Funciones lineales y cuadráticas

12

CLAVES PARA EMPEZAR

1. Halla la solución de estas ecuaciones.

a) $-2x + 8 = 2$
b) $6x - 8 = -20$
c) $4x - 16 = -5x + 2$
d) $-13 = 8 + 7x$

a) $-2x + 8 = 2 \rightarrow 8 - 2 = 2x \rightarrow x = 3$

b) $6x - 8 = -20 \rightarrow 6x = -20 + 8 \rightarrow x = -2$

c) $4x - 16 = -5x + 2 \rightarrow 4x + 5x = 2 + 16 \rightarrow x = 2$

d) $-13 = 8 + 7x \rightarrow -13 - 8 = 7x \rightarrow x = -3$

2. Resuelve estas ecuaciones.

a) $x^2 - 10x + 25 = 0$
b) $x^2 + x - 12 = 0$
c) $x^2 + 4x + 3 = 0$
d) $x^2 - 8x - 10 = 0$

a) $x = \frac{10 \pm \sqrt{(-10)^2 - 4 \cdot 25}}{2} = 5$

b) $x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 + 4 \cdot 12}}{2} = \frac{-1 \pm 7}{2} = \begin{cases} x = 3 \\ x = -4 \end{cases}$

c) $x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 3}}{2} = \frac{-4 \pm 2}{2} = \begin{cases} x = -1 \\ x = -3 \end{cases}$

d) $x = \frac{8 \pm \sqrt{(-8)^2 + 4 \cdot 10}}{2} = \frac{8 \pm 10{,}2}{2} = \begin{cases} x = 9{,}1 \\ x = -1{,}1 \end{cases}$

VIDA COTIDIANA

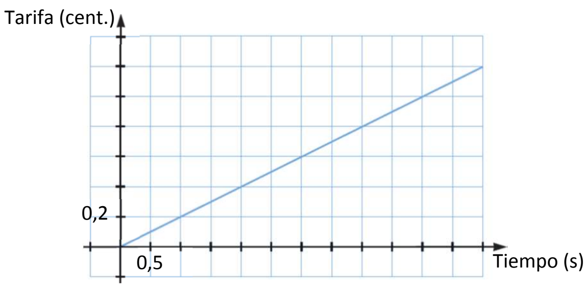
En las tarifas de móviles, por regla general, el precio suele incluir una cuota fija más un coste por minuto de llamada. Una de las reivindicaciones habituales de las asociaciones de consumidores es que el coste se establezca por segundos.

- **Los datos de un estudio reflejan que si se tarifara por segundos, el coste medio del segundo sería de 0,2 céntimos. ¿Cuánto costaría una llamada de 25 segundos? ¿Y una de 1 minuto y 14 segundos?**

Representa mediante una gráfica el tiempo de la llamada y su coste.

Si no tenemos en cuenta la cuota fija, una llamada de 25 segundos costaría $25 \cdot 0{,}2 = 5$ céntimos y de 1 minuto y 14 segundos costaría $74 \cdot 0{,}2 = 14{,}8$ céntimos.

La gráfica es:

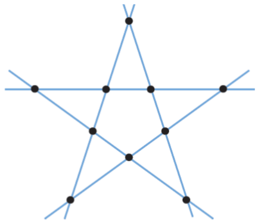


RESUELVE EL RETO

Comienzo a escalar una montaña a las 9:00 h y llego a la cima a las 17:00 h. Duermo en la cima y a la mañana siguiente comienzo el descenso a las 9:00 h y llego a la base a las 17:00 h. Estoy seguro de que ha habido algún punto del camino por donde he pasado a la misma hora los dos días.

Suponiendo que las velocidades de subida y bajada son iguales, a las 13:00 h he pasado por el mismo punto del camino.

Coloca 10 monedas de tal manera que formen 5 filas con 4 monedas en cada fila.



Una función cuadrática pasa por los puntos (3, −1) y (11, −1). ¿Cuál es su eje de simetría? ¿Y la abscisa del vértice?

El eje de simetría es la recta $x = 7$.

La abscisa del vértice se sitúa en el eje de simetría. Por tanto, $x_{\text{Vértice}} = 7$.

Una catapulta lanza un proyectil con una trayectoria parabólica, el proyectil alcanza una altura de 40 m y recorre una distancia sobre la horizontal de 300 m. ¿Cuánto lleva recorrido al alcanzar su altura máxima?

El eje de simetría está en la mitad de la trayectoria. Por tanto, alcanza su máxima altura a los 150 m.

ACTIVIDADES

1. **Identifica las funciones lineales y calcula su pendiente y su ordenada en el origen.**

a) $y = x - 2$

b) $y = \dfrac{-x + 7}{x}$

c) $y = -2x + 5$

d) $y = 4x - 1$

e) $y = \dfrac{6}{x}$

f) $y = 4 - x$

a) Es función lineal de pendiente 1 y ordenada en el origen –2.

b) No es función lineal.

c) Es función lineal de pendiente –2 y ordenada en el origen 5.

d) Es función lineal de pendiente 4 y ordenada en el origen –1.

e) No es función lineal.

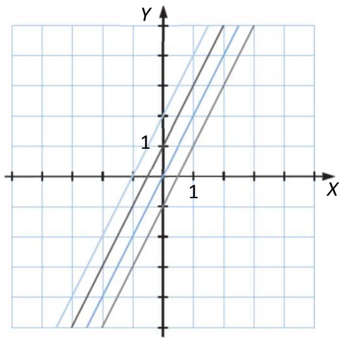
f) Es función lineal de pendiente –1 y ordenada en el origen 4.

2. **¿Es creciente o decreciente una función lineal que pasa por (1, −2) y su ordenada en el origen es −4?**

La función será de la forma $y = mx - 4$. Además, sabemos que $-2 = m \cdot 1 - 4 \rightarrow m = 2$.

La pendiente es positiva, de modo que es creciente.

3. **Representa la función lineal $y = 2x + n$ para $n = 1$, $n = 2$, $n = -1$ y $n = 0$. ¿Cómo son las rectas que has dibujado?**



Son paralelas (de izquierda a derecha son: $n = 2$, $n = 1$, $n = 0$, $n = -1$).

4. **Contesta a las siguientes preguntas.**

a) ¿Cuántas funciones lineales tienen pendiente 2?

b) ¿Cuántas funciones lineales de pendiente 2 cortan al eje *Y* en el punto (0, 5)?

c) ¿Alguna función lineal de pendiente 2 corta al eje *X* en el punto (1, 0)?

a) Infinitas, ya que son todas las de la forma $y = 2x + n$, pudiendo asignar a n cualquier valor.

b) Solo una, la que cumple que $5 = 2 \cdot 0 + n \rightarrow n = 5$, es decir, $y = 2x + 5$.

c) Sí, la que cumple que $0 = 2 \cdot 1 + n \rightarrow n = -2$, es decir, $y = 2x - 2$.

5. **Representa gráficamente estas funciones de proporcionalidad directa e indica la pendiente de cada una de ellas.**

a) $y = 2x$

b) $y = \dfrac{x}{3}$

c) $y = -x$

d) $y = \dfrac{4x}{5}$

e) $y = -\dfrac{1}{7}x$

f) $y = 10x$

a) La pendiente es 2.

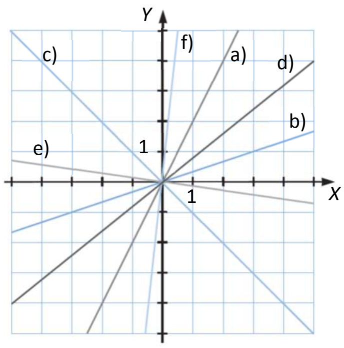
b) La pendiente es 1/3.

c) La pendiente es –1.

d) La pendiente es 4/5.

e) La pendiente es –1/7.

f) La pendiente es 10.



6. **Pon dos ejemplos de función de proporcionalidad directa creciente y otros dos de decreciente.**

Proporcionalidad directa creciente: $y = x$ e $y = 7x$.

Proporcionalidad directa decreciente: $y = -x$ e $y = -7x$.

7. **¿Cuáles de los siguientes puntos pertenecen a la función de proporcionalidad directa cuya pendiente es $\frac{5}{2}$?**

a) (0, 5) b) (2, 0) c) (2, 5)

La función es $y = \frac{5}{2}x$. Comprobamos cuáles pertenecen.

a) $x = 0 \rightarrow y = \frac{5}{2} \cdot 0 = 0$. El punto (0, 5) no pertenece a la función.

b) $x = 2 \rightarrow y = \frac{5}{2} \cdot 2 = 5$. El punto (2, 0) no pertenece a la función.

c) $x = 2 \rightarrow y = \frac{5}{2} \cdot 2 = 5$. El punto (2, 5) pertenece a la función.

8. **Da la expresión algebraica de una función de proporcionalidad directa que pase por (2, −4).**

$y = mx$, si pasa por (2, −4) cumple que $-4 = m \cdot 2 \rightarrow m = -2$.

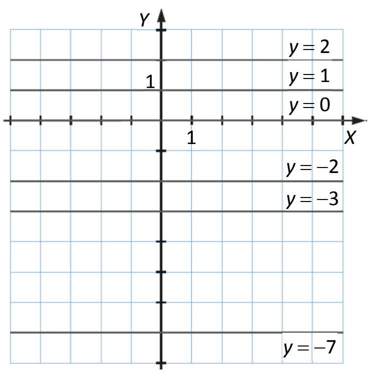
La función es $y = -2x$.

9. **Si la representación gráfica de una función es una línea recta que pasa por tres de los cuatro cuadrantes del sistema de coordenadas, ¿es una función lineal o de proporcionalidad directa?**

Es una función lineal, ya que una de proporcionalidad directa pasa siempre por el origen, de modo que solo pasaría por dos cuadrantes.

10. **Representa las siguientes rectas.**

a) $y = -7$ d) $y = 2$
b) $y = 0$ e) $y = -2$
c) $y = 1$ f) $y = -3$



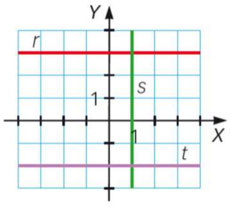
11. Escribe la ecuación de la función constante que pasa por cada uno de estos puntos.

a) (0, 6)   b) (1, −3)   c) (−2, 5)   d) (4, 0)

a) $y = 6$ c) $y = 5$

b) $y = -3$ d) $y = 0$

12. Determina la ecuación de las rectas de la gráfica y calcula las coordenadas de los puntos de corte entre ellas.



r: $y = 3$ s: $x = 1$ (no es una función) t: $y = -2$

El punto de corte de r y s es (1, 3) y el de s y t (1, −2). Las rectas r y t no se cortan, son paralelas.

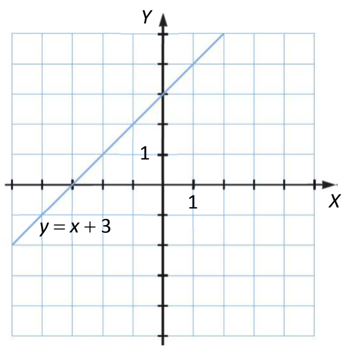
13. Halla la ecuación de la recta paralela al eje *Y* que pasa por el punto (2, −9).

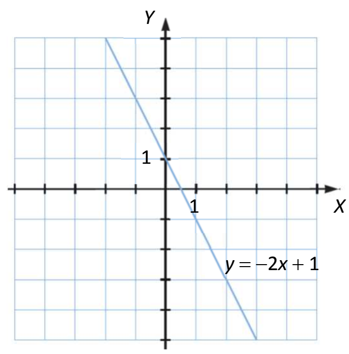
Si es paralela al eje Y, será de la forma $x = m$. Dado que pasa por (2, −9), la recta es $x = 2$.

14. Completa en tu cuaderno estas tablas y representa gráficamente la función.

x	1	**0**	**−4**	−1
$y = x + 3$	**4**	3	−1	**2**

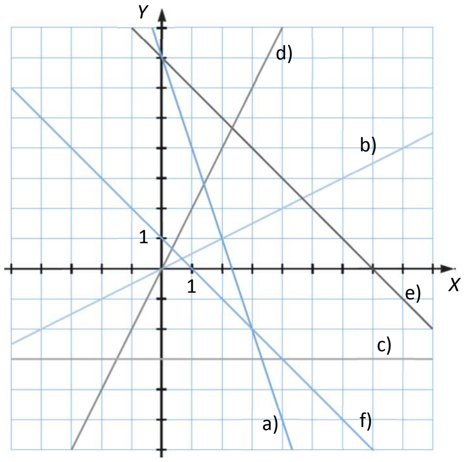
x	**−1**	0	2	**1**
$y = -2x + 1$	3	**1**	**−3**	−1





15. **Representa gráficamente estas funciones.**

a) $y = -3x + 7$ d) $y = 2x$
b) $y = 0{,}5x$ e) $y = -x + 7$
c) $y = -3$ f) $y = -x + 1$



16. **Calcula, para la función $y = -2x + 3$, la ordenada que corresponde a cada uno de estos valores de la abscisa.**

a) $x = 0$ c) $x = \frac{-5}{4}$ e) $x = \frac{3}{2}$
b) $x = 2$ d) $x = -1$ f) $x = -3$

a) $y = -2 \cdot 0 + 3 = 3$
b) $y = -2 \cdot 2 + 3 = -1$
c) $y = -2 \cdot \left(-\frac{5}{4}\right) + 3 = \frac{11}{2}$
d) $y = -2 \cdot (-1) + 3 = 5$
e) $y = -2 \cdot \frac{3}{2} + 3 = 0$
f) $y = -2 \cdot (-3) + 3 = 9$

17. **Para la función $y = 4x - 1$, calcula la abscisa que corresponde a estos valores de la ordenada.**

a) $y = 0$ c) $y = -2$ e) $y = -5$
b) $y = 3$ d) $y = 7$ f) $y = -6$

a) $0 = 4x - 1 \rightarrow x = 1/4$
b) $3 = 4x - 1 \rightarrow x = 1$
c) $-2 = 4x - 1 \rightarrow x = -1/4$
d) $7 = 4x - 1 \rightarrow x = 2$
e) $-5 = 4x - 1 \rightarrow x = -1$
f) $-6 = 4x - 1 \rightarrow x = -5/4$

18. **¿Pertenecen estos puntos a la función $y = \frac{x - 2}{3}$?**

a) $(0, -2)$ b) $(-1, 1)$ c) $(5, 1)$ d) $(-1, -1)$

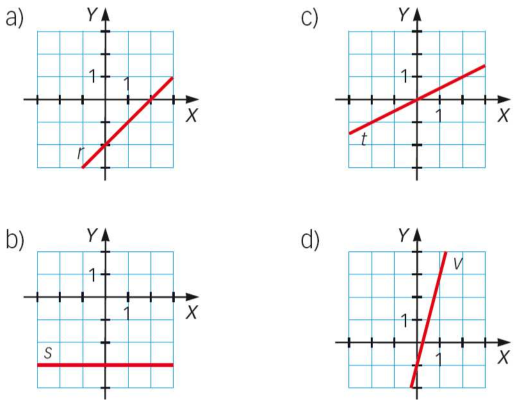
a) $x = 0 \rightarrow y = \frac{0-2}{3} = -\frac{2}{3} \rightarrow (0, -2)$ no pertenece a la función dada.

b) $x = -1 \rightarrow y = \frac{-1-2}{3} = -1 \rightarrow (-1, 1)$ no pertenece a la función dada.

c) $x = 5 \rightarrow y = \frac{5-2}{3} = 1 \rightarrow (5, 1)$ pertenece a la función dada.

d) $x = -1 \rightarrow y = -1 \rightarrow (-1, -1)$ pertenece a la función dada.

19. Halla la ecuación de estas funciones lineales.



a) Pasa por los puntos (2, 0) y (0, –2).
$0 = m \cdot 2 + n \qquad -2 = m \cdot 0 + n \quad \rightarrow \quad 2m + n = 0$ y $n = -2 \rightarrow 2m - 2 = 0 \rightarrow m = 1$. La ecuación es $y = x - 2$.

b) Es una recta horizontal, su ecuación es $y = -3$.

c) Pasa por el origen, es de la forma $y = mx$.
Pasa por el punto (2, 1) $\rightarrow 1 = m \cdot 2 \rightarrow m = 1/2$. La ecuación es $y = x/2$.

d) Pasa por los puntos (0, –1) y (1, 3).
$-1 = m \cdot 0 + n \qquad 3 = m \cdot 1 + n \quad \rightarrow \quad n = -1$ y $m = 4 \rightarrow$ La ecuación es $y = 4x - 1$.

20. Dados los puntos *A*(3, 1) y *B*(−1, −2), traza en un sistema de coordenadas las rectas *r*, *s* y *t* y responde.

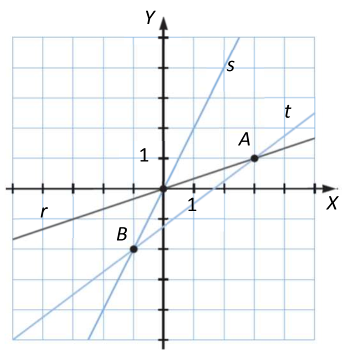
***r* → Recta que pasa por *A* y el origen de coordenadas.**

***s* → Recta que pasa por *B* y el origen de coordenadas.**

***t* → Recta que pasa por *A* y *B*.**

a) Determina la ecuación de las rectas *r*, *s* y *t*.

b) Determina la ecuación de la línea recta que es paralela al eje *X* pasando por *A* y de la línea recta que es paralela al eje *Y* pasando por *B*.



a) Como *r* pasa por el origen y por *A* cumple que $1 = m \cdot 3 \rightarrow m = 1/3$, así la ecuación de *r* es $y = x/3$.

Como *s* pasa por el origen y por *B* cumple que $-2 = m \cdot (-1) \rightarrow m = 2$, así la ecuación de *s* es $y = 2x$.

Como *t* pasa por *A* y *B*:
$1 = m \cdot 3 + n, -2 = m \cdot (-1) + n. \quad \rightarrow \quad m = 3/4, n = -5/4$. La ecuación es $y = \frac{3}{4}x - \frac{5}{4}$.

b) La ecuación de la recta paralela al eje *X* que pasa por *A* es $y = 1$.

La ecuación de la recta paralela al eje *Y* es $x = -1$.

21. Determina la ecuación de la función lineal cuya pendiente es 5 y cuya ordenada en el origen es −3.

$y = 5x - 3$

22. Determina la ecuación de estas rectas.

a) Su pendiente es −3 y pasa por el punto (1, −2).

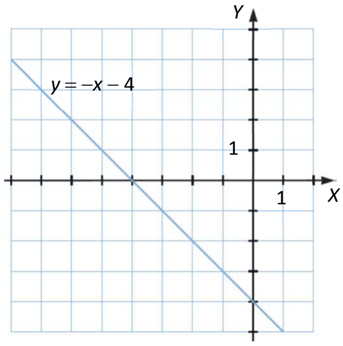
b) Pasa por los puntos (−1, −3) y (4, −2).

a) $-2 = -3 \cdot 1 + n \rightarrow n = 1$. La ecuación de la recta es $y = -3x + 1$.

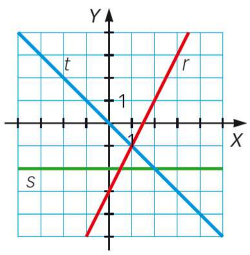
b) $y = -3 + \frac{-2-(-3)}{4-(-1)}(x-(-1)) = -3 + \frac{1}{5}(x+1) \rightarrow 5y = -15 + x + 1 \rightarrow x - 5y - 14 = 0$

23. Calcula la ecuación punto-pendiente de la recta cuya pendiente es −1 y pasa por el punto (0, −4). Represéntala.

$y = -4 - 1(x - 0) \rightarrow y = -x - 4$



24. Determina la ecuación punto-pendiente de las rectas representadas en los ejes de coordenadas a la derecha.



La recta r pasa por (0, −3) y (2, 1). Su pendiente es $\frac{1-(-3)}{2-0} = 2$. La ecuación punto–pendiente es $y = -3 + 2(x - 0) = 2x - 3$.

La recta s es horizontal, no tiene pendiente, su ecuación es $y = -2$.

La recta t pasa por (0, 0) y por (1, −1). Su pendiente es $\frac{-1-0}{1-0} = -1$. La ecuación punto–pendiente es $y = -x$.

25. **Calcula la ecuación general de estas rectas.**

a) $y = x + 2$

b) $y = -x$

c) $y = 1$

d) Recta con pendiente 3 y que pasa por el punto $(-2, -2)$.

e) Recta que pasa por los puntos $(2, 3)$ y $(-4, -1)$.

a) $x - y + 2 = 0$

b) $x + y = 0$

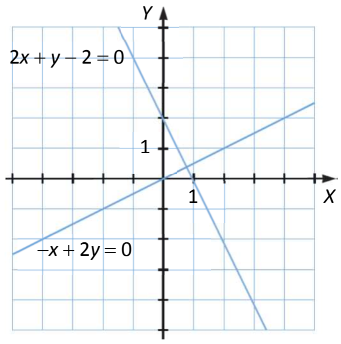
c) $y - 1 = 0$

d) $y = -2 + 3\,(x - (-2)) \rightarrow 3x - y + 4 = 0$

e) $y = 3 + \dfrac{-1-3}{-4-2}\,(x - 2) \rightarrow y = 3 + \dfrac{2}{3}\,(x - 2) \rightarrow 3y = 9 + 2x - 4 \rightarrow 2x - 3y + 5 = 0$

26. **Representa estas rectas gráficamente.**

a) $2x + y - 2 = 0$ b) $-x + 2y = 0$

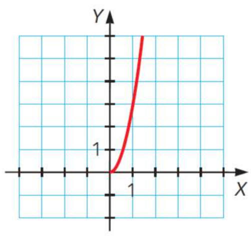


27. **¿Cómo expresarías la recta paralela al eje Y, $x = 2$, en su forma general? ¿Qué ocurre cuando en la ecuación general de una recta $b = 0$?**

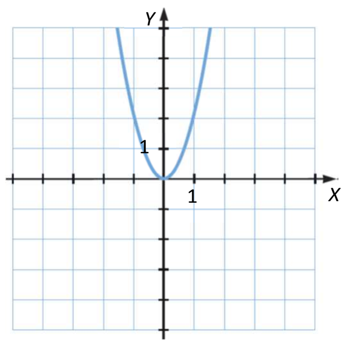
Es $x - 2 = 0$, donde $a = 1$, $b = 0$ y $c = -2$.

Si b es 0, no existe el término y, de modo que son rectas paralelas al eje Y (y no son funciones).

28. **Copia y completa en tu cuaderno esta parábola y señala sus elementos (vértice y eje de simetría) y sus propiedades (orientación de las ramas y tipo de punto que es el vértice).**



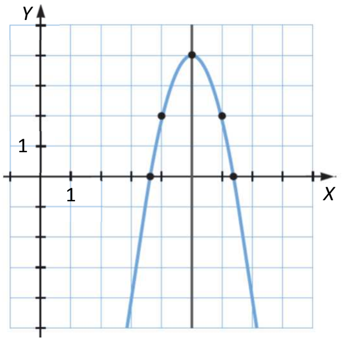
El eje de simetría es el eje Y.
El vértice es el punto (0, 0), que es un mínimo, porque las ramas de la parábola van hacia arriba.

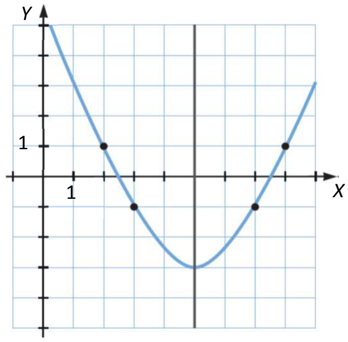


29. Representa una parábola cuyo eje de simetría es $x = 5$ y que cumple:

a) Pasa por (4, 2) y $a < 0$.

b) Pasa por (7, −1) y $a > 0$.

a) 

b) 

30. Si el vértice de una parábola está en (1, 4) y $a > 0$, ¿cuántos puntos de corte tiene con los ejes? ¿Y si $a < 0$?

Si $a > 0$, las ramas de la parábola van hacia arriba y así no cortará al eje X y tendrá un punto de corte con el eje Y.

Si $a < 0$, las ramas van hacia abajo, así que cada una de ellas cortará el eje X y además la que esté más a la izquierda tendrá un punto de corte con el eje Y.

31. Calcula el vértice de estas funciones cuadráticas y determina su eje de simetría.

a) $y = -x^2 + 2x - 5$
c) $y = -x^2 - 6x$

b) $y = -2x^2 + 4x - 3$
d) $y = 3x^2$

a) Su eje de simetría es $x = \dfrac{-2}{2\cdot(-1)} = 1$ Su vértice es $\left(1, \dfrac{-2^2 + 4\cdot(-1)\cdot(-5)}{4\cdot(-1)}\right) = (1, -4)$.

b) Su eje de simetría es $x = \dfrac{-4}{2\cdot(-2)} = 1$ Su vértice es $\left(1, \dfrac{-4^2 + 4\cdot(-2)\cdot(-3)}{4\cdot(-2)}\right) = (1, -1)$.

c) Su eje de simetría es $x = \dfrac{-(-6)}{2\cdot(-1)} = -3$ Su vértice es $\left(-3, \dfrac{-(-6)^2 + 4\cdot(-1)\cdot 0}{4\cdot(-1)}\right) = (-3, 9)$.

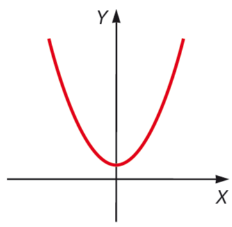
d) Su eje de simetría es $x = \dfrac{0}{2\cdot 3} = 0$ Su vértice es $\left(0, \dfrac{-0^2 + 4\cdot 3\cdot 0}{4\cdot 3}\right) = (0, 0)$.

32. Determina el eje de simetría de la parábola que tiene como puntos de corte con el eje X:

a) (0, 0) y (2, 0) b) (−2, 0) y (2, 0) c) (1, 0) y (4, 0)

a) $x = 1$ b) $x = 0$ c) $x = 2{,}5$

33. Explica cómo son los coeficientes de la función cuya gráfica es esta parábola. ¿Hay alguno que sea cero? ¿Qué pasaría si cambiamos de signo a todos?



Como las ramas están hacia arriba, tenemos que $a > 0$.

Como el eje de simetría es la recta $x = 0$, se tiene que $\frac{-b}{2a} = 0$, es decir, $b = 0$.

El punto del corte con el eje *Y*, $(0, c)$, está en la parte positiva del eje, de modo que $c > 0$.

Si les cambiásemos a todos el signo, tendríamos la simétrica de esta parábola respecto del eje *X*.

34. Representa gráficamente estas funciones cuadráticas.

a) $y = x^2 + 6x + 2$

b) $y = -2x^2 + 4x - 5$

c) $y = 3x^2 + 6x - 4$

d) $y = -x^2 - 4x + 1$

e) $y = -2x^2 - 8x + 3$

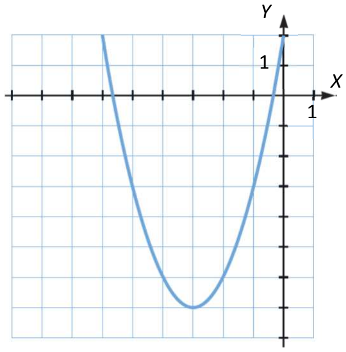
f) $y = x^2 - 4x + 5$

a) $a = 1$, $b = 6$, $c = 2$ Vértice: $\left(\frac{-6}{2\cdot 1}, \frac{-6^2 + 4\cdot 1\cdot 2}{4\cdot 1}\right) = (-3, -7)$ $a > 0 \rightarrow (-3, -7)$ es un mínimo.

Puntos de corte con el eje *X*: $x = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4\cdot 1\cdot 2}}{2\cdot 1} = \begin{cases} x = -0{,}35 \\ x = -5{,}65 \end{cases}$. Los puntos son $(-0{,}35; 0)$ y $(-5{,}65; 0)$.

Puntos de corte con el eje *Y*: $(0, 2)$

x	–5	–4	–2	–1	1
y	–3	–6	–6	–3	9

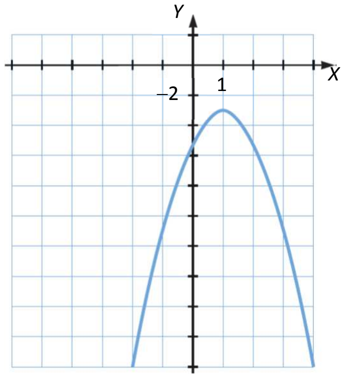


b) $a = -2$, $b = 4$, $c = -5$ Vértice: $\left(\frac{-4}{2\cdot(-2)}, \frac{-4^2 + 4\cdot(-2)\cdot(-5)}{4\cdot(-2)}\right) = (1, -3)$ $a < 0 \rightarrow (1, -3)$ es un máximo.

Puntos de corte con el eje *X*: $x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4\cdot(-2)\cdot(-5)}}{2\cdot(-2)} = \frac{-4 \pm \sqrt{-24}}{-4}$. No corta al eje *X*.

Puntos de corte con el eje *Y*: $(0, -5)$

x	–2	–1	2	3	4
y	–21	–11	–5	–11	–21

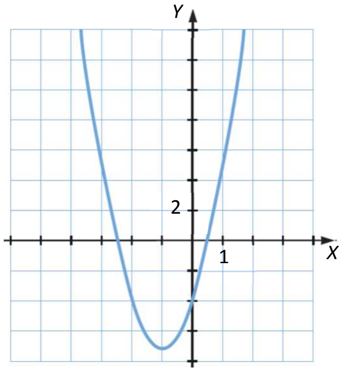


c) $a = 3$, $b = 6$, $c = -4$ Vértice: $\left(\frac{-6}{2\cdot 3}, \frac{-6^2+4\cdot 3\cdot(-4)}{4\cdot 3}\right) = (-1, -7)$ $a > 0 \rightarrow (-1, -7)$ es un mínimo.

Puntos de corte con el eje X: $x = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4\cdot 3\cdot(-4)}}{2\cdot 3} = \begin{cases} x = 0{,}53 \\ x = -2{,}53 \end{cases}$. Los puntos son (0,53; 0) y (–2,53; 0).

Puntos de corte con el eje Y: (0, –4)

x	–3	–2	1	2	3
y	5	–4	5	20	41

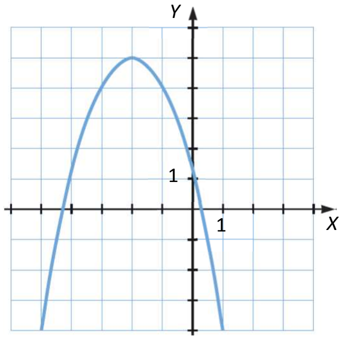


d) $a = -1$, $b = -4$, $c = 1$ Vértice: $\left(\frac{-(-4)}{2\cdot(-1)}, \frac{-(-4)^2+4\cdot(-1)\cdot 1}{4\cdot(-1)}\right) = (-2, 5)$ $a < 0 \rightarrow (-2, 5)$ es un máximo.

Puntos de corte con el eje X: $x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4\cdot(-1)\cdot 1}}{2\cdot(-1)} = \begin{cases} x = -4{,}24 \\ x = 0{,}24 \end{cases}$. Los puntos son (0,24; 0) y (–4,24; 0).

Puntos de corte con el eje Y: (0, 1)

x	–4	–3	–1	1	2
y	1	4	4	–4	–11

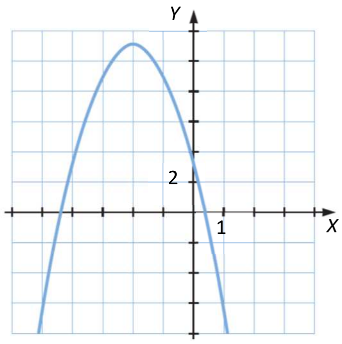


e) $a = -2$, $b = -8$, $c = 3$ Vértice: $\left(\frac{-(-8)}{2\cdot(-2)}, \frac{-(-8)^2+4\cdot(-2)\cdot 3}{4\cdot(-2)}\right) = (-2, 11)$ $a < 0 \rightarrow (-2, 11)$ es un máximo.

Puntos de corte con el eje X: $x = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4\cdot(-2)\cdot 3}}{2\cdot(-2)} = \begin{cases} x = -4{,}35 \\ x = 0{,}35 \end{cases}$. Los puntos son (0,35; 0) y (–4,35; 0).

Puntos de corte con el eje Y: (0, 3)

x	–4	–3	–1	1	2
y	3	9	9	–7	–21

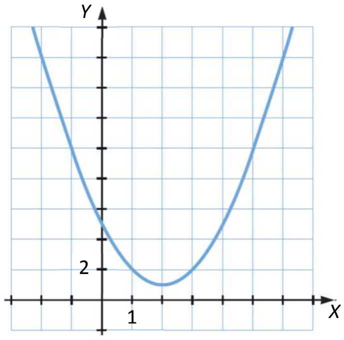


f) $a = 1$, $b = -4$, $c = 5$ Vértice: $\left(\frac{-(-4)}{2\cdot 1}, \frac{-(-4)^2 + 4\cdot 1\cdot 5}{4\cdot 1}\right) = (2,1)$ $a > 0 \rightarrow (2, 1)$ es un mínimo.

Puntos de corte con el eje X: $x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4\cdot 1\cdot 5}}{2\cdot 1} = \frac{4 \pm \sqrt{-4}}{2}$. No corta al eje X.

Puntos de corte con el eje Y: (0, 5)

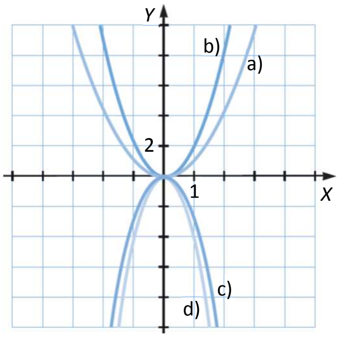
x	–2	–1	1	3	4
y	17	10	2	2	5



35. **Representa gráficamente estas funciones.**

a) $y = x^2$ c) $y = -3x^2$

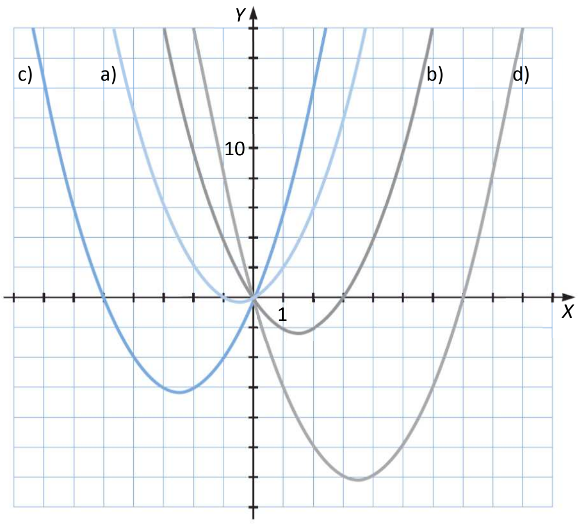
b) $y = 2x^2$ d) $y = -4x^2$



36. **Representa gráficamente las siguientes funciones cuadráticas.**

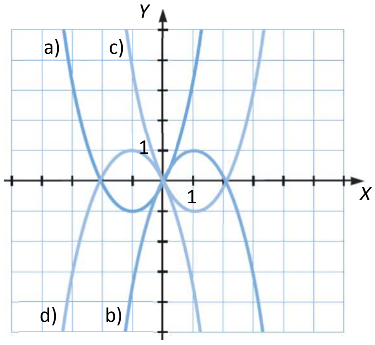
a) $y = x^2 + x$ c) $y = x^2 + 5x$

b) $y = x^2 - 3x$ d) $y = x^2 - 7x$



37. **Representa las parábolas y determina si existe relación entre ellas.**

a) $y_1 = x^2 + 2x$
b) $y_2 = -x^2 + 2x$
c) $y_3 = x^2 - 2x$
d) $y_4 = -x^2 - 2x$



Sí, son la misma parábola solo que trasladada o girada.

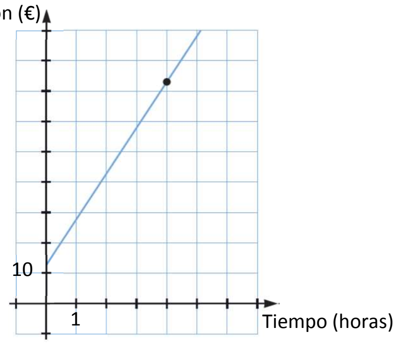
38. **Un fontanero cobra 13 € por la visita a domicilio y 15 € por cada hora de trabajo.**

a) Determina la ecuación de la función que relaciona el dinero que costará la factura de una reparación con el tiempo que le ocupe.

b) Representa gráficamente la función y marca sobre la gráfica el punto que relaciona el coste de la factura con un arreglo que necesita 4 horas.

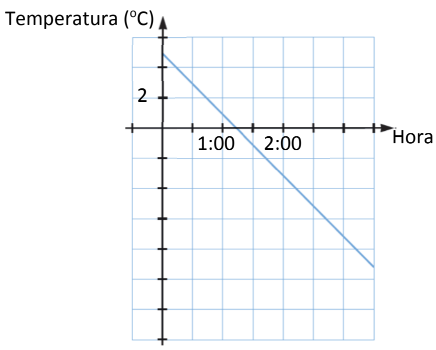
a) $f(x) = 13 + 15x$, donde x es cada hora de trabajo.

b)



39. **La temperatura, en un lugar de la Antártida, a las 12 h es de 5 °C y cada hora baja 4 °C. Expresa esta relación mediante una ecuación y represéntala gráficamente.**

$f(x) = 5 - 4x$



40. En un establecimiento para mayoristas el precio de un producto es 0,6 €/kg, si se compra menos de 10 kg. Si se compran 10 o más kilos, el precio del kilo es un 20% menos. ¿Cuál es la ecuación de la función que relaciona peso y precio?

$$f(x) = \begin{cases} 0{,}6x & \text{si } x < 10 \\ 0{,}8 \cdot 0{,}6x = 0{,}48x & \text{si } x \geq 10 \end{cases}$$

41. El movimiento de una piedra al lanzarse al aire viene dado por la función $y = -6x^2 + 15x$, en la que x es el tiempo, medido en segundos, e y la altura de la piedra, medida en metros. Calcula.

a) La máxima altura que alcanzará la piedra.

b) En el momento en el que alcanza la altura máxima, ¿cuánto tiempo habrá transcurrido desde su lanzamiento?

a) Como $a < 0$, el vértice es un máximo.

$$\left(\frac{-15}{2 \cdot (-6)}, \frac{-15^2 + 4 \cdot (-6) \cdot 0}{4 \cdot (-6)}\right) = \left(\frac{5}{4}, \frac{75}{8}\right) = (1{,}25;\ 9{,}38)$$

Alcanza 9,38 metros de altura.

b) Han trascurrido 1,25 segundos desde el lanzamiento.

42. Las ecuaciones indican las trayectorias que ha llevado el balón en dos lanzamientos de Cristino Rolán. ¿Qué lanzamiento ha llegado más lejos? ¿Cuál ha alcanzado mayor altura?

1.er lanzamiento: $y_L = -4x^2 + 14x$

2.º lanzamiento: $y_J = -2(x - 2)^2 + 8$

Desarrollamos primero la ecuación: $-2\,(x^2 - 4x + 4) + 8 = -2x^2 + 8x$

En los dos casos como $a < 0$, el vértice será un máximo.

Veamos cuál es el vértice para el primer lanzamiento: $\left(\frac{-14}{2 \cdot (-4)}, \frac{-14^2 + 4 \cdot (-4) \cdot 0}{4 \cdot (-4)}\right) = \left(\frac{7}{4}, \frac{49}{4}\right) = (1{,}75;\ 12{,}25)$

Veamos cuál es el vértice para el segundo lanzamiento: $\left(\frac{-8}{2 \cdot (-2)}, \frac{-8^2 + 4 \cdot (-2) \cdot 0}{4 \cdot (-2)}\right) = (2,\ 8)$

La mayor altura la alcanza en el segundo lanzamiento, 2 m, pero llega más lejos en el primero, 12,25 m.

43. Escribe la ecuación de una función cuadrática que tenga un máximo en el punto (1, 2).

$$\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-b^2 + 4ac}{4a}\right) = (1,\ 2)$$

Para que sea máximo, $a < 0$.

Por ejemplo, podría ser $a = -1$, $b = 2$, y entonces tendríamos que:

$$\frac{-2^2 + 4 \cdot (-1) \cdot c}{4 \cdot (-1)} = 2 \rightarrow -4 - 4c = -8 \rightarrow c = 1$$

Una posible función sería $-x^2 + 2x + 1 = 0$.

ACTIVIDADES FINALES

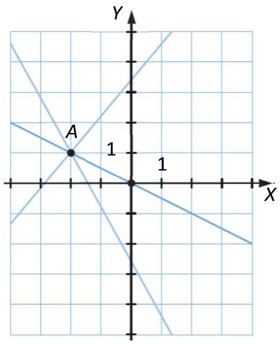
44. Clasifica estas funciones lineales en crecientes o decrecientes y escribe el valor de su pendiente.

a) $y = 3x - 4$
b) $y = -2x$
c) $y = \frac{x}{3} - 4$
d) $y = -x + 5$
e) $y = 3x$
f) $y = -4 - \frac{x}{4}$

a) Lineal creciente con pendiente 3.
b) Lineal decreciente con pendiente –2.
c) Lineal creciente con pendiente 1/3.
d) Lineal decreciente con pendiente –1.
e) Lineal creciente con pendiente 3.
f) Lineal decreciente con pendiente –1/4.

45. Dibuja en el plano el punto *A*(−2, 1).

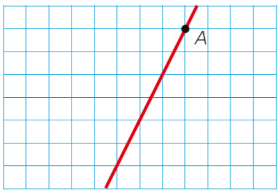
a) ¿Qué gráficas de funciones lineales pasan por *A*?
b) ¿Cuántas son de proporcionalidad directa?



a) Infinitas, por un punto pueden pasar infinitas rectas.

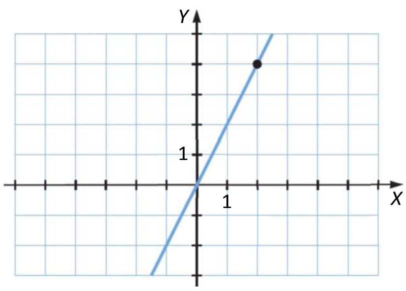
b) Solo una, la que pasa por *A* y por (0, 0). Por dos puntos solo pasa una recta.

46. Este es el gráfico de una función de proporcionalidad directa.



a) Dibuja en tu cuaderno los ejes si la abscisa del punto *A* es $x = 2$.
b) ¿Cuál es la ordenada del punto *A*?
c) ¿Y la expresión algebraica de la función?

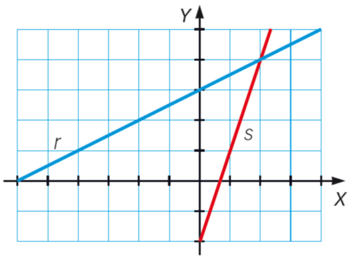
a)



b) La ordenada de *A* es $y = 4$

c) $y = 2x$

48. **Determina la pendiente de estas rectas.**



Consideramos para la recta *r* los puntos (2, 4) y (–2, 2). La pendiente es 2/4 = 1/2.

Consideramos para la recta *s* los puntos (1, 1) y (2, 4). La pendiente es 3/1 = 3.

49. **Indica la pendiente de cada una de estas funciones lineales.**

a) Su gráfica pasa por *A*(2, 4) y *B*(4, 5).
b) Su gráfica pasa por *C*(−1, 3) y *D*(−4, −2).
c) Su gráfica pasa por *O*(0, 0) y *E*(−5, 1).
d) Su gráfica pasa por *F*(0, 3) y *G*(6, 2).
e) Su gráfica pasa por *H*(2, 0) y *I*(0, −5).

a) $m = 1/2$ b) $m = 5/3$ c) $m = -1/5$ d) $m = -1/6$ e) $m = 5/2$

50. **Si la gráfica de una función de proporcionalidad directa pasa por el punto *P*(3, −4), indica por cuáles de los siguientes puntos pasa.**

***A*(3, −6)** ***C*(2, −3)** ***E*(−1, −1)**
***B*(−3, 4)** ***D*(6, −8)** ***F*(6, 8)**

Por ser de proporcionalidad directa, pasa por (0, 0). De modo que la pendiente será $m = -4/3$. La ecuación de la recta es $y = -4x/3$.

Comprobamos qué puntos pertenecen a la recta:

A: $y = -4 \cdot 3/3 = -4 \neq -6$. La función no pasa por *A*.

B: $y = -4 \cdot (-3)/3 = 4$. La función pasa por *B*.

C: $y = -4 \cdot 2/3 = -8/3 \neq -3$. La función no pasa por *C*.

D: $y = -4 \cdot 6/3 = -8$. La función pasa por *D*.

E: $y = -4 \cdot (-1)/3 = 4/3 \neq -1$. La función no pasa por *E*.

F: $y = -4 \cdot 6/3 = -8 \neq 8$. La función no pasa por *F*.

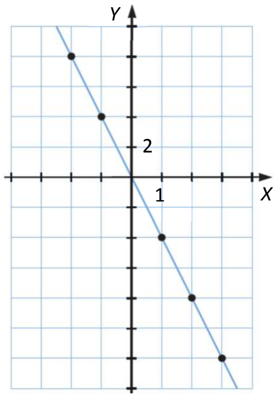
51. **Representa la función de proporcionalidad directa que pasa por el punto *Q*(1, −4), completa en tu cuaderno la tabla y señala los puntos en la gráfica.**

X	−2		3	
y		4		−8

Si es de proporcionalidad directa, pasa por (0, 0) además de por Q. Su pendiente es $m = -4/1 = -4$.

La ecuación de la función es $y = -4x$.

x	-2	-1	3	2
y	8	4	-12	-8



52. **Halla los puntos de corte con los ejes de coordenadas y el valor de la ordenada en el origen.**

a) $y = 2x + 4$ c) $y = \dfrac{x - 4}{5}$

b) $y = -x$ d) $y = 4x - 1$

El valor de la ordenada en el origen es el punto de corte con el eje Y.

a) Punto de corte con el eje X: $2x + 4 = 0 \rightarrow x = -2$. Punto $(-2, 0)$
Punto de corte con el eje Y: $x = 0 \rightarrow 2 \cdot 0 + 4 = 4$. Punto $(0, 4)$

b) Punto de corte con el eje X: $-x = 0 \rightarrow x = 0$. Punto $(0, 0)$
Punto de corte con el eje Y: $x = 0 \rightarrow -0 = 0$. Punto $(0, 0)$

c) Punto de corte con el eje X: $\dfrac{x-4}{5} = 0 \rightarrow x = 4$. Punto $(4, 0)$

Punto de corte con el eje Y: $x = 0 \rightarrow \dfrac{0-4}{5} = -\dfrac{4}{5}$. Punto $(0, -4/5)$

d) Punto de corte con el eje X: $4x - 1 = 0 \rightarrow x = 1/4$. Punto $(1/4, 0)$
Punto de corte con el eje Y: $x = 0 \rightarrow 4 \cdot 0 - 1 = -1$. Punto $(0, -1)$

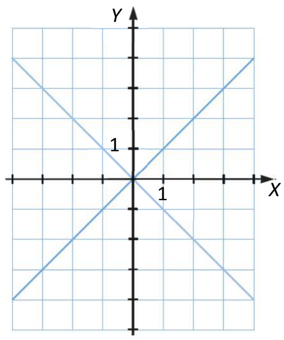
53. **Halla la expresión algebraica de la función lineal que pasa por el origen y su pendiente es:**

a) $m = -3$ b) $m = 5$ c) $m = 1{,}2$ d) $m = -0{,}5$

a) $y = -3x$ b) $y = 5x$ c) $y = 1{,}2x$ d) $y = -0{,}5x$

54. **Representa gráficamente las bisectrices de los cuadrantes y encuentra su expresión algebraica. ¿Son crecientes o decrecientes?**

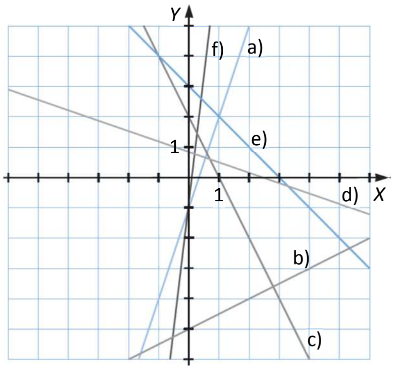
Las expresiones algebraicas son
$y = x$, que es creciente, e $y = -x$, que es decreciente.



55. Representa gráficamente estas funciones.

a) $y = 3x - 1$ c) $y = -2x + 2$ e) $y = 3 - x$

b) $y = \frac{x}{2} - 5$ d) $y = \frac{5 - 2x}{6}$ f) $y = 7x - \frac{1}{2}$



56. Di si los siguientes puntos pertenecen a la gráfica de la función $f(x) = 3x - 6$ o a la de $g(x) = 4 - 2x$.

a) $A(0, -6)$ c) $C(1, 2)$ e) $E(3, 3)$

b) $B(2, 0)$ d) $D(-1, 6)$ f) $F(1, -3)$

a) $f(0) = 3 \cdot 0 - 6 = -6$, $g(0) = 4 - 2 \cdot 0 = 4 \neq -6$. El punto *A* pertenece a *f*, pero no pertenece a *g*.

b) $f(2) = 3 \cdot 2 - 6 = 0$, $g(2) = 4 - 2 \cdot 2 = 0$. El punto *B* pertenece a *f* y a *g*.

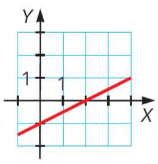
c) $f(1) = 3 \cdot 1 - 6 = -3 \neq 2$, $g(1) = 4 - 2 \cdot 1 = 2$. El punto *C* pertenece a *g*, pero no pertenece a *f*.

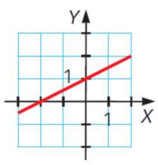
d) $f(-1) = 3 \cdot (-1) - 6 = -9 \neq 6$, $g(-1) = 4 - 2 \cdot (-1) = 6$. El punto *D* pertenece a *g*, pero no pertenece a *f*.

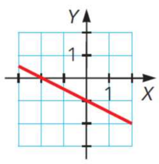
e) $f(3) = 3 \cdot 3 - 6 = 3$, $g(3) = 4 - 2 \cdot 3 = -2 \neq 3$. El punto *E* pertenece a *f*, pero no pertenece a *g*.

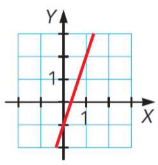
f) $f(1) = 3 \cdot 1 - 6 = -3$, $g(1) = 4 - 2 \cdot 1 = 2 \neq -3$. El punto *F* pertenece a *f*, pero no pertenece a *g*.

57. ¿Cuál es la representación de $y = -\frac{1}{2}x - 1$?

a) 

b) 

c) 

d) 

Tiene que ser decreciente, ya que la pendiente es negativa, de modo que no pueden ser ni a) ni b) ni d).

Comprobamos que es c): la recta pasa por (0, –1) y por (–2, 0), es decir, $-\frac{1}{2} \cdot 0 - 1 = -1$ y $-\frac{1}{2} \cdot (-2) - 1 = 0$.

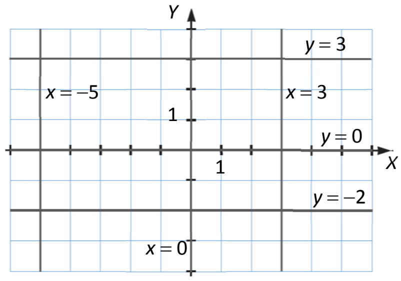
De modo que la representación de la función dada efectivamente es c).

58. **Representa gráficamente e indica cuáles de ellas son funciones y de qué tipo.**

a) $y = 3$ d) $y = -2$

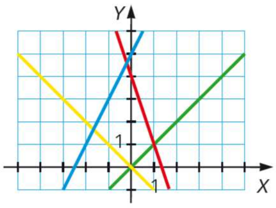
b) $x = 3$ e) $x = -5$

c) $y = 0$ f) $x = 0$



Son funciones constantes a), c) y d).

59. **Escribe la expresión algebraica de las funciones lineales cuya gráfica es la siguiente.**



Recta roja: pasa por (0, 4) y (1, 1), $y = 4 + \frac{1-4}{1-0}(x-0) = 4 - 3x$.

Recta azul: pasa por (0, 5) y (–2, 1), $y = 5 + \frac{1-5}{-2-0}(x-0) = 5 + 2x$.

Recta verde: pasa por (0, 0) y (1, 1), $y = 0 + \frac{1-0}{1-0}(x-0) = x$.

Recta amarilla: pasa por (0, 0) y (–1, 1), $y = 0 + \frac{1-0}{-1-0}(x-0) = -x$.

60. **Calcula la ecuación de la recta cuya pendiente es -2 y que pasa por el punto $P(4, -1)$.**

$y = -1 - 2(x-4) = -2x + 7$

61. **Considera los puntos $A(0, 4)$, $B(5, 7)$ y $C(3, 2)$. Determina la ecuación punto-pendiente de cada una de estas rectas.**

a) Recta que pasa por A y B.

b) Recta que pasa por el origen y B.

c) Recta que pasa por B y C.

d) Recta que pasa por el origen y A.

e) Recta que pasa por A y C.

f) Recta que pasa por el origen y C.

a) $y = 4 + \frac{7-4}{5-0}(x-0) = 4 + \frac{3}{5}x$

b) $y = 0 + \frac{7-0}{5-0}(x-0) = \frac{7}{5}x$

c) $y = 7 + \frac{2-7}{3-5}(x-5) = 7 + \frac{5}{2}x - \frac{25}{2} = \frac{5}{2}x - \frac{11}{2}$

d) $x = 0$

e) $y = 4 + \frac{2-4}{3-0}(x-0) = 4 - \frac{2}{3}x$

f) $y = 0 + \frac{2-0}{3-0}(x-0) = \frac{2}{3}x$

62. Determina la ecuación punto-pendiente y general de las siguientes rectas.

a) $y = 3x - 4$

b) $y = -2x$

c) $y = -x + 5$

d) $y = \frac{x}{3} - 4$

e) $y = 3x$

f) $y = -4 - \frac{x}{4}$

a) La recta pasa por el punto (2, 2) $\rightarrow$ Ecuación punto-pendiente: $y = 2 + 3(x - 2)$

Ecuación general: $3x - y - 4 = 0$

b) La recta pasa por el punto (1, –2) $\rightarrow$ Ecuación punto-pendiente: $y = -2 - 2(x - 1)$

Ecuación general: $2x + y = 0$

c) Ecua La recta pasa por el punto (1, 4) $\rightarrow$ Ecuación punto-pendiente: $y = 4 - 1(x - 1)$

Ecuación general: $x + y - 5 = 0$

d) La recta pasa por el punto (3, –3) $\rightarrow$ Ecuación punto-pendiente: $y = -3 + \frac{1}{3}(x - 3)$

Ecuación general: $x - 3y - 12 = 0$

e) La recta pasa por el punto (1, 3) $\rightarrow$ Ecuación punto-pendiente: $y = 3 + 3(x - 1)$

Ecuación general: $3x - y = 0$

f) La recta pasa por el punto (4, –5) $\rightarrow$ Ecuación punto-pendiente: $y = -5 - \frac{1}{4}(x - 4)$

Ecuación general: $x + 4y + 16 = 0$

64. Determina el punto de corte de estas funciones lineales; represéntalas para comprobar el resultado.

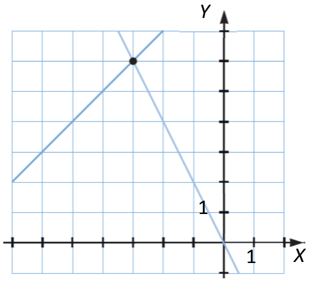
a) $y = x + 9$ $\quad y = -2x$

b) $y = 3x - 5$ $\quad y = 3 - x$

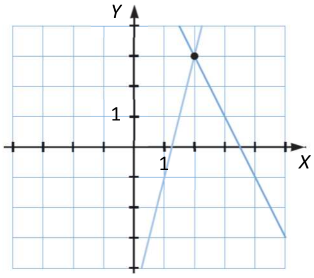
c) $y = 7 - 2x$ $\quad y = 4x - 5$

d) $y = \frac{x+4}{2}$ $\quad y = -x$

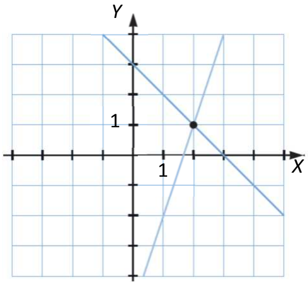
a) $x + 9 = -2x \rightarrow x = -3$. Punto de corte $(-3, 6)$



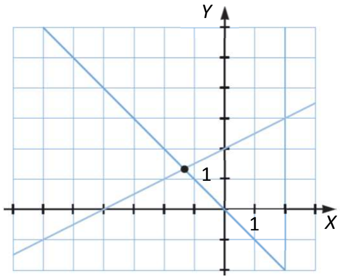
c) $7 - 2x = 4x - 5 \rightarrow x = 2$. Punto de corte $(2, 3)$



b) $3x - 5 = 3 - x \rightarrow x = 2$. Punto de corte $(2, 1)$



d) $\frac{x+4}{2} = -x \rightarrow x = -\frac{4}{3}$. Punto de corte $\left(-\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$



65. Obtén la expresión algebraica de estas funciones lineales.

a) Pasa por $A(-1, 0)$ y es paralela al eje Y.

b) Pasa por $B(0, 5)$ y es paralela al eje X.

c) Pasa por $C(2, 6)$ y es paralela al eje X.

d) Pasa por $D(-4, 1)$ y es paralela al eje Y.

a) No es función. Su ecuación es $x = -1$.

b) $y = 5$

c) $y = 6$

d) No es función. Su ecuación es $x = -4$.

66. Considera la función $f(x) = mx + n$. En cada caso, halla m y n sabiendo que:

a) $f(1) = -1$ y $f(-1) = 7$

b) $f(0) = -\frac{2}{3}$ y $f(-1) = -1$

c) $f(1) = 1$ y $f(2) = 6$

d) $f(2) = \frac{5}{2}$ y $f(5) = \frac{2}{5}$

a) $f(1) = m \cdot 1 + n = -1$ $\quad f(-1) = m \cdot (-1) + n = 7$. Resolvemos el sistema y $m = -4$ y $n = 3$.

b) $f(0) = m \cdot 0 + n = -2/3$ $\quad f(-1) = m \cdot (-1) + n = -1$. Resolvemos el sistema y $m = 1/3$ y $n = -2/3$.

c) $f(1) = m \cdot 1 + n = 1$ $\quad f(2) = m \cdot 2 + n = 6$. Resolvemos el sistema y $m = 5$ y $n = -4$.

d) $f(2) = m \cdot 2 + n = 5/2$ $\quad f(5) = m \cdot 5 + n = 2/5$. Resolvemos el sistema y $m = -7/10$ y $n = 39/10$.

67. Halla las expresiones algebraicas de las funciones lineales cuyas gráficas:

a) Es paralela a la de $y = -x + 6$ y pasa por el origen.

b) Pasa por el punto $P(1, 2)$ y es paralela a la gráfica de la función lineal que pasa por los puntos $A(1, 1)$ y $B(-2, -1)$.

a) Si es paralela tiene la misma pendiente, y si pasa por el origen su ordenada en el origen es 0, de modo que la expresión algebraica buscada es $y = -x$.

b) Veamos cuál es la pendiente de la recta que pasa por A y B: $\frac{-1-1}{-2-1} = \frac{2}{3}$.

La ecuación punto-pendiente de la recta que buscamos es $y = 2 + \frac{2}{3}(x-1) = \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}$.

68. **Sin representarlas, indica el vértice y el eje de simetría de estas parábolas.**

a) $y = x^2 + 4x - 5$
b) $y = -x^2 + 2x - 10$
c) $y = 3x^2 - 6x + 1$
d) $y = -2x^2 - 8x + 5$
e) $y = x^2 - 5x + 2$
f) $y = -x^2 - 3x + 6$

Di en cuáles el vértice es un máximo y en cuáles es un mínimo.

a) Vértice: $\left(\frac{-4}{2\cdot 1}, \frac{-4^2 + 4\cdot 1\cdot(-5)}{4\cdot 1}\right) = (-2, -9)$. Es un mínimo, puesto que $a > 0$.

Eje de simetría: $x = -2$

b) Vértice: $\left(\frac{-2}{2\cdot(-1)}, \frac{-2^2 + 4\cdot(-1)\cdot(-10)}{4\cdot(-1)}\right) = (1, -9)$. Es un máximo, puesto que $a < 0$.

Eje de simetría: $x = 1$

c) Vértice: $\left(\frac{-(-6)}{2\cdot 3}, \frac{-(-6)^2 + 4\cdot 3\cdot 1}{4\cdot 3}\right) = (1, -2)$. Es un mínimo, puesto que $a > 0$.

Eje de simetría: $x = 1$

d) Vértice: $\left(\frac{-(-8)}{2\cdot(-2)}, \frac{-(-8)^2 + 4\cdot(-2)\cdot 5}{4\cdot(-2)}\right) = (-2, 13)$. Es un máximo, puesto que $a < 0$.

Eje de simetría: $x = -2$

e) Vértice: $\left(\frac{-(-5)}{2\cdot 1}, \frac{-(-5)^2 + 4\cdot 1\cdot 2}{4\cdot 1}\right) = \left(\frac{5}{2}, -\frac{17}{4}\right)$. Es un mínimo, puesto que $a > 0$.

Eje de simetría: $x = 5/2$

f) Vértice: $\left(\frac{-(-3)}{2\cdot(-1)}, \frac{-(-3)^2 + 4\cdot(-1)\cdot 6}{4\cdot(-1)}\right) = \left(-\frac{3}{2}, \frac{33}{4}\right)$. Es un máximo, puesto que $a < 0$.

Eje de simetría: $x = -3/2$

69. **Considera la parábola $y = -2x^2 + 3x - 1$. ¿Por cuáles de los siguientes puntos pasa?**

a) (0, 1) b) (1, 0) c) (−1, −6) d) (2, 3)

a) $-2\cdot 0^2 + 3\cdot 0 - 1 = -1 \neq 1$. No pasa por (0, 1).

b) $-2\cdot 1^2 + 3\cdot 1 - 1 = 0$. Pasa por (1, 0).

c) $-2\cdot(-1)^2 + 3\cdot(-1) - 1 = -6$. Pasa por (−1, −6).

d) $-2\cdot 2^2 + 3\cdot 2 - 1 = -3 \neq 3$. No pasa por (2, 3).

70. Completa en tu cuaderno para que los puntos pertenezcan a la parábola $y = x^2 - 2x + 1$.

a) $(\square, 4)$ b) $(0, \square)$ c) $(\square, 0)$ d) $(\square, 9)$

a) $x^2 - 2x + 1 = 4 \to x^2 - 2x - 3 = 0 \to x = -1$ y $x = 3$

b) $0^2 - 2 \cdot 0 + 1 = 1 = y$

c) $x^2 - 2x + 1 = 0 \to x = 1$

d) $x^2 - 2x + 1 = 9 \to x^2 - 2x - 8 = 0 \to x = -2$ y $x = 4$

71. Considera la función $y = x^2 - 3x$.

a) ¿Qué puntos tienen ordenada -2?

b) ¿Cuáles tienen ordenada 4?

a) $-2 = x^2 - 3x \to x^2 - 3x + 2 = 0 \to x = 1$ y $x = 2$. Los puntos $(1, -2)$ y $(2, -2)$.

b) $4 = x^2 - 3x \to x^2 - 3x - 4 = 0 \to x = -1$ y $x = 4$. Los puntos $(-1, 4)$ y $(4, 4)$.

72. El punto $(-2, 1)$ es vértice de algunas de las siguientes parábolas; indica de cuáles.

a) $y = x^2 - 4x + 5$

b) $y = x^2 + 4x + 5$

c) $y = -2x^2 - 8x - 9$

d) $y = x^2 - 4x + 3$

e) $y = 3x^2 + 12x + 11$

f) $y = -2x^2 - 8x - 7$

Veamos si pertenece a la parábola y, de pertenecer, si es su vértice.

a) $(-2)^2 - 4 \cdot (-2) + 5 = 17 \neq 1$. No pertenece a la parábola.

b) $(-2)^2 + 4 \cdot (-2) + 5 = 1$. Pertenece a la parábola.

Veamos si es su vértice: $\left(\frac{-4}{2 \cdot 1}, \frac{-4^2 + 4 \cdot 1 \cdot 5}{4 \cdot 1}\right) = (-2, 1)$. Es vértice de la parábola.

c) $(-2) \cdot (-2)^2 - 8 \cdot (-2) - 9 = -1 \neq 1$. No pertenece a la parábola.

d) $(-2)^2 - 4 \cdot (-2) + 3 = 15$. No pertenece a la parábola.

e) $3 \cdot (-2)^2 + 12 \cdot (-2) + 11 = -1 \neq 1$. No pertenece a la parábola.

f) $(-2) \cdot (-2)^2 - 8 \cdot (-2) - 7 = 1$. Pertenece a la parábola.

Veamos si es su vértice: $\left(\frac{-(-8)}{2 \cdot (-2)}, \frac{-(-8)^2 + 4 \cdot (-2) \cdot (-7)}{4 \cdot (-2)}\right) = (-2, 1)$. Es vértice de la parábola.

73. Determina la función cuadrática $y = ax^2 + bx + c$ y represéntala gráficamente en cada caso.

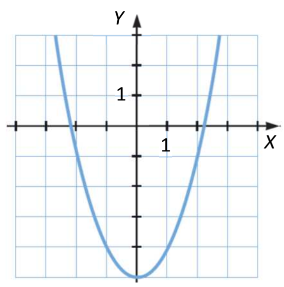
a) Pasa por $(-3, 4)$ y $(3, 4)$ y $a = 1$.

b) Pasa por $(1, 2)$ y $(5, 2)$ y la ordenada del vértice es 4.

a) Si $a = 1$, es de la forma $y = x^2 + bx + c$.

Cumple que $(-3)^2 + b \cdot (-3) + c = 4$ y que $3^2 + b \cdot 3 + c = 4$.
Resolviendo tenemos que $b = 0$ y $c = -5$.

$y = x^2 - 5$

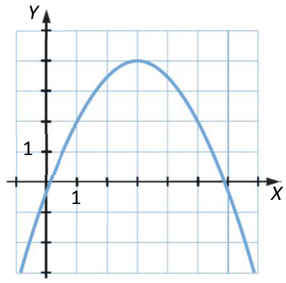


b) Cumple que $a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = 2$ y que $a \cdot 5^2 + b \cdot 5 + c = 2$.

Además, $\frac{-b^2 + 4ac}{4a} = 4$.

Tenemos un sistema de tres ecuaciones y tres incógnitas. Resolvemos y descartamos el caso en el que $a = 0$.

Por tanto, $a = -1/2$, $b = 3$ y $c = -1/2 \rightarrow y = -\frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{1}{2}$



74. Halla los puntos de corte con los ejes de coordenadas de las siguientes funciones.

a) $y = x^2 - 6x + 5$
b) $y = x^2 - 4$
c) $y = 3x^2 - 18x + 24$
d) $y = 2x^2 - 4x$
e) $y = -4x + x^2$
f) $y = -2x^2 - 6x$

a) Puntos de corte con el eje X: $x^2 - 6x + 5 = 0 \rightarrow x = 1$ y $x = 5$. Los puntos son (1, 0) y (5, 0).

Punto de corte con el eje Y: $x = 0 \rightarrow 0^2 - 6 \cdot 0 + 5 = 5$. El punto de corte es (0, 5).

b) Puntos de corte con el eje X: $x^2 - 4 = 0 \rightarrow x = -2$ y $x = 2$. Los puntos son (–2, 0) y (2, 0).

Punto de corte con el eje Y: $x = 0 \rightarrow 0^2 - 4 = 4$. El punto de corte es (0, 4).

c) Puntos de corte con el eje X: $3x^2 - 18x + 24 = 0 \rightarrow x = 2$ y $x = 4$. Los puntos son (2, 0) y (4, 0).

Punto de corte con el eje Y: $x = 0 \rightarrow 3 \cdot 0^2 - 18 \cdot 0 + 24 = 24$. El punto de corte es (0, 24).

d) Puntos de corte con el eje X: $2 \cdot x^2 - 4x = 0 \rightarrow x = 0$ y $x = 2$. Los puntos son (0, 0) y (2, 0).

Punto de corte con el eje Y: $x = 0 \rightarrow 2 \cdot 0^2 - 4 \cdot 0 = 0$. El punto de corte es (0, 0).

e) Puntos de corte con el eje X: $-4x + x^2 = 0 \rightarrow x = 0$ y $x = 4$. Los puntos son (0, 0) y (4, 0).

Punto de corte con el eje Y: $x = 0 \rightarrow -4 \cdot 0 + 0^2 = 0$. El punto de corte es (0, 0).

f) Puntos de corte con el eje X: $-2x^2 - 6x = 0 \rightarrow x = 0$ y $x = -3$. Los puntos son (0, 0) y (–3, 0).

Punto de corte con el eje Y: $x = 0 \rightarrow -2 \cdot 0^2 - 6 \cdot 0 = 0$. El punto de corte es (0, 0).

75. Deduce cuál es la abscisa del vértice para las parábolas cuyos puntos de corte con el eje *X* son los siguientes.

a) (−2, 0) y (4, 0)
b) (3, 0) y (5, 0)
c) (−1, 0) y (2, 0)
d) (−3, 0) y (−2, 0)

La abscisa del vértice es la que está en el eje de simetría. El eje de simetría equidista de los dos puntos de corte con el eje X.

a) $x = 1$ b) $x = 4$ c) $x = 1/2$ d) $x = -5/2$

76. Deduce cuál es el eje de simetría de una parábola sabiendo que pasa por los puntos:

a) (2, 6) y (5, 6)
b) (−3, 2) y (−1, 2)
c) (−2, −1) y (2, −1)
d) (3, 0) y (−3, 0)

Estos puntos tienen dos a dos la misma ordenada, de modo que son simétricos respecto del eje de simetría, que tiene que distar lo mismo de los dos.

a) $x = 7/2$ b) $x = -2$ c) $x = 0$ d) $x = 0$

77. Representa gráficamente las siguientes funciones cuadráticas.

a) $y = (x + 1)^2 - 6$

b) $y = -(x - 3)^2 + 6$

c) $y = -2x^2 - 4$

d) $y = x^2 - x + 2$

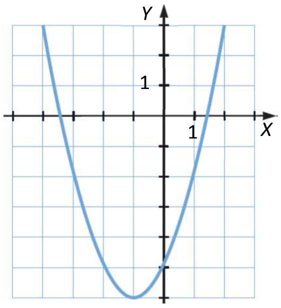
e) $y = 2x^2 - 4x$

f) $y = x^2 - 4x + 7$

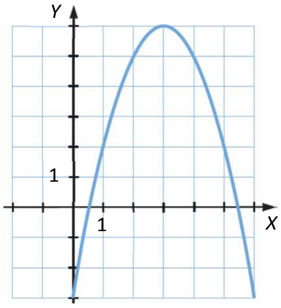
g) $y = -2x^2 - 4x + 1$

h) $y = x^2 + 2$

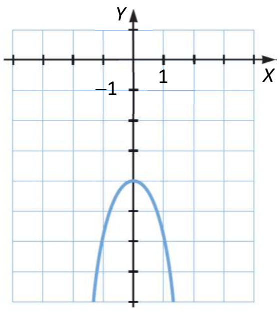
a)



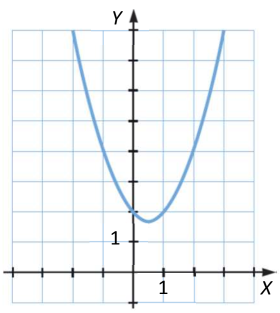
b)



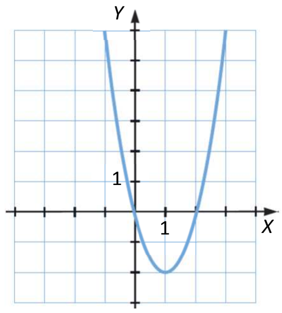
c)



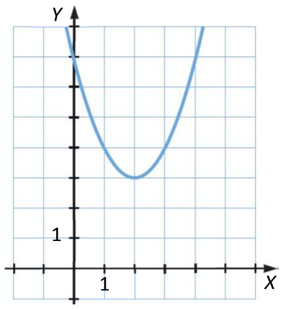
d)



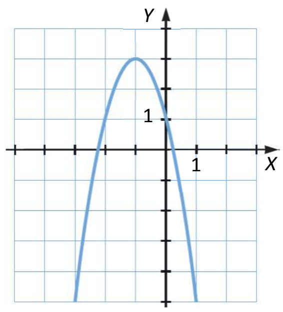
e)



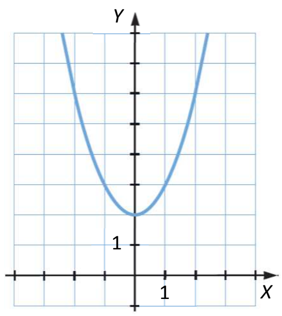
f)



g)

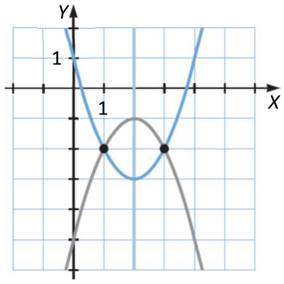


h)



78. **¿En cuántas funciones cuadráticas su gráfica pasa por (3, −2) y $x = 2$ es la abscisa de su vértice? Escribe varias y represéntalas.**

La función pasa también por el punto (1, –2) porque su eje de simetría es la recta $x = 2$. Planteamos un sistema de dos ecuaciones y lo resolvemos:



$$\left.\begin{array}{r} 9a+3b+c=-2 \\ a+b+c=-2 \end{array}\right\} \rightarrow c=-2-a-b, b=-4a$$

Dando diferentes valores al parámetro a, obtenemos infinitas parábolas que cumplen las condiciones especificadas. Por ejemplo:

Si $a=1, b=-4, c=1 \rightarrow y=x^2-4x+1$

Si $a=-1, b=4, c=-5 \rightarrow y=-x^2+4x-5$

79. **Completa en tu cuaderno la tabla de valores de una función cuadrática cuya gráfica es una parábola con vértice en (2, −3).**

x	0	−2	4	6
y	−2			1

El vértice está en la recta $x = 2$, por lo que el punto (0, –2) es el simétrico del punto de abscisa $x = 4$. Por la misma razón, los puntos de abscisas $x = –2$ y $x = 6$ son simétricos. Por tanto:

x	0	–2	4	6
y	–2	1	–2	1

80. **Razona si es verdadero o falso.**

a) $y = x^2 + 3x - 2$ tiene dos puntos de altura −2 y ninguno de altura 0.

b) $y = -x^2 + x - 4$ no corta al eje X.

c) La abscisa del vértice de $y = x - x^2 + 3$ es $-\frac{1}{2}$.

d) El vértice de la parábola $f(x) = x^2 + 4x - 5$ pertenece también a la recta $g(x) = 2x - 5$.

a) Falso. Primero calculamos el vértice: $V\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-b^2+4ac}{4a}\right)=V\left(-\frac{3}{2}, -\frac{17}{4}\right)=V(-1{,}5; -4{,}25)$

Como $a > 0$ y la ordenada del vértice es menor que –2, la parábola tiene dos puntos de altura –2 y otros dos de altura 0.

b) Verdadero. La solución a la ecuación $-x^2 + x - 4 = 0$ no tiene raíces reales.

c) Falso. La abscisa del vértice es $\frac{-b}{2a}=\frac{-1}{2\cdot(-1)}=\frac{1}{2}$.

d) Verdadero. El punto de vértice es (–2, –9), y $g(-2) = 2 \cdot (-2) - 5 = -9$.

81. **Razona si son verdaderas o falsas las afirmaciones que aparecen a continuación.**

a) La parábola $y = \frac{x - x^2}{5}$ corta al eje Y en el punto (0, −5) y al eje X en el punto (1, 0).

b) $y = (x - 2)^2$ tiene por vértice uno de los puntos de corte con los ejes.

c) $y = x(x + 4) + (x - 1)^2$ tiene como representación una parábola con todas las ordenadas negativas.

a) Falso. Si $x = 0$, entonces el numerador de la fracción es 0, de modo que $y = 0$, así que no pasaría por (0, –5).

b) Verdadero. Su vértice es (2, 0).

c) Falso. Operamos y simplificamos:
$y = x(x+4) + (x-1)^2 \rightarrow y = x^2 + 4x + x^2 - 2x + 1 \rightarrow y = 2x^2 + 2x + 1$

Como $a > 0$ las ramas de la parábola van hacia arriba, de modo que existen puntos cuyas ordenadas son positivas.

82. Determina el valor de *m* para que las siguientes parábolas cumplan estas condiciones.

a) $y = -3x^2 + 2mx + m$ tiene un máximo en $x = 2$.

b) $y = (m-3)x^2 + 2x - 6$ tiene un mínimo en $x = -1$.

a) El vértice tiene abscisa igual a 2, es decir, $\frac{-b}{2a} = 2 \rightarrow \frac{-2m}{2\cdot(-3)} = 2 \rightarrow m = 6$. Y sabemos que es máximo porque $a < 0$. Así, la ecuación de la parábola es $y = -3x^2 + 12x + 6$.

b) Para que sea mínimo, tiene que cumplirse que $a > 0$. Y para que sea la abscisa de vértice:
$\frac{-b}{2a} = -1 \rightarrow \frac{-2}{2\cdot(m-3)} = -1 \rightarrow m = 4$. Con $m = 4$ se cumple que $a > 0$, de modo que sí es mínimo.

Así, la ecuación de la parábola es $y = x^2 + 2x - 6$.

83. Conocemos los siguientes datos de una parábola:

- **Su eje de simetría es el eje *Y*.**
- **Corta al eje *Y* en el punto (0, 3).**
- **Los puntos de corte con el eje *X* son (−1, 0) y (1, 0).**

Calcula la ecuación de la parábola.

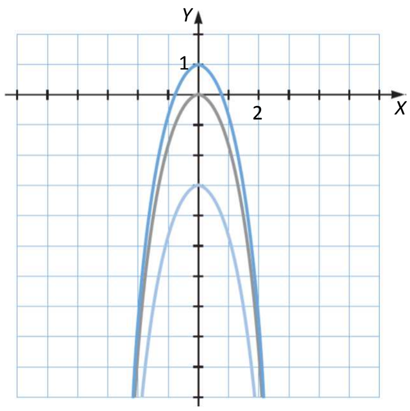
$$x_V = \frac{-b}{2a} = 0 \rightarrow b = 0$$

La ecuación es de la forma $y = ax^2 + c$. Como pasa por los puntos (–1, 0), (1, 0) y (0, 3):

$$\left.\begin{array}{l} a\cdot 1^2 + c = 0 \\ 3 = a\cdot 0^2 + c \end{array}\right\} \rightarrow a = -3, c = 3 \rightarrow y = -3x^2 + 3$$

85. Representa gráficamente la parábola $y = -2x^2 + 1$. A partir de esta gráfica representa las parábolas $y = -2x^2$ e $y = -2x^2 - 3$.

Realizando una traslación de la parábola $y = -2x^2 + 1$ una unidad hacia abajo y cuatro unidades hacia abajo, obtenemos las gráficas de $y = -2x^2$ y $y = -2x^2 - 3$ respectivamente.



86. **A partir de la gráfica de la función $y = x^2$ representa las siguientes funciones.**

a) $y = -x^2$
b) $y = 3x^2$
c) $y = -3x^2$
d) $y = x^2 + 3$
e) $y = x^2 - 3$
f) $y = -x^2 + 3$
g) $y = (x + 3)^2$
h) $y = (x - 3)^2$

a) Es la simétrica respecto del eje *X*.

b) Se multiplican por 3 los valores del eje *Y*, obteniendo una parábola mucho más estrecha.

c) Es la simétrica de la gráfica anterior respecto del eje *X*.

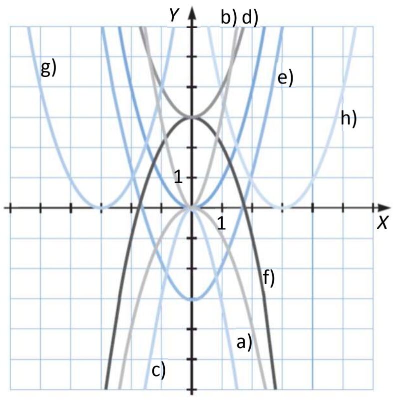
d) Se traslada tres unidades en el eje *Y* hacia arriba.

e) Se traslada tres unidades en el eje *Y* hacia abajo.

f) Se traslada la gráfica simétrica a $y = x^2$ tres unidades en el eje *Y* hacia arriba.

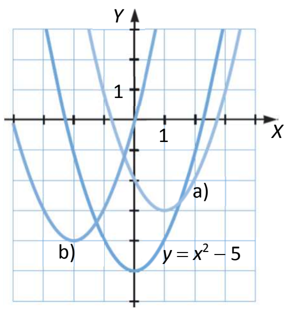
g) Se traslada tres unidades en el eje *X* hacia la izquierda.

h) Se traslada tres unidades en el eje *X* hacia la derecha.



87. **Determina la ecuación de la parábola que resulta de trasladar el vértice de $y = x^2 - 5$ al punto:**

a) (1, −3)
b) (−2, −4)



a) Hay que trasladarla dos unidades hacia arriba en el eje *Y*, y una a la derecha en el eje *X*, de modo que $y = (x - 1)^2 - 5 + 2 = x^2 - 2x + 1 - 3 = x^2 - 2x - 2$.

b) Hay que trasladarla una unidad hacia arriba en el eje *Y*, y dos a la izquierda en el eje *X*, de modo que $y = (x + 2)^2 - 5 + 1 = x^2 + 4x + 4 - 4 = x^2 + 4x$.

88. Halla b y c para que la parábola $y = x^2 + bx + c$ tenga el vértice en el punto (2, 3).

La abscisa del vértice es: $\frac{-b}{2a} = \frac{-b}{2} = 2 \rightarrow b = -4$

La ordenada del vértice es: $\frac{-b^2 + 4ac}{4a} = \frac{-16 + 4c}{4} = 3 \rightarrow c = 7$

89. Calcula a y b para que la parábola $y = ax^2 + bx - 2$ tenga el vértice en (3, 7).

La abscisa del vértice es: $\frac{-b}{2a} = \frac{-b}{2a} = 3 \rightarrow b = -6a$

La ordenada del vértice es: $\frac{-b^2 + 4ac}{4a} = \frac{-b^2 - 8a}{4a} = 7 \rightarrow -b^2 = 36a$

Resolvemos el sistema: $-(-6a)^2 = 36a \rightarrow -36a^2 = 36a \rightarrow -a^2 = a \rightarrow a = 0$ y $a = -1$

Descartamos $a = 0$, pues no tendríamos parábola, de modo que $a = -1$ y entonces $b = 6$.

90. Obtén los valores de a, b y c para que la función $y = ax^2 + bx + c$ pase por (0, 6), (−1, 9) y (4, 14).

Tenemos un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas:

$6 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c \rightarrow c = 6$

$9 = a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + 6 \rightarrow a - b = 3$

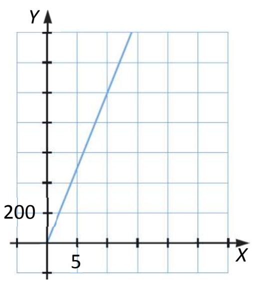
$14 = a \cdot 4^2 + b \cdot 4 + 6 \rightarrow 16a + 4b = 8 \rightarrow 4a + b = 2$

Resolviendo: $a = 1$ y $b = -2$

91. Analiza las siguientes situaciones y concluye cuáles se corresponden con situaciones de proporcionalidad directa. Escribe para cada una la función con la que se expresa y realiza la representación gráfica.

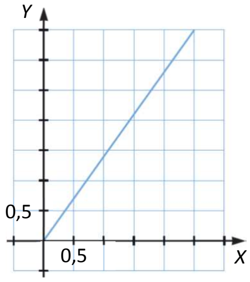
a) Espacio recorrido por un automóvil que circula a velocidad constante de 105 km/h.
b) Llenado de un depósito de combustible, en el que hay aún 10 ℓ, a razón de 8 ℓ/min.
c) Dinero que se debe pagar por comprar naranjas siendo su precio 1,40 €/kg.
d) Sueldo final de un comercial que cobra 600 € fijos más un 15 % de las ventas realizadas.
e) Vaciado de una piscina de 200 m³ a razón de 12 m³ cada 50 minutos.
f) Factura de un taller en la que aparece un IVA del 21 % aplicado al coste del arreglo.

a) Es de proporcionalidad directa y su expresión algebraica es $y = 105x$.



b) No es de proporcionalidad directa.

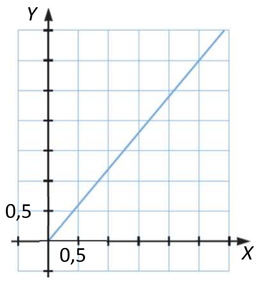
c) Es de proporcionalidad directa y su expresión algebraica es $y = 1{,}4x$.



d) No es de proporcionalidad directa.

e) No es de proporcionalidad directa.

f) Es de proporcionalidad directa y su expresión algebraica es $y = 1{,}21x$.

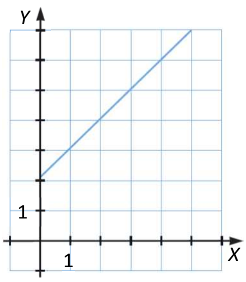


92. **Los taxis de una localidad cobran 2,05 € por la bajada de bandera y 0,98 € por cada kilómetro recorrido.**

a) Estudia y representa la relación *Precio – Distancia recorrida*.

b) ¿Cuántos kilómetros hemos hecho si el viaje nos ha costado 6,95 €?

a) $y = 2{,}05 + 0{,}98x$



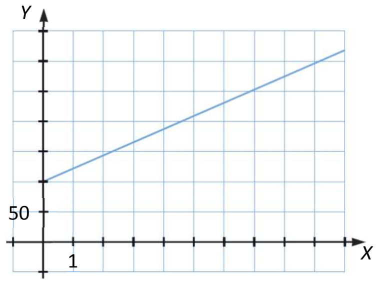
b) $6{,}95 = 2{,}05 + 0{,}98x \longrightarrow x = 5$ km

93. **Un pintor cobra 100 € como tarifa por el desplazamiento hasta la casa que tiene que pintar y 22 € por cada metro cuadrado que pinta.**

a) Estudia y representa la relación *Superficie pintada* y *Precio*.

b) Si la factura de su último trabajo ha ascendido a 2080 €, ¿cuántos metros cuadrados ha pintado?

a) $y = 100 + 22x$



b) $2\,080 = 100 + 22x \rightarrow x = 90$ m^2

94. **El precio de la entrada para una obra de teatro es 35 €, y el coste de cada representación es 5 000 €. Suponiendo que no hay entradas con descuento:**

a) Escribe la función que relaciona el dinero recaudado en cada representación con el número de entradas vendidas.

b) ¿Cuántas entradas como mínimo se deben vender para que la representación no tenga pérdidas?

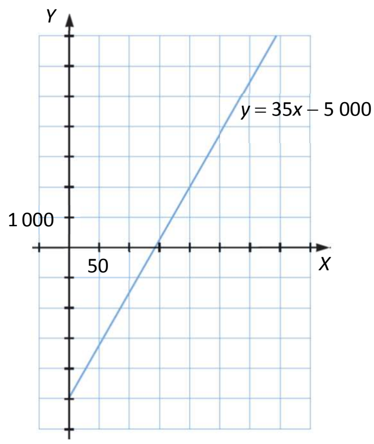
c) ¿Cuál es el beneficio máximo por representación si el teatro tiene 180 butacas?

a) El dinero recaudado en la representación por la venta de x entradas viene dado por la función $y = 35x$.

b) $y = 35x - 5\,000$ es la función que relaciona el número de entradas vendidas con el dinero ganado. Para que la representación no tenga pérdidas se debe cumplir que $y > 0$.

$y = 0 \rightarrow 35x - 5\,000 = 0 \rightarrow x = 142{,}86$.

Por tanto, se deben vender como mínimo 143 entradas.



c) $y = 35 \cdot 180 - 5\,000 = 1\,300$ euros.

95. **Dos obreros levantan un muro de 56 cm de altura en dos horas, y a partir de ese momento, solo trabajará uno de ellos debiendo levantar el muro a razón de 17 cm cada hora.**

a) Encuentra la función que dé la altura del muro en función del tiempo.

b) ¿Qué altura tendrá el muro después de 5 horas?

c) Si el muro debe tener 3,11 m de altura, ¿cuánto tiempo tendrá que trabajar el obrero en solitario?

a) $y = 56 + 17(x - 2)$, para $x > 2$

b) $y = 56 + 17 \cdot 3 = 107$ cm

c) $311 = 56 + 17(x - 2) \rightarrow x = 17$ horas

96. **En unos grandes almacenes aplican un 35 % de descuento al precio de todos sus artículos. Calcula la ecuación de la función que relaciona los precios anteriores a la rebaja con los posteriores.**

$y = (1 - 0{,}35)x = 0{,}65x$

97. **Un establecimiento que se dedica al alquiler de videojuegos establece, para sus clientes, una cuota fija por asociación de 5 € y 2,50 €/semana por cada juego que se alquila. Encuentra la función que calcula la cuantía a pagar por un cliente que se asocia y alquila *x* videojuegos durante *y* semanas.**

Precio $= 5 + 2{,}5xy$

98. **Durante una emergencia, el capitán de un barco dispara una bengala luminosa para advertir a la guardia costera de que necesitan ser rescatados.**

El camino que recorre la bengala describe una parábola. La función que representa el movimiento de la bengala viene dada por la función $y = 80x - 5x^2$, donde *y* es la altura, en metros, que alcanza la bengala, y *x* el tiempo transcurrido, en segundos, desde que se lanza la bengala.

a) ¿Cuál es la altura máxima que alcanza la bengala?

b) ¿Cuántos segundos pasan desde que se disparó la bengala hasta que la señal luminosa alcanza su altura máxima?

Calculamos la abscisa del vértice: $x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-80}{2 \cdot (-5)} = 8$

Entonces, $y_v = 80 \cdot 8 - 5 \cdot 8^2 = 320$

a) Alcanza una altura máxima de 320 m.

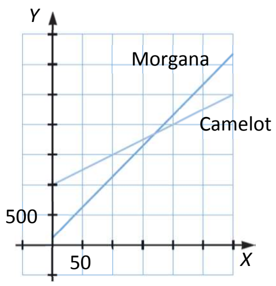
b) Pasan 8 segundos.

100. **Para celebrar una fiesta, un grupo de amigos elige entre dos locales cuyas ofertas son:**

La capacidad máxima en ambos locales es de 300 personas. ¿Cuál de ellos elegirías?

X = número total de asistentes

Camelot: $y = 1\,000 + 5x$ Morgana: $y = 200 + 10x$

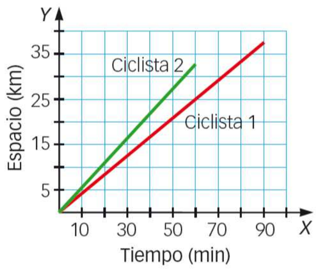


Calculamos el punto de corte entre las dos rectas:

$1\,000 + 5x = 200 + 10x \rightarrow x = 160$

Por tanto, si son menos de 160 invitados, saldrá más barato Morgana; y si son entre 160 y 300 invitados, Camelot.

101. **En la gráfica adjunta se puede ver el espacio recorrido por dos ciclistas que inician un viaje al mismo tiempo y desde el mismo sitio.**



a) Halla la velocidad que lleva cada uno.

b) Determina el tiempo durante el que circula cada uno y la distancia que recorren.

c) Escribe la expresión algebraica de cada recta.

d) Suponiendo que el más veloz saliera 20 minutos después, ¿en qué momento y lugar alcanzaría al otro? Dibuja gráficamente esta situación en los ejes coordenados.

e) Si fuera el más lento el que saliera 5 minutos después, pero aumentara su velocidad un 40%, ¿en qué momento y lugar alcanzaría al otro? Realiza la representación gráfica de esta situación.

a) El ciclista 1 tras 60 minutos ha recorrido 25 km, su velocidad es 25 km/h.

El ciclista 2 tras 60 minutos ha recorrido 32,5 km, su velocidad es 32,5 km/h.

b) El ciclista 1 circula durante 90 minutos y recorre un total de 37,5 km.

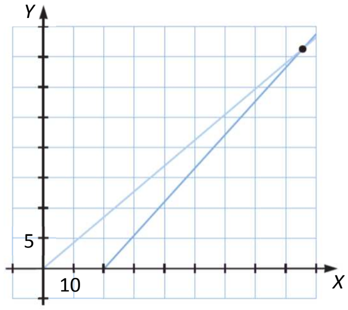
El ciclista 2 circula durante 60 minutos y recorre un total de 32,5 km.

c) Ciclista 1: $y = 25x/60 = 5x/12$

Ciclista 2: $y = 32{,}5x/60 = 13x/24$

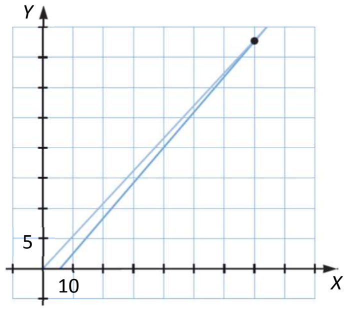
d) $y = 13(x - 20)/24$

$5x/12 = 13(x - 20)/24 \longrightarrow x = 86{,}67$ minutos $\quad y = 36{,}11$ km



e) $y = (5(x - 5)/12) \cdot 1{,}40$

$(5(x - 5)/12) \cdot 1{,}40 = 13x/24 \longrightarrow x = 70$ minutos $\quad y = 37{,}92$ km



102. Un jugador de fútbol se encuentra frente a una portería sin portero, a 6 metros de distancia. Averigua si con el lanzamiento siguiente metería gol: $y = -0{,}07x^2 + 0{,}9x$ (la altura de la portería es de 2,44 m).

a) ¿A qué distancia se debe poner para meter gol?

b) ¿Y para golpear en el larguero?

c) ¿Desde qué distancia el balón irá fuera?

A una distancia de 6 metros, la altura máxima de la trayectoria es:

$y = -0{,}07 \cdot 6^2 + 0{,}9 \cdot 6 = 2{,}88$ m $\longrightarrow$ Como la portería tiene una altura de 2,44 m, el jugador no mete gol.

a) $2{,}44 = -0{,}07x^2 + 0{,}9x \longrightarrow x = 3{,}89$ y $x = 8{,}97$

La distancia máxima que alcanza: $0 = -0{,}07x^2 + 0{,}9x \longrightarrow x = 12{,}86$ m

Se debe poner o a menos de 3,89 metros o a más de 8,97 metros y menos de 12,86 metros.

b) Para golpear el larguero a 3,89 metros justos o 8,97 metros justos.

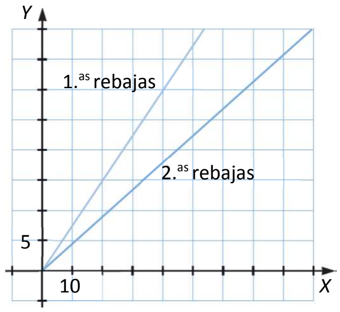
c) A una distancia de entre 3,89 metros y 8,97 metros el balón irá fuera.

103. **En las primeras rebajas de verano se ha aplicado un 25 % de descuento al precio inicial, y en las segundas rebajas se ha aplicado un 40 % de descuento sobre el precio ya rebajado.**

Escribe la expresión algebraica que se corresponde con cada una de estas dos situaciones y represéntalas gráficamente.

1as rebajas: $y = 0{,}75x$

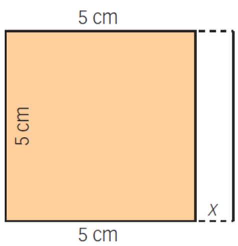
2as rebajas: $y = 0{,}6 \cdot 0{,}75x = 0{,}45x$



104. **A partir de un cuadrado de lado 5 cm se construye un rectángulo según indica la figura. Escribe y representa la función que proporciona, en función de *x*:**

a) El perímetro del rectángulo.

b) El área del rectángulo.



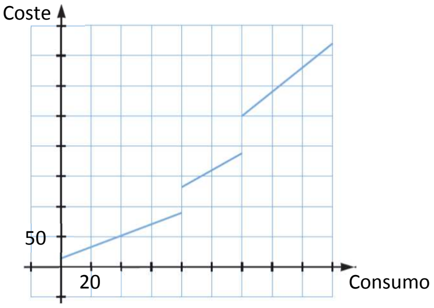
a) $P = 2 \cdot 5 + 2 \cdot (5 + x) = 20 + 2x$

b) $A = 5 \cdot (5 + x) = 25 + 5x$

105. **El coste fijo en la factura mensual del agua es de 10 € al mes. A eso hay que añadir el precio por metro cúbico, que depende del consumo.**

- **Consumos menores que 80 m³: 0,90 €.**
- **Consumos entre 80 m³ y 120 m³: 1,50 €.**
- **Consumos mayores que 120 m³: 2 €.**

Representa sobre los mismos ejes las funciones *Consumo* – *Precio* para los tres tramos de consumo.



DEBES SABER HACER

1. **Clasifica las siguientes funciones.**

a) $y = 4x - 3$

b) $y = 5$

c) $y = 3x^2 + 2$

d) $y = -x(1 - x)$

e) $y = \dfrac{x - 1}{2}$

f) $y = x(3 - x) + 4$

a) Función lineal

b) Función constante

c) Función cuadrática

d) Función cuadrática

e) Función lineal

f) Función cuadrática

2. **Para las funciones lineales del ejercicio anterior:**

a) Indica la pendiente y la ordenada en el origen.

b) Calcula los puntos de corte con los ejes.

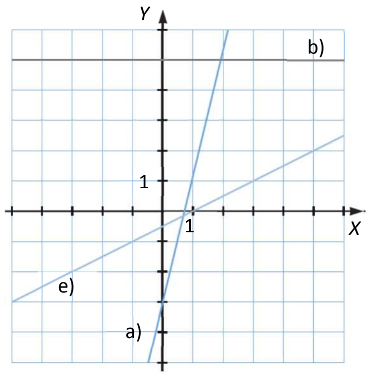
c) Realiza la representación gráfica.

a) $y = 4x - 3$. Pendiente $m = 4$. Ordenada en el origen $n = -3$.
$y = (x - 1)/2$. Pendiente $m = 1/2$. Ordenada en el origen $n = -1/2$.

b) $y = 4x - 3$ corta con el eje X en $(3/4, 0)$ y con el eje Y en el punto $(0, -3)$.

$y = (x - 1)/2$ corta con el eje X en $(1, 0)$ y con el eje Y en el punto $(0, -1/2)$.

c)



3. Para las funciones cuadráticas del primer ejercicio:

a) Halla su vértice indicando si es máximo o mínimo.
b) Indica su eje de simetría.
c) Calcula los puntos de corte con los ejes X e Y.
d) Haz su representación gráfica.

a) $y = 3x^2 + 2 \rightarrow V\left(\frac{-0}{2\cdot 3}, \frac{-0^2 + 4\cdot 3\cdot 2}{4\cdot 3}\right) = V(0, 2)$ es un mínimo.

$y = -x(1-x) = x^2 - x \rightarrow V\left(\frac{-(-1)}{2\cdot 1}, \frac{-(-1)^2 + 4\cdot 1\cdot 0}{4\cdot 1}\right) = V\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$ es un mínimo.

$y = x(3-x) + 4 = -x^2 + 3x + 4 \rightarrow V\left(\frac{-3}{2\cdot(-1)}, \frac{-3^2 + 4\cdot(-1)\cdot 4}{4\cdot(-1)}\right) = V\left(\frac{3}{2}, \frac{25}{4}\right)$ es un máximo.

b) $y = 3x^2 + 2 \rightarrow$ El eje de simetría es la recta $x = 0$.

$y = x^2 - x \rightarrow$ El eje de simetría es la recta $x = \frac{1}{2}$.

$y = -x^2 + 3x + 4 \rightarrow$ El eje de simetría es la recta $x = \frac{3}{2}$.

c) $y = 3x^2 + 2$

Puntos de corte eje X: $3x^2 + 2 = 0 \rightarrow$ No hay puntos de corte.
Punto de corte eje Y: $x = 0 \rightarrow y = 2 \rightarrow$ Punto (0, 2)

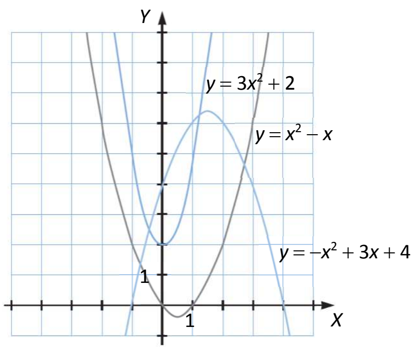
$y = x^2 - x$

Puntos de corte eje X: $x^2 - x = 0 \rightarrow x = 0$ y $x = 1 \rightarrow$ Puntos (0, 0) y (1, 0)
Punto de corte eje Y: $x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow$ Punto (0, 0)

$y = -x^2 + 3x + 4$

Puntos de corte eje X: $-x^2 + 3x + 4 = 0 \rightarrow x = 4$ y $x = -1 \rightarrow$ Puntos (4, 0) y (–1, 0).
Punto de corte eje Y: $x = 0 \rightarrow y = 4 \rightarrow$ Punto (0, 4).

d)



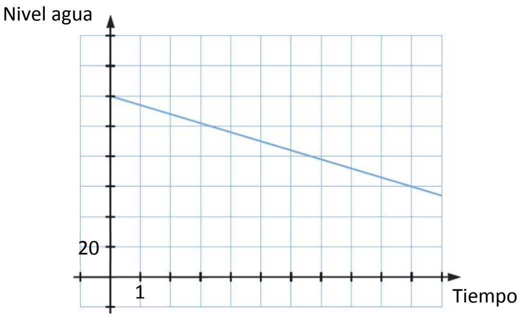
4. Al abrir las compuertas de un estanque, el nivel de agua inicial es de 120 cm, y desciende a razón de 6 cm por minuto.

a) Haz una tabla en la que se refleje el nivel de agua (cm) en función del tiempo (minutos).
b) ¿Qué tipo de función es? Represéntala.
c) ¿Qué nivel de agua habrá a los 15 minutos?
d) ¿Cuánto tarda el estanque en vaciarse?

a)

Tiempo	0	1	2	10	15
Nivel agua	120	114	108	60	30

b) Es una función lineal.



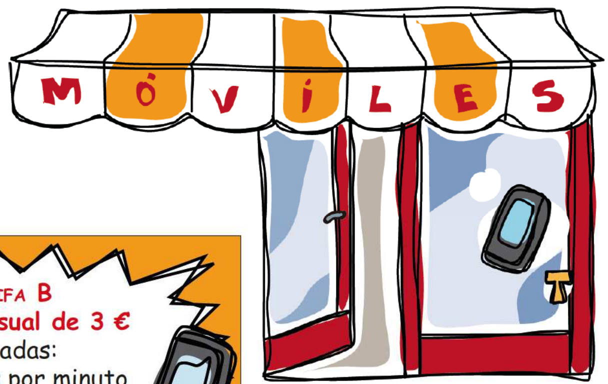
c) Habrá 30 centímetros de altura.

d) $y = 120 - 6x = 0 \rightarrow x = 20$

Tarda en vaciarse 20 minutos.

COMPETENCIA MATEMÁTICA. En la vida cotidiana

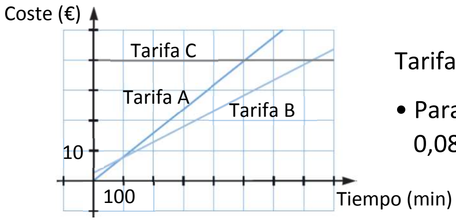
106. **Quiero cambiar de tarifa para mi móvil y he encontrado estas ofertas.**



- ¿Qué tarifa me sale más barata? ¿Cuánto tengo que hablar por teléfono para que la tarifa *A* me salga más barata que la *B*?

Mirando otra compañía he descubierto una tarifa distinta a las anteriores.

- ¿A partir de cuántos minutos me sale más barata la tarifa *C*?
- Si en el recibo de este mes figura que mis llamadas han durado 2 horas y 36 minutos, ¿cuál de las tres tarifas me hubiese convenido más?



Tarifa A: $y = 0{,}08x$ Tarifa B: $y = 3 + 0{,}05x$ Tarifa C: $y = 40$

- Para que A sea más barata que B:
  $0{,}08x = 3 + 0{,}05x \rightarrow x = 100 \rightarrow$ Hay que hablar entre 0 y 100 minutos.

- Para que la tarifa C compense frente a la A:
  $0{,}08x = 40 \rightarrow x = 500 \rightarrow$ Hay que hablar más de 500 minutos.

  Para que la tarifa C compense frente a la B:
  $3 + 0{,}05x = 40 \rightarrow x = 740 \rightarrow$ Hay que hablar más de 740 minutos.

- 2 horas 36 minutos = 156 minutos → La tarifa más barata en es la tarifa B.

FORMAS DE PENSAR. RAZONAMIENTO MATEMÁTICO

107. Estudia si se pueden representar una función lineal y otra de proporcionalidad directa que cumplan estas características.

a) Se cortan en el origen.
b) No se cortan.
c) Sus pendientes son números uno opuesto del otro.
d) Sus ordenadas en el origen son iguales.

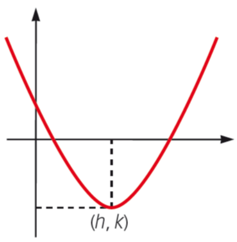
a) No se puede. Si se cortasen en el origen, las dos serían de proporcionalidad directa.

b) Sí se puede, siempre y cuando tengan la misma pendiente (paralelas).

c) Sí se puede. Por ejemplo $y = 4x$ como función de proporcionalidad directa y $y = -4x + 1$ como función lineal.

d) No se puede. La ordenada en el origen de una función de proporcionalidad directa es 0, y si la función lineal tuviera esa ordenada en el origen, sería función de proporcionalidad directa.

108. La representación gráfica de la función cuadrática $y = ax^2 + bx + c$ es una parábola cuyo vértice tiene por coordenadas (h, k).



a) Comprueba que la expresión algebraica de esta función se puede escribir de la siguiente forma:

$$y = a(x - h)^2 + k$$

b) ¿Cuál es la ecuación del eje de esta parábola?

a) $\left.\begin{array}{l} x_V = \dfrac{-b}{2a} = h \\ y_V = ah^2 + bh + c = k \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} b = -2ah \\ ah^2 - 2ah^2 + c = k \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} b = -2ah \\ c = ah^2 + k \end{array}\right\} \xrightarrow{y=ax^2+bx+c} y = ax^2 - 2ahx + ah^2 + k \rightarrow y = a(x-h)^2 + k$

b) $x = h$

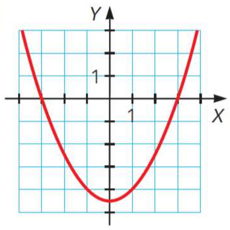
109. **Una de las siguientes parábolas es la que resulta de mover la gráfica de la función $y = 3x^2 + 1$ cuatro unidades hacia arriba y seis unidades a la izquierda. ¿Cuál es?**

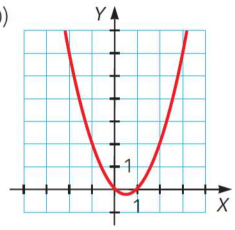
a) $y = 3(x - 4)^2 + 6$
c) $y = 3(x - 6)^2 + 5$
b) $y = 3(x + 4)^2 - 6$
d) $y = 3(x + 6)^2 + 5$

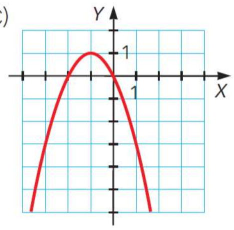
Al mover 6 unidades a la izquierda tenemos $3(x + 6)^2 + 1$ y al mover cuatro unidades hacia arriba tenemos $3(x + 6)^2 + 1 + 4 = 3(x + 6)^2 + 5$.

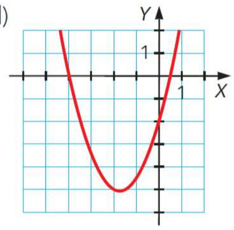
La parábola es d).

110. **Determina, en cada caso, la ecuación de la función cuadrática cuya representación gráfica es:**

a)


b)


c)


d)


a) Como en el vértice $x = 0$, tenemos que $b = 0$. Además, en ese caso $a \cdot 0^2 + c = -9/2$, así que $c = -9/2$.

Calculamos a, sabiendo que $0 = a \cdot 3^2 - 9/2 \rightarrow a = 1/2$.

$$y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{9}{2}$$

b) Se cumple que $a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 0 \rightarrow c = 0$.

Además, $a \cdot 1^2 + b \cdot 1 = 0 \rightarrow a + b = 0$

Y $a \cdot 2^2 + b \cdot 2 = 2 \rightarrow 4a + 2b = 2 \rightarrow 2a + b = 1$

Resolviendo, $a = 1$ y $b = -1$.

$y = x^2 - x$

c) Se cumple que $a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 0 \rightarrow c = 0$.

Además, $a \cdot (-2)^2 + b \cdot (-2) = 0 \rightarrow 4a - 2b = 0 \rightarrow b = 2a$

Y $a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) = 1 \rightarrow a - b = 1$

Resolviendo, $a = -1$ y $b = -2$.

$y = -x^2 - 2x$

d) Se cumple que $a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = -2 \rightarrow c = -2$.

Además, $a \cdot (-4)^2 + b \cdot (-4) - 2 = 0 \rightarrow 16a - 4b - 2 = 0$

Y también se cumple que $a \cdot 0{,}5^2 + b \cdot 0{,}5 - 2 = 0 \rightarrow 0{,}25a + 0{,}5b - 2 = 0$

Resolviendo, tenemos que $a = 1$ y $b = 3{,}5$.

$y = x^2 + 3{,}5x - 2$

PRUEBAS PISA

111. **Por razones de salud la gente debería limitar sus esfuerzos, por ejemplo al hacer deporte, para no superar una determinada frecuencia cardiaca.**

Durante años la relación entre la máxima frecuencia cardiaca recomendada para una persona y su edad se describía mediante la fórmula siguiente:

Máxima frecuencia cardiaca recomendada = 220 − edad

Investigaciones recientes han demostrado que debería modificarse esta fórmula ligeramente. La nueva fórmula es la siguiente:

Máxima frecuencia cardiaca recomendada = 208 − (0,7 × edad)

- Un artículo de periódico afirma:

  El resultado de usar la nueva fórmula en lugar de la antigua es que el máximo número recomendado de latidos cardiacos por minuto disminuye ligeramente para los jóvenes y aumenta ligeramente para los mayores.

  ¿A partir de qué edad aumenta la máxima frecuencia cardiaca recomendada como resultado de introducir la nueva fórmula? Muestra tus cálculos.

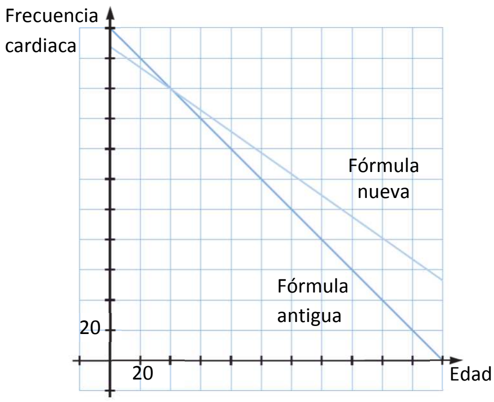
- La fórmula para la *máxima frecuencia cardiaca recomendada = 208 − (0,7 × edad)* se aplica también para determinar cuándo es más eficaz el ejercicio físico. Las investigaciones han demostrado que el entrenamiento físico es más eficaz cuando la frecuencia cardiaca alcanza el 80 % del valor máximo recomendado.

  Escribe una fórmula para hallar, en función de la edad, la frecuencia cardiaca recomendada para que el ejercicio físico sea más efectivo.

(Prueba PISA 2006)

- Veamos cuándo son iguales las dos frecuencias cardiacas máximas recomendadas:

  $220 - x = 208 - 0{,}7x \rightarrow x = 40$



A partir de 40 años la nueva frecuencia cardiaca máxima recomendada aumenta con respecto a la anterior.

- La fórmula para ver la frecuencia cardiaca para un ejercicio más efectivo es:

  $y = 0{,}8\,(208 - 0{,}7x) = 166{,}4 - 0{,}56x$