

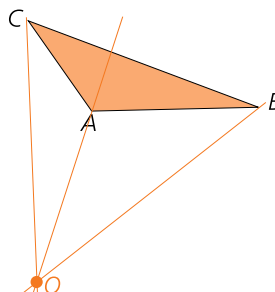
TRIÁNGULOS. PROPIEDADES

Evaluación A

1. Halla gráficamente el ortocentro de este triángulo.

Recuerda

El **ortocentro** es el punto de intersección de las alturas de un triángulo.



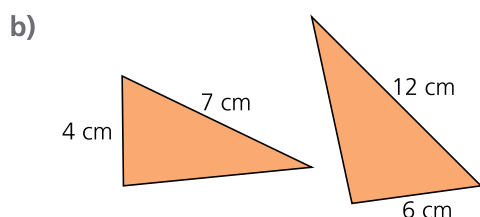
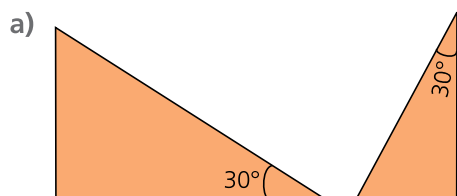
2. Una finca está delimitada por tres carreteras rectas que forman un triángulo. Queremos construir un garaje en ella de manera que la distancia a las tres carreteras sea la menor posible. ¿Dónde debemos colocarlo?

El garaje debería colocarse en el incentro de la finca, ya que es el punto que está a la misma distancia de los tres lados, es decir, de las tres carreteras.

Recuerda

El **incentro** es el punto de intersección de las bisectrices de un triángulo y equidista de los tres lados.

3. Indica razonadamente si los siguientes triángulos son semejantes.



Recuerda

Dos triángulos son semejantes si:

- Tienen los tres lados proporcionales.
- Tienen dos ángulos iguales.
- Tienen dos lados proporcionales y el ángulo que forman coincide.

- a) Son semejantes porque tienen dos ángulos iguales: uno recto y otro de 30° .
- b) No se puede saber si son semejantes ya que falta la medida del tercer lado. Aún así podríamos decir que no son semejantes porque tienen distinta forma.

4. Los lados de un triángulo miden 6 cm, 14 cm y 18 cm. Calcula las dimensiones de otro triángulo semejante a él cuyo lado menor mida 24 cm. ¿Cuál es la razón de semejanza entre ellos?

Calculamos la razón de semejanza dividiendo las medidas de los lados correspondientes.

En este caso, $r = \frac{24}{6} = 4$ por lo que cada lado del segundo triángulo es 4 veces el lado correspondiente del primero.

Por tanto, los lados miden 24 cm, 56 cm y 72 cm, respectivamente.

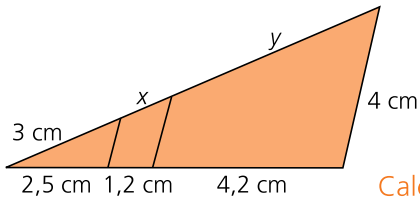
5. Halla la altura de un edificio que produce una sombra de 15 m sabiendo que, a esa misma hora, un árbol de 10 m da una sombra de 3 m.

Los triángulos que forman el edificio y el árbol con sus sombras son semejantes ya que tienen un ángulo recto cada uno y el ángulo del rayo de sol también es el mismo en los dos triángulos. Por tanto, los lados son proporcionales. Llamamos h a la altura del edificio.

$$\frac{h}{10} = \frac{15}{3} \rightarrow h = \frac{10 \cdot 15}{3} = 50$$

El edificio mide 50 m.

6. Determina los valores desconocidos de la siguiente figura.



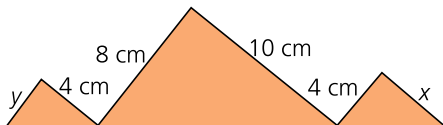
Recuerda

Teorema de Tales. Si varias rectas paralelas se cortan mediante una recta secante, los segmentos que se forman son proporcionales.

Calculamos x e y aplicando el teorema de Tales.

$$\frac{3}{2,5} = \frac{x}{1,2} \rightarrow x = \frac{3 \cdot 1,2}{2,5} = 1,44 \text{ cm} \quad \frac{3}{2,5} = \frac{y}{4,2} \rightarrow y = \frac{3 \cdot 4,2}{2,5} = 5,04 \text{ cm}$$

7. Halla los valores desconocidos de esta figura.



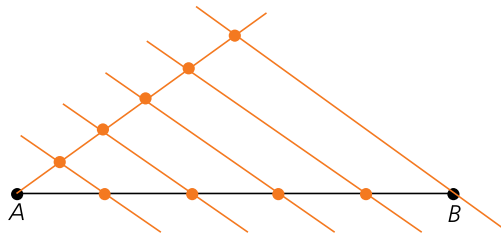
Los tres triángulos son semejantes ya que tienen los tres ángulos iguales. Por tanto, los lados tienen que ser proporcionales.

Aplicamos el teorema de Tales para hallar x e y .

$$\frac{x}{10} = \frac{4}{8} \rightarrow x = \frac{10 \cdot 4}{8} = 5 \text{ cm}$$

$$\frac{10}{8} = \frac{4}{y} \rightarrow y = \frac{8 \cdot 4}{10} = 3,2 \text{ cm}$$

8. Divide este segmento en cinco partes iguales.



9. En un mapa aparece esta escala:



- Exprésala en forma de razón.
- Calcula la distancia real de dos ciudades si en un mapa a esa escala la distancia es 3 cm.
- Calcula la distancia en el mapa de dos ciudades si sabemos que en la realidad están a 750 km.

a) Como 1 cm equivale a 50 km, pasando a las mismas unidades tenemos que 1 cm equivale a 5 000 000 cm. Luego la escala es 1:5 000 000.

b) Del dibujo se deduce que 3 cm en el mapa equivalen a 150 km en la realidad.

c) Llamamos x a la distancia en el mapa entre las dos ciudades. Entonces, aplicando la escala tenemos:

$$x = \frac{750}{5000000} = 0,00015 \text{ km} = 15 \text{ cm}$$

Ten en cuenta

La escala relaciona las distancias expresadas en la misma unidad de medida.

10. La distancia entre Madrid y Cáceres es de 300 km. Si tenemos un mapa en el que la distancia mide 6 cm, ¿a qué escala se ha realizado dicho mapa?

Sabemos que 6 cm corresponden a 300 km.

Como la escala relaciona las distancias expresadas en la misma unidad de medida, pasamos las longitudes a la misma unidad de medida: 300 km = 300 000 000 cm

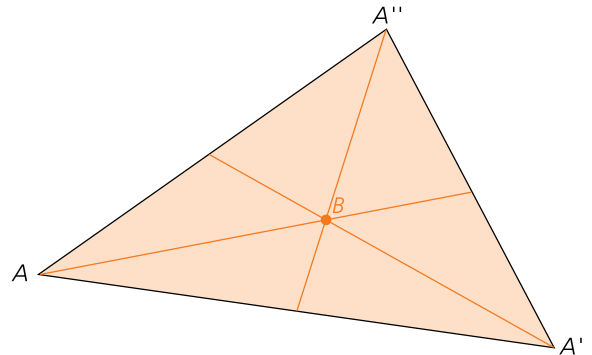
$$\text{Escala} = \frac{6}{300000000} = \frac{1}{50000000} = 1:5000000. \text{ Por tanto, 1 cm en el plano equivalen a 5 000 000 cm.}$$

Evaluación B

1. Halla gráficamente el baricentro de este triángulo.

Recuerda

El **baricentro** es el punto de intersección de las medianas de un triángulo. Es el centro de gravedad del triángulo.



2. En una aldea hay solo 3 casas que forman un triángulo. Quieren colocar una farola de manera que todas las casas queden iluminadas de la misma forma. ¿Dónde habrá que colocarla?

Si la farola tiene que iluminar a todas las casas por igual, entonces tiene que estar a la misma distancia de todos los vértices del triángulo. Por tanto, la farola estará colocada en el circuncentro del triángulo.

Recuerda

El **circuncentro** es el punto de intersección de las mediatrices de un triángulo. Este punto equidista de los vértices.

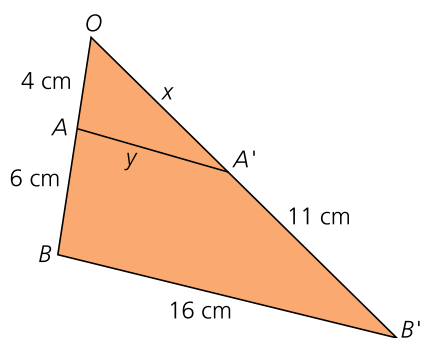
3. Los dos ángulos iguales de un triángulo isósceles tienen una amplitud de 40° y el ángulo desigual de otro triángulo isósceles mide 110° . ¿Son semejantes? Razona la respuesta.

Hallamos la amplitud del ángulo desigual del primer triángulo isósceles.

$$180^\circ - 40^\circ \cdot 2 = 100^\circ$$

En el segundo triángulo, el ángulo desigual mide 110° que es distinto al ángulo desigual del primero. Como todos los ángulos deben ser iguales, los dos triángulos no son semejantes.

4. Determina la longitud de los lados desconocidos de este triángulo.



Calculamos el valor de x aplicando el teorema de Tales.

$$\frac{4}{x} = \frac{6}{11} \rightarrow x = \frac{11 \cdot 4}{6} = 7,33 \text{ cm}$$

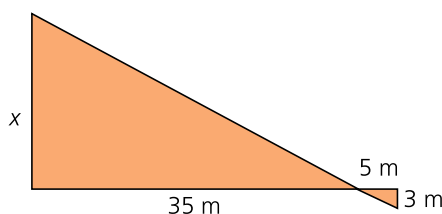
Hallamos el valor de y teniendo en cuenta que los triángulos OAA' y OBB' son semejantes ya que tienen los ángulos iguales.

$$\frac{4}{10} = \frac{y}{16} \rightarrow y = \frac{16 \cdot 4}{10} = 6,4 \text{ cm}$$

Ten en cuenta

Para calcular la longitud del lado desconocido y , utilizaremos la semejanza del triángulo interior y el triángulo exterior.

5. Halla el valor de x en la siguiente figura.



Los dos triángulos de la figura son semejantes ya que los ángulos son iguales.

Por tanto, los lados son proporcionales.

$$\text{Entonces: } \frac{x}{3} = \frac{35}{5} \rightarrow x = \frac{3 \cdot 35}{5} = 21 \text{ cm}$$

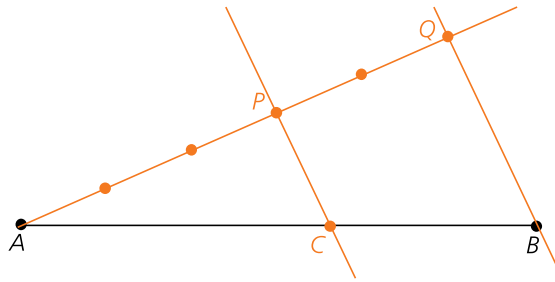
6. Manolo y Antonio miden 1,86 m y 1,92 m, respectivamente. Sabiendo que en un momento del día la sombra de Manolo es de 62 cm, ¿cuánto medirá la sombra de Antonio?

Los triángulos que forman cada uno con su sombra son semejantes ya que tienen dos ángulos iguales: un ángulo recto y el ángulo del rayo de sol. Por tanto, los lados son proporcionales.

$$\text{Entonces: } \frac{186}{192} = \frac{62}{x} \rightarrow x = \frac{192 \cdot 62}{186} = 64 \text{ cm}$$

La sombra de Antonio mide 64 cm.

7. Divide el siguiente segmento en dos partes proporcionales a 3 y 5.



8. Indica razonadamente si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

- a) El incentro es el punto de intersección de las tres alturas de un triángulo.
- b) La razón de semejanza entre los perímetros de dos polígonos es igual que la razón entre sus lados.
- c) Dos triángulos semejantes tienen los tres ángulos proporcionales.
- d) La escala de un plano se puede medir en centímetros.
- a) FALSO. El incentro es el punto de intersección de las bisectrices de un triángulo. El punto de intersección de las alturas es el ortocentro.
- b) VERDADERO. Al ser el perímetro una longitud, se mantiene la razón de semejanza.
- c) FALSO. Dos triángulos semejantes tienen los ángulos iguales, no proporcionales.
- d) FALSO. La escala es una razón de semejanza y, por tanto, no tiene unidades.

9. Jorge ha construido una maqueta de un coche a escala 1:18. Si las dimensiones del coche al que representa son 4,5 m de largo, 2 m de ancho y 1,25 m de alto, ¿cuál serán las dimensiones de la maqueta?

Como la escala es 1:18, 1 cm en la maqueta corresponde a 18 cm en la realidad.

Pasamos las medidas a centímetros.

$$4,5 \text{ m} = 450 \text{ cm} \quad 2 \text{ m} = 200 \text{ cm} \quad 1,25 \text{ m} = 125 \text{ cm}$$

Llamamos x, y, z al largo, ancho y alto del coche de la maqueta, respectivamente.

$$x = \frac{450}{18} = 25 \text{ cm} \quad y = \frac{200}{18} = 11,11 \text{ cm} \quad z = \frac{125}{18} = 6,94 \text{ cm}$$

Las dimensiones de la maqueta son 25 cm de largo, 11,11 cm de ancho y 6,94 cm de alto.

Ten en cuenta

Recuerda que la escala relaciona longitudes expresadas en la misma unidad de medida.

10. Halla la escala de un plano en el que un segmento que mide 10 cm representa 120 m de longitud.

Sabemos que 10 cm equivalen a 120 m.

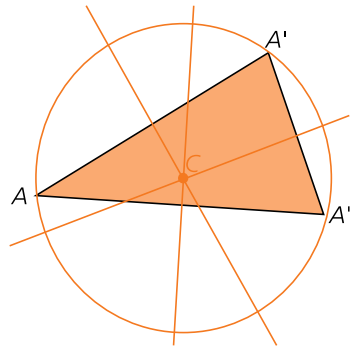
Como la escala relaciona las distancias expresadas en la misma unidad de medida, pasamos las longitudes a la misma unidad de medida: 120 m = 12 000 cm

$$\text{Escala} = \frac{10}{12000} = \frac{1}{1200} = 1 : 1200 \text{ cm}$$

Por tanto, 1 cm en el plano corresponden a 1 200 cm en la realidad.

Evaluación C

1. Halla gráficamente el circuncentro y la circunferencia circunscrita de este triángulo.

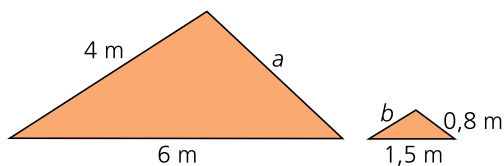


2. Dibuja un triángulo equilátero y traza en él las circunferencias inscrita y circunscrita. ¿Cómo son?

Comprobar que los alumnos dibujan un triángulo equilátero y dibujan las circunferencias inscrita y circunscrita.

Estas circunferencias son concéntricas.

3. Halla la longitud de los lados desconocidos en estos triángulos semejantes. Determina la razón de semejanza. ¿Qué indica?



Al ser triángulos semejantes, sus lados tienen que ser proporcionales. Por tanto:

$$\frac{4}{b} = \frac{6}{1,5} \rightarrow b = \frac{4 \cdot 1,5}{6} = 1 \text{ cm}$$

$$\frac{a}{0,8} = \frac{6}{1,5} \rightarrow a = \frac{6 \cdot 0,8}{1,5} = 3,2 \text{ cm}$$

La razón de semejanza es 4 (se calcula dividiendo cualquier lado del primer triángulo entre el correspondiente del segundo) e indica que los lados del primer triángulo son 4 veces mayor que los del segundo.

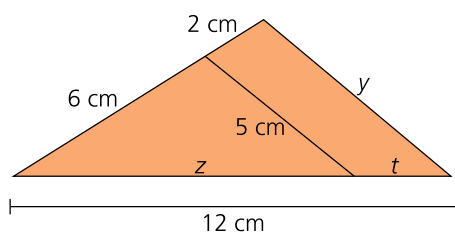
4. Un edificio de 48 m proyecta a cierta hora del día una sombra de 12 m. ¿Cuál es la altura de Alfonso si a esa misma hora su sombra mide 45 cm?

Los triángulos que forman el edificio y Alfonso con sus sombras son semejantes ya que tienen dos ángulos iguales: uno recto y el ángulo del rayo de sol. Por tanto, los lados son proporcionales.

$$\text{Entonces: } \frac{48}{x} = \frac{12}{0,45} \rightarrow x = \frac{48 \cdot 0,45}{12} = 1,8 \text{ m}$$

Alfonso mide 1,8 m.

5. Determina los lados desconocidos de la siguiente figura.



Calculamos z aplicando el teorema de Tales.

$$\frac{6}{z} = \frac{8}{12} \rightarrow z = \frac{12 \cdot 6}{8} = 9 \text{ cm}$$

Entonces, $t = 3 \text{ cm}$.

Ahora calculamos y teniendo en cuenta que los dos triángulos, interior y exterior, son semejantes y, por tanto, sus lados son proporcionales:

$$\frac{6}{15} = \frac{8}{y} \rightarrow y = \frac{5 \cdot 8}{6} = 6,67 \text{ cm}$$

6. Sean dos cuadrados cuyos lados miden 3 cm y 6 cm, respectivamente.

- ¿Son semejantes? Indica la razón de semejanza.
- ¿Cuál es la razón entre sus perímetros?
- ¿Cuál es la razón entre sus áreas?

- Dos cuadrados siempre son semejantes porque sus ángulos son iguales y sus lados proporcionales. Como el lado del segundo cuadrado es el doble que el del primero, la razón de semejanza es 2.
- El perímetro del primer cuadrado es 12 cm, y del segundo, 24 cm. Luego la razón entre sus perímetros también es 2.
- El área del primer cuadrado es 9 cm², y el del segundo, 36 cm². Entonces, la razón entre sus áreas es 4. Siempre la razón entre áreas es el cuadrado de la razón entre longitudes.

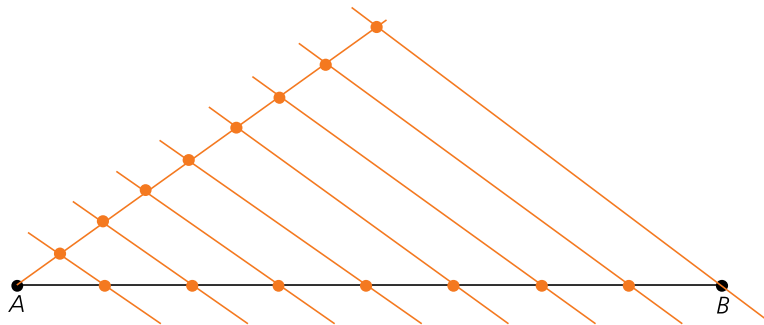
7. Un triángulo rectángulo tiene un ángulo de 30° y un lado de 5 cm de longitud. Otro triángulo rectángulo tiene un ángulo de 60° y un lado de 3 cm de longitud. ¿Son semejantes ambos triángulos?

Los ángulos del primer triángulo miden 90°, 30° y 60° (para que la suma de los tres sea 180°).

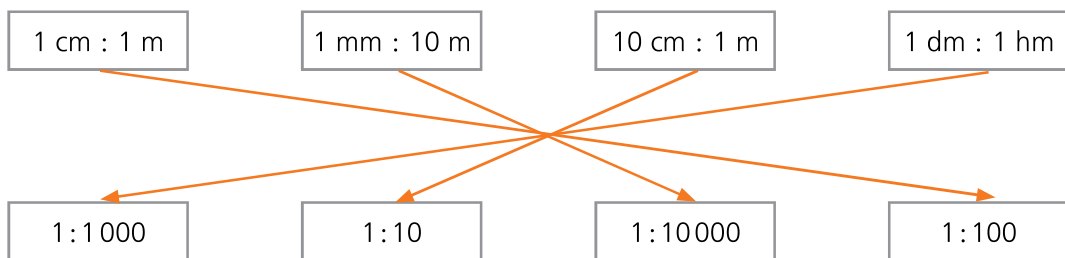
Los ángulos del segundo triángulo miden 90°, 60° y 30°.

En consecuencia, e independientemente de las medidas de los lados, los dos triángulos tienen los ángulos iguales por lo que son semejantes.

8. Divide este segmento en ocho partes iguales.



9. Relaciona cada equivalencia con su escala.



10. El paragolpes de la maqueta de un coche mide 3 cm. Si sabemos que en el coche al que representa mide 1,5 m, ¿a qué escala está hecha la maqueta?

Sabemos que 3 cm equivalen a 1,5 m.

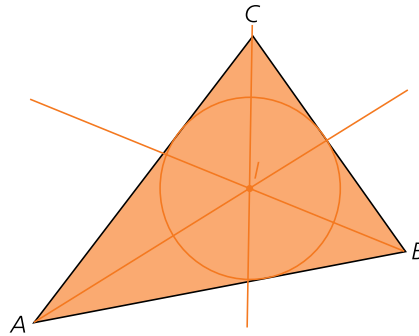
Como la escala relaciona las distancias expresadas en la misma unidad de medida, pasamos las longitudes a la misma unidad de medida: 1,5 m = 150 cm

$$\text{Escala} = \frac{3}{150} = \frac{1}{50} = 1 : 50$$

Por tanto, 1 cm en la maqueta representa 50 cm en la realidad.

Evaluación D

1. Dado el siguiente triángulo, traza el incentro y la circunferencia inscrita.



2. Hemos cortado una pieza de forma triangular en una cartulina. Si queremos que esta figura se mantenga en equilibrio apoyándola en un solo punto, ¿qué punto elegiríamos?

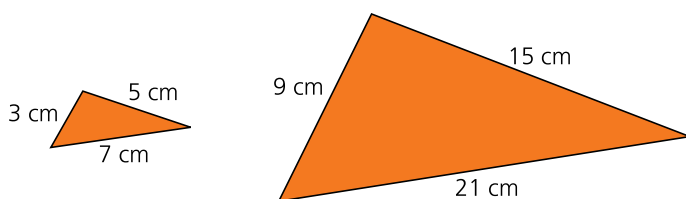
Como la figura tiene forma triangular, para mantenerla en equilibrio habría que apoyarla sobre su centro de gravedad, es decir, sobre su baricentro.

3. Indica razonadamente si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

- a) Dos triángulos equiláteros siempre son semejantes.
- b) Dos triángulos isósceles siempre son semejantes.
- c) Dos triángulos rectángulos isósceles siempre son semejantes.
- d) Dos triángulos rectángulos siempre son semejantes.
- a) VERDADERO. Al tener los tres lados iguales siempre van a tener los lados proporcionales y los ángulos iguales.
- b) FALSO. Los dos lados iguales serán proporcionales pero el lado desigual no tiene por qué serlo.
- c) VERDADERO. Tienen un ángulo igual (el recto) y los lados que lo forman son proporcionales (por ser isósceles).
- d) FALSO. Con este dato conocemos que tienen un ángulo igual. Los otros dos ángulos pueden ser distintos.

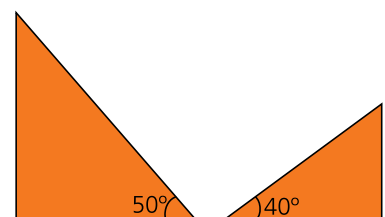
4. Explica si los siguientes pares de triángulos son semejantes.

a)



- a) Sí son semejantes ya que todos los lados son proporcionales.

b)



- b) Sí son semejantes ya que todos los ángulos son iguales (el primero tiene un ángulo recto, otro de 50° y, por lo tanto, el tercero es de 40°, igual que el segundo).

5. Martina mide 1,8 m y quiere saber la altura de una torre. Para ello, coloca un espejo entre ella y la torre a 160 cm de sus pies y a 6,4 m de la entrada a la torre, de forma que puede ver la parte más alta de la misma reflejada en el espejo. ¿Cuánto mide la torre?

Los triángulos que forman la torre y el suelo y Martina y el suelo son semejantes ya que los ángulos son iguales. Llamamos x a la altura de la torre.

Tras pasar todas las medidas a metros tenemos que:

$$\frac{x}{1,80} = \frac{6,40}{1,60} \rightarrow x = \frac{1,80 \cdot 6,40}{1,60} = 7,2$$

La torre mide 7,2 m.

Triángulos. Propiedades

6. Las longitudes de un triángulo escaleno son 6 cm, 8 cm y 9 cm. Halla las medidas de otro triángulo semejante sabiendo que la razón de semejanza entre sus perímetros es $\frac{1}{6}$.

La razón de semejanza entre los perímetros, al ser una longitud, es la misma que la de sus lados. Entonces, cada lado del primer triángulo es $\frac{1}{6}$ de cada lado del segundo y, en consecuencia, cada lado del segundo será 6 veces cada lado del primero.

Por tanto, los lados miden 36 cm, 48 cm y 54 cm.

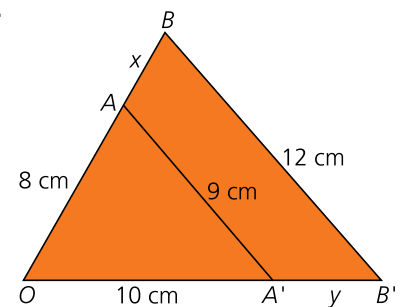
7. Determina la longitud de los lados desconocidos de estos triángulos.

El triángulo exterior OBB' es semejante al triángulo interior OAA' ya que sus ángulos son iguales y, por tanto, sus lados son proporcionales.

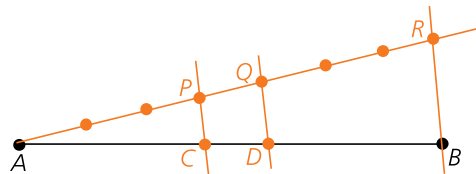
Hallamos los lados x e y aplicando el teorema de Tales.

$$\frac{8}{8+x} = \frac{9}{12} \rightarrow 8 \cdot 12 = 9(8+x) \rightarrow 96 = 72 + 9x \rightarrow x = \frac{96-72}{9} = 2,67 \text{ cm}$$

$$\frac{8}{10} = \frac{2,67}{y} \rightarrow y = \frac{2,67 \cdot 10}{8} = 3,34 \text{ cm}$$



8. Divide este segmento en tres partes proporcionales a 3, 4 y 7.



9. De una vivienda hemos obtenido las siguientes medidas:

Cocina: 4 m de largo y 2 m de ancho

Dormitorio: 4 m de largo y 3 m de ancho

Salón: 5 m de largo y 3 m de ancho

Halla las medidas que tendrán estas habitaciones en un plano hecho a escala 1:50.

La escala 1:50 significa que las medidas reales son 50 veces las medidas del plano, por lo que para calcularlas, simplemente dividiremos entre 50 cada una de las medidas.

Cocina: $0,08 \text{ m} = 8 \text{ cm}$ de largo y $0,04 \text{ m} = 4 \text{ cm}$ de ancho

Dormitorio: $0,08 \text{ m} = 8 \text{ cm}$ de largo y $0,06 \text{ m} = 6 \text{ cm}$ de ancho

Salón: $0,1 \text{ m} = 10 \text{ cm}$ de largo y $0,06 \text{ m} = 6 \text{ cm}$ de ancho

10. Dos pueblos que en línea recta se encuentran a una distancia de 10 km, están separados en un mapa por 2 cm de distancia. ¿A qué escala está hecho dicho mapa?

Sabemos que 2 cm equivalen a 10 km.

Como la escala relaciona las distancias expresadas en la misma unidad de medida, pasamos las longitudes a la misma unidad de medida: $10 \text{ km} = 1\,000\,000 \text{ cm}$

$$\text{Escala} = \frac{2}{1\,000\,000} = \frac{1}{500\,000} = 1:500\,000$$

Por tanto, 1 cm en la maqueta representa 500 000 cm en la realidad.