Progresiones

3

CLAVES PARA EMPEZAR

1. Expresa algebraicamente estas relaciones.

a) El cuádruple de un número.

b) La tercera parte de un número más 1.

c) La quinta parte de un número impar.

d) El cuadrado de la mitad de un número.

a) $4n$ b) $\frac{n}{3}+1$ c) $\frac{2n+1}{5}$ d) $\left(\frac{n}{2}\right)^2$

2. Resuelve.

a) $6^5 : 6^3$ c) $\left(\frac{3}{4}\right)^7 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^5$ e) $\left(\frac{2}{5}\right)^9 : \left(\frac{2}{5}\right)^3$

b) $(-2)^5$ d) $(-2)^6$ f) $((-2)^3)^5$

a) $6^5 : 6^3 = 6^2$

b) $(-2)^5 = -32$

c) $\left(\frac{3}{4}\right)^7 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^5 = \left(\frac{3}{4}\right)^{12}$

d) $(-2)^6 = 64$

e) $\left(\frac{2}{5}\right)^9 : \left(\frac{2}{5}\right)^3 = \left(\frac{2}{5}\right)^6$

f) $-2\ {}^{3}\ {}^{5} = -2^{15}$

VIDA COTIDIANA

En 1985, Hillebrand tecleó en su máquina de escribir varias frases comunes. Concluyó que la mayoría tenían menos de 160 caracteres, que finalmente se fijó como la longitud máxima para un SMS.

- **Mandamos el SMS: «MAÑANA VOY A LA FIESTA». El destinatario añade: «Y YO», y lo reenvía, repitiéndose este proceso varias veces. ¿Cuántos amigos se añaden a la fiesta hasta lograr la longitud máxima de un SMS?**

Contando espacios, «MAÑANA VOY A LA FIESTA» tiene 22 caracteres.

Además, hay que contar con un espacio final para la respuesta.

Cada respuesta «Y YO» contiene 4 caracteres.

Además, hay que contar con un espacio final para la siguiente respuesta.

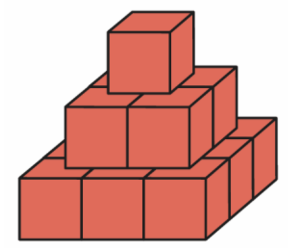
$22 + 1 + 5n = 160$

$5n = 137 \rightarrow n = 27,4$

Como mucho se añaden 27 personas.

RESUELVE EL RETO

Construimos pirámides con cubos. Si tenemos una bolsa con 140, ¿hasta qué altura podemos llegar?



$1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 + 49 = 140 \rightarrow$ Podemos hacer una torre de 7 pisos.

Algunos números se pueden expresar como la suma de una sucesión de números consecutivos:

$3 = 2 + 1$

$18 = 3 + 4 + 5 + 6$

¿Puedes escribir las 5 primeras potencias de 2 de esta forma?

No se puede.

Una ameba se reproduce cada minuto dividiéndose en dos amebas. Si dos amebas, reproduciéndose, llenan un tubo de ensayo en 2 h, ¿cuánto tardaría una ameba sola?

Si tenemos 2 amebas, en el primer minuto habrá $2 \cdot 2^1 = 4$ amebas. En el segundo minuto habrá $2 \cdot 2^2 = 8$ amebas, y en el minuto 120 habrá $2 \cdot 2^{120} = 2^{121}$ amebas.

Si al principio hay 1 ameba, en el primer minuto habrá 2^1 amebas, en el segundo 2^2, y en el minuto 120 habrá 2^{120}. Para llegar a 2^{121} amebas tienen que pasar 2 horas y 1 minuto. Así, en el minuto 121 habrá 2^{121} amebas.

Si tengo 50 € y cada día gasto la mitad del dinero que tengo, ¿cuándo gastaré mi última moneda?

Gasto día 1: 25 €	Quedan: 25 €
Gasto día 2: 12,50 €	Quedan: 12,50 €
Gasto día 3: 6,25 €	Quedan: 6,25 €
Gasto día 4: 3,125 = 3,13 €	Quedan: 3,12 €
Gasto día 5: 1,56 €	Quedan: 1,56 €
Gasto día 6: 0,78 €	Quedan: 0,78 €
Gasto día 7: 0,39 €	Quedan: 0,39 €
Gasto día 8: 0,195 = 0,20 €	Quedan: 0,19 €
Gasto día 9: 0,095 = 0,10 €	Quedan: 0,09 €
Gasto día 10: 0,045 = 0,05 €	Quedan: 0,04 €
Gasto día 11: 0,02 €	Quedan: 0,02 €
Gasto día 12: 0,01 €	Quedan: 0,01 €
Gasto día 13: 0,005 = 0,01 €	Quedan: 0 €

La última moneda se gasta el día 13.

ACTIVIDADES

1. Di cuáles son los términos a_1, a_3 y a_6 de las siguientes sucesiones.

a) 6, 7, 8, 9, 10, …

b) 0, −2, −4, −6, −8, …

c) 1; 0,1; 0,01; 0,001; 0,0001; …

d) −1, −1, −1, −1, −1, …

e) −2, −4, −8, −16, −32, …

a) $a_1 = 6$, $a_3 = 8$, $a_6 = 11$

b) $a_1 = 0$, $a_3 = -4$, $a_6 = -10$

c) $a_1 = 1$, $a_3 = 0{,}01$, $a_6 = 0{,}00001$

d) $a_1 = -1$, $a_3 = -1$, $a_6 = -1$

e) $a_1 = -2$, $a_3 = -8$, $a_6 = -64$

2. Escribe la regla de formación y los 6 siguientes términos de cada una de las sucesiones.

a) 3, 6, 12, 24, …

b) 3, 7, 11, 15, …

c) 3, −1, −5, −9, …

d) 3, 4, 7, 11, 18, 29, …

a) Cada término es el doble que el anterior: $a_5 = 48$, $a_6 = 96$, $a_7 = 192$, $a_8 = 384$, $a_9 = 768$, $a_{10} = 1\,536$.

b) Cada término es igual al anterior más 4: $a_5 = 19$, $a_6 = 23$, $a_7 = 27$, $a_8 = 31$, $a_9 = 35$, $a_{10} = 39$.

c) Cada término es igual al anterior menos 4: $a_5 = -13$, $a_6 = -17$, $a_7 = -21$, $a_8 = -25$, $a_9 = -29$, $a_{10} = -33$.

d) El primer término es 3, el segundo es 4, y el resto es la suma de los dos términos anteriores:
$a_5 = 47$, $a_6 = 76$, $a_7 = 123$, $a_8 = 199$, $a_9 = 322$, $a_{10} = 521$.

3. Haz una sucesión con términos $a_1 = 2$, $a_2 = 3$ y $a_3 = 4$, siendo los siguientes términos la suma de los tres anteriores.

2, 3, 4, 9, 16, 29, 54, 99, …

4. Escribe los 8 primeros términos de las sucesiones que tienen como término general las siguientes expresiones.

a) $a_n = n + 3$

b) $a_n = n^2 - 9$

c) $a_n = \dfrac{n}{2}$

d) $a_n = \dfrac{n+5}{n+2}$

a) 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11

b) −8, −5, 0, 7, 16, 27, 40, 55

c) $\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, 4$

d) $2, \frac{7}{4}, \frac{8}{5}, \frac{9}{6} = \frac{3}{2}, \frac{10}{7}, \frac{11}{8}, \frac{12}{9} = \frac{4}{3}, \frac{13}{10}$

5. Obtén los términos tercero, quinto y décimo de estas sucesiones.

a) $a_n = 2 \cdot a_{n-1} + 3$ siendo $a_1 = -3$

b) $a_n = a_{n-1} + 3 \cdot a_{n-2}$ siendo $a_1 = 2$ y $a_2 = 5$

a) $a_3 = -3$, $a_5 = -3$, $a_{10} = -3$

b) $a_3 = 11$, $a_5 = 59$, $a_{10} = 3\,842$

6. **Determina el término general de la sucesión 1, 3, 5, 9, 15, 25, 41, …**

$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + 1$

7. **Determina si las siguientes sucesiones son progresiones aritméticas.**

a) $-10, -20, -40, -80, \dots$

b) $-4, 0, 4, 8, \dots$

c) $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \dots$

d) $6, 9, 15, 24, 39, \dots$

a) No es una progresión aritmética.

b) Es una progresión aritmética con $d = 4$.

c) Es una progresión aritmética con $d = \frac{1}{3}$.

d) No es una progresión aritmética.

8. **Obtén la diferencia y el término primero de estas progresiones.**

a) $a_n = 5n - 11$

b) $a_n = -3n + 10$

a) La sucesión es $-6, -1, 4, \dots$ por lo que $d = 5$ y $a_1 = -6$.

b) La sucesión es $7, 4, 1, \dots$ por lo que $d = -3$ y $a_1 = 7$.

9. **Calcula el término general de la progresión aritmética que tiene estos dos términos.**

$$a_5 = \frac{-17}{4} \qquad a_{12} = \frac{-45}{4}$$

$$a_{12} = a_5 + 7d \rightarrow -\frac{45}{4} = -\frac{17}{4} + 7d \rightarrow d = -1$$

$$a_5 = a_1 + (n-1)d \rightarrow -\frac{17}{4} = a_1 + (5-1)\cdot(-1) \rightarrow a_1 = -\frac{1}{4}$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d = -\frac{1}{4} + (n-1)\cdot(-1)$$

10. **Halla la diferencia de estas progresiones aritméticas.**

a) $3, 5, 7, 9, \dots$

b) $-1, -6, -11, -16, \dots$

c) $\frac{5}{3}, \frac{7}{3}, 3, \frac{11}{3}, \dots$

a) $d = 2$

b) $d = -5$

c) $d = \frac{2}{3}$

11. **Averigua la diferencia de las progresiones aritméticas cuyo término general es:**

a) $a_n = 4n - 5$

b) $a_n = \frac{n+1}{2}$

c) $a_n = -6n + 1$

d) $a_n = \frac{3-n}{4}$

a) $d = 4$

b) $d = \frac{1}{2}$

c) $d = -6$

d) $d = -\frac{1}{4}$

12. **Calcula la diferencia de las progresiones, conocidos dos términos.**

a) $\begin{cases} a_4 = 12 \\ a_7 = 21 \end{cases}$ c) $\begin{cases} a_5 = -60 \\ a_{11} = 60 \end{cases}$

b) $\begin{cases} a_6 = -8 \\ a_{13} = 34 \end{cases}$ d) $\begin{cases} a_4 = 3 \\ a_{20} = 83 \end{cases}$

a) $21 = 12 + 3d \rightarrow d = 3$ c) $60 = -60 + 6d \rightarrow d = 20$

b) $34 = -8 + 7d \rightarrow d = 6$ d) $83 = 3 + 16d \rightarrow d = 5$

13. **En una progresión aritmética, el primer término es 5 y la diferencia es −2. Determina a_n.**

$a_n = 5 + (n-1)\cdot(-2) = -2n + 7$

14. **En una progresión aritmética, el tercer término es 9 y la diferencia es 7. Halla el primer término y el término general.**

$a_3 = a_1 + (3-1)\cdot d \rightarrow 9 = a_1 + 2\cdot 7 \rightarrow a_1 = -5$

$a_n = -5 + (n-1)\cdot 7 = 7n - 12$

15. **Encuentra el término general de estas progresiones aritméticas.**

a) $-7, -2, 3, 8, \ldots$ d) $\frac{1}{10}, \frac{1}{5}, \frac{3}{10}, \frac{2}{5}, \ldots$

b) $\frac{-3}{2}, 0, \frac{3}{2}, 3, \ldots$ e) $50, 40, 30, 20, \ldots$

c) $5, 12, 19, 26, \ldots$ f) $\frac{7}{4}, \frac{7}{2}, \frac{21}{4}, 7, \ldots$

a) $a_n = -7 + (n-1)\cdot 5 = 5n - 12$

b) $a_n = -\frac{3}{2} + (n-1)\cdot\frac{3}{2} = \frac{3}{2}n - 3$

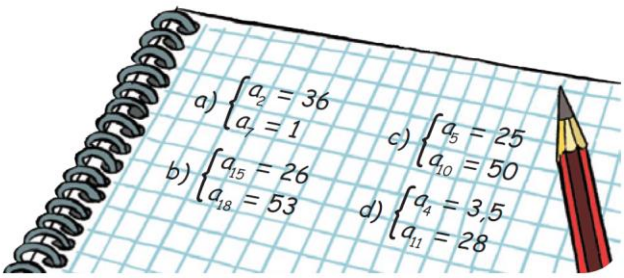
c) $a_n = 5 + (n-1)\cdot 7 = 7n - 2$

d) $a_n = \frac{1}{10} + (n-1)\cdot\frac{1}{10} = \frac{1}{10}n$

e) $a_n = 50 + (n-1)\cdot(-10) = -10n + 60$

f) $a_n = \frac{7}{4} + (n-1)\cdot\frac{7}{4} = \frac{7}{4}n$

16. **Escribe el término general para cada una de estas progresiones aritméticas.**



a) $1 = 36 + 5d \rightarrow d = -7;$ $a_1 = 43;$ $a_n = 43 + (n-1)\cdot(-7) = -7n + 50$

b) $53 = 26 + 3d \rightarrow d = 9;$ $a_1 = -100;$ $a_n = -100 + (n-1)\cdot 9 = 9n - 109$

c) $50 = 25 + 5d \rightarrow d = 5;$ $a_1 = 5;$ $a_n = 5 + (n-1)\cdot 5 = 5n$

d) $28 = 3,5 + 7d \rightarrow d = 3,5;$ $a_1 = -7;$ $a_n = -7 + (n-1)\cdot 3,5 = 3,5n - 10,5$

17. **Calcula la suma de los 25 primeros términos de estas progresiones aritméticas.**

a) 2, 6, 10, 14, … c) 50, 40, 30, 20, …

b) $\frac{1}{10}, \frac{1}{5}, \frac{3}{10}, \frac{2}{5}, \dots$ d) $\frac{5}{3}, \frac{7}{3}, 3, \frac{11}{3}, \dots$

a) $a_1 = 2 \quad d = 4 \quad a_{25} = 98 \rightarrow S_{25} = \frac{a_1 + a_{25} \cdot 25}{2} \rightarrow S_{25} = \frac{2 + 98 \cdot 25}{2} = 1250$

b) $a_1 = \frac{1}{10} \quad d = \frac{1}{10} \quad a_{25} = \frac{5}{2} \rightarrow S_{25} = \frac{a_1 + a_{25} \cdot 25}{2} \rightarrow S_{25} = \frac{\left(\frac{1}{10} + \frac{5}{2}\right) \cdot 25}{2} = \frac{65}{2}$

c) $a_1 = 50 \quad d = -10 \quad a_{25} = -190 \rightarrow S_{25} = \frac{a_1 + a_{25} \cdot 25}{2} \rightarrow S_{25} = \frac{50 - 190 \cdot 25}{2} = -1750$

d) $a_1 = \frac{5}{3} \quad d = \frac{2}{3} \quad a_{25} = \frac{53}{3} \rightarrow S_{25} = \frac{a_1 + a_{25} \cdot 25}{2} \rightarrow S_{25} = \frac{\left(\frac{5}{3} + \frac{53}{3}\right) \cdot 25}{2} = \frac{725}{3}$

18. **Halla la suma de los 100 primeros términos de las progresiones aritméticas con estos términos generales.**

a) $a_n = 2n - 7$ b) $a_n = \frac{4n + 5}{3}$

a) $S_{100} = \frac{a_1 + a_{100} \cdot 100}{2} \rightarrow S_{100} = \frac{-5 + 193 \cdot 100}{2} = 9400$

b) $S_{100} = \frac{a_1 + a_{100} \cdot 100}{2} \rightarrow S_{100} = \frac{3 + 135 \cdot 100}{2} = 6900$

19. **De una progresión aritmética se sabe que los términos cuarto y quinto suman 28. ¿Cuánto sumarán los 8 primeros términos?**

$a_1 + a_8 + a_4 + a_5 = 28 \rightarrow S_8 = \frac{a_1 + a_8 \cdot 8}{2} = \frac{a_4 + a_5 \cdot 8}{2} = 28 \cdot 4 = 112$

20. **Halla la suma de los 20 primeros términos de las siguientes progresiones aritméticas.**

a) $\begin{cases} a_1 = 24 \\ d = -3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} a_{24} = 82 \\ a_{31} = 12 \end{cases}$

b) $\begin{cases} a_1 = 44 \\ a_3 = 40 \end{cases}$ d) $\begin{cases} a_7 = 2 \\ d = 0{,}5 \end{cases}$

a) $a_{20} = 24 + 19 \cdot (-3) = -33 \rightarrow S_{20} = \frac{24 - 33 \cdot 20}{2} = -90$

b) $a_{20} = 44 + 19 \cdot (-2) = 6 \rightarrow S_{20} = \frac{44 + 6 \cdot 20}{2} = 500$

c) $a_1 = 312 \quad a_{20} = 122 \rightarrow S_{20} = \frac{312 + 122 \cdot 20}{2} = 4340$

d) $a_1 = -1 \quad a_{20} = \frac{17}{2} \rightarrow S_{20} = \frac{\left(-1 + \frac{17}{2}\right) \cdot 20}{2} = 75$

21. **Halla la suma de los 18 primeros términos de las siguientes progresiones.**

a) 1, 7, 13, 19, …

b) $\frac{5}{2}, \frac{17}{6}, \frac{19}{6}, \frac{7}{2}, \ldots$

c) $-12, -9, -6, -3, \ldots$

d) $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \ldots$

e) $\frac{-3}{4}, \frac{-7}{4}, \frac{-11}{4}, \frac{-15}{4}, \ldots$

f) 145, 130, 115,100, …

a) $S_{18} = \frac{a_1 + a_{18} \ \cdot 18}{2} \rightarrow S_{18} = \frac{1 + 103 \ \cdot 18}{2} = 936$

b) $S_{18} = \frac{a_1 + a_{18} \ \cdot 18}{2} \rightarrow S_{18} = \frac{\left(\frac{5}{2} + \frac{49}{6}\right) \cdot 18}{2} = 96$

c) $S_{18} = \frac{a_1 + a_{18} \ \cdot 18}{2} \rightarrow S_{18} = \frac{-12 + 39 \ \cdot 18}{2} = 243$

d) $S_{18} = \frac{a_1 + a_{18} \ \cdot 18}{2} \rightarrow S_{18} = \frac{\left(\frac{1}{3} + \frac{18}{3}\right) \cdot 18}{2} = 57$

e) $S_{18} = \frac{a_1 + a_{18} \ \cdot 18}{2} \rightarrow S_{18} = \frac{\left(\frac{-3}{4} + \frac{-71}{4}\right) \cdot 18}{2} = \frac{-333}{2}$

f) $S_{18} = \frac{a_1 + a_{18} \ \cdot 18}{2} \rightarrow S_{18} = \frac{145 - 110 \ \cdot 18}{2} = 315$

22. **Dada la progresión aritmética con $a_n = 10 - 5n$, halla la suma de los 25 primeros términos.**

$$S_{25} = \frac{a_1 + a_{25} \ \cdot 25}{2} \rightarrow S_{25} = \frac{5 - 115 \ \cdot 25}{2} = 1\,375$$

23. **Halla la suma de los 45 primeros términos de las progresiones cuyos términos generales son los que se indican a continuación.**

a) $a_n = 4n - 3$

b) $a_n = \frac{n - 4}{3}$

c) $a_n = -3n + 5$

d) $a_n = \frac{8 - n}{5}$

a) $S_{45} = \frac{a_1 + a_{45} \ \cdot 45}{2} \rightarrow S_{45} = \frac{1 + 177 \ \cdot 45}{2} = 4\,005$

b) $S_{45} = \frac{a_1 + a_{45} \ \cdot 45}{2} \rightarrow S_{45} = \frac{\left(-1 + \frac{41}{3}\right) \cdot 45}{2} = 285$

c) $S_{45} = \frac{a_1 + a_{45} \ \cdot 45}{2} \rightarrow S_{45} = \frac{2 - 130 \ \cdot 45}{2} = 2880$

d) $S_{45} = \frac{a_1 + a_{45} \ \cdot 45}{2} \rightarrow S_{45} = \frac{\left(\frac{7}{5} - \frac{37}{5}\right) \cdot 45}{2} = -135$

24. **Calcula la suma de los 30 primeros términos de una progresión aritmética sabiendo que la suma de los 15 primeros es 240 y $a_1 = -5$.**

$$S_{15} = 240 = \frac{-5+a_{15}\ \cdot 15}{2} \rightarrow a_{15} = 37$$

$$a_{15} = 37 = -5 + 14d \rightarrow d = 3, a_{30} = -5 + 29 \cdot 3 = 82$$

$$S_{30} = \frac{a_1 + a_{30}\ \cdot 30}{2} = \frac{-5+82\ \cdot 30}{2} = 1155$$

25. **Calcula la suma de los 50 primeros términos de una progresión aritmética sabiendo que la suma de los 20 primeros es -160 y $a_{20} = -27$.**

$$S_{20} = -160 = \frac{a_1 - 27\ \cdot 20}{2} \rightarrow a_1 = 11$$

$$a_{20} = -27 = 11 + 19d \rightarrow d = -2, a_{50} = 11 + 49 \cdot (-2) = -87$$

$$S_{50} = \frac{a_1 + a_{50}\ \cdot 50}{2} = \frac{11-87\ \cdot 50}{2} = -1900$$

26. **Quiero colocar 7 filas de macetas de manera que en la primera fila pondré 3 macetas, y cada una de las siguientes filas tendrá 3 macetas más que la anterior.**

¿Cuántas macetas colocaré en total?

$$a_1 = 3, d = 3, a_7 = 3 + 6 \cdot 3 = 21$$

$$S_7 = \frac{a_1 + a_7\ \cdot 7}{2} = \frac{3+21\ \cdot 7}{2} = 84$$

27. **¿Son progresiones geométricas?**

a) 1, 4, 8, 12, …

b) $\frac{-1}{2}, \frac{-5}{4}, \frac{-25}{8}, \frac{-125}{16}, \ldots$

c) 1, -4, 16, -64, …

d) -1, -3, -9, -12, …

e) $\frac{1}{81}, \frac{1}{27}, \frac{1}{9}, \frac{1}{3}, \ldots$

Son progresiones geométricas las sucesiones de los apartados b), c) y e).

28. **Obtén el primer y el tercer término de:**

a) $a_n = (-2) \cdot 3^n$

b) $a_n = 5 \cdot 2^{n-1}$

c) $a_n = \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

d) $a_n = 3 \cdot (-1)^{n+2}$

a) $a_1 = (-2) \cdot 3^1 = -6$ $\qquad a_3 = (-2) \cdot 3^3 = -54$

b) $a_1 = 5 \cdot 2^{1-1} = 5$ $\qquad a_3 = 5 \cdot 2^{3-1} = 20$

c) $a_1 = \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{1+1} = \frac{1}{20}$ $\qquad a_3 = \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{3+1} = \frac{1}{80}$

d) $a_1 = 3 \cdot (-1)^{1+2} = -3$ $\qquad a_3 = 3 \cdot (-1)^{3+2} = -3$

29. **Calcula el término general de la progresión geométrica que tiene estos dos términos.**

$$a_5 = \frac{8}{5} \qquad a_9 = \frac{128}{5}$$

$a_9 = a_5 \cdot r^4 \to \frac{128}{5} = \frac{8}{5} \cdot r^4 \to r = 2$

Habitualmente daremos la solución obtenida tomando la raíz positiva:

Si $r = 2$ y $a_1 = \frac{1}{10} \to a_n = \frac{1}{10} \cdot 2^{n-1} = \frac{2^{n-2}}{5}$

Análogamente, se obtendría la solución tomando la raíz negativa:

Si $r = -2$ y $a_1 = \frac{1}{10} \to a_n = \frac{1}{10} \cdot -2^{\,n-1} = \frac{-2^{\,n-2}}{5}$

30. **Teniendo en cuenta que son progresiones geométricas, halla el término general y el término a_6.**

a) 5, 15, 45, …

b) 3, $3\sqrt{3}$, 9, $9\sqrt{3}$, …

a) $a_n = 5 \cdot 3^{n-1} \to a_6 = 5 \cdot 3^{6-1} = 1215$

b) $a_n = 3 \cdot \sqrt{3}^{\,n-1} = \sqrt{3}^{\,n+1} \to a_6 = \sqrt{3}^{\,7} = 27\sqrt{3}$

31. **En una progresión geométrica, $a_2 = 2$ y $a_4 = \frac{1}{2}$; calcula a_n y a_5.**

$\frac{1}{2} = 2r^2 \to r = \pm\frac{1}{2}$

Si $r = \frac{1}{2}, \to a_1 = 4, a_n = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ y $a_5 = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{4}$

Análogamente, se obtendría la solución tomando la raíz negativa.

32. Halla la razón de estas progresiones geométricas.

a) 1, 4, 16, 64, …

b) $-3, -3\sqrt{2}, -6, -6\sqrt{2}, \ldots$

c) $\frac{-1}{2}, \frac{-3}{2}, \frac{-9}{2}, \frac{-27}{2}, \ldots$

d) $-4, 12, -36, 108, \ldots$

a) $r = \frac{4}{1} = \frac{16}{4} = \frac{64}{16} = 4$

b) $r = \frac{-3\sqrt{2}}{-3} = \frac{-6}{-3\sqrt{2}} = \frac{-6\sqrt{2}}{-6} = \sqrt{2}$

c) $r = \frac{\frac{-3}{2}}{\frac{-1}{2}} = \frac{\frac{-9}{2}}{\frac{-3}{2}} = \frac{\frac{-27}{2}}{\frac{-9}{2}} = 3$

d) $r = \frac{12}{-4} = \frac{-36}{12} = \frac{108}{-36} = -3$

33. Averigua la razón de las progresiones geométricas cuyo término general es el que se da, indicando para cada una de ellas el primer término.

a) $a_n = 4 \cdot (-2)^{n-1}$

b) $a_n = \frac{1}{7} \cdot 5^n$

c) $a_n = -6 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$

d) $a_n = 3 \cdot 2^{n-2}$

a) $a_1 = 4 \cdot (-2)^0 = 4$; $r = -2$

b) $a_1 = \frac{1}{7} \cdot 5^1 = \frac{5}{7}$; $r = 5$

c) $a_1 = -6 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = -\frac{2}{3}$; $r = \frac{1}{3}$

d) $a_1 = 3 \cdot 2^{-1} = \frac{3}{2}$; $r = 2$

34. Calcula la razón de estas progresiones geométricas de las que conocemos:

a) $\begin{cases} a_3 = 2 \\ a_5 = 50 \end{cases}$

b) $\begin{cases} a_6 = \frac{-4}{9} \\ a_{10} = \frac{-9}{4} \end{cases}$

c) $\begin{cases} a_5 = -64 \\ a_8 = -1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} a_2 = 48 \\ a_7 = \frac{16}{81} \end{cases}$

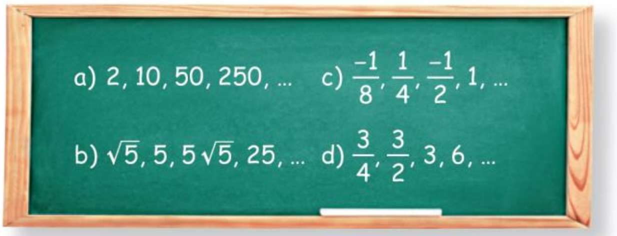
a) $50 = 2 \cdot r^2 \rightarrow r = \pm 5$

b) $\frac{-9}{4} = \frac{-4}{9} r^4 \rightarrow \pm \frac{3}{2}$

c) $-1 = -64 \cdot r^3 \rightarrow r = \frac{1}{4}$

d) $\frac{16}{81} = 48 \cdot r^5 \rightarrow r = \frac{1}{3}$

35. **Encuentra el término general de las siguientes progresiones geométricas.**



a) $a_n = a_1 \cdot r^{n-1} = 2 \cdot 5^{n-1}$

b) $a_n = a_1 \cdot r^{n-1} = \sqrt{5} \cdot \sqrt{5}^{\,n-1} = \sqrt{5}^{\,n}$

c) $a_n = a_1 \cdot r^{n-1} = \frac{-1}{8} = (-2)^{n-1} = (-2)^{n-4}$

d) $a_n = a_1 \cdot r^{n-1} = \frac{3}{4} \cdot 2^{n-1} = 3 \cdot 2^{n-3}$

36. **Escribe el término general de estas progresiones geométricas de las que conocemos:**

a) $\begin{cases} a_2 = -32 \\ a_7 = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} a_4 = -3 \\ a_6 = -48 \end{cases}$

a) $1 = -32 \cdot r^5 \rightarrow r = -\frac{1}{2}$; $a_1 = 64$; $a_n = 64 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = (-2)^{7-n}$

b) $-48 = -3 \cdot r^2 \rightarrow r = \pm 4$;

Si $r = 4 \rightarrow a_1 = -\frac{3}{64}$; $a_n = -\frac{3}{64} \cdot 4^{n-1} = -3 \cdot 4^{n-4}$

Análogamente, se obtendría la solución tomando la raíz negativa.

37. **Halla la suma de los 10 primeros términos de estas progresiones geométricas.**

a) $3, -12, 48, -192, \ldots$ c) $\frac{-1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{-1}{2}, 1, \ldots$

b) $\sqrt{5}, 5, 5\sqrt{5}, 25, \ldots$ d) $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{9}{2}, \frac{27}{2}, \ldots$

a) $S_{10} = \frac{a_1 \cdot r^{10} - 1}{r - 1} = \frac{3 \cdot \ -4^{\,10} - 1}{-4 - 1} = -629145$

b) $S_{10} = \frac{a_1 \cdot r^{10} - 1}{r - 1} = \frac{\sqrt{5} \cdot \ \sqrt{5}^{\,10} - 1}{\sqrt{5} - 1} = \frac{3124\sqrt{5}}{\sqrt{5} - 1} = 781\sqrt{5} + 3905$

c) $S_{10} = \frac{a_1 \cdot r^{10} - 1}{r - 1} = \frac{\frac{-1}{8} \cdot \ -2^{\,10} - 1}{-2 - 1} = \frac{341}{8}$

d) $S_{10} = \frac{a_1 \cdot r^{10} - 1}{r - 1} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \ 3^{10} - 1}{3 - 1} = 14762$

38. **Calcula la suma de los 9 primeros términos de las progresiones con términos generales:**

a) $a_n = 7 \cdot \left(\sqrt{5}\right)^{n+1}$

b) $a_n = 4 \cdot (-3)^{n-2}$

a) $a_n = 35 \cdot \sqrt{5}^{\,n-1}$

$$S_9 = \frac{a_1 \cdot r^9 - 1}{r-1} = \frac{35 \cdot \sqrt{5^9} - 1}{\sqrt{5}-1} = 5460\sqrt{5} + 27335$$

b) $a_n = -\frac{4}{3} \cdot (-3)^{n-1}$

$$S_9 = \frac{a_1 \cdot r^9 - 1}{r-1} = \frac{-\frac{4}{3} \cdot \ -3^{\,9} - 1}{-3-1} = -\frac{19682}{3}$$

39. **Una carretera se bifurca tras 3 km en línea recta. Cada una de las ramificaciones se vuelve a bifurcar tras otros 3 km, y así sucesivamente hasta un total de 6 veces.**
¿Cuántos kilómetros acumulan todas las bifurcaciones?

La sucesión es $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$.

$$S_7 = \frac{a_1 \cdot r^n - 1}{r-1} = \frac{3 \cdot 2^7 - 1}{2-1} = 381.$$

$381 - 3 = 378 \rightarrow$ Las bifurcaciones acumulan 378 km, sin contar el tramo inicial.

40. **Calcula la suma de los 7 primeros términos de estas progresiones geométricas:**

a) $\begin{cases} a_1 = 1 \\ r = \frac{1}{2} \end{cases}$ b) $\begin{cases} a_1 = 0{,}1 \\ a_3 = 0{,}4 \end{cases}$ c) $\begin{cases} a_2 = -3 \\ a_4 = -\frac{1}{3} \end{cases}$

a) $S_7 = \frac{a_1 \cdot r^7 - 1}{r-1} = \frac{1 \cdot \left(\left(\frac{1}{2}\right)^7 - 1\right)}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{127}{64}$

b) $0{,}4 = 0{,}1 \cdot r^2 \rightarrow r = \pm 2$

Si $r = 2 \rightarrow S_7 = \frac{a_1 \cdot r^7 - 1}{r-1} = \frac{0{,}1 \cdot 2^7 - 1}{2-1} = 12{,}7$

Análogamente, se obtendría la solución tomando la raíz negativa.

c) $-\frac{1}{3} = -3 \cdot r^2 \rightarrow r = \pm\frac{1}{3}$

Si $r = \frac{1}{3}$, $a_1 = -9 \rightarrow S_7 = \frac{a_1 \cdot r^7 - 1}{r-1} = \frac{-9 \cdot \left(\left(\frac{1}{3}\right)^7 - 1\right)}{\frac{1}{3} - 1} = -\frac{1093}{3^4}$

Análogamente, se obtendría la solución tomando la raíz negativa.

41. **Halla la suma de los 6 primeros términos de las siguientes progresiones.**

a) $\begin{cases} a_1 = 1 \\ r = 3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} a_3 = 8 \\ r = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

c) $\begin{cases} a_3 = -2 \\ r = -2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} a_5 = 9 \\ r = \sqrt{3} \end{cases}$

a) $S_6 = \dfrac{a_1 \cdot r^6 - 1}{r-1} = \dfrac{1 \cdot 3^6 - 1}{3-1} = 364$

b) $8 = a_1 \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 \rightarrow a_1 = 32$ $\qquad S_6 = \dfrac{a_1 \cdot r^6 - 1}{r-1} = \dfrac{32 \cdot \left(\left(\dfrac{1}{2}\right)^6 - 1\right)}{\dfrac{1}{2} - 1} = 63$

c) $-2 = a_1 \cdot (-2)^2 \rightarrow a_1 = -\dfrac{1}{2}$ $\qquad S_6 = \dfrac{a_1 \cdot r^6 - 1}{r-1} = \dfrac{-\dfrac{1}{2} \cdot\ -2^{\,6} - 1}{-2-1} = \dfrac{21}{2}$

d) $9 = a_1 \cdot\ \sqrt{3}^{\,4} \rightarrow a_1 = 1$ $\qquad S_6 = \dfrac{a_1 \cdot r^6 - 1}{r-1} = \dfrac{1 \cdot\ \sqrt{3}^{\,6} - 1}{\sqrt{3} - 1} = 13\sqrt{3} + 13$

42. **Calcula la suma de los 10 primeros términos de una progresión geométrica con $a_n = 2\left(\sqrt{5}\right)^n$.**

$a_n = 2\sqrt{5} \cdot\ \sqrt{5}^{\,n}$ $\qquad a_1 = 2\sqrt{5}$ $\qquad r = \sqrt{5}$

$$S_{10} = \frac{a_1\ r_n - 1}{r-1} = \frac{2\sqrt{5} \cdot (\sqrt{5})^{10} - 1}{\sqrt{5} - 1} = \frac{6248\sqrt{5}}{\sqrt{5} - 1} = 1562\sqrt{5} + 7810$$

43. **La suma de los n términos de una progresión geométrica es 504. Calcula el número de términos sabiendo que $a_6 = 256$ y $a_1 = 8$.**

$a_6 = a_1 \cdot r^5 \rightarrow 256 = 8 \cdot r^5 \rightarrow r = 2$

$$S_n = \frac{a_1 \cdot r^n - 1}{r-1} \rightarrow \frac{8 \cdot 2^n - 1}{2-1} = 504 \rightarrow n = 6$$

44. **El sábado pasado, Paula envió un correo electrónico a tres amigos. Al día siguiente, cada uno de los amigos de Paula que recibieron el correo lo reenvió a otros tres amigos, y así sucesivamente. Si ninguna persona ha recibido el mensaje más de una vez, calcula cuántas personas recibieron el mensaje hasta el sábado siguiente.**

$$S_7 = \frac{a_1 \cdot r^7 - 1}{r-1} = \frac{3 \cdot 3^7 - 1}{3-1} = 3279 \text{ personas}$$

45. **Halla la suma de todos los términos de estas progresiones geométricas.**

a) 100; 25; 6,25; 1,5625; …

b) 10; 1; 0,1; 0,01; …

c) 20; 4; 0,8; 0,16; …

a) $r=\frac{25}{100}=\frac{1}{4}\rightarrow S=\frac{100}{1-\frac{1}{4}}=\frac{400}{3}$

b) $r=\frac{1}{10}\rightarrow S=\frac{10}{1-\frac{1}{10}}=\frac{100}{9}$

c) $r=\frac{4}{20}=\frac{1}{5}\rightarrow S=\frac{20}{1-\frac{1}{5}}=25$

46. **Calcula la suma de todos los términos de una progresión geométrica con $r = 0{,}2$ y $a_1 = 4$.**

$r=\frac{1}{5}\rightarrow S=\frac{4}{1-\frac{1}{5}}=5$

47. **Halla la suma de todos los términos de estas progresiones geométricas.**

a) $a_n = \frac{2}{5}\cdot\left(\frac{-1}{2}\right)^n$

b) $a_n = 6\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

c) $a_n = -8\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}$

d) $a_n = \frac{1}{10}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}$

a) $a_n=\frac{2}{5}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$, $a_1=-\frac{1}{5}$, $r=-\frac{1}{2}\ \rightarrow\ S=\frac{-\frac{1}{5}}{1+\frac{1}{2}}=\frac{-2}{15}$

b) $a_1=6$, $r=\frac{2}{3}\ \rightarrow\ S=\frac{6}{1-\frac{2}{3}}=18$

c) $a_n=-8\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$, $a_1=-\frac{8}{25}$, $r=\frac{1}{5}\ \rightarrow\ S=\frac{\frac{-8}{25}}{1-\frac{1}{5}}=\frac{-2}{5}$

d) $a_1=\frac{1}{10}$, $r=\frac{2}{5}\ \rightarrow\ S=\frac{\frac{1}{10}}{1-\frac{2}{5}}=\frac{1}{6}$

48. **En una progresión geométrica, $S = 20$ y $a_1 = 5$. ¿Cuánto vale la razón?**

$20=\frac{5}{1-r}\rightarrow r=\frac{3}{4}$

49. Calcula el capital final que se obtendrá al invertir, con un interés compuesto, 1 200 €:

a) Al 2 % anual durante 5 años.

b) Al 3 % anual durante 4 años.

c) Al 4,2 % anual durante 8 años.

a) $C_f = 1200 \cdot \left(1 + \frac{2}{100}\right)^5 = 1324{,}90$ €

b) $C_f = 1200 \cdot \left(1 + \frac{3}{100}\right)^4 = 1350{,}61$ €

c) $C_f = 1200 \cdot \left(1 + \frac{4{,}2}{100}\right)^8 = 1667{,}72$ €

50. Calcula el capital que hay que invertir con un interés compuesto del 3,4 % anual durante 6 años, 5 meses y 12 días, para que al final de la inversión se obtengan 1 245 €.

Expresando el tiempo en años $t = 6 + 0{,}417 + 0{,}0329 = 6{,}4499$ años

$$1\,245 = C \cdot \left(1 + \frac{3{,}4}{100}\right)^{6{,}4499} \rightarrow C = 1\,003{,}49 \text{ €}$$

51. ¿Qué da mayores beneficios, un depósito de 5 años al 6 % o uno de 10 años al 3 %?

$C_f = C \cdot \left(1 + \frac{6}{100}\right)^5 = C \cdot 1{,}338$

$C_f = C \cdot \left(1 + \frac{3}{100}\right)^{10} = C \cdot 1{,}343$

El depósito de 10 años al 3 % genera mayores beneficios.

52. Escribe más términos en estas sucesiones.

a) 4, 7, 10, 13, …

b) −6, 12, −24, 48, …

c) 3, 4, 6, 9, 13, …

d) 5, 10, 15, 20, …

e) 3, 33, 333, 3 333, …

f) 1, −2, 3, −4, 5, …

a) 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28, 31, 34, …

b) −6, 12, −24, 48, −96, 192, −384, 768, …

c) 3, 4, 6, 9, 13, 18, 24, 31, 39, 48, 58, …

d) 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, …

e) 3, 33, 333, 3 333, 33 333, 333 333, 3 333 333, …

f) 1, −2, 3, −4, 5, −6, 7, −8, 9, −10, 11, −12, …

53. Observa la sucesión: 1, 3, 5, 7, 9, … y responde.

a) ¿Cuáles son los términos a_{11} y a_{17}?

b) ¿Qué posición ocupan los números 11 y 17?

c) ¿Cuántos y qué términos hay entre el número 23 y el número 35?

a) $a_n = 2n - 1 \rightarrow a_{11} = 21$ y $a_{17} = 33$

b) $2n - 1 = 11 \rightarrow n = 6$; $\quad 2n - 1 = 17 \rightarrow n = 9$

c) $2n - 1 = 23 \rightarrow n = 12$; $\quad 2n - 1 = 35 \rightarrow n = 18$

Hay 5 términos a_{13}, a_{14}, a_{15}, a_{16} y a_{17} que toman los valores 25, 27, 29, 31 y 33, respectivamente.

54. **Contesta razonadamente si el número 31 es uno de los términos de las siguientes sucesiones y, si lo es, di qué posición ocupa.**

a) 2, 5, 7, 12, 19, … b) 4, 7, 10, 13, 16, 19, …

La sucesión es recurrente y el término general es: $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$

$31 = 12 + 19 = a_6$

La sucesión es aritmética y el término general es: $a_n = 3n + 1$

$31 = 3n + 1 \rightarrow n = 10 \rightarrow a_{10} = 31$

55. **Copia en tu cuaderno y completa estas sucesiones con el término que falta.**

a) 1, 8, 27, □, 125, …

b) −5, −9, −13, □, −21, …

c) 2, 5, □, 11, 14, …

d) 7, □, 21, 28, 35, …

e) 1, 3, 9, □, 81, …

¿Cuál es su regla de formación?

a) El término general es n^3. El término que falta es 64.

b) El término general es $a_n = -1 - 4n$. El término que falta es −17.

c) El término general es $a_n = 3n - 1$. El término que falta es 8.

d) El término general es $a_n = 7n$. El término que falta es 14.

e) El término general es $a_n = 3^{n-1}$. El término que falta es 27.

56. **Escribe los 4 primeros términos de estas sucesiones dadas por su regla de formación.**

a) Su primer término es −4 y cada término se obtiene sumando 5 al anterior.

b) Su primer término es 7 y cada término se obtiene restando 3 al anterior.

c) Su primer término es 100 y cada término se obtiene dividiendo entre 10 el anterior.

d) Su primer término es −3 y cada término se obtiene elevando al cuadrado el anterior.

a) −4, 1, 6, 11, …

b) 7, 4, 1, −2, …

c) 100; 10; 1; 0,1; …

d) −3, 9, 81, 6 561, …

57. **Siendo $a_1 = 5$, forma las sucesiones tales que cada término es:**

a) El doble del anterior.

b) El resultado de sumar 9 al anterior.

c) El resultado de sumar al anterior su cuadrado.

a) 5, 10, 20, 40, …

b) 5, 14, 23, 32, …

c) 5, 30, 930, 865 830, …

58. **Escribe los 7 primeros términos de la sucesión cuyo término general es el que se da.**

a) $a_n = 2n + 1$
b) $a_n = 4n - 3$
c) $a_n = 7 - 3n$
d) $a_n = \dfrac{n+1}{2}$
e) $a_n = 5n - 2 \cdot (3 - n)$
f) $a_n = n^2 + n - 2$
g) $a_n = (n - 3)^2$
h) $a_n = \dfrac{1 - 2n}{3}$

a) 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15

b) 1, 5, 9, 13, 17, 21, 25

c) 4, 1, −2, −5, −8, −11, −14

d) $1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, 4$

e) 1, 8, 15, 22, 29, 36, 43

f) 0, 4, 10, 18, 28, 40, 54

g) 4, 1, 0, 1, 4, 9, 16

h) $-\frac{1}{3}, -1, -\frac{5}{3}, -\frac{7}{3}, -3, -\frac{11}{3}, -\frac{13}{3}$

59. **Obtén los 4 primeros términos de la sucesión cuyo término general es el siguiente.**

a) $a_n = (-1) \cdot 2^n$
b) $a_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$
c) $a_n = (-2)^{n+1}$
d) $a_n = (n + 1)^2$
e) $a_n = \left(\dfrac{3}{2}\right)^n$
f) $a_n = 4 \cdot (n - 2)^2$

a) −2, −4, −8, −16

b) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$

c) 4, −8, 16, −32

d) 4, 9, 16, 25

e) $\frac{3}{2}, \frac{9}{4}, \frac{27}{8}, \frac{81}{16}$

f) 4, 0, 4, 16

60. **Comprueba si el número 27 es un término de cada una de las siguientes sucesiones y averigua el lugar que ocupa.**

a) $a_n = 4n + 3$
b) $a_n = 2n - 1$
c) $a_n = 5n + 7$
d) $a_n = n^2 - n - 3$
e) $a_n = 3(n - 2)^2$
f) $a_n = n^2 + 2n - 8$

a) $4n + 3 = 27 \rightarrow 4n = 24 \rightarrow n = 6 \rightarrow a_6 = 27$

b) $2n - 1 = 27 \rightarrow 2n = 28 \rightarrow n = 14 \rightarrow a_{14} = 27$

c) $5n + 7 = 27 \rightarrow 5n = 20 \rightarrow n = 4 \rightarrow a_4 = 27$

d) $n^2 - n - 3 = 27 \rightarrow n = 6 \rightarrow a_6 = 27$

e) $3 \cdot (n - 2)^2 = 27 \rightarrow n = 5 \rightarrow a_5 = 27$

f) $n^2 + 2n - 8 = 27 \rightarrow n = 5 \rightarrow a_5 = 27$

61. Escribe los términos que se piden.

a) a_3 y a_4, siendo $a_n = (-1)^{n+1} \cdot 3n$

b) a_2 y a_3, siendo $a_n = \frac{1}{n^2} - n$

c) a_4 y a_5, siendo $a_n = n^3 \cdot (-1)^n$

d) a_6 y a_8, siendo $a_n = 2n - n^2 + 3$

a) $a_3 = (-1)^4 \cdot 9 = 9$ $\quad a_4 = (-1)^5 \cdot 12 = -12$

b) $a_2 = \frac{1}{4} - 2 = -\frac{7}{4}$ $\quad a_3 = \frac{1}{9} - 3 = -\frac{26}{9}$

c) $a_4 = 4^3 \cdot (-1)^4 = 64$ $\quad a_5 = 5^3 \cdot (-1)^5 = -125$

d) $a_6 = 12 - 36 + 3 = -21$ $\quad a_8 = 16 - 64 + 3 = -45$

62. Determina el cuarto y el quinto término de estas sucesiones, de las que conocemos los tres primeros. ¿Puedes escribir el término general?

a) a_1 = primera cifra decimal del número π.
a_2 = segunda cifra decimal del número π.
a_3 = tercera cifra decimal del número π.

b) a_1 = redondeo a las décimas de $\sqrt{3}$.
a_2 = redondeo a las centésimas de $\sqrt{3}$.
a_3 = redondeo a las milésimas de $\sqrt{3}$.

c) a_1 = longitud de la diagonal de un cuadrado de lado 1 cm.
a_2 = longitud de la diagonal de un cuadrado de lado 2 cm.
a_3 = longitud de la diagonal de un cuadrado de lado 3 cm.

a) $\pi = 3{,}1415926 \rightarrow a_4 = 5$ y $a_5 = 9 \rightarrow$ No se puede escribir el término general.

b) $\sqrt{3} = 1{,}732050808... \rightarrow a_4 = 1{,}7321$ y $a_5 = 1{,}73205 \rightarrow$ No se puede escribir el término general.

c) La sucesión es: $\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 3\sqrt{2}, 4\sqrt{2}, ... \rightarrow a_4 = 4\sqrt{2}$, $a_5 = 5\sqrt{2}$, $a_n = n\sqrt{5}$

63. **Averigua los primeros términos de estas sucesiones definidas de forma recurrente.**

a) $a_1 = -3, a_2 = 2$ y $a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2}$

b) $a_1 = 4, a_2 = 6$ y $a_n = \dfrac{a_{n-1}}{a_{n-2}} - 1$

c) $a_1 = 2, a_2 = 8$ y $a_n = \dfrac{a_{n-1}}{2} + n$

a) $-3, 2, -5, -4, -23, \dots$

b) $4, 6, \dfrac{1}{2}, -\dfrac{11}{12}, -\dfrac{17}{6}, \dots$

c) $2, 8, 7, \dfrac{15}{2}, \dfrac{35}{4}, \dots$

64. **Halla el término general de estas sucesiones.**

a) $1, 2, 3, 4, 5, \dots$

b) $2, 4, 6, 8, 10, \dots$

c) $1, 3, 5, 7, 9, \dots$

d) $-1, 1, 3, 5, 7, \dots$

e) $6, 8, 10, 12, 14, \dots$

f) $-2, -4, -6, -8, -10, \dots$

g) $2, 4, 8, 16, 32, \dots$

h) $3, -6, 9, -12, 15, \dots$

a) $a_n = n$

b) $a_n = 2n$

c) $a_n = 2n - 1$

d) $a_n = 2n - 3$

e) $a_n = 2n + 4$

f) $a_n = -2n$

g) $a_n = 2^n$

h) $a_n = 3n \cdot (-1)^{n-1}$

66. **Halla el término general de las sucesiones.**

a) $1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{5}, \dots$

b) $\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{5}, \dots$

c) $\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{8}, \dfrac{1}{16}, \dfrac{1}{32}, \dots$

d) $\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{5}, \dfrac{1}{9}, \dfrac{1}{17}, \dfrac{1}{33}, \dots$

e) $4, \dfrac{5}{2}, \dfrac{6}{3}, \dfrac{7}{4}, \dfrac{8}{5}, \dots$

f) $\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{7}{8}, \dfrac{15}{16}, \dots$

a) $a_n = \dfrac{1}{n}$

b) $a_n = \dfrac{1}{n+1}$

c) $a_n = \dfrac{1}{2^n}$

d) $a_n = \dfrac{1}{2^n + 1}$

e) $a_n = \dfrac{n+3}{n}$

f) $a_n = \dfrac{2^n - 1}{2^n}$

67. **Escribe el término general de la sucesión que se obtiene:**

a) Multiplicando por 3 cada término de la sucesión $a_n = 2n - \dfrac{1}{3}$.

b) Sumando 3 a cada uno de los términos de la sucesión cuyo término general es $a_n = 2n - \dfrac{1}{3}$.

a) $a_n = 6n - 1$

b) $a_n = 2n + \dfrac{8}{3}$

68. **Las siguientes sucesiones están relacionadas con la sucesión de término general $a_n = n^2$. Di cuál es esa relación y, a partir de ella, escribe el término general de las sucesiones.**

a) 2, 8, 18, 32, 50, …
c) 3, 6, 11, 18, 27, …
b) 4, 9, 16, 25, …
d) $\frac{16}{3}, \frac{25}{3}, 12, \frac{49}{3}, \ldots$

a) Es el doble de la sucesión → $a_n = 2n^2$

b) Empieza en el segundo término → $a_n = (n+1)^2$

c) Suma 2 a cada término → $a_n = n^2 + 2$

d) Empieza en el cuarto término y divide la sucesión por 3 → $a_n = \frac{n+3}{3}^{2}$

69. **Comprueba si son progresiones aritméticas y calcula su término general y la diferencia.**

a) 3, 6, 9, 12, 15, …
c) 3, 6, 12, 24, 48, …
b) 2, −2, 2, −2, 2, …
d) 3, 0, −3, −6, −9, …

a) Sí es progresión aritmética: $a_n = 3n$ y $d = 3$

b) No es progresión aritmética.

c) No es progresión aritmética.

d) Sí es progresión aritmética: $a_n = 6 - 3n$ y $d = -3$

70. **Escribe el término general de estas progresiones aritméticas.**

a) $a_1 = 7$ y $d = 2$
d) $a_1 = -1$ y $d = 4$
b) $a_1 = 3$ y $d = -4$
e) $a_1 = 8$ y $d = -3$
c) $a_1 = -5$ y $d = -2$
f) $a_1 = -9$ y $d = 3$

a) $a_n = 5 + 2n$
d) $a_n = 4n - 5$

b) $a_n = 7 - 4n$
e) $a_n = 11 - 3n$

c) $a_n = -3 - 2n$
f) $a_n = 3n - 12$

71. **Calcula la diferencia y el quinto término de las progresiones aritméticas.**

a) $a_1 = 3$ y $a_2 = 7$
c) $a_3 = 8$ y $a_6 = 23$
b) $a_3 = 4$ y $a_7 = -8$
d) $a_5 = 0$ y $a_{10} = 5$

a) $d = a_2 - a_1 = 4$ $a_5 = a_1 + 4d = 3 + 16 = 19$

b) $a_7 = a_3 + 4d \rightarrow -8 = 4 + 4d \rightarrow d = -3$ $a_5 = a_3 + 2d = 4 - 6 = -2$

c) $a_6 = a_3 + 3d \rightarrow 23 = 8 + 3d \rightarrow d = 5$ $a_5 = a_3 + 2d = 8 + 10 = 18$

d) $a_{10} = a_5 + 5d \rightarrow 5 = 5d \rightarrow d = 1$ $a_5 = 0$

72. **Encuentra los términos sexto y octavo de estas progresiones aritméticas.**

a) $a_4 = -6$ y $a_{12} = -22$
b) $a_2 = 12$ y $a_7 = 42$
c) $a_1 = 7$ y $a_4 = 34$
d) $a_3 = 7$ y $a_7 = 3$

a) $a_{12} = a_4 + 8d \rightarrow -22 = -6 + 8d \rightarrow d = -2$

$a_6 = a_4 + 2d = -10$ $\quad a_8 = a_4 + 4d = -14$

b) $a_7 = a_2 + 5d \rightarrow 42 = 12 + 5d \rightarrow d = 6$

$a_6 = a_7 - d = 36$ $\quad a_8 = a_7 + d = 48$

c) $a_4 = a_1 + 3d \rightarrow 34 = 7 + 3d \rightarrow d = 9$

$a_6 = a_4 + 2d = 52$ $\quad a_8 = a_4 + 4d = 70$

d) $a_7 = a_3 + 4d \rightarrow 3 = 7 + 4d \rightarrow d = -1$

$a_6 = a_7 - d = 4$ $\quad a_8 = a_7 + d = 2$

73. **Averigua el término general de estas progresiones aritméticas.**

a) $a_5 = 3$ y $d = 2$
b) $a_{10} = 70$ y $d = -15$
c) $a_2 = -12$ y $d = 12$
d) $a_3 = 24$ y $a_6 = -3$
e) $a_8 = -6$ y $a_{12} = 18$
f) $a_4 = 8$ y $a_6 = 28$

a) $a_n = a_5 + (n - 5) \cdot d \rightarrow a_n = 2n - 7$

b) $a_n = a_{10} + (n - 10) \cdot d \rightarrow a_n = 220 - 15n$

c) $a_n = a_2 + (n - 2) \cdot d \rightarrow a_n = 12n - 36$

d) $a_6 = a_3 + 3d \rightarrow -3 = 24 + 3d \rightarrow d = -9$

$a_n = a_3 + (n - 3) \cdot d \rightarrow a_n = 51 - 9n$

e) $a_{12} = a_8 + 4d \rightarrow 18 = -6 + 4d \rightarrow d = 6$

$a_n = a_8 + (n - 8) \cdot d \rightarrow a_n = 6n - 54$

f) $a_6 = a_4 + 2d \rightarrow 28 = 8 + 2d \rightarrow d = 10$

$a_n = a_4 + (n - 4) \cdot d \rightarrow a_n = 10n - 32$

74. **Comprueba que los siguientes términos generales son de progresiones aritméticas, halla su diferencia y los 5 primeros términos.**

a) $a_n = 3n - 1$
b) $a_n = 3 - 4n$
c) $a_n = 5n - 5$
d) $a_n = 4n$

a) 2, 5, 8, 11, 14, … $\rightarrow d = 3$

b) −1, −5, −9, −13, −17, … $\rightarrow d = -4$

c) 0, 5, 10, 15, 20, … $\rightarrow d = 5$

d) 4, 8, 12, 16, 20, … $\rightarrow d = 4$

75. Calcula el lugar que ocupa el número 24 como término de estas progresiones aritméticas.

a) $a_n = 3n + 6$
b) $a_n = 2n - 10$
c) $a_n = 8 - n$
d) $a_n = 4n + 12$

a) $24 = 3n + 6 \rightarrow n = 6 \rightarrow a_6 = 24$

b) $24 = 2n - 10 \rightarrow n = 17 \rightarrow a_{17} = 24$

c) $24 = 8 - n \rightarrow n = -16 \rightarrow$ No pertenece a la sucesión.

d) $24 = 4n + 12 \rightarrow n = 3 \rightarrow a_3 = 24$

76. Para las siguientes progresiones aritméticas, calcula a_1, d y a_n.

a) $a_4 = 13$ y $a_{11} = 41 - a_2$
b) $a_3 = -1$ y $a_7 - a_5 = -4$
c) $a_3 = 6$ y $a_8 = 21 - a_1$
d) $a_2 = 2$ y $a_6 = 25 + a_1$

a) $a_4 = 13 = a_1 + 3d$

$a_{11} = 41 - a_2 = 41 - a_1 - d = a_1 + 10d \rightarrow 41 = 2a_1 + 11d$

Resolviendo conjuntamente: $a_1 = 4$ y $d = 3 \rightarrow a_n = 4 + (n - 1) \cdot 3 = 3n + 1$

b) $a_7 = -4 + a_5 = -4 + a_1 + 4d = a_1 + 6d \rightarrow -4 = 2d \rightarrow d = -2$

$a_3 = -1 = a_1 + 2d \rightarrow a_1 = 3$

Con lo que el término general es: $a_n = 3 + (n - 1) \cdot (-2) = 5 - 2n$

c) $a_3 = 6 = a_1 + 2d$

$a_8 = 21 - a_1 = a_1 + 7d \rightarrow 21 = 2a_1 + 7d$

Resolviendo conjuntamente $a_1 = 0$ y $d = 3 \rightarrow a_n = (n - 1) \cdot 3 = 3n - 3$

d) $a_6 = 25 + a_1 = a_1 + 5d \rightarrow 25 = 5d \rightarrow d = 5$

$a_2 = 2 = a_1 + d \rightarrow a_1 = -3$

Con lo que el término general es: $a_n = -3 + (n - 1) \cdot 5 = 5n - 8$

77. Sabiendo que estas sucesiones son progresiones aritméticas, completa en tu cuaderno los términos que faltan.

a) $\square, \frac{1}{2}, \square, \frac{5}{6}, \square, \square$
b) $\square$; 1,5; $\square$; 2,5; $\square$
c) $\square, \frac{1}{4}, \square, \square, \frac{1}{2}, \square$
d) $\square, \square, \square, \frac{5}{3}, \square, \frac{8}{3}$

a) $d = \dfrac{\frac{5}{6} - \frac{1}{2}}{4 - 2} = \dfrac{1}{6} \rightarrow \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{6}, 1, \frac{7}{6}$

b) $d = (2,5 - 1,5) : (4 - 2) = 0,5 \rightarrow 1; 1,5; 2; 2,5; 3$

c) $d = \dfrac{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}}{5 - 2} = \dfrac{1}{12} \rightarrow \frac{1}{6}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{5}{12}, \frac{1}{2}, \frac{7}{12}$

d) $d = \dfrac{\frac{8}{3} - \frac{5}{3}}{6 - 4} = \dfrac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{6}, \frac{2}{3}, \frac{7}{6}, \frac{5}{3}, \frac{13}{6}, \frac{8}{3}$

79. **Añade el número de términos indicado para que se forme una progresión aritmética.**

a) 3 términos entre 1 y 9.

b) 4 términos entre 3 y 18.

c) 5 términos entre −4 y 20.

d) 6 términos entre 2 y 58.

a) $a_5 - a_1 = 4d = 8 \rightarrow d = 2$ La sucesión es: 1, 3, 5, 7, 9, …

b) $a_6 - a_1 = 5d = 15 \rightarrow d = 3$ La sucesión es: 3, 6, 9, 12, 15, 18, …

c) $a_7 - a_1 = 6d = 24 \rightarrow d = 4$ La sucesión es: −4, 0, 4, 8, 12, 16, 20, …

d) $a_8 - a_1 = 7d = 56 \rightarrow d = 8$ La sucesión es: 2, 10, 18, 26, 34, 42, 50, 58, …

80. **Halla la suma de los 12 y de los 25 primeros términos de la progresión aritmética cuyo término general es $a_n = -4n + 3$.**

$a_1 = -4 + 3 = -1$ $\quad a_{12} = -4 \cdot 12 + 3 = -45$ $\quad a_{25} = -4 \cdot 25 + 3 = -97$

$$S_{12} = \frac{a_1 + a_{12} \cdot 12}{2} = (-1 - 45) \cdot 6 = -276$$

$$S_{25} = \frac{a_1 + a_{25} \cdot 25}{2} = \frac{-1 - 97 \cdot 25}{2} = -1225$$

81. **Calcula la suma de los 30 primeros términos para cada progresión aritmética.**

a) $a_4 = 8$ y $a_6 = 28$

b) $a_{10} = 70$ y $d = -15$

c) $a_3 = \frac{1}{2}$ y $a_4 = \frac{5}{6}$

d) $d = -3$ y $a_9 = 4a_4$

a) $a_6 - a_4 = 2d = 20 \rightarrow d = 10$

$a_1 = a_4 - 3d \rightarrow a_1 = 8 - 30 = -22$

$a_{30} = a_1 + 29d \rightarrow a_{30} = -22 + 290 = 268$

$$S_{30} = \frac{-22 + 268 \cdot 30}{2} = 3690$$

b) $a_1 = a_{10} - 9d \rightarrow a_1 = 70 + 135 = 205$

$a_{30} = a_1 + 29d \rightarrow a_{30} = 205 - 435 = -230$

$$S_{30} = \frac{205 - 230 \cdot 30}{2} = -375$$

c) $a_4 - a_3 = d = \frac{1}{3}$

$a_1 = a_3 - 2d \rightarrow a_1 = \frac{1}{2} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{6}$ $\qquad a_{30} = a_1 + 29d \rightarrow a_{30} = -\frac{1}{6} + \frac{29}{3} = \frac{57}{6}$

$$S_{30} = \frac{\left(\frac{-1}{6} + \frac{57}{6}\right) \cdot 30}{2} = 140$$

d) $a_9 = 4a_4 \rightarrow a_1 + 8 \cdot (-3) = 4 \cdot (a_1 + 3 \cdot (-3)) \rightarrow a_1 = 4$

$a_{30} = a_1 + 29d \rightarrow a_{30} = 4 + 29 \cdot (-3) = -83$

$$S_{30} = \frac{4 - 83 \cdot 30}{2} = -1185$$

82. **Averigua el término general de la progresión aritmética en cada caso.**

a) $S_{16} = -528$ y $a_{16} = -3$ c) $S_{52} = 6682$ y $a_1 = 1$

b) $S_{35} = 1960$ y $a_3 = 11$ d) $S_{13} = 0$ y $a_8 = 8$

a) $S_{16} = -528 = \frac{a_1 + a_{16} \ \cdot 16}{2} \rightarrow -66 = a_1 - 3 \rightarrow a_1 = -63$

$a_{16} = a_1 + 15d \rightarrow -3 = -63 + 15d \rightarrow d = 4$ $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d \rightarrow a_n = -67 + 4n$

b) $a_1 = a_3 - 2d = 11 - 2d$ $a_{35} = a_1 + 34d = a_3 - 2d + 34d = a_3 + 32d = 11 + 32d$

$S_{35} = 1960 = \frac{a_1 + a_{35} \ \cdot 35}{2} = \frac{22 + 30d \ \cdot 35}{2} \rightarrow 1960 = (11 + 15d) \cdot 35 \rightarrow d = 3$

$a_1 = 5$ $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d \rightarrow a_n = 3n + 2$

c) $S_{52} = 6682 = \frac{a_1 + a_{52} \ \cdot 52}{2} \rightarrow 6682 = (1 + 1 + 51d) \cdot 26 \rightarrow d = 5$

$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d \rightarrow a_n = 5n - 4$

d) $a_1 = a_8 - 7d$ y $a_{13} = a_8 + 5d \rightarrow S_{13} = 0 = \frac{a_1 + a_{13} \ \cdot 13}{2} \rightarrow 0 = 8 - 7d + 8 + 5d \rightarrow d = 8$

$a_1 = 8 - 56 = -48$ $a_n = 8n - 56$

83. **Utiliza las progresiones aritméticas y suma.**

a) Los 50 primeros números naturales.

b) Los números pares menores que 101.

c) Los múltiplos de tres entre 100 y 200.

d) Los números impares menores que 80.

e) ¿Cuántos números pares consecutivos se deben sumar para que el resultado sea 11 130?

f) ¿Cuántos números impares consecutivos a partir de 1 se deben sumar para obtener 2 916?

a) $a_n = n \rightarrow S_{50} = \frac{a_1 + a_{50} \ \cdot 50}{2} = (1 + 50) \cdot 25 = 1\,275$

b) $a_n = 2n \rightarrow 2n = 100 \rightarrow n = 50$

$S_{50} = \frac{a_1 + a_{50} \ \cdot 50}{2} = (2 + 100) \cdot 25 = 2\,550$

c) $a_n = 99 + 3n$ $a_1 = 102$ $a_{33} = 198$

$S = \frac{a_1 + a_{33} \ \cdot 33}{2} = 4\,950$

d) $a_n = 2n - 1 \rightarrow 2n - 1 = 79 \rightarrow n = 40$

$S = \frac{a_1 + a_{40} \ \cdot 40}{2} = (1 + 79) \cdot 20 = 1\,600$

e) 11 130 : 2 = 5 565. Bastaría con sumar dos pares consecutivos: 5 564 + 5 566 = 11 130.

$S_n = \frac{a_1 + a_n \ \cdot n}{2} = \frac{2 + 2n \ \cdot n}{2} = 11\,130 \rightarrow n^2 + n - 11\,130 = 0 \rightarrow n = 105$

Hay que sumar los 105 primeros pares.

f) $S_n = \frac{a_1 + a_n \ \cdot n}{2} = \frac{1 + 2n - 1 \ \cdot n}{2} = 2\,916 \rightarrow n^2 = 2\,916 \rightarrow n = 54$

84. **Halla 5 términos de una progresión aritmética sabiendo que suman 80 y la diferencia es 4.**

$$a_1 + a_5 = a_2 + a_4 = 2a_3$$

$$S_5 = 80 = \frac{a_1 + a_5 \cdot 5}{2} = \frac{5 \cdot 2a_3}{2} \rightarrow 32 = 2a_3 \rightarrow a_3 = 16$$

$$a_1 = 8, a_2 = 12, a_3 = 16, a_4 = 20, a_5 = 24$$

85. **¿Cuántos términos de la progresión aritmética 5, 7, 9, … debemos sumar para que el resultado de la suma sea 780?**

$a_n = 2n + 3 \quad S_n = 780 = \frac{5 + a_n \cdot n}{2}$; $780 \cdot 2 = (5 + 3 + 2n) \cdot n \rightarrow n^2 + 4n - 780 = 0 \rightarrow n = 26$

86. **Escribe los primeros términos de estas progresiones geométricas.**

a) $a_1 = 2$ y $r = 3$

b) $a_1 = -1$ y $r = 3$

c) $a_1 = 3$ y $r = 4$

d) $a_2 = -2$ y $r = -2$

a) 2, 6, 18, 54, 162, …

b) −1, −3, −9, −27, −81, …

c) 3, 12, 48, 192, 768, …

d) −2, 4, −8, 16, −32, …

88. **¿Cuáles de las siguientes sucesiones son progresiones aritméticas y cuáles geométricas? Calcula su diferencia o su razón.**

a) 1, 3, 9, 27, …

b) 1, 3, 5, 7, 9, …

c) $2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots$

d) −4, 4, −4, 4, …

e) 64, 16, 4, 1, …

f) $\frac{1}{25}, \frac{1}{5}, 1, 5, \dots$

a) Geométrica de razón 3.

b) Aritmética de diferencia 2.

c) Geométrica de razón $\frac{1}{2}$.

d) Geométrica de razón −1.

e) Geométrica de razón $\frac{1}{4}$.

f) Geométrica de razón 5.

89. **Señala las progresiones geométricas.**

a) $a_1 = 6$ y $a_n = -2a_{n-1}$

b) $a_1 = -3$ y $a_n = (-1)^n \cdot a_{n-1}$

c) $a_1 = 4$ y $a_n = 5 + a_{n-1}$

d) $a_1 = 5, a_2 = 2$ y $a_n = a_{n-1} + 3a_{n-2}$

e) $a_1 = 256$ y $a_n = \frac{7a_{n-1}}{2}$

a) Geométrica de razón −2

Las progresiones b), c) y d) no son geométricas.

e) Geométrica de razón $\frac{7}{2}$

90. Halla el término general de estas progresiones geométricas.

a) $a_1 = -1$ y $r = 2$
b) $a_1 = 3$ y $r = -4$
c) $a_1 = 8$ y $r = -\frac{1}{3}$
d) $a_1 = -2$ y $r = -2$
e) $a_1 = 1$ y $r = 4$
f) $a_1 = -9$ y $r = \frac{2}{3}$

a) $a_n = (-1) \cdot 2^{n-1}$
b) $a_n = 3 \cdot (-4)^{n-1}$
c) $a_n = 8 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$
d) $a_n = (-2)^n$
e) $a_n = 4^{n-1}$
f) $a_n = (-9) \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

91. Di cuál es el término general de estas progresiones geométricas.

a) $a_4 = 270$ y $r = \frac{3}{2}$
b) $a_3 = 5$ y $r = -5$
c) $a_2 = -12$ y $r = \frac{2}{3}$
d) $a_5 = 1$ y $r = 10$

a) $a_n = 270 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{n-4} = \frac{5 \cdot 3^{n-1}}{2^{n-5}}$

b) $a_n = 5 \cdot (-5)^{n-3}$

c) $a_n = -12 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} = \frac{-2^n}{3^{n-3}}$

d) $a_n = 10^{n-5}$

92. Calcula los 5 primeros términos y la razón de estas progresiones geométricas.

a) $a_n = (-3)^n$
b) $a_n = 3 \cdot (-2)^{n+1}$
c) $a_n = 2^{1-n}$
d) $a_n = \frac{a_{n-1}}{7}$ siendo $a_1 = 2401$

a) $-3, 9, -27, 81, -243, \ldots \rightarrow r = -3$
b) $12, -24, 48, -96, 192, \ldots \rightarrow r = -2$
c) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots \rightarrow r = \frac{1}{2}$
d) $2\,401, 343, 49, 7, \ldots \rightarrow r = \frac{1}{7}$

93. Encuentra la razón y el cuarto término de estas progresiones geométricas.

a) $a_1 = 3$ y $a_2 = 6$
b) $a_2 = -16$ y $a_3 = 4$
c) $a_3 = 32$ y $a_5 = 2048$
d) $a_5 = 243$ y $a_7 = 2187$

a) $r = 6 : 3 = 2$; $a_4 = 3 \cdot 2^3 = 24$

b) $r = 4 : (-16) = -\frac{1}{4}$; $a_4 = a_3 \cdot r \rightarrow a_4 = 4 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) = -1$

c) $r^2 = 2\,048 : 32 = 64 \rightarrow r = \pm 8$

Si $r = 8 \rightarrow a_4 = a_3 \cdot r \rightarrow a_4 = 32 \cdot 8 = 256$ Análogamente, se obtendría la solución tomando la raíz negativa.

d) $r^2 = 2\,187 : 243 = 9 \rightarrow r = \pm 3$

Si $r = 3 \rightarrow a_4 = a_5 : r \rightarrow a_4 = 243 : 3 = 81$ Análogamente, se obtendría la solución tomando la raíz negativa.

94. **Halla los términos tercero y sexto de estas progresiones geométricas.**

a) $a_5 = 243$ y $a_7 = 27$

b) $a_1 = \frac{16}{25}$ y $a_2 = \frac{8}{5}$

c) $a_2 = 12$ y $a_4 = 432$

d) $a_4 = -1$ y $a_5 = 1$

a) $r^2 = 27 : 243 = \frac{1}{9} \rightarrow r = \pm\frac{1}{3}$

Si $r = \frac{1}{3} \rightarrow a_3 = a_5 : r^2 = 243 : \frac{1}{9} = 2\,187$; $a_6 = a_5 \cdot r = 243 \cdot \frac{1}{3} = 81$ (Se realiza igual para la razón negativa)

b) $r = \frac{8}{5} : \frac{16}{25} = \frac{5}{2}$

$a_3 = a_2 \cdot r = \frac{8}{5} \cdot \frac{5}{2} = 4$; $a_6 = a_3 \cdot r^3 = 4 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^3 = \frac{125}{2}$

c) $r^2 = 432 : 12 = 36 \rightarrow r = \pm 6$

Si $r = 6 \rightarrow a_3 = a_2 \cdot r = 12 \cdot 6 = 72$; $a_6 = a_4 \cdot r^2 = 432 \cdot 36 = 15\,552$ (Se realiza igual para la razón negativa)

d) $r = 1 : (-1) = -1 \rightarrow a_3 = a_4 : r = -1 : (-1) = 1$; $a_6 = a_4 \cdot r^2 = -1 \cdot 1 = -1$

95. **Calcula el primer término y la razón de estas progresiones geométricas.**

a) $a_4 = 12$ y $a_6 = 3$

b) $a_2 = -6$ y $a_3 = 6$

c) $a_6 = 128$ y $a_7 = -512$

d) $a_3 = 0{,}1$ y $a_5 = 0{,}001$

a) $r^2 = 3 : 12 = \frac{1}{4} \rightarrow r = \pm\frac{1}{2}$

Si $r = \frac{1}{2}$, $a_4 = a_1 \cdot r^3 \rightarrow a_1 = 12 : \frac{1}{8} = 96$ Análogamente, se obtendría la solución tomando la raíz negativa.

b) $r = 6 : (-6) = -1$; $a_2 = a_1 \cdot r \rightarrow a_1 = (-6) : (-1) = 6$

c) $r = -512 : 128 = -4$; $a_6 = a_1 \cdot r^5 \rightarrow a_1 = 128 : (-1\,024) = -\frac{1}{8}$

d) $r^2 = 0{,}001 : 0{,}1 = 0{,}01 \rightarrow r = \pm 0{,}1$

Si $r = 0{,}1 \rightarrow a_3 = a_1 \cdot r^2 \rightarrow a_1 = 0{,}1 : 0{,}01 = 10$

Análogamente, se obtendría la solución tomando la raíz negativa.

96. **Completa en tu cuaderno con los términos que faltan en las siguientes progresiones geométricas.**

a) 1; 0,1; □; 0,001; □

b) □, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{6}$, □, $\frac{1}{54}$, □

c) □, $\frac{1}{3}$, □, $\frac{1}{12}$, □

d) □, $\frac{3}{2}$, □, □, $\frac{81}{4}$

a) 1; 0,1; 0,01; 0,001; 0,0001

b) $\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{18}, \frac{1}{54}, \frac{1}{162}$

c) $\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{24}$

d) $\frac{1}{\sqrt[3]{4}}, \frac{3}{2}, \frac{9}{2 \cdot \sqrt[3]{2}}, \frac{27}{2 \cdot \sqrt[3]{4}}, \frac{81}{4}$

97. **El tercer término de una progresión geométrica es $\frac{12}{5}$ y la razón es 10. ¿Qué lugar ocupan estos números dentro de la progresión?**

a) $\frac{12}{500}$ b) 240 000

a) $a_n = a_3 \cdot r^{n-3} \to \frac{12}{500} = \frac{12}{5} \cdot 10^{n-3} \to \frac{1}{100} = 10^{n-3} \to n = 1$

b) $a_n = a_3 \cdot r^{n-3} \to 240\,000 = \frac{12}{5} \cdot 10^{n-3} \to 100\,000 = 10^{n-3} \to n = 8$

98. **Dos términos consecutivos de una progresión geométrica son 3 y 4. Averigua qué lugar ocupan sabiendo que $a_1 = \frac{27}{16}$.**

$r = \frac{4}{3}$; $a_n = 3 = \frac{27}{16} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} \to n = 3$ Por tanto, $a_3 = 3$ y $a_4 = 4$.

99. **¿Es 3 720 087 uno de los términos de la progresión aritmética cuya razón es 3 y cuyo término sexto es 1701?**

$a_n = a_6 \cdot r^{n-6} \to 3\,720\,087 = 1\,701 \cdot 3^{n-6} \to 2\,187 = 3^{n-6} \to n = 13$. Es el término a_{13}.

100. **Calcula la suma de los 5, 10 y 15 primeros términos de la progresión geométrica cuyo término general es $a_n = 2 \cdot (-5)^{n-1}$.**

$$S_5 = \frac{a_1 \cdot r^5 - 1}{r - 1} \to S_5 = \frac{2 \cdot -5^{5} - 1}{-5 - 1} = 1\,042$$

$$S_{10} = \frac{a_1 \cdot r^{10} - 1}{r - 1} \to S_{10} = \frac{2 \cdot -5^{10} - 1}{-5 - 1} = -3\,255\,208$$

$$S_{15} = \frac{a_1 \cdot r^{15} - 1}{r - 1} \to S_{15} = \frac{2 \cdot -5^{15} - 1}{-5 - 1} = 10\,172\,526\,042$$

101. **Obtén la suma de los 7 primeros términos de las progresiones geométricas cuyo término general es el que se da a continuación:**

a) $a_n = (-2) \cdot 3^{n+1}$ c) $a_n = (-3) \cdot 2^{n+2}$

b) $a_n = 3^{n-2}$ d) $a_n = (-2)^{n-1}$

a) $S_7 = \frac{a_1 \cdot r^7 - 1}{r - 1} \to S_7 = \frac{-18 \cdot 3^7 - 1}{3 - 1} = -19\,674$

c) $S_7 = \frac{a_1 \cdot r^7 - 1}{r - 1} \to S_7 = \frac{-24 \cdot 2^7 - 1}{2 - 1} = -3\,048$

b) $S_7 = \frac{a_1 \cdot r^7 - 1}{r - 1} \to S_7 = \frac{\frac{1}{3} \cdot 3^7 - 1}{3 - 1} = \frac{1093}{3}$

d) $S_7 = \frac{a_1 \cdot r^7 - 1}{r - 1} \to S_7 = \frac{1 \cdot -2^{7} - 1}{-2 - 1} = 43$

102. **Halla las siguientes sumas de términos en progresiones geométricas.**

a) 6 primeros términos si $a_1 = 7$ y $r = 4$.

b) 10 primeros términos si $a_3 = \frac{4}{9}$ y $r = 3$.

c) 8 primeros términos si $a_1 = 10$ y $r = 0,2$.

a) $S_6 = \frac{a_1 \cdot r^6 - 1}{r - 1} \rightarrow S_6 = \frac{7 \cdot 4^6 - 1}{4 - 1} = 9555$

b) $a_1 = \frac{4}{9} : 3^2 = \frac{4}{81}$ $\quad S_{10} = \frac{a_1 \cdot r^{10} - 1}{r - 1} \rightarrow S_{10} = \frac{\frac{4}{81} \cdot 3^{10} - 1}{3 - 1} = \frac{118096}{81}$

c) $S_8 = \frac{a_1 \cdot r^8 - 1}{r - 1} \rightarrow S_8 = \frac{10 \cdot \left(\left(\frac{1}{5}\right)^8 - 1\right)}{\frac{1}{5} - 1} = \frac{195312}{15625}$

103. **Calcula, si es posible, la suma de todos los términos de estas progresiones geométricas.**

a) 10; 2; 0,4; 0,08; …

b) 16; 12; 9; 6,75; …

a) $S = \frac{a_1}{1 - r} \rightarrow S = \frac{10}{1 - \frac{1}{5}} = \frac{25}{2}$

b) $S = \frac{a_1}{1 - r} \rightarrow S = \frac{16}{1 - \frac{3}{4}} = 64$

104. **Escribe los 5 primeros términos de estas progresiones geométricas.**

a) $a_1 = \frac{1}{3}$ y la suma de todos sus términos es $\frac{4}{9}$.

b) $r = \frac{1}{5}$ y la suma de todos sus términos es $\frac{15}{4}$.

a) $S = \frac{a_1}{1 - r} \rightarrow \frac{4}{9} = \frac{\frac{1}{3}}{1 - r} \rightarrow r = \frac{1}{4}$ $\quad$ La sucesión es $\frac{1}{3}, \frac{1}{12}, \frac{1}{48}, \frac{1}{192}, \frac{1}{768}, \ldots$

b) $S = \frac{a_1}{1 - r} \rightarrow \frac{15}{4} = \frac{a_1}{1 - \frac{1}{5}} \rightarrow a_1 = 3$ $\quad$ La sucesión es $3, \frac{3}{5}, \frac{3}{25}, \frac{3}{125}, \frac{3}{625}, \ldots$

105. **Halla la suma de los 9 primeros términos de una progresión geométrica sabiendo que $a_5 = 160$ y $a_2 = 20$.**

$r^3 = 8 \rightarrow r = 2 \rightarrow a_1 = 10$ $\quad S_9 = \frac{a_1 \cdot r^9 - 1}{r - 1} \rightarrow S_9 = \frac{10 \cdot 2^9 - 1}{2 - 1} = 5110$

106. La suma de los 5 primeros términos de una progresión geométrica es $\frac{781}{500}$ y $r = \frac{1}{5}$.

a) Escribe los primeros términos de la progresión.

b) Calcula la suma de todos los términos de la progresión y compárala con la dada.

a) $S_5 = \frac{a_1 \cdot r^5 - 1}{r - 1} \rightarrow \frac{781}{500} = \frac{a_1 \cdot \left(\left(\frac{1}{5}\right)^5 - 1\right)}{\frac{1}{5} - 1} \rightarrow a_1 = \frac{5}{4}$

Con lo que la sucesión es $\frac{5}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{20}, \frac{1}{100}, \frac{1}{500}, \ldots$

b) $S = \frac{a_1}{1 - r} \rightarrow S = \frac{\frac{5}{4}}{1 - \frac{1}{5}} = \frac{25}{16}$

Ambas sumas son prácticamente iguales: $\frac{781}{500} = 1{,}562$ y $\frac{25}{16} = 1{,}5625$

107. Un árbol de rápido crecimiento multiplica su altura por 1,2 cada año. Si al comenzar el año medía 0,75 m, ¿qué altura tendrá dentro de 10 años? ¿Cuánto crecerá en esos 10 años?

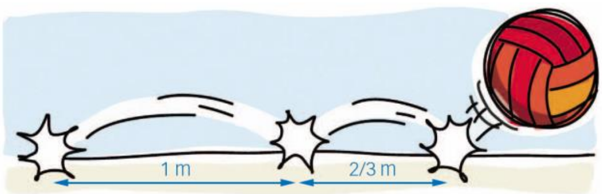
Es una progresión geométrica, con $r = 1{,}2$ y $a_1 = 0{,}75$.

$a_{10} = 0{,}75 \cdot 1{,}2^9 = 3{,}87$ m medirá a los 10 años, por lo que habrá crecido:
$3{,}87 - 0{,}75 = 3{,}12$ m

108. Dejamos caer una pelota desde una altura de 1 metro, y en cada uno de los botes que da sube a una altura igual que la mitad del bote anterior. ¿A qué altura llegará en el quinto bote?

Es una progresión geométrica, con $r = 0{,}5$ y $a_1 = 1$. El quinto bote es el término sexto de la progresión: $a_6 = 1 \cdot 0{,}5^5 = 0{,}03125$ m

109. Lanzamos un balón que da botes a lo largo de un pasillo, como se ve en la figura.

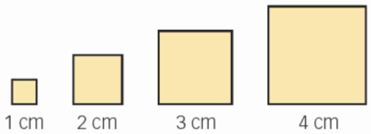


Si al séptimo bote choca con la pared y se para, ¿qué distancia habrá recorrido?

Es una progresión geométrica, con $r = \frac{2}{3}$ y $a_1 = 1$.

La suma de los 7 primeros términos es: $S_7 = \frac{1 \cdot \left[\left(\frac{2}{3}\right)^7 - 1\right]}{\frac{2}{3} - 1} = 2{,}82$ m

110. **Observa las figuras y responde.**



a) ¿Qué tipo de sucesión es la que se forma con los perímetros de los cuadrados?

b) ¿Y con las diagonales de los cuadrados?

c) ¿Y con las áreas de los cuadrados?

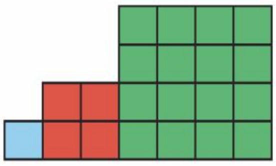
a) La sucesión de los perímetros es 4, 8, 12, 16, … Es una progresión aritmética con $d = 4$.

b) La sucesión de las diagonales es $\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 3\sqrt{2}, 4\sqrt{2}, \ldots$ Es una progresión aritmética con $d = \sqrt{2}$.

c) La sucesión de las áreas es 1, 4, 9, 16, …

No es ni progresión aritmética ni geométrica. El término general es $a_n = n^2$.

111. **Fíjate en la figura y describe las sucesiones de las medidas que se piden.**



a) Medidas de los lados de los cuadrados.

b) Medidas de las áreas de los cuadrados.

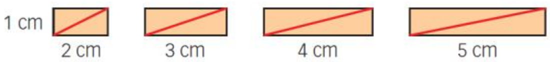
a) La sucesión de las medidas de los lados de los cuadrados es 1, 2, 4, 8, …

Es una progresión geométrica con $r = 2$.

b) La sucesión de las medidas de las áreas de los cuadrados es 1, 4, 16, 64, ...

Es una progresión geométrica con $r = 4$.

112. **Observa estos rectángulos.**



Describe la sucesión de las medidas de las diagonales y halla la del rectángulo que ocupa el duodécimo lugar.

La sucesión es $\sqrt{5}, \sqrt{10}, \sqrt{17}, \sqrt{26}, \ldots$ y $a_n = \sqrt{1 + (n+1)^2} \rightarrow a_{12} = \sqrt{170}$

113. **La longitud de los lados de un heptágono están en progresión aritmética. Hállalos sabiendo que el menor mide 2 cm y el perímetro es 77 cm.**

$$S_7 = \frac{(a_1 + a_7)\cdot 7}{2} \rightarrow 77 = \frac{(2 + a_7)\cdot 7}{2} \rightarrow a_7 = 20$$

$$a_7 = a_1 + 6d \rightarrow 20 = 2 + 6d \rightarrow d = 3$$

Con lo que las longitudes de los lados son: 2, 5, 8, 11, 14, 17 y 20.

114. **La suma de las edades de tres hermanos es la tercera parte de la edad de su abuelo. Halla sus edades sabiendo que están en progresión geométrica con $r = 3$ y su abuelo tiene 78 años.**

$$S_3 = \frac{a_1 \cdot r^3 - 1}{r - 1} \rightarrow 26 = \frac{a_1 \cdot 3^3 - 1}{3 - 1} \rightarrow a_1 = 2$$

Las edades de los hermanos son 2, 6 y 18.

115. **Durante los cuatro primeros meses de vida, un bebé ha ido ganando cada mes un 20% de peso. Si al nacer pesaba 2900 gramos, ¿cuál ha sido su peso al final del cuarto mes?**

Los valores que toma el peso del bebé cada mes, están en progresión geométrica.

Para averiguar el peso que tenía el bebé al final del cuarto mes, hay que calcular a_5.

$a_1 = 2\,900$, $r = 1{,}2$; $a_5 = 2\,900 \cdot 1{,}2^4 = 6\,013{,}44$ g

116. **Una escalera tiene todos los peldaños iguales menos el primero, que mide 20 cm. Al subir 100 escalones, la altura ascendida es de 1505 cm. ¿Qué altura tiene cada peldaño?**

h = altura de uno de los 99 peldaños iguales.

$$1\,505 - 20 = 99 \cdot h \rightarrow h = \frac{1485}{99} = 15 \text{ cm}$$

Se podría considerar que los 99 escalones forman una progresión aritmética de diferencia $d = 0$.

117. **Un montañero planifica la subida a la cima de una montaña de la siguiente manera: el primer tramo será de 625 m, el segundo de 500 m, el tercero de 400 m, el cuarto de 320 m… Si alcanza la cima el octavo día, ¿cuántos metros mide la montaña?**

La sucesión 625, 500, 400, 320, … es una progresión geométrica de razón $r = \frac{4}{5}$.

Sumamos los 8 primeros términos:

$$S_8 = \frac{a_1 \cdot r^8 - 1}{r - 1} = \frac{625 \cdot \left[\left(\frac{4}{5}\right)^8 - 1\right]}{\frac{4}{5} - 1} = 2600{,}712 \text{ m}$$

118. **Una rana está en el borde de una charca circular de 9 m de radio. Quiere llegar al centro dando saltos. Comprueba si llegaría de alguna de las siguientes formas.**

a) El primer salto es de 3 m, y luego avanza dando saltos cuya medida es la mitad de la medida del salto anterior.

b) El primer salto es de 4 m, y luego avanza dando saltos cuya medida es la mitad de la medida del salto anterior.

c) El primer salto es de 3 m, y después avanza dando saltos cuya medida es dos tercios de la medida del salto anterior.

d) El primer salto es de 2 m, y después avanza dando saltos cuya medida es tres cuartos de la medida del salto anterior.

Los saltos forman una sucesión geométrica y la distancia que recorre la rana es la suma de ellos.

a) La ecuación que resulta de la suma de *n* términos de la progresión formada por los saltos es:

$9=\dfrac{3\cdot\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n}-1\right)}{\frac{1}{2}-1}$, que no tiene solución. De esta manera no llega al centro.

b) Análogamente, $9=\dfrac{4\cdot\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n}-1\right)}{\frac{1}{2}-1}$ tampoco tiene solución. De esta manera tampoco llega al centro.

c) En este caso llegaría dando *infinitos* saltos, ya que $S=\dfrac{3}{1-\frac{2}{3}}=9$.

d) De la misma manera, $9=\dfrac{2\cdot\left(\left(\frac{3}{4}\right)^{n}-1\right)}{\frac{3}{4}-1}$ no tiene solución y tampoco llega al centro.

119. Quique recorre en bici 1 500 m su primer día de entrenamiento. Cada día aumenta en $\frac{1}{3}$ lo que recorre el día anterior. Su objetivo es llegar a recorrer 100 km en total en un mes, entrenando todos los días. ¿Podrá conseguirlo a ese ritmo?

Las cantidades recorridas cada día forman una sucesión geométrica con $r=\frac{4}{3}$.

Hallamos la suma de los 30 primeros términos:

$$S_{30}=\frac{a_1\cdot r^{30}-1}{r-1}=\frac{1500\cdot\left(\left(\frac{4}{3}\right)^{30}-1\right)}{\frac{4}{3}-1}=25193{,}99549 \text{ km}$$

Luego sí conseguirá el objetivo.

120. El primer metro de excavación de un pozo cuesta 20 €, el segundo 5 € más que el primero, el tercero 5 € más que el segundo y así sucesivamente.

a) ¿Qué profundidad se alcanzará con 1 350 €?

b) ¿Cuánto costaría excavar un pozo de 300 m?

c) Utiliza las progresiones y expresa el gasto de la excavación en función del número de metros de profundidad.

Progresión aritmética con $d=5$ y $a_1=20$.

a) $1350=S_n=\dfrac{a_1+a_n\ \cdot n}{2}\rightarrow 1350=\dfrac{20+15+5n\ \cdot n}{2}$ $5n^2+35n-2700=0\rightarrow n=20$

b) $n=300\rightarrow S_{300}=\dfrac{a_1+a_{300}\ \cdot 300}{2}=\dfrac{20+1515\ \cdot 300}{2}=230\,250$ €

c) $\dfrac{a_1+a_n\ \cdot n}{2}=\dfrac{20+15+5n\ \cdot n}{2}=\dfrac{5n^2+35n}{2}$ €

121. Durante 2015, una empresa de autobuses transportó 500 000 pasajeros. Las previsiones para los próximos 6 años son incrementar en un 4 % anual el número de pasajeros. Si se cumplen las previsiones, ¿cuántas personas transportará la empresa entre 2015 y 2020?

Las personas que transporta cada año se ajustan a una progresión geométrica con $a_1 = 500\,000$ y $r = 1{,}04$.

La cantidad pedida es la suma de los seis primeros términos de esa progresión.

$$S_6 = \frac{500\,000 \cdot 1{,}04^6 - 1}{1{,}04 - 1} = 3\,316\,487 \text{ personas}$$

122. Una empresa de coches tuvo una producción en el mes de enero del año pasado de 25 000 unidades de los modelos que fabrica.

A partir de febrero, cada mes, la producción fue un 15 % más alta que el mes anterior. Determina la cantidad total de coches que esta compañía produjo el año pasado.

Los coches fabricados cada mes forman una progresión geométrica con $a_1 = 25\,000$ y $r = 1{,}15$.

La cantidad pedida es la suma de los 12 primeros términos de esa progresión.

$$S_{12} = \frac{25\,000 \cdot 1{,}15^{12} - 1}{1{,}15 - 1} = 725\,042 \text{ coches}$$

123. La población de una ciudad es de 20 000 habitantes. Si esta población crece a un ritmo de un 2 % al año, ¿cuántos habitantes tendrá dentro de 10 años?

Se pide el término a_{11} de una progresión geométrica con $r = 1{,}02$ y $a_1 = 20\,000$

$a_{11} = 20\,000 \cdot 1{,}02^{10} = 24\,380$ habitantes

124. La población de un país es de aproximadamente 100 millones de habitantes y se estima que dentro de 20 años será de 144 millones de personas. Calcula su tasa de crecimiento anual (tanto por ciento del crecimiento de población) en ese período.

$a_{21} = a_1 \cdot r^{20} \to 144 = 100 \cdot r^{20} \to r = 1{,}018$ La tasa de crecimiento anual es 1,8 %.

125. Si depositamos 5 000 € al 4 % anual el 31 de diciembre, ¿qué capital final tendremos al acabar cada año tras cada uno de los siguientes períodos de tiempo?

a) Tres años. b) Cinco años. c) Seis años.

$C = 5\,000$ €, $r = 4$ %

a) $C_f = C \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right)^t = 5000 \cdot \left(1 + \frac{4}{100}\right)^3 = 5\,624{,}32$ €

b) $C_f = C \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right)^t = 5000 \cdot \left(1 + \frac{4}{100}\right)^5 = 6\,083{,}26$ €

c) $C_f = C \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right)^t = 5000 \cdot \left(1 + \frac{4}{100}\right)^6 = 6\,326{,}60$ €

126. **Calcula el capital que a un interés compuesto del 4,5 % produce en cuatro años un capital de 59 626 €.**

$$C_f = C\cdot\left(1+\frac{r}{100}\right)^t \rightarrow 59\,626 = C\cdot 1{,}045^4 \rightarrow C = 50\,000\ €$$

127. **En una situación de interés compuesto, un capital de 10 000 € se convierte en 10 527 € al cabo de dos años. ¿Cuál es el interés al que se invirtió el capital inicial?**

$$C_f = C\cdot\left(1+\frac{r}{100}\right)^t \rightarrow 10527 = 10000\cdot\left(1+\frac{r}{100}\right)^2 \rightarrow r = 2{,}6\%$$

128. **Calcula el capital inicial que hay que invertir con un interés compuesto del 3 % mensual para obtener finalmente 2 100 € después de 4 años.**

$$C_f = C\cdot\left(1+\frac{r}{100}\right)^t \rightarrow 2100 = C\cdot\left(1+\frac{3}{100}\right)^{48} \rightarrow C = 508{,}20\ €$$

129. **Halla el capital que, con un interés compuesto del 10 % anual, produce 133,10 € en 3 años.**

$$C_f = C\cdot\left(1+\frac{r}{100}\right)^t \rightarrow 133{,}10 = C\cdot\left(1+\frac{10}{100}\right)^3 \rightarrow C = 100\ €$$

130. **Si un capital de 5 000 € se convierte en 6 000 € en una situación de interés compuesto al cabo de 2 años, ¿cuál es el interés al que ha estado invertido el capital inicial?**

$$6\,000 = 5\,000\cdot\left(1+\frac{r}{100}\right)^2 \rightarrow \sqrt{\frac{6}{5}} = 1+\frac{r}{100} \rightarrow \frac{r}{100} = \sqrt{\frac{6}{5}}-1$$

$$\rightarrow \frac{r}{100} = 0{,}095 \rightarrow \text{El interés será del } 9{,}5\,\%.$$

DEBES SABER HACER

1. **Escribe los 5 primeros términos para:**

a) Una sucesión en la que el primer término es 5 y cada término se obtiene sumando 2 al anterior.

b) Una sucesión en la que el primer término es 2, el segundo es $2\cdot 0{,}5 = 1$; el tercero es $1\cdot 0{,}5 = 0{,}5$.

a) 5, 7, 9, 11, 13 b) 2; 1; 0,5; 0,25; 0,125

2. **Obtén los 5 primeros términos de las siguientes sucesiones.**

a) $a_1 = 1, a_2 = 3, a_n = a_{n-2} - a_{n-1}$

b) $b_1 = 2, b_2 = 4, b_n = \dfrac{b_{n-1}}{b_{n-2}}$

a) 1, 3, –2, 5, –7 b) 2; 4; 2; 0,5; 0,25

3. **En estas progresiones aritméticas:**

a) $a_1 = 13$ y $a_2 = 5$, calcula d, a_8 y a_n.

b) $b_1 = 4{,}5$ y $b_2 = 6$, calcula d, b_{10} y b_n.

a) $d = 5 - 13 = -8$; $a_n = 13 + (n - 1) \cdot (-8) = 21 - 8n$; $a_8 = 21 - 64 = -43$

b) $d = 6 - 4{,}5 = 1{,}5$; $b_n = 4{,}5 + (n - 1) \cdot 1{,}5 = 3 + 1{,}5n$; $b_{10} = 3 + 15 = 18$

4. **En una progresión aritmética $a_1 = 8$ y $d = 5$. ¿Qué número de término es el 133? Halla la suma de todos los términos hasta él.**

$a_n = 133 = 8 + (n - 1) \cdot 5 = 3 + 5n \rightarrow n = 26$

5. **En una progresión geométrica $a_2 = 60$ y $a_4 = 3\,840$. Calcula:**

a) La razón y el término general.

b) La suma y el producto de los 8 primeros términos.

a) $r^2 = \dfrac{a_4}{a_2} = 64 \rightarrow r = \pm 8$ Consideramos la solución $r = 8$.

Si $r = 8 \rightarrow a_1 = 60 : 8 = \dfrac{15}{2} \rightarrow a_n = \dfrac{15}{2} \cdot 8^{n-1} = 15 \cdot 2^{3n-4}$

Análogamente, se obtendría la solución tomando la raíz negativa.

b) Si $r = 8 \rightarrow S_8 = \dfrac{7{,}5 \cdot 8^8 - 1}{8 - 1} = 17975587{,}5$

Análogamente, se obtendría la solución tomando la raíz negativa.

Para obtener el producto multiplicamos todos los términos.

$a_1 = \dfrac{15}{2}$, $a_2 = \dfrac{15}{2} \cdot 8$, $a_3 = \dfrac{15}{2} \cdot 8^2$, $a_4 = \dfrac{15}{2} \cdot 8^3$, $a_5 = \dfrac{15}{2} \cdot 8^4$, $a_6 = \dfrac{15}{2} \cdot 8^5$, $a_7 = \dfrac{15}{2} \cdot 8^6$, $a_8 = \dfrac{15}{2} \cdot 8^7$

$a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot a_5 \cdot a_6 \cdot a_7 \cdot a_8 = \left(\dfrac{15}{2}\right)^8 \cdot 8^{1+2+3+4+5+6+7} = \left(\dfrac{15}{2}\right)^8 \cdot 8^{28}$

6. **En un aparcamiento cobran 0,25 € por la primera hora de estacionamiento, y por cada hora siguiente, el doble de lo cobrado en la hora anterior. ¿Cuánto se pagará por 8 horas?**

Se trata de una progresión geométrica de razón 2 y $a_1 = 0{,}25$. La cantidad pedida es la suma de los 8 primeros términos.

$S_8 = \dfrac{0{,}25 \cdot 2^8 - 1}{2 - 1} = 63{,}75$ €

7. **Calcula el capital que, invertido a un interés compuesto del 5 %, produce en 4 años un capital final de 1 500 €.**

$1\,500 = C = 1{,}05^4 \rightarrow C = 1\,234{,}05$ €

COMPETENCIA MATEMÁTICA. En la vida cotidiana

131. **Con la aparición de los nuevos teléfonos inteligentes o *smartphones* han empezado a proliferar los virus telefónicos.**

Existen varios tipos de virus, uno de ellos es el denominado *gusano*, que se transmite a través de SMS o MMS y no requiere la interacción de los usuarios para ser ejecutado. Su principal objetivo es reproducirse y propagarse a través de otros móviles, por lo que puede copiarse infinitas veces infectando todos los terminales que tenga a su alcance.

Por ahora el riesgo real de que un móvil sea infectado es muy bajo debido a la variedad de sistemas operativos de nuestros terminales (Android, Apple, Windows Mobile…).

Imagina que un móvil ha sido infectado con un gusano que se contagia vía MMS. El *gusano* elige aleatoriamente a 5 personas de sus contactos y les manda un MMS. Al abrirlo, la persona que lo recibe activa el virus que vuelve a repetir el proceso de la misma forma.

Si suponemos que las personas a las que se manda el MMS no coinciden nunca, cuando el virus se haya autocopiado por décima vez en un terminal, ¿cuántos móviles lleva contagiados?

Los contagiados serán la suma de los 10 primeros términos de la progresión geométrica con $r = 5$ y $a_1 = 1$.

$$S_{10} = \frac{a_1 \cdot (r^{10} - 1)}{r - 1} = \frac{1 \cdot (5^{10} - 1)}{5 - 1} = 2\,441\,406 \text{ móviles contagiados}$$

FORMAS DE PENSAR. RAZONAMIENTO MATEMÁTICO

132. **¿Puede ser el número 0 el primer término de una progresión geométrica? ¿Y de una progresión aritmética?**

Si el primer término de una progresión geométrica es 0, todos los términos serán 0, ya que los demás términos se calculan multiplicando el primero por la razón elevada a una cierta potencia. Por otra parte, no hay ningún inconveniente para que el primer término de una progresión aritmética sea 0.

133. **Razona si puede existir una sucesión que sea, al mismo tiempo, progresión aritmética y progresión geométrica. En caso afirmativo, pon un ejemplo.**

Es posible si todos los términos de la sucesión son el mismo.

Sería una progresión aritmética con $d = 0$ y, a la vez, una progresión geométrica con $r = 1$.

Por ejemplo:

a) 3, 3, 3, 3, … b) $\frac{2}{5}, \frac{2}{5}, \frac{2}{5}, \frac{2}{5}, \ldots$ c) –1, –1, –1, –1, …

134. Discute si el término general de una progresión aritmética o geométrica puede ser de la forma $a_n = n^p$, con $p > 1$ un número natural.

Para que fuera aritmética $a_{n+1} - a_n$ debería ser constante y no lo es porque depende de n.

Para $p = 2 \longrightarrow a_{n+1} - a_n = (n+1)^2 - n^2 = 2n + 1$

Para $p = 3 \longrightarrow a_{n+1} - a_n = (n+1)^3 - n^3 = 3n^2 + 3n + 1$ Y así sucesivamente.

Para que fuera geométrica $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ debería ser constante y no lo es porque también depende de n.

Para $p = 2 \longrightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1^{2}}{n^2} = \frac{n^2+2n+1}{n^2} = 1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}$

Para $p = 3 \longrightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1^{3}}{n^3} = \frac{n^3+3n^2+3n+1}{n^3} = 1 + \frac{3}{n} + \frac{3}{n^2} + \frac{1}{n^3}$ Y así sucesivamente.

135. La suma de los n primeros términos de una progresión aritmética ($n > 1$) es 153 y la diferencia de la progresión es 2. Si a_1 es un número entero, ¿qué valores puede tomar n?

La diferencia es $d = 2$.

Y la suma es: $S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} = \frac{[a_1 + a_1 + (n-1) \cdot d] \cdot n}{2} =$

$= \frac{[2a_1 + 2 \cdot (n-1)] \cdot n}{2} = (a_1 + n - 1) \cdot n = 153$

El valor de n debe ser entero y, por tanto, será divisor de 153.

$$\text{Div}(153) = \{1, 3, 9, 17, 51, 153\}$$

Hallamos qué valores sirven como solución.

- $n = 3 \rightarrow a_1 + 3 - 1 = 51 \rightarrow a_1 = 49, a_2 = 51, a_3 = 53$
  y la suma hasta a_3 es 153.
- $n = 9 \rightarrow a_1 + 9 - 1 = 17 \rightarrow a_1 = 9, a_2 = 11, a_3 = 13\ldots$
  y la suma hasta a_9 es 153.
- $n = 17 \rightarrow a_1 + 17 - 1 = 9 \rightarrow a_1 = -7, a_2 = -5, a_3 = -3\ldots$
  y la suma hasta a_{17} es 153.
- $n = 51 \rightarrow a_1 + 51 - 1 = 3 \rightarrow a_1 = -47, a_2 = -45, a_3 = -43\ldots$
  y la suma hasta a_{51} es 153.
- $n = 153 \rightarrow a_1 + 153 - 1 = 1 \rightarrow a_1 = -151, a_2 = -149, a_3 = -147\ldots$
  y la suma hasta a_{153} es 153.

136. Expresa de forma fraccionaria el número periódico $0,\widehat{3}$; para ello escríbelo de la forma:

$0,3 + 0,03 + 0,003 + \ldots$

y halla la suma de la progresión.

$0,\widehat{3} = 0,3 + 0,03 + 0,003 + \ldots$

Se puede expresar como la suma de los términos de una progresión geométrica con $r = 0,1$ y $a_1 = 0,3$.

$$0,\widehat{3} = S = \frac{a_1}{1-r} = \frac{0,3}{1-0,1} = \frac{1}{3}$$

137. Obtén la fracción generatriz de $2,\widehat{8}$ utilizando la suma de una progresión.

Como $2,\widehat{8} = 2,8888\ldots = 2 + \underbrace{0,8 + 0,08 + 0,008 + 0,0008\ldots}_{\text{Suma de una progresión geométrica cuyo primer término es } a_1 = 0,8 \text{ y } r = 0,1}$

$$2,\widehat{8} = 2 + \frac{0,8}{1-0,1} = 2 + \frac{8}{9} = \frac{26}{9}$$

138. Consideramos una progresión geométrica con $a_1 \neq 0$ y $r \neq 0$, y una progresión aritmética con $a_1 = 0$. Sumando, término a término, estas dos progresiones obtenemos la sucesión: 1, 1, 2, … ¿Cuál es la suma de los 10 primeros términos?

La progresión geométrica es a_n y la aritmética es b_n (con $b_1 = 0$). Y la suma es $a_n + b_n$.

$a_1 + b_1 = 1$, y como $b_1 = 0$, entonces $a_1 = 1$.

Por tanto, tenemos que: $a_n = r^{n-1}$ y $b_n = (n-10)\cdot d$.

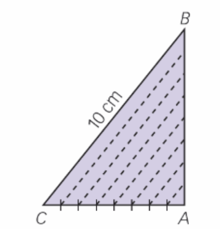
$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{r} a_1 + b_1 = r + d = 1 \\ a_2 + b_2 = r^2 + 2d = 2 \end{array}\right\} \rightarrow d = 1 - r \end{array}\right\} \rightarrow r^2 + 2\cdot(1-r) = 2 \rightarrow r^2 - 2r = 0 \rightarrow r = 0 \text{ y } r = 2$$

Como r no puede ser 0, $r = 2$ y $d = -1$.

La suma de los 10 primeros términos es la suma de los 10 términos de cada una de las sucesiones.

$$\left.\begin{array}{l} S'_{10} = \dfrac{1\cdot(2^9-1)}{2-1} = 511 \\ S''_{10} = \dfrac{[0+(-1)\cdot 10]}{2} = 5 \end{array}\right\} \rightarrow S_{10} = S'_{10} + S''_{10} = 516$$

139. Dividimos el lado *AC* de un triángulo rectángulo *ABC* en 8 partes iguales, levantando desde los puntos de división paralelas al lado *BC*. Si *BC* mide 10 cm, calcula la suma de las longitudes de los otros 7 segmentos.



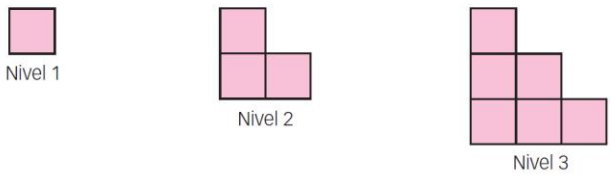
La distancia de *A* a cada división *n* de *AC* es $\frac{n}{8}\overline{AC}$ y, por semejanza de triángulos, el lado paralelo a *BC* que pasa por esa división será:

$$\left.\begin{array}{r} \frac{n}{8}\overline{AC} \rightarrow \overline{AC} \\ x \rightarrow 10 \end{array}\right\} \rightarrow x = \frac{10n}{8} = \frac{5n}{4}$$, por lo que forman una progresión aritmética con $d = \frac{5}{4}$ y $a_1 = \frac{5}{4}$.

Así, $S_{10} = \dfrac{\left(\frac{5}{4}+10\right)\cdot 10}{2} = \left(\frac{5}{4}+10\right)\cdot 5 = \dfrac{225}{4}$

PRUEBAS PISA

140. Roberto construye el esquema de una escalera usando cuadrados. He aquí los pasos que sigue:



Como se puede ver, utiliza un cuadrado para el Nivel 1, tres cuadrados para el Nivel 2, y seis para el Nivel 3.

¿Cuántos cuadrados en total deberá usar para construir hasta el cuarto nivel?

(Prueba PISA 2003)

Para pasar de nivel añade el mismo número de cuadrados que el nivel al que accede.

Deberá usar 10 cuadrados: $1+2+3+4=10$

141. Una leyenda cuenta que el inventor del ajedrez presentó su invento a un príncipe de la India. El príncipe quedó tan impresionado que quiso premiarle y le dijo:

«Pídeme lo que quieras, que te lo daré».

El inventor del ajedrez, sorprendido, pidió:

«Deseo que me entregues un grano de trigo por la primera casilla del tablero, dos por la segunda, cuatro por la tercera, ocho por la cuarta, dieciséis por la quinta, y así sucesivamente hasta la casilla 64».

La sorpresa fue cuando calcularon la cantidad de trigo que representaba la petición del inventor. ¿Cuántos granos de trigo pedía aproximadamente?

Expresa el resultado en notación científica.

Se tiene la progresión geométrica: 1, 2, 4, 8, 16, …

Los granos pedidos serán la suma de los 64 primeros términos de esta progresión:

$$S_{64}=\frac{a_1\cdot r^{64}-1}{r-1}=\frac{1\cdot 2^{64}-1}{2-1}=1{,}84\cdot 10^{19}$$