1}{3} \square \frac{2}{3}$, $a_5 \square \frac{5-1}{5} \square \frac{4}{5}$, $a_{10} \square \frac{10-1}{10} \square \frac{9}{10}$

2. **En una sucesión, cada término cumple que es el triple del término anterior más 2 unidades.**

a) Escribe la ley de recurrencia de la sucesión.

b) Halla los 6 primeros términos de ella sabiendo que el primero es 1.

a) La ley de recurrencia es: $a_n = 3 \cdot a_{n-1} + 2$

b) $a_1 = 1$, $a_2 = 3 \cdot 1 + 2 = 5$, $a_3 = 3 \cdot 5 + 2 = 17$, $a_4 = 3 \cdot 17 + 2 = 53$, $a_5 = 3 \cdot 53 + 2 = 161$, $a_6 = 3 \cdot 161 + 2 = 485$

3. **Calcula el término general de la progresión aritmética que tiene por diferencia $d = -5$ y cuyo tercer término vale – 6. Halla a_{20}.**

Calculamos a_1 mediante la expresión del término general y los datos que nos dan.

$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d \rightarrow a_3 = a_1 + (3 - 1) \cdot (-5) \rightarrow -6 = a_1 - 10 \rightarrow a_1 = 4$

Por lo tanto, el término general es: $a_n = 4 + (n - 1) \cdot (-5) \rightarrow a_n = -5n + 9$ y $a_{20} = -5 \cdot 20 + 9 = -91$

4. **Halla el término general y los términos que ocupan las posiciones 19 y 40 de una progresión aritmética cuya diferencia es 7 si su primer término es 15.**

El término general es: $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d \rightarrow a_n = 15 + (n - 1) \cdot 7 \rightarrow a_n = 15 + 7n - 7 \rightarrow a_n = 7n + 8$

Entonces: $a_{19} = 7 \cdot 19 + 8 = 141$ y $a_{40} = 7 \cdot 40 + 8 = 288$

5. **Alfonso y Conchi han guardado 100 € en un cajón y cada mes añaden 75 € más.**

a) Escribe el término general que indica el dinero que tienen en el mes n.

b) ¿Cuánto dinero tendrán al cabo de 2 años y medio?

c) Si su objetivo es conseguir 850 € para hacer un viaje, ¿cuántos meses tardarán en reunirlo?

a) Se trata de una progresión aritmética que tiene por diferencia $d = 75$ y cuyo primer término vale 100. Entonces: $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d \rightarrow a_n = 100 + (n - 1) \cdot 75 \rightarrow a_n = 75n + 25$

b) Dos años y medio son 30 meses por lo que $a_{30} = 75 \cdot 30 + 25 = 2\,275$. Tendrán 2 275 €.

c) Tenemos que calcular n tal que $a_n = 850$. Sustituyendo en la expresión del término general tenemos: $75n + 25 = 850 \rightarrow 75n = 825 \rightarrow n = 11$. Tardarán 11 meses en reunir el dinero.

6. Para preparar una prueba, Pepe se ha propuesto el siguiente plan de entrenamiento: el primer día correrá un cuarto de hora, el segundo media hora, el tercero tres cuartos de hora y así sucesivamente hasta llegar a correr 3 horas. ¿Cuántos días tendrán que pasar?

El tiempo que Pepe corre cada día viene dado por una progresión aritmética cuyo primer término es $\frac{1}{4}$ y la diferencia también es $\frac{1}{4}$.

El término general es: $a_n = a_1 + (n-1)\cdot d \rightarrow a_n = \frac{1}{4} + (n-1)\cdot\left(\frac{1}{4}\right) \rightarrow a_n = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}n - \frac{1}{4} \rightarrow a_n = \frac{1}{4}n$

Para llegar a correr 3 horas, hallamos el valor de n para el cual $a_n = 3$.

$a_n = \frac{1}{4}n = 3 \rightarrow n = 3\cdot 4 = 12$ Tendrán que pasar 12 días.

7. Partiendo de un triángulo equilátero, construimos otra figura dividiendo cada lado en 4. Repitiendo el proceso, se van formando nuevas figuras cada vez con un número mayor de lados. Escribe la fórmula que nos indica el número de lados que tiene la figura n. ¿Cuántos lados tendrá la figura al repetir el proceso 10 veces?

Como en cada paso cada lado se divide en 4, el número total de lados de cada figura se multiplica por 4. Por tanto, se trata de una progresión geométrica de razón $r = 4$ cuyo primer término vale 3.

El término general es $a_n = a_1 \cdot r^{n-1} = 3 \cdot 4^{n-1}$, que da la fórmula que indica el número de lados de la figura n.

Al repetir el proceso 10 veces, tenemos la figura que está en la posición 11.

Esta figura tendrá $a^{11} = 3 \cdot 4^{11-1} = 3\,145\,728$ lados.

8. Interpola cuatro términos geométricos entre $a_1 = 486$ y $a_6 = 2$.

$a_6 = a_1 \cdot r^5 \rightarrow 2 = 486 \cdot r^5 \rightarrow r^5 = \frac{2}{486} = \frac{1}{243} \rightarrow r = \sqrt[5]{\frac{1}{243}} = \frac{1}{3}$

Por tanto: $a_2 = 486 \cdot \frac{1}{3} = 162,\ a_3 = 162 \cdot \frac{1}{3} = 54,\ a_4 = 54 \cdot \frac{1}{3} = 18,\ a_5 = 18 \cdot \frac{1}{3} = 6$

9. Una bicicleta vale 2 048 € y cada año pierde un 25 % de su valor. ¿Cuánto costará al cabo de 4 años?

Al perder cada año un 25 % de su valor, mantiene un 75 %.

Entonces, el precio viene dado por el término general de una progresión geométrica de primer término 2 048 y razón 0,75.

Por tanto, el cuarto año valdrá: $a_4 = a_1 \cdot r^{4-1} \rightarrow a_4 = 2\,048 \cdot 0{,}75^{4-1} = 864$ €

10. Pablo lanza una pelota desde una ventana que se encuentra a 64 m de altura. Al llegar al suelo, rebota y asciende en cada nuevo bote $\frac{2}{3}$ de la altura anterior. ¿A qué altura está la pelota tras rebotar 10 veces?

Se trata de una progresión geométrica de razón $r = \frac{2}{3}$ cuyo primer término vale 64.

Por tanto, el término general es: $a_n = a_1 \cdot r^{n-1} \rightarrow a_n = 64 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

Tras rebotar 10 veces, tenemos que calcular el término 11: $a_{11} = 64 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{11-1} = 1{,}11$

La pelota estará a 1,11 m de altura.