10 Sucesiones

PIENSA Y DECIDE

En el texto aparece el término "lista" en una acepción muy concreta. Busca algún otro sinónimo.

Sinónimos de lista son relación, serie, sucesión…

Busca algún otro ejemplo de listas de números que evolucionen mediantes sumas y otras mediante productos.

Respuesta libre

ANALIZA Y SACA CONCLUSIONES

¿Qué sueldos corresponden a los días quinto y sexto en cada uno de los contratos?

El sueldo correspondiente al quinto día, con el contrato ARI, es 5000 € y, el sexto, 6000 €.

Con el contrato GEO, el sueldo correspondiente al quinto día es 0,16 € y, el sexto, 0,32 €.

¿Qué sueldo elegirías? Busca argumentos a favor y en contra de cada uno de ellos.

Si el contrato durara 25 días, con el contrato ARI se cobraría 350 000 € y, con el contrato GEO, 335 544,31 €.

Si el contrato durara 26 días, con el contrato ARI se cobraría 377 000€ y, con el contrato GEO, 671 088,63 €.

Por tanto, si el contrato durara 25 días o menos elegiría el sueldo ARI. En cambio, si el contrato durara 26 o más días, elegiría el contrato GEO.

Actividades propuestas

1. Calcula los tres primeros términos y el término décimo de las sucesiones:

$a_n = n^2 - 3n$ | $b_n = n - \dfrac{24}{n}$ | $c_n = (-1)^n$

$a_1 = 1^2 - 3 \cdot 1 = -2$ | $b_1 = 1 - \dfrac{24}{1} = -23$ | $c_1 = (-1)^1 = -1$

$a_2 = 2^2 - 3 \cdot 2 = -2$ | $b_2 = 2 - \dfrac{24}{2} = -10$ | $c_2 = (-1)^2 = 1$

$a_3 = 3^2 - 3 \cdot 3 = 0$ | $b_3 = 3 - \dfrac{24}{3} = -5$ | $c_3 = (-1)^3 = -1$

$a_{10} = 10^2 - 3 \cdot 10 = 70$ | $b_{10} = 10 - \dfrac{24}{10} = \dfrac{38}{5}$ | $c_{10} = (-1)^{10} = 1$

2. Escribe en tu cuaderno los tres términos siguientes de estas sucesiones.

a) **1, 3, 6, 10, 15…** **b)** $\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{6}, \dfrac{1}{12}, \dfrac{1}{24}...$ **c)** **10, 1, –8, –17…** **d)** $\dfrac{7}{5}, \dfrac{4}{10}, \dfrac{1}{15}, \dfrac{-2}{20}...$

a) 21, 28 y 36 **b)** $\dfrac{1}{48}, \dfrac{1}{96}$ y $\dfrac{1}{192}$ **c)** –26, –35, –44 **d)** $\dfrac{-5}{25}, \dfrac{-8}{30}$ y $\dfrac{-11}{35}$

3. Escribe el término general y los cinco primeros términos de las siguientes sucesiones.

a) A cada número natural le corresponde su cubo más dos unidades.

b) A cada número natural le corresponde el cuadrado de su anterior.

c) El primer término es 1 y cada uno de los siguientes es el doble del anterior más 1.

a) $a_n = n^3 + 2$

$a_1 = 1^3 + 2 = 3$

$a_2 = 2^3 + 2 = 10$

$a_3 = 3^3 + 2 = 29$

$a_4 = 4^3 + 2 = 66$

$a_5 = 5^3 + 2 = 127$

b) $b_n = (n - 1)^2$

$b_1 = (1 - 1)^2 = 0$

$b_2 = (2 - 1)^2 = 1$

$b_3 = (3 - 1)^2 = 4$

$b_4 = (4 - 1)^2 = 9$

$b_5 = (5 - 1)^2 = 16$

c) $c_n = 2 \cdot c_{n-1} + 1, n > 2$

$c_1 = 1$

$c_2 = 2 \cdot 1 + 1 = 3$

$c_3 = 2 \cdot 3 + 1 = 7$

$c_4 = 2 \cdot 7 + 1 = 15$

$c_5 = 2 \cdot 15 + 1 = 31$

4. Calcula los seis primeros términos de las siguientes sucesiones definidas por recurrencia.

a) $a_1 = 6, a_n = a_{n-1} + n$

b) $b_1 = 2, b_2 = 3, b_n = b_{n-1} + b_{n-2}$

c) $c_1 = -1, c_2 = 2, c_3 = 1, c_n = 2c_{n-3} + c_{n-1}$

a) $a_1 = 6$

$a_2 = a_1 + 2 = 6 + 2 = 8$

$a_3 = a_2 + 3 = 8 + 3 = 11$

$a_4 = a_3 + 4 = 11 + 4 = 15$

$a_5 = a_4 + 5 = 15 + 5 = 20$

$a_6 = a_5 + 6 = 20 + 6 = 26$

b) $b_1 = 2$

$b_2 = 3$

$b_3 = b_1 + b_2 = 2 + 3 = 5$

$b_4 = b_2 + b_3 = 3 + 5 = 8$

$b_5 = b_3 + b_4 = 5 + 8 = 13$

$b_6 = b_4 + b_5 = 8 + 13 = 21$

c) $c_1 = -1$

$c_2 = 2$

$c_3 = 1$

$c_4 = 2c_1 + c_3 = -2 + 1 = -1$

$c_5 = 2c_2 + c_4 = 4 - 1 = 3$

$c_6 = 2c_3 + c_5 = 2 + 3 = 5$

5. Encuentra el término general de estas sucesiones:

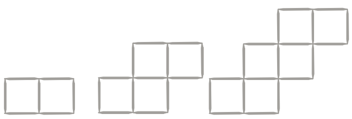
$(a_n) = (6, 11, 16, 21…)$ — $a_n = 1 + 5n$

$(b_n) = (1, 4, 9, 16…)$ — $b_n = n^2$

$(c_n) = (2, 6, 12, 20…)$ — $c_n = n^2 + n$

$(d_n) = (2, 6, 14, 30…)$ — $d_n = 2^{(n+1)} - 2$

6. Santos está construyendo una escalera con palitos. En el dibujo se observa cómo está levantando la escalera.



¿Cuántos palitos necesitará Santos para formar una escalera con 148 escalones?

Para el primer escalón se necesitan 7 palitos, para el segundo 13, para el tercero 19…

Se forma la sucesión $(a_n) = (7, 13, 19…)$, cuyo término general es $a_n = 6n + 1$.

Para calcular el número de palitos que se necesitarán para construir una escalera con 148 escalones hay que hallar el término 148 de la sucesión.

Por tanto, se necesitarán $a_{148} = 6 \cdot 148 + 1 = 889$ palitos.

7. Actividad resuelta

8. **Encuentra la ley de recurrencia de estas sucesiones, en función de los dos términos anteriores.**

a) $(a_n) = (5, 9, 4, -5, -9, -4, 5...)$ **para** $n > 2$

b) $(b_n) = (1, 4, 6, 14, 26, 54, 106...)$ **para** $n > 2$

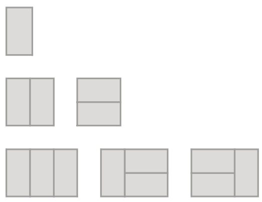
c) $(c_n) = (1, 3, -1, 7, -9, 23, -41...)$ **para** $n > 2$

a) $a_1 = 5$, $a_2 = 9$, $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$

b) $b_1 = 1$, $b_2 = 4$, $b_n = 2b_{n-2} + b_{n-1}$

c) $c_1 = 1$, $c_2 = 3$, $c_n = 2c_{n-2} - c_{n-1}$

9. **Con ladrillos que miden 2 × 1 cm podemos construir una pared de 2 cm de alto de distintas maneras según el largo de la pared. Si queremos que sea de 1 cm de largo, solo podemos hacerlo de una forma. Si la queremos hacer de 2 cm de largo, tenemos dos opciones, etc.**



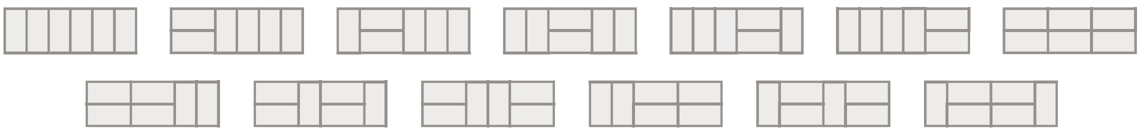
a) ¿Cuántas formas hay de hacer un muro de 6 cm de largo?

b) ¿De qué tipo es la sucesión que se va formando? Encuentra su ley de recurrencia.

a) Para construir un muro de 6 cm de largo los ladrillos se pueden poner de la siguiente forma:

- Todos los ladrillos verticales.
- 2 ladrillos horizontales y 4 verticales. Intercalando los 2 ladrillos horizontales entre los verticales, se consiguen 5 formas distintas de colocarlos.
- 4 ladrillos horizontales y 2 verticales. Intercalando los 2 ladrillos horizontales entre los verticales, se consiguen 6 formas distintas de colocarlos.
- Todos los ladrillos horizontales.

Las distintas formas que hay de hacer un muro de 6 cm de largo son las siguientes:



En total hay 1 + 5 + 6 + 1 = 13 formas distintas de hacer un muro de 6 cm de largo.

b) Para construir un muro de 1 cm de largo hay 1 forma, para un muro de 2 cm hay 2 formas, para un muro de 3 cm hay 3 formas, para un muro de 4 cm hay 5 formas, para un muro de 5 cm hay 8 formas, para un muro de 6 cm hay 13 formas…

Se forma la sucesión $(a_n) = (1, 2, 3, 5, 8, 13...)$. Cada término, a partir del tercero, se obtiene sumando los dos anteriores.

Por tanto, la ley de recurrencia es $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$

10. **Identifica si las siguientes sucesiones son progresiones aritméticas.**

a) **4, 7, 10, 13, 16, 19…** **b)** **–2, –1, 0, 3, 5, 7…**

a) Sí que es una progresión aritmética, porque al restar a cada término su anterior siempre se obtiene el mismo valor, 3.

b) No es una progresión aritmética, porque al restar a cada término su anterior no siempre se obtiene el mismo valor: $a_2 - a_1 = 1$ y $a_4 - a_3 = 3$.

11. Halla el valor de la diferencia en las siguientes progresiones aritméticas.

a) $(a_n) = (3, 10, 17, 24\ldots)$

b) $(b_n) = (1, –1, –3, –5\ldots)$

c) $(c_n) = (5, 2, –1, –4\ldots)$

d) $(d_n) = (–21, –10, 1, 12\ldots)$

a) $d = 10 – 3 = 7$

b) $d = –1 – 1 = –2$

c) $d = 2 – 5 = –3$

d) $d = –10 – (–21) = 11$

12. El primer término de una progresión aritmética es $a_1 = 100$ y su diferencia es $d = −8$.

a) Encuentra su término general.

b) ¿Qué lugar ocupa el primer término negativo de la progresión?

a) $a_n = 100 + (n – 1) \cdot (–8) = 100 – 8n + 8 = 108 – 8n$

b) $108 – 8n = 0 \Rightarrow n = 13{,}5$. El primer término negativo de la progresión es el término 14.

13. Actividad resuelta

14. Calcula el término general de una progresión aritmética, dados los términos.

a) $a_3 = 15$ y $a_9 = 27$

b) $a_6 = –7$ y $a_{12} = –12$

a) Sustituyendo en la fórmula del término general, se obtiene:

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow \begin{cases} a_3 = a_1 + 2d \\ a_9 = a_1 + 8d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 15 = a_1 + 2d \\ 27 = a_1 + 8d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 11 \\ d = 2 \end{cases}$$

$a_n = 11 + (n – 1) \cdot 2 = 11 + 2n – 2 = 9 + 2n$

b) Sustituyendo en la fórmula del término general, se obtiene:

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow \begin{cases} a_6 = a_1 + 5d \\ a_{12} = a_1 + 11d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -7 = a_1 + 5d \\ -12 = a_1 + 11d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = -\dfrac{17}{6} \\ d = -\dfrac{5}{6} \end{cases}$$

$$a_n = -\frac{17}{6} + (n-1)\cdot\left(-\frac{5}{6}\right) = -\frac{17}{6} - \frac{5n}{6} + \frac{5}{6} = -2 - \frac{5n}{6}$$

15. Calcula la suma de:

a) Los veinte primeros múltiplos de 3.

b) Los trece primeros números que acaban en 13.

c) Los números del 1 al 100.

a) $(a_n) = (0, 3, 6, 9, 12...) \Rightarrow a_n = 3n$

$$\begin{cases} a_1 = 0 \\ a_{30} = 90 \end{cases} \Rightarrow S_{30} = \frac{a_1 + a_{30}}{2}\cdot 30 = \frac{0+90}{2}\cdot 30 = 1350$$

b) $(a_n) = (13, 113, 213, 313, 413...) \Rightarrow a_n = 13 + (n – 1) \cdot 100 = 13 + 100n – 100 = 100n – 87$

$$\begin{cases} a_1 = 13 \\ a_{13} = 1213 \end{cases} \Rightarrow S_{13} = \frac{a_1 + a_{13}}{2}\cdot 13 = \frac{13+1213}{2}\cdot 13 = 7969$$

c) $(a_n) = (1, 2, 3, 4, 5...) \Rightarrow a_n = n$

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{100} = 100 \end{cases} \Rightarrow S_{100} = \frac{a_1 + a_{100}}{2}\cdot 100 = \frac{1+100}{2}\cdot 100 = 5050$$

16. Un contrato anual consiste en un sueldo de 1200 € el primer mes, que se irán incrementando en 50 € cada mes que pasa. ¿Cuál es el sueldo del primer año de trabajo según este contrato?

Se trata de una progresión aritmética, porque la diferencia de salario de dos meses consecutivos es siempre 50 €. El término general es $a_n = 1200 + (n-1)\cdot 50 = 1200 + 50n - 50 = 1150 + 50n$.

Para saber cuánto ha ganado el primer año de trabajo, se calcula la suma de los doce primeros términos:

$$\begin{cases} a_1 = 1200 \\ a_{12} = 1750 \end{cases} \Rightarrow S_{12} = \frac{a_1 + a_{12}}{2}\cdot 12 = \frac{1200+1750}{2}\cdot 12 = 17\,700$$

El sueldo del primer año de trabajo ha sido 17 700 €.

17. De una progresión aritmética conocemos su diferencia $d = -5$ y $a_{10} = 31$.

a) Calcula el primer término.

b) Calcula su término general.

c) Calcula la suma de los diez primeros términos.

a) $a_1 = 76$

$$\begin{cases} a_{10} = 31 \\ a_{10} = a_1 + 9d \end{cases} \Rightarrow 31 = a_1 + 9\cdot(-5) \Rightarrow 31 = a_1 - 45 \Rightarrow a_1 = 31 + 45 = 76$$

b) $a_n = 76 + (n-1)\cdot(-5) = 76 - 5n + 5 = 81 - 5n$

c) $S_{10} = 535$

$$\begin{cases} a_1 = 76 \\ a_{10} = 31 \end{cases} \Rightarrow S_{10} = \frac{a_1 + a_{10}}{2}\cdot 10 = \frac{76+31}{2}\cdot 10 = 535$$

18. Actividad resuelta

19. Si el término general de una progresión aritmética es $a_n = 2 + (n-1)\cdot 3$, ¿cuántos términos son necesarios para que la suma sea 1107?

$$\begin{cases} S_x = 1107 \\ a_x = 2 + (x-1)\cdot 3 \end{cases} \Rightarrow S_x = \frac{2 + a_x}{2}\cdot x = \frac{2 + 2 + (x-1)\cdot 3}{2}\cdot x = \frac{x + 3x^2}{2} \Rightarrow 1107 = \frac{x+3x^2}{2} \Rightarrow 2214 = x + 3x^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x^2 + x - 2214 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm 163}{6} = \begin{cases} 27 \\ -\dfrac{164}{6} \end{cases}$$

Se necesitan 27 términos para que la suma sea 1107.

20. Actividad resuelta

21. En una progresión geométrica $a_1 = 800$ y $r = 0{,}02$.

a) Encuentra su término general.

b) ¿Cuál es el término vigésimo?

a) Sustituyendo los valores en la fórmula del término general, $a_n = 800 \cdot 0{,}02^{(n-1)}$

b) $a_{20} = 800 \cdot 0{,}02^{(20-1)} = 4{,}19 \cdot 10^{-30}$

22. Calcula el décimo término de las sucesiones:

a) $(a_n) = (2, 4, 8, 16\ldots)$

b) $(b_n) = (90\,000, 9000, 900, 90\ldots)$

a) Sustituyendo los valores en la fórmula del término general, $a_n = 2 \cdot 2^{(n-1)}$.

Por tanto, $a_{10} = 2 \cdot 2^{(10-1)} = 1024$.

b) Sustituyendo los valores en la fórmula del término general, $b_n = 90\,000 \cdot 0{,}1^{(n-1)}$.

Por tanto, $b_{10} = 90\,000 \cdot 0{,}1^{(10-1)} = 9 \cdot 10^{-5}$

23. Calcula el término general de una progresión geométrica en la que no hay términos negativos si a_3 = 0,9 y a_{12} = 17 714,7.

Sustituyendo los valores en la fórmula del término general, se obtiene este sistema:

$$\begin{cases} a_3 = a_1 \cdot r^2 \\ a_{12} = a_1 \cdot r^{11} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0{,}9 = a_1 \cdot r^2 \\ 17\,714{,}7 = a_1 \cdot r^{11} \end{cases} \Rightarrow \frac{17\,714{,}7}{0{,}9} = \frac{a_1 \cdot r^{11}}{a_1 \cdot r^2} \Rightarrow 19\,683 = r^9 \Rightarrow r = 3 \Rightarrow a_1 = 0{,}1$$

El término general es $a_n = 0{,}1 \cdot 3^{(n-1)}$.

24. Actividad interactiva

25. Calcula la suma de los 20 primeros términos de una progresión geométrica con a_1 = 5 y r = –2.

El término general es $a_n = 5 \cdot (-2)^{(n-1)}$.

$$\begin{cases} a_1 = 5 \\ a_{20} = 5 \cdot (-2)^{19} = -2\,621\,440 \end{cases} \Rightarrow S_{20} = \frac{a_{20} \cdot r - a_1}{r-1} = \frac{-2\,621\,440 \cdot (-2) - 5}{-2-1} = -1\,747\,625$$

La suma de los 20 primeros términos es –1 747 625.

26. Calcula la suma de los diez primeros términos de las sucesiones:

a) (a_n) = (0,001, 0,003, 0,009…) **b) (b_n) = (1, 4, 16, 64…)** **c) (c_n) = $\left(1, \frac{1}{5}, \frac{1}{25}, \frac{1}{125}...\right)$**

a) (a_n) = (0,001, 0,003, 0,009…) $\Rightarrow a_n = 0{,}001 \cdot 3^{(n-1)}$

$$\begin{cases} a_1 = 0{,}001 \\ a_{10} = 0{,}001 \cdot 3^9 = 19{,}683 \end{cases} \Rightarrow S_{10} = \frac{a_{10} \cdot r - a_1}{r-1} = \frac{19{,}683 \cdot 3 - 0{,}001}{3-1} = 29{,}524$$

b) (b_n) = (1, 4, 16, 64…) $\Rightarrow b_n = 4^{(n-1)}$

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{10} = 4^9 = 262\,144 \end{cases} \Rightarrow S_{10} = \frac{a_{10} \cdot r - a_1}{r-1} = \frac{262\,144 \cdot 4 - 1}{4-1} = 349\,525$$

c) (c_n) = $\left(1, \frac{1}{5}, \frac{1}{25}, \frac{1}{125}...\right) \Rightarrow c_n = \left(\frac{1}{5}\right)^{(n-1)}$

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{10} = \left(\frac{1}{5}\right)^9 = \frac{1}{1\,953\,125} \end{cases} \Rightarrow S_{10} = \frac{a_{10} \cdot r - a_1}{r-1} = \frac{\frac{1}{1\,953\,125} \cdot \frac{1}{5} - 1}{\frac{1}{5} - 1} = 1{,}25$$

27. Calcula:

a) La suma de las veinte primeras potencias de 2.

b) La suma de las veinte primeras potencias de $\frac{1}{2}$.

a) (a_n) = (1, 2, 4, 8, 16…) $\Rightarrow a_n = 2^{(n-1)}$

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{20} = 2^{19} = 524\,288 \end{cases} \Rightarrow S_{20} = \frac{a_{20} \cdot r - a_1}{r-1} = \frac{524\,288 \cdot 2 - 1}{2-1} = 1\,048\,575$$

b) (b_n) = $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}...\right)$

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{20} = \left(\frac{1}{2}\right)^{19} = \frac{1}{524\,288} \end{cases} \Rightarrow S_{20} = \frac{a_{20} \cdot r - a_1}{r-1} = \frac{\frac{1}{524\,288} \cdot \frac{1}{2} - 1}{\frac{1}{2} - 1} = 2$$

28. Calcula estas dos sumas infinitas:

a) $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+...$ **b)** $0{,}1 + 0{,}01 + 0{,}001 + 0{,}0001 + \ldots$

a) Los sumandos corresponden a los términos de la progresión geométrica cuyo primer término a_1 es 1 y, su razón, $r=\frac{1}{4} \Rightarrow S_\infty = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$

b) Los sumandos corresponden a los términos de la progresión geométrica cuyo primer término a_1 es 0,1 y, su razón, $r = 0{,}1 \Rightarrow S_\infty = \frac{0{,}1}{1-0{,}1} = \frac{1}{9}$

29. Escribe los cuatro primeros términos de estas sucesiones y calcula también el décimo término.

a) $a_n = \frac{n^2}{n+2}$ **b)** $b_n = n^2 + 3n$ **c)** $c_n = (n + 1) \cdot (n - 1)$ **d)** $d_n = 100 - 15n$

a) $a_1 = \frac{1^2}{1+2} = \frac{1}{3}$	**b)** $b_1 = 1 + 3 = 4$	**c)** $c_1 = 2 \cdot 0 = 0$	**d)** $d_1 = 100 - 15 = 85$
$a_2 = \frac{2^2}{2+2} = 1$	$b_2 = 4 + 6 = 10$	$c_2 = 3 \cdot 1 = 3$	$d_2 = 100 - 30 = 70$
$a_3 = \frac{3^2}{3+2} = \frac{9}{5}$	$b_3 = 9 + 9 = 18$	$c_3 = 4 \cdot 2 = 8$	$d_3 = 100 - 45 = 55$
$a_4 = \frac{4^2}{4+2} = \frac{8}{2}$	$b_4 = 16 + 12 = 28$	$c_4 = 5 \cdot 3 = 15$	$d_4 = 100 - 60 = 40$
$a_{10} = \frac{10^2}{10+2} = \frac{25}{3}$	$b_{10} = 100 + 30 = 130$	$c_{10} = 11 \cdot 9 = 99$	$d_{10} = 100 - 150 = -50$

30. Encuentra el término general de estas sucesiones.

a) $(a_n) = (30, 27, 24, 21\ldots)$ **c)** $(c_n) = (-1, 1, 3, 5\ldots)$

b) $(b_n) = (0, 1, 4, 9\ldots)$ **d)** $(d_n) = (2; 1; 0{,}5; 0{,}25\ldots)$

a) Es una progresión aritmética cuyo primer término es 30 y la diferencia $-3 \Rightarrow a_n = 30 + (n - 1) \cdot (-3) = 33 - 3n$.

b) Es una sucesión cuyos términos se obtienen elevando al cuadrado $n - 1 \Rightarrow b_n = (n - 1)^2$.

c) Es una progresión aritmética cuyo primer término es -1 y la diferencia $2 \Rightarrow c_n = -1 + (n - 1) \cdot 2 = 2n - 3$.

d) Es una progresión geométrica cuyo primer término es 2 y la razón $\frac{1}{2} \Rightarrow d_n = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{2^{n-2}}$.

31. El primer término de una sucesión es $a_1 = 5$ y se cumple que $a_n = 2a_{n-1} - 3$.

a) Escribe los seis primeros términos de la sucesión.

b) Comprueba que el término general de la sucesión es $a_n = 2^n + 3$.

a) $a_1 = 5$

$a_2 = 2a_1 - 3 = 2 \cdot 5 - 3 = 7$

$a_3 = 2a_2 - 3 = 2 \cdot 7 - 3 = 11$

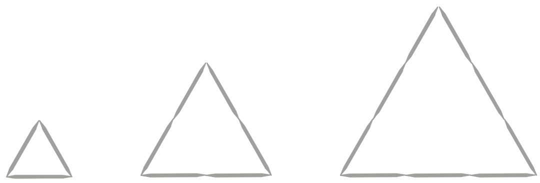
$a_4 = 2a_3 - 3 = 2 \cdot 11 - 3 = 19$

$a_5 = 2a_4 - 3 = 2 \cdot 19 - 3 = 35$

$a_6 = 2a_5 - 3 = 2 \cdot 35 - 3 = 67$

b) $a_n = 2a_{n-1} - 3 = 2 \cdot (2a_{n-2} - 3) - 3 = 2^2 \cdot a_{n-2} - 2 \cdot 3 - 3 = 2^2 \cdot a_{n-2} - 3 \cdot (2 + 1) = 2^2 \cdot (2a_{n-3} - 3) - 3 \cdot (2 + 1) =$
$= 2^3 \cdot a_{n-3} - 3 \cdot 2^2 - 3 \cdot (2 + 1) = 2^3 \cdot a_{n-3} - 3 \cdot (2^2 + 2 + 1) = \ldots = 2^{(n-1)} \cdot a_1 - 3(2^{(n-2)} + 2^{(n-3)} + \ldots + 2^2 + 2 + 1) =$
$= 2^{(n-1)} \cdot a_1 - 3 \cdot \frac{2^{(n-2)} \cdot 2 - 1}{2-1} = 2^{(n-1)} \cdot 5 - 3 \cdot (2^{(n-1)} - 1) = 2^{(n-1)} \cdot 5 - 3 \cdot 2^{(n-1)} + 3 = 2^{(n-1)} \cdot (5 - 3) + 3 = 2^n + 3.$

32. A Matilde le han regalado una caja de palillos y se entretiene haciendo triángulos como los de la figura.



Cuando lleva 99 triángulos se pregunta, ¿cuántos palillos necesitaré para hacer el triángulo número 100 y terminar mi gran obra?

Para el primer triángulo necesita 3 palillos, para el segundo 6, para el tercero 9… El número de palillos necesarios para formar los sucesivos triángulos forman la sucesión $(a_n) = (3, 6, 9\ldots)$. Se trata de una progresión aritmética cuyo primer término es 3 y, la diferencia, 3.

$$(a_n) = (3, 6, 9...) \Rightarrow a_n = 3 + (n - 1) \cdot 3 = 3n \Rightarrow a_{100} = 3 \cdot 100 = 300$$

Matilde necesitará 300 palillos para hacer el triángulo número 100.

33. Encuentra el término general de estas progresiones aritméticas y calcula el término que ocupa el lugar décimo.

a) $(a_n) = (7, 10, 13, 16\ldots)$ **b)** $(c_n) = (9, 5, 1, -3\ldots)$ **c)** $(d_n) = (-8, -6, -4, -2\ldots)$

a) Se trata de una progresión aritmética cuyo primer término es 7 y su diferencia 3.

$a_n = 7 + (n - 1) \cdot 3 = 4 + 3n \Rightarrow a_{10} = 4 + 3 \cdot 10 = 34$

b) Se trata de una progresión aritmética cuyo primer término es 9 y su diferencia –4.

$a_n = 9 + (n - 1) \cdot (-4) = 13 - 4n \Rightarrow a_{10} = 13 - 4 \cdot 10 = -27$

c) Se trata de una progresión aritmética cuyo primer término es –8 y su diferencia 2.

$a_n = -8 + (n - 1) \cdot 2 = 2n - 10 \Rightarrow a_{10} = 20 - 10 = 10$

34. Halla el término general de estas progresiones aritméticas y calcula después el término que ocupa el quincuagésimo lugar.

a) $a_1 = 3, d = 5$ **b)** $b_1 = -7, d = -1$ **c)** $c_1 = 5, d = -4$ **d)** $d_1 = -10, d = 2$

a) $a_n = 3 + (n - 1) \cdot 5 = 5n - 2 \Rightarrow a_{50} = 250 - 2 = 248$

b) $b_n = -7 + (n - 1) \cdot (-1) = -n - 6 \Rightarrow b_{50} = -50 - 6 = -56$

c) $c_n = 5 + (n - 1) \cdot (-4) = 9 - 4n \Rightarrow c_{50} = 9 - 200 = -191$

d) $d_n = -10 + (n - 1) \cdot 2 = 2n - 12 \Rightarrow d_{50} = 100 - 12 = 88$

35. Halla el término general de estas progresiones aritméticas y calcula después el término que ocupa el cuadragésimo lugar.

a) $a_5 = 3, d = 7$ **b)** $b_6 = 0, d = 2$ **c)** $c_9 = 100, d = -5$ **d)** $d_{15} = 8, d = 3$

a) $a_5 = a_1 + (5 - 1) \cdot d \Rightarrow 3 = a_1 + 4 \cdot 7 \Rightarrow a_1 = -25 \Rightarrow a_n = -25 + (n - 1) \cdot 7 = 7n - 32 \Rightarrow a_{40} = 280 - 32 = 248$

b) $b_6 = a_1 + (6 - 1) \cdot d \Rightarrow 0 = b_1 + 5 \cdot 2 \Rightarrow b_1 = -10 \Rightarrow b_n = -10 + (n - 1) \cdot 2 = 2n - 12 \Rightarrow b_{40} = 80 - 12 = 68$

c) $c_9 = c_1 + (9 - 1) \cdot d \Rightarrow 100 = c_1 + 8 \cdot (-5) \Rightarrow c_1 = 140 \Rightarrow c_n = 140 + (n - 1) \cdot (-5) = -5n + 145 \Rightarrow b_{40} = -55$

d) $d_{15} = d_1 + (15 - 1) \cdot d \Rightarrow 8 = d_1 + 14 \cdot 3 \Rightarrow d_1 = -34 \Rightarrow d_n = -34 + (n - 1) \cdot 3 = 3n - 37 \Rightarrow d_{40} = 120 - 37 = 83$

36. ¿Cuánto suman los primeros 30 múltiplos de 5?

Los primeros 30 múltiplos de 5 forman la progresión aritmética $(a_n) = (0, 5, 10\ldots)$ cuyo primer término es 0 y la diferencia 5.

$$a_n = 0 + (n-1) \cdot 5 = 5n - 5 \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 0 \\ a_{10} = 150 - 5 = 145 \end{cases} \Rightarrow S_{30} = \frac{a_1 + a_{30}}{2} \cdot 30 = \frac{0 + 145}{2} \cdot 30 = 2175$$

37. ¿Cuántos términos tiene la sucesión 3, 7, 11,…, 539?

Los términos 3, 7, 11… forman una sucesión aritmética cuyo primer término es 3 y la diferencia 4.

$a_n = 3 + (n-1)\cdot 4 \Rightarrow a_n = 4n - 1 \Rightarrow 539 = 4n - 1 \Rightarrow n = 135$

La sucesión tiene 135 términos.

38. Halla el término general de estas progresiones aritméticas y calcula el término que ocupa el sexagésimo lugar.

a) $a_4 = 8$, $a_8 = 14$ **b)** $b_{10} = 0$, $b_{20} = 53$ **c)** $c_2 = -16$, $c_5 = -31$ **d)** $d_7 = 36$, $d_4 = 15$

a) Sustituyendo en la fórmula del término general, se obtiene:

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow \begin{cases} a_4 = a_1 + 3d \\ a_8 = a_1 + 7d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8 = a_1 + 3d \\ 14 = a_1 + 7d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = \dfrac{7}{2} \\ d = \dfrac{6}{4} = \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

$$a_n = \frac{7}{2} + (n-1)\cdot\frac{3}{2} = 2 + \frac{3n}{2} \Rightarrow a_{60} = 2 + 90 = 92$$

b) Sustituyendo en la fórmula del término general, se obtiene:

$$b_n = b_1 + (n-1)d \Rightarrow \begin{cases} b_{10} = b_1 + 9d \\ b_{20} = b_1 + 19d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = b_1 + 9d \\ 53 = b_1 + 19d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_1 = -\dfrac{477}{10} \\ d = \dfrac{53}{10} \end{cases}$$

$$b_n = -\frac{477}{10} + (n-1)\cdot\frac{53}{10} = -53 + \frac{53n}{10} \Rightarrow a_{60} = -53 + 318 = 265$$

c) Sustituyendo en la fórmula del término general, se obtiene:

$$c_n = c_1 + (n-1)d \Rightarrow \begin{cases} c_2 = c_1 + d \\ c_5 = c_1 + 4d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -16 = c_1 + d \\ -31 = c_1 + 4d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = -11 \\ d = -5 \end{cases}$$

$c_n = -11 + (n - 1)\cdot(-5) = -6 - 5n \Rightarrow c_{60} = -6 - 5\cdot 60 = -306$

d) Sustituyendo en la fórmula del término general, se obtiene:

$$d_n = d_1 + (n-1)d \Rightarrow \begin{cases} d_7 = d_1 + 6d \\ d_4 = d_1 + 3d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 36 = d_1 + 6d \\ 15 = d_1 + 3d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d_1 = -6 \\ d = 7 \end{cases}$$

$d_n = -6 + (n - 1)\cdot 7 = 7n - 13 \Rightarrow d_{60} = 420 - 13 = 407$

39. Dada la progresión –15, –13, –11, –9…

a) ¿Qué número ocupa el lugar 77?

b) ¿Qué lugar ocupa el número 77?

La progresión –15, –13, –11, –9… es una progresión aritmética cuyo primer término es –15 y, la diferencia, 2.

$$a_n = -15 + (n - 1)\cdot 2 = 2n - 17$$

a) $a_{77} = 2\cdot 77 - 17 = 137 \Rightarrow$ El número 137 ocupa el lugar 77.

b) $77 = 2n - 17 \Rightarrow n = 47 \Rightarrow$ El lugar 47 ocupa el número 77.

40. En una progresión aritmética el cuarto término es 16 y el decimoquinto es 49. ¿Qué término ocupa el lugar 100?

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow \begin{cases} a_4 = a_1 + 3d \\ a_{15} = a_1 + 14d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 16 = a_1 + 3d \\ 49 = a_1 + 14d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 7 \\ d = 3 \end{cases}$$

$a_n = 7 + (n - 1)\cdot 3 = 4 + 3n \Rightarrow a_{100} = 4 + 300 = 304$

41. En un triángulo cuyos ángulos están en progresión aritmética, ¿puedes asegurar que siempre tendrá un ángulo de 60º?

Llamamos x, $x + d$ y $x + 2d$ a las medidas de los ángulos, siendo d la diferencia de la progresión aritmética.

$$x + x + d + x + 2d = 180 \Rightarrow 3x + 3d = 180 \Rightarrow x = 60 - d.$$

Los ángulos medirán $60 - d$, 60 y $60 + d$ grados. Por tanto, se puede asegurar que tendrá un ángulo de 60º.

42. ¿Cuántos números impares consecutivos a partir de 1 suman 2500?

Los números impares a partir de 1 forman una progresión aritmética cuyo primer término es 1 y, la diferencia, 2.

$$a_n = 1 + (n-1)\cdot 2 = 2n - 1 \Rightarrow S_x = \frac{a_1 + a_x}{2}\cdot x = \frac{1 + 2x - 1}{2}\cdot x = 2500 \Rightarrow x^2 = 2500 \Rightarrow x = \pm 50 \Rightarrow 50 \text{ números}$$

43. Halla el término general de estas progresiones geométricas y calcula el término que ocupa el lugar décimo.

a) $(a_n) = (7, 70, 700, 7000\ldots)$ **b)** $(b_n) = (3; 3{,}3; 3{,}63; 3{,}993\ldots)$ **c)** $(c_n) = (80, 40, 20, 10\ldots)$

a) Sustituyendo los valores en la fórmula del término general, $a_n = 7 \cdot 10^{(n-1)}$.

Por tanto, $a_{10} = 7 \cdot 10^{(10-1)} = 7\,000\,000\,000$.

b) Sustituyendo los valores en la fórmula del término general, $b_n = 3 \cdot 1{,}1^{(n-1)}$.

Por tanto, $b_{10} = 3 \cdot 1{,}1^{(10-1)} = 7{,}07$

c) Sustituyendo los valores en la fórmula del término general, $c_n = 80\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

Por tanto, $c_{10} = 80\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{10-1} = 0{,}15625$

44. En la progresión $\frac{1}{128}, \frac{1}{64}, \frac{1}{32}, \frac{1}{16}\ldots$, ¿qué término ocupa el duodécimo lugar?

Se trata de una progresión geométrica cuyo primer término es $\frac{1}{128}$ y la razón, 2.

$$a_n = \frac{1}{128}\cdot 2^{(n-1)} \Rightarrow a_{12} = \frac{1}{128}\cdot 2^{(12-1)} = 16$$

45. Halla el término general de estas progresiones geométricas y calcula el término que ocupa el décimo lugar.

a) $a_1 = 8$, $r = 1{,}1$

b) $b_1 = 0{,}000\,01$, $r = 2$

c) $c_1 = \frac{5}{6}$, $r = \frac{4}{3}$

d) $d_1 = 0{,}004$, $r = 3$

a) Sustituyendo los valores en la fórmula del término general, $a_n = 8 \cdot 1{,}1^{(n-1)}$.

Por tanto, $a_{10} = 8 \cdot 1{,}1^{(10-1)} = 18{,}86$

b) Sustituyendo los valores en la fórmula del término general, $b_n = 0{,}000\,01 \cdot 2^{(n-1)}$.

Por tanto, $b_{10} = 0{,}000\,01 \cdot 2^{(10-1)} = 0{,}00512$

c) Sustituyendo los valores en la fórmula del término general, $c_n = \frac{5}{6}\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}$

Por tanto, $c_{10} = \frac{5}{6}\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^{10-1} = 11{,}10$

d) Sustituyendo los valores en la fórmula del término general $d_n = 0{,}004 \cdot 3^{(n-1)}$.

Por tanto, $c_{10} = 0{,}004 \cdot 3^{(10-1)} = 78{,}732$

46. Halla el término general de estas progresiones geométricas y calcula el término que ocupa el décimo lugar.

a) $a_5 = 400$, $r = 0,5$ **c)** $c_3 = 0,05$, $r = 1,25$

b) $b_2 = 1$, $r = 1,2$ **d)** $d_5 = 15$, $r = \frac{1}{2}$

a) $a_5 = a_1 \cdot r^4 \Rightarrow 400 = a_1 \cdot 0,5^4 \Rightarrow a_1 = 6400 \Rightarrow a_n = 6400 \cdot 0,5^{(n-1)} \Rightarrow a_{10} = 6400 \cdot 0,5^9 = 12,5$

b) $b_2 = b_1 \cdot r \Rightarrow 1 = b_1 \cdot 1,2 \Rightarrow b_1 = \frac{5}{6} \Rightarrow b_n = \frac{5}{6} \cdot 1,2^{(n-1)} \Rightarrow b_{10} = \frac{5}{6} \cdot 1,2^9 = 4,3$

c) $c_3 = c_1 \cdot r^2 \Rightarrow 0,05 = c_1 \cdot 1,25^2 \Rightarrow c_1 = 0,032 \Rightarrow c_n = 0,032 \cdot 1,25^{(n-1)} \Rightarrow c_{10} = 0,032 \cdot 1,25^9 = 0,24$

d) $d_5 = d_1 \cdot r^4 \Rightarrow 15 = d_1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 \Rightarrow d_1 = 240 \Rightarrow d_n = 240 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{(n-1)} \Rightarrow d_{10} = 240 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^9 = 0,468\,75$

47. Halla el término general de estas progresiones geométricas y calcula el término que ocupa el décimo lugar.

a) $a_2 = 0,5$, $a_5 = 0,0625$ **b)** $b_3 = -9$, $b_4 = 4,5$

a) Sustituyendo los valores en la fórmula del término general, se obtiene este sistema:

$$\begin{cases} a_2 = a_1 \cdot r \\ a_5 = a_1 \cdot r^4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0,5 = a_1 \cdot r \\ 0,0625 = a_1 \cdot r^4 \end{cases} \Rightarrow \frac{0,0625}{0,5} = \frac{a_1 \cdot r^4}{a_1 \cdot r} \Rightarrow 0,125 = r^3 \Rightarrow r = 0,5 \Rightarrow a_1 = 1$$

El término general es $a_n = 0,5^{(n-1)}$ y $a_{10} = 0,5^{(10-1)} = 0,5^9 = 0,002$

b) Sustituyendo los valores en la fórmula del término general, se obtiene este sistema:

$$\begin{cases} b_3 = b_1 \cdot r^2 \\ b_4 = a_1 \cdot r^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -9 = b_1 \cdot r^2 \\ 4,5 = b_1 \cdot r^3 \end{cases} \Rightarrow \frac{4,5}{-9} = \frac{b_1 \cdot r^3}{b_1 \cdot r^2} \Rightarrow -0,5 = r \Rightarrow b_1 = -36$$

El término general es $b_n = -36 \cdot (-0,5)^{(n-1)}$ y $b_{10} = -36 \cdot (-0,5)^9 = 0,07$

48. Los *gremlins* se reproducen al mojarse, dando lugar a otros cinco *gremlins*. Si en un día se mojan 8 veces, ¿cuántos habrá al final del día?

Al mojarse una vez habrá 5 gremlins, al mojarse dos veces habrá 25… Se forma una progresión geométrica cuyo primer término es 5 y, la razón, 5. El término general es $a_n = 5 \cdot 5^{(n-1)} = 5^n \Rightarrow$ habrá $a_8 = 5^8 = 390\,625$ gremlins habrá al final del día.

49. Un balón de baloncesto se deja caer desde una altura de 50 m y cada vez que bota sube a una altura igual a $\frac{3}{5}$ de la máxima altura conseguida anteriormente.

a) Escribe los primeros términos de la sucesión de las alturas que alcanza el balón antes de volver a caer.

b) Cuando toca el suelo por décima vez, ¿cuántos metros ha recorrido el balón?

a) Las alturas alcanzadas en por el balón antes de volver a caer son 50, 30, 18, 10,8, 6,48…

b) Las alturas forman una progresión geométrica cuyo primer término es 50 y, la razón, $r = \frac{3}{5} \rightarrow a_n = 50 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^{(n-1)}$

Después del primer bote, el balón sube 30 m y baja otros 30 m. En total recorre 50 + 30 + 30 + 18 + 18 +…, es decir,

$$S_{10} + (S_{10} - 50) = 2S_{10} - 50 = 2 \cdot \frac{a_{10} \cdot r - a_1}{r - 1} - 50 = 2 \cdot \frac{0,5 \cdot \frac{3}{5} - 50}{\frac{3}{5} - 1} - 50 = 2 \cdot 124,25 - 50 = 198,5$$

La pelota ha recorrido 198,5 m.

También se pueden calcular los metros que baja como la suma de los 9 términos de una progresión geométrica cuyo primer término es 30 y la razón es $\frac{3}{5}$.

50. Actividad resuelta

51. Calcula la fracción equivalente a 0,7777777…

0,7777777 =0,7 + 0,07 + 0,007 + 0,0007…, que es la suma de los infinitos términos de una progresión geométrica cuya razón es 0,1 y, el primer término, 0,7:

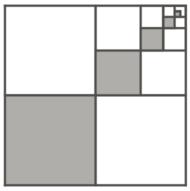
$$S_\infty = \frac{0{,}7}{1-0{,}1} = \frac{7}{9} \Rightarrow 0{,}777777... = \frac{7}{9}$$

52. Calcula la fracción equivalente a 0,25252525…

0,252525 =0,25 + 0,0025 + 0,000025…, que es la suma de los infinitos términos de una progresión geométrica cuya razón es 0,01 y, el primer término, 0,25:

$$S_\infty = \frac{0{,}25}{1-0{,}01} = \frac{25}{99} \Rightarrow 0{,}252525... = \frac{25}{99}$$

53. Dividimos un cuadrado y coloreamos de rojo algunas regiones como se indica en la figura.



Si el proceso continuara indefinidamente, ¿qué fracción del cuadrado quedaría roja?

Las fracciones de cuadrado que se colorean, $\frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{64}...$, forman una progresión geométrica cuyo primer término es $\frac{1}{4}$ y, su razón, $\frac{1}{4}$. Para hallar la fracción del cuadrado que quedaría roja, calculamos la suma de los infinitos términos de la progresión: $S_\infty = \dfrac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}} = \dfrac{1}{3}$

54. Calcula el valor de 1 – 2 + 4 – 8 + 16 – 32 +….+ 1 048 576.

Los sumandos de la operación forman una progresión geométrica cuyo primer término es 1 y, la razón, –2.

Sustituyendo los valores en la fórmula del término general, se obtiene $a_n = (-2)^{(n-1)}$.

Para hallar el número de sumandos que tiene la operación, calculamos el lugar que ocupa el sumando 1 048 576.

$1\,048\,576 = (-2)^{(n-1)} \Rightarrow -2\,097\,152 = (-2)^n \Rightarrow n = 21$

La operación tiene 21 sumandos. Por tanto, hay que calcular S_{21}.

$$S_{21} = \frac{a_{21} \cdot r - a_1}{r-1} = \frac{1\,048\,576 \cdot (-2) - 1}{-2-1} = 699\,051$$

55. Carmelo forma parte de una inmensa fila india de niños. El primer niño grita "¡5!", el segundo grita "¡18!", el tercero, "¡31!", el cuarto, "¡44!", el quinto, "¡57!" y así todos. Carmelo gritó "¡2020!". ¿Qué lugar ocupa Carmelo en la fila india?

Los números que gritan los niños: 5, 18, 31, 44, 57…, 2020, forman una progresión aritmética cuyo primer término es 5 y, la diferencia, 13. Sustituyendo los valores en la fórmula del término general, se obtiene:

$$a_n = 5 + (n-1) \cdot 13 = 13n - 8$$

Calculamos la posición que ocupa el número 2020 en la progresión: $2020 = 13n - 8 \Rightarrow n = 156$.

Carmelo ocupa la posición 156 en la fila india.

56. Emprende

Para tu primer trabajo, te ofrecen estos dos contratos:

Contrato *A*. Un salario anual de 15 000 € el primer año que se aumentará en 540 € cada año.

Contrato *B*. Un sueldo de 12 000 € el primer año aumentado en un 6 % cada año posterior.

a) Calcula los sueldos de los tres primeros años en ambos contratos.

b) Estudia qué contrato es mejor según los años transcurridos.

c) ¿Cuál elegirías? Analiza los pros y los contras.

a) Con el contrato *A*:
Primer año: 15 000 € 2.º año: 15 000 + 540 = 15 540 € Tercer año: 15 540 + 540 = 16 080 €

Con el contrato *B:*
Primer año: 12 000 € 2.º año: 12 000 · 1,06 = 12 720 € Tercer año: 12 270 · 1,06 = 13 483,2 €

b) Los sueldos correspondientes al contrato *A* forman una progresión aritmética cuyo primer término es 15 000 y, su diferencia, 540. Sustituyendo en el término general, $a_n = 15\,000 + (n - 1) \cdot 540$.

Los sueldos correspondientes al contrato *B* forman una progresión geométrica cuyo primer término es 12 000 y, su razón, 1,06. Sustituyendo en el término general, $b_n = 12\,000 \cdot 1{,}06^{(n-1)}$.

A los 9 años de contrato se cobraría, con el contrato *A* $a_9 = 15\,000 + 540 \cdot 8 = 19\,320$ € y, con el contrato *B*, se cobraría $b_9 = 12\,000 \cdot 1{,}06^8 = 19\,126$ €.

A los 10 años de contrato se cobraría con el contrato *A,* $a_{10} = 15\,000 + 540 \cdot 9 = 19\,860$ € y, con el contrato *B*, se cobraría $b_{10} = 12\,000 \cdot 1{,}06^9 = 20\,273{,}75$ €.

c) Si se supiera que el contrato fuera a durar 9 o menos años sería preferible elegir el primer tipo de contrato.

Si por el contario, supiéramos que iba a durar 10 o más años, elegiríamos la segunda opción.

57. En 1937 el matemático alemán Lothar Collatz estudió la siguiente sucesión:

I. Empieza por un número entero positivo. El que quieras.

a. Si el número es par, divídelo entre 2.

b. Si el número es impar, multiplícalo por 3 y luego súmale 1.

II. Continúa la sucesión siguiendo esas dos leyes.

Collatz conjeturó que sea cual fuere el primer término de esta sucesión, siempre se llega al 1. Y hasta ahora nadie ha sido capaz de refutar ni demostrar esa afirmación, por eso se le conoce con el nombre de Conjetura de Collatz.

a) Toma como primer término $a_1 = 7$ y escribe la sucesión hasta que llegues al 1.

b) ¿Y si el primer término es 6?

c) Comprueba que si se llega a un 1, la sucesión entra en el bucle 4, 2, 1, 4, 2, 1.

a) 7, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2 ,1.

b) 6, 3, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1.

c) 1, 4, 2, 1, 4, 2, 1, 4, 2, 1…

58. Demuestra que si *a*, *b*, *c* son tres términos consecutivos de una progresión aritmética, entonces $2b = a + c$.

Si *a*, *b* y *c* son tres términos consecutivos de una progresión aritmética entonces $a = b - d$ y $c = b + d$, donde *d* es la diferencia de la progresión.

$a + c = b - d + b + d = 2b \Rightarrow a + c = 2b$

59. Demuestra que si *a*, *b*, *c* son tres términos consecutivos de una progresión geométrica, entonces $b^2 = a \cdot c$.

Si *a*, *b* y *c* son tres términos consecutivos de una progresión geométrica entonces $b = a \cdot r$ y $c = b \cdot r$, donde *r* es la razón de la progresión.

$a \cdot c = a \cdot b \cdot r = b \cdot a \cdot r = b \cdot b = b^2$

60. Encuentra el término general de cada una de estas sucesiones.

a) $a_1 = 7$ **y** $a_n = a_{n-1} - 4$

b) Progresión aritmética con $a_3 = -3$ **y** $S_{10} = -180$

c) Progresión geométrica con $a_1 = 1000$ **y** $S_4 = 1248$

d) Progresión aritmética con $S_5 = 170$ **y** $S_{39} = 0$

a) Se trata de una progresión aritmética cuyo primer término es 7 y, la diferencia, $d = a_n - a_{n-1} = -4$.

Sustituyendo en el término general, $a_n = 7 + (n-1)\cdot(-4) = -4n + 11$.

b) $a_n = 9 + (n-1)\cdot(-6) = 15 - 6n$

$$\begin{cases} a_3 = -3 \\ S_{10} = -180 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3 = a_1 + 2d \\ -180 = \dfrac{a_1 + a_{10}}{2}\cdot 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3 = a_1 + 2d \\ -180 = \dfrac{a_1 + a_1 + 9d}{2}\cdot 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3 = a_1 + 2d \\ -36 = 2a_1 + 9d \end{cases} \Rightarrow -30 = 5d \Rightarrow d = -6 \Rightarrow a_1 = 9$$

c) $a_n = 1000 + (0{,}2)^{(n-1)}$

$$\begin{cases} a_1 = 1000 \\ S_3 = 1240 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 1000 \\ S_3 = \dfrac{a_3\cdot r - a_1}{r-1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 1000 \\ S_3 = \dfrac{a_1\cdot r^3 - a_1}{r-1} =_{3}= \dfrac{a_1(r^3-1)}{r-1} = \dfrac{a_1\cdot\cancel{(r-1)}(r^2+r+1)}{\cancel{r-1}} = a_1(r^2+r+1) \\ \Rightarrow \end{cases}$$

$\Rightarrow 1240 = 1000(r^2+r+1) \Rightarrow r^2 + r + 0{,}24 = 0 \Rightarrow r = 0{,}2.$ Como la suma es positiva, la razón debe ser positiva.

d) $a_n = 38 + (n-1)\cdot(-2) = 40 - 2n$

$$\begin{cases} S_5 = 170 \\ S_{39} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 170 = \dfrac{a_1 + a_5}{2}\cdot 5 \\ 0 = \dfrac{a_1 + a_{39}}{2}\cdot 39 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 68 = a_1 + a_5 \\ 0 = a_1 + a_{39} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 68 = a_1 + a_1 + 4d \\ 0 = a_1 + a_1 + 38d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 34 = a_1 + 2d \\ 0 = a_1 + 19d \end{cases} \Rightarrow d = -2 \Rightarrow a_1 = 38$$

61. El primer día del año Carmen ha contado el dinero de su hucha: 58,40 €. Se ha prometido a sí misma meter el primer día de cada mes 5,50 €.

a) Halla el término general, a_n **de la sucesión que representa el dinero que tiene Carmen en el mes enésimo.**

b) Escribe los cuatro primeros términos de a_n**.**

c) ¿Cuánto dinero tendrá Carmen al cabo de un año y medio si mantiene su promesa?

d) ¿Dentro de cuántos meses podrá Carmen comprarse una bicicleta de 200 €?

a) Se trata de una progresión aritmética cuyo primer término es 58,40 y, su diferencia, 5,50.

Sustituyendo en la fórmula general $a_n = 58{,}40 + (n-1)\cdot 5{,}50 = 5{,}50n + 52{,}90$

b) $a_1 = 5{,}50 + 52{,}90 = 58{,}4$

$a_2 = 5{,}50\cdot 2 + 52{,}90 = 63{,}9$

$a_3 = 5{,}50\cdot 3 + 52{,}90 = 69{,}4$

$a_4 = 5{,}50\cdot 4 + 52{,}90 = 74{,}9$

c) $a_{18} = 5{,}50\cdot 18 + 52{,}90 = 151{,}9$

d) $a_x = 5{,}50\cdot x + 52{,}90 \Rightarrow 200 = 5{,}50\cdot x + 52{,}90 \Rightarrow x = 26{,}75$. Necesitará 27 meses para poder ahorrar el dinero.

62. Las localidades de la primera fila de una sala de conciertos cuestan 95 € cada una y a partir de aquí, el precio de cada butaca desciende 6 € a medida que la fila se va alejando del escenario. Si cada una de las 10 filas de la sala tiene 20 butacas, ¿cuál es la recaudación máxima que puede conseguirse?

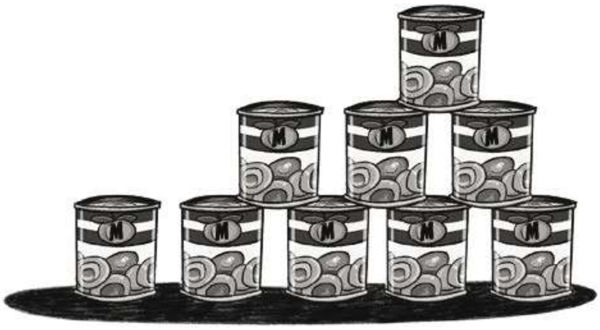
Cada localidad de la primera fila cuesta 95 €, cada localidad de la segunda fila 89 €, cada localidad de la tercera fila 83 €…

Por tanto, en la primera fila se recaudarán 1900 €, en la segunda fila 1780 €, en la tercera 1660 €… Se trata de una progresión aritmética cuyo primer término es 1900 y, su diferencia, –120. Sustituyendo en el término general se obtiene $a_n = 1900 + (n - 1) \cdot (-120) = 2020 - 120n$

Para calcular la recaudación máxima que se puede obtener, hay que hallar la suma de los primeros 10 términos de la progresión:

$$\begin{cases} a_1 = 1900 \\ a_{10} = 820 \end{cases} \Rightarrow S_{10} = \frac{a_1 + a_{10}}{2} \cdot 10 = \frac{1900 + 820}{2} \cdot 10 = 13\,600 \rightarrow \text{La recaudación máxima es de 13 600 €.}$$

63. El tendero de mi barrio apila las latas de melocotones como se muestra en la figura, colocando en la cima una única lata y por debajo de ella dos latas más en cada fila.



Si la fila que está apoyada en la estantería tiene 17 latas, ¿cuántas latas se han apilado en total?

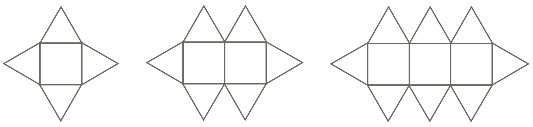
En la primera fila hay 1 lata, en la segunda 3, en la tercera 5… Se trata de una progresión aritmética cuyo primer término es 1 y, su diferencia, 2. Sustituyendo en el término general se obtiene $a_n = 1 + (n - 1) \cdot 2 = 2n - 1$.

En primer lugar hay que calcular el número de filas de latas que se han apilado, sabiendo que en la última fila hay 17 latas: $a_x = 2x - 1 \Rightarrow 17 = 2x - 1 \Rightarrow x = 9 \Rightarrow$ Se han apilado 9 filas de latas.

Para calcular cuántas latas se han apilado en total, hay que hallar la suma de los 9 primeros términos.

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_9 = 17 \end{cases} \Rightarrow S_9 = \frac{a_1 + a_9}{2} \cdot 9 = \frac{1 + 17}{2} \cdot 9 = 81 \rightarrow \text{En total se han apilado 81 latas.}$$

64. Juanje se ha jubilado y dedica su tiempo a hacer construcciones con palillos siguiendo la pauta que ves en la figura:



a) Escribe los cuatro primeros términos de la sucesión que describe el número de palillos empleados en cada figura.

b) Encuentra el término general de la sucesión.

c) El récord de Juanje es una figura con 52 cuadrados. ¿Cuántos palillos usó para esta figura?

d) Una tarde, su amigo Joaquín se puso también a construir figuras y se agotó cuando había colocado 130 palillos. ¿Cuántas figuras completó?

a) Los cuatro primeros términos son 12, 19, 26 y 33.

b) Se trata de una progresión aritmética cuyo primer término es 12 y la diferencia 7. Sustituyendo en el término general se obtiene $a_n = 12 + (n - 1) \cdot 7 = 7n + 5$.

c) $a_{52} = 7 \cdot 52 + 5 = 369$ palillos

d) $a_x = 7x + 5 \Rightarrow 130 = 7x + 5 \Rightarrow x = 17{,}8 \Rightarrow$ Su amigo había completado 17 figuras.

65. Raquel ha comprado los muebles de su salón a plazos: el primer mes pagó 18,50 €, el segundo mes, 21 €, el tercer mes, 23,50 €, y así sucesivamente. Si el último mes pagó 61 €, ¿cuántos meses duró el pago? ¿Cuál fue el precio final de todos los muebles?

Se trata de una progresión aritmética cuyo primer término es 18,50 € y, su diferencia, 2,50 €.

Sustituyendo en el término general se obtiene $a_n = 18{,}50 + (n - 1) \cdot 2{,}50 = 2{,}5n + 16$.

$a_x = 2{,}5x + 16 \Rightarrow 61 = 2{,}5x + 16 \Rightarrow x = 18 \Rightarrow$ El pago duró 18 meses.

$$\begin{cases} a_1 = 18{,}50 \\ a_{18} = 61 \end{cases} \Rightarrow S_{18} = \frac{a_1 + a_{18}}{2} \cdot 18 = \frac{18{,}50 + 61}{2} \cdot 18 = 715{,}5 \rightarrow \text{El precio final fue de } 715{,}5 \text{ €.}$$

66. Actividad resuelta

67. Las longitudes de los lados de un polígono están en progresión aritmética. El lado más corto mide 2 cm, y el más largo, 24,5 cm. Si el perímetro es de 212 cm, ¿cuántos lados tiene el polígono? ¿Cuánto mide el antepenúltimo lado?

Llamamos x al número de lados que tiene el polígono. Los lados forman una progresión aritmética cuyo primer término es 2 y, el último, $a_x = 24{,}5$.

El perímetro coincide con la suma de los términos de esta progresión:

$$P = S_x = \frac{a_1 + a_x}{2} \cdot x \Rightarrow 212 = \frac{2 + 24{,}5}{2} \cdot x \Rightarrow x = 16 \Rightarrow \text{El polígono tiene 16 lados.}$$

El antepenúltimo lado es $a_{14} \Rightarrow a_{16} = a_1 + 15d \Rightarrow 24{,}5 = 2 + 15d \Rightarrow d = 1{,}5 \Rightarrow a_{14} = a_1 + 13d = 2 + 13 \cdot 1{,}5 = 21{,}5$

El antepenúltimo lado mide 21,5 cm.

68. Las inversiones que se rigen por un interés simple son aquellas en las que los intereses se calculan exclusivamente sobre el capital inicial y, por tanto, dichos intereses no se acumulan al capital para calcular los siguientes intereses. Así pues, un capital de 100 € colocado a un interés simple del 2 % genera unos intereses anuales de 2 €, tanto el primer año como los sucesivos. Si colocamos un capital de 20 000 € al 6 % anual, ¿cuánto dinero conseguiremos al cabo de siete años?

El primer año tendremos 21 200 €, el segundo 22 400, el tercero 23 600… El dinero que tendremos con el paso de los años, forma una progresión aritmética cuyo primer término es 21 200 y, la diferencia, 1200.

Sustituyendo en la fórmula del término general $a_n = 21\,200 + (n - 1) \cdot 1200 = 20\,000 + 1200n$

Para calcular el dinero que conseguiremos al cabo de siete años, calculamos el séptimo término de la progresión:

$$a_7 = 20\,000 + 1200 \cdot 7 = 28\,400$$

Al cabo de siete año conseguiremos tener 28 400 €, por lo que habremos ganado 8400 €.

69. En el banco me han explicado que si ingreso dinero a un interés compuesto del 0,8 % mensual, cada mes me ingresan unos intereses del 0,8 %, es decir, el 0,8 % del dinero que tenga en la cuenta en ese momento. Si he ingresado 2000 €:

a) Realiza un estudio de cuánto dinero tendré en la cartilla los cuatro primeros meses.

b) ¿De qué tipo es la sucesión que se va formando?

c) Encuentra el término general.

d) ¿Cuánto dinero tendré en la cartilla al cabo de un año?

a) El primer mes tendrá 2016, el segundo 2032,13, el tercero 2048,39 y, el cuarto, 2064,77.

b) La sucesión que se va formando es una progresión geométrica, cuyo primer término es 2016 y, la razón, 1,008.

c) Sustituyendo en la fórmula general de una progresión geométrica: $a_n = 2016 \cdot 1{,}008^{(n-1)}$

d) Para calcular el dinero que tendrá al cabo de un año, hallamos el 12.º término: $a_{12} = 2200{,}68$

Al cabo de un año tendrá en la cartilla 2200,68 €.

70. El valor de una vivienda de 150 000 € se deprecia un 2,5 % cada año. ¿Cuál será su precio después de cinco años?

El valor de la vivienda a lo largo de los años forma una progresión geométrica cuyo primer término es 150 000 y la razón, 0,975. Sustituyendo en la fórmula del término general $a_n = 150\,000 \cdot 0{,}975^{(n-1)}$.

Para calcular el precio de la vivienda después de cinco años, calculamos el quinto término de la progresión:

$a_5 = 150\,000 \cdot 0{,}975^4 = 135\,553{,}18 \rightarrow$ El precio de la vivienda será 135 533,18 €.

71. Un depósito contiene 3000 L de agua pero está algo deteriorado y se ha calculado que cada día que pasa pierde el 4 % de su capacidad por las grietas. Un equipo reparador vendrá a sellar las grietas dentro de 15 días. ¿Cuánta agua contendrá el depósito cuando lo reparen?

La cantidad de agua que queda en el depósito a lo largo de los días forma una progresión geométrica cuyo primer término es 3000 y, la razón, 0,96. Sustituyendo en la fórmula del término general $a_n = 3000 \cdot 0{,}96^{(n-1)}$.

$a_{15} = 3000 \cdot 0{,}96^{14} = 1694 \rightarrow$ Contendrá 1694 L de agua.

72. Una constructora dedicada a la construcción de escaleras sabe que el primer peldaño cuesta a razón de 2 € cada metro cuadrado (€/m²) y el sexto a 486 €/m². Quiere poner precio a los peldaños intermedios y baraja dos opciones:

a) ¿Cuál será el precio de los peldaños intermedios si este aumenta siempre una cantidad fija al pasar de uno a su inmediato superior?

b) ¿Y cuál será el precio si este se multiplica por una constante a medida que los peldaños van aumentando?

a) El precio de los peldaños forma una progresión aritmética cuyo primer término es 2 y, el sexto, 486.

$a_6 = a_1 + 5d \Rightarrow 486 = 2 + 5d \Rightarrow d = 96{,}8 \Rightarrow a_n = 2 + (n-1) \cdot 96{,}8$

Los términos intermedios de esta progresión son:

$a_2 = 2 + 96{,}8 = 98{,}8$ $\quad a_3 = 2 + 2 \cdot 96{,}8 = 195{,}6$ $\quad a_4 = 2 + 3 \cdot 96{,}8 = 292{,}4$ $\quad a_5 = 2 + 4 \cdot 96{,}8 = 389{,}2$

Por tanto, el segundo peldaño costará 98,8 €, el tercero 195,6 €, el cuarto 292,4 y el quinto, 389,2 €.

b) El precio de los peldaños forma una progresión geométrica cuyo primer término es 2 y el sexto, 486.

$a_6 = a_1 \cdot r^5 \Rightarrow 486 = 2 \cdot r^5 \Rightarrow r = 3 \Rightarrow a_n = 2 \cdot 3^{(n-1)}$

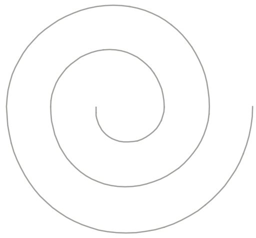
Los términos intermedios de esta progresión son:

$a_2 = 2 \cdot 3 = 6$ $\quad a_3 = 2 \cdot 3^2 = 18$ $\quad a_4 = 2 \cdot 3^3 = 54$ $\quad a_5 = 2 \cdot 3^4 = 162$

Por tanto, el segundo peldaño costará 6 €, el tercero 18 €, el cuarto 54 y, el quinto, 162 €.

73. Comenzamos a dibujar una espiral de esta manera: primero trazamos una semicircunferencia de radio 1 m; luego, otra de radio $\frac{1}{2}$ m tangente a la anterior; luego una de radio $\frac{1}{4}$ m; y así proseguimos.

Si pudiéramos continuar indefinidamente con este proceso, ¿qué longitud tendría esta espiral?



La primera semicircunferencia tiene una longitud de π m, la segunda $\frac{\pi}{2}$ m, la tercera $\frac{\pi}{4}$ m… Las longitudes de las semicircunferencias forman una progresión geométrica cuyo primer término es π y, la razón, $\frac{1}{2}$.

Para hallar la longitud de la espiral calculamos la suma de los infinitos términos de la progresión geométrica:

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-r} = \frac{\pi}{1-\frac{1}{2}} = 2\pi \rightarrow \text{La longitud de la espiral tendrá } 2\pi \text{ m.}$$

74. Dos vendedores rivalizan por un cliente al que quieren vender un coche valorado en 15 000 €.

Al final el cliente le compra el coche al primer vendedor cuando este le ha ofrecido su rebaja por quinta vez. ¿Cuál es el precio final del automóvil?

Los sucesivos precios del coche forman una progresión geométrica cuyo primer término es 15 000 y, la razón, 0,95.

Sustituyendo en la fórmula del término general $a_n = 15\,000 \cdot 0{,}95^{(n-1)}$.

La quinta rebaja del primer vendedor corresponde con el noveno término de la progresión geométrica:

$$a_9 = 15\,000 \cdot 0{,}95^8 = 9951{,}30$$

El precio final del automóvil es 9951,30 €.

75. En una progresión aritmética, la suma de los diez primeros términos es el cuádruplo de la suma de los cinco primeros términos. ¿Cuál es el cociente entre el primer término y la diferencia?

A. $\frac{1}{2}$ **B.** 2 **C.** $\frac{1}{4}$ **D.** 4

$$S_{10} = 4 \cdot S_5 \Rightarrow \frac{a_1 + a_{10}}{2} \cdot 10 = 4 \cdot \frac{a_1 + a_5}{2} \cdot 5 \Rightarrow 5 \cdot (a_1 + a_{10}) = 10 \cdot (a_1 + a_5) \Rightarrow a_1 + a_{10} = 2 \cdot (a_1 + a_5) \Rightarrow a_1 + a_{10} = 2a_1 + 2a_5 \Rightarrow$$
$$0 = 2a_1 + 2a_5 - a_1 - a_{10} \Rightarrow a_1 + 2a_5 - a_{10} = 0$$

Como $a_5 = a_1 + 4d$ y $a_{10} = a_1 + 9d$, entonces:

$$a_1 + 2 \cdot (a_1 + 4d) - a_1 - 9d = 0 \Rightarrow a_1 + 2a_1 + 8d - a_1 - 9d = 0 \Rightarrow 2a_1 - d = 0 \Rightarrow 2a_1 = d \Rightarrow \frac{a_1}{d} = \frac{1}{2}$$

La respuesta correcta es la **A.**

76. En una progresión geométrica de términos positivos, cada término es igual a la suma de los dos siguientes. ¿Cuál es la razón de la progresión?

A. 1 **B.** $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ **C.** $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ **D.** $\frac{2}{\sqrt{5}}$

Como cada término es igual a la suma de los dos siguientes, entonces, $a_1 = a_2 + a_3$.

Además, como es una progresión geométrica se cumple que $a_3 = a_2 \cdot r$.

$$r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_2}{a_2 + a_3} = \frac{a_2}{a_2 + a_2 \cdot r} = \frac{a_2}{a_2 \cdot (1+r)} = \frac{1}{1+r} \Rightarrow r \cdot (1+r) = 1 \Rightarrow r^2 + r - 1 = 0 \Rightarrow r = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Como los términos de la progresión son positivos, entonces $r = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

La respuesta correcta es la **B.**

77. La suma de todos los números de la forma 2*k* + 1 cuando *k* toma valores enteros desde 1 hasta *n* es:

A. n^2 **B.** $(n + 1)$ **C.** $n(n + 2)$ **D.** $(n + 1)^2$

Los números de la forma 2*k* + 1, cuando *k* toma valores enteros desde 1 hasta *n*, son 3, 5, 7, 9,…, 2*n* + 1. Se trata de una progresión aritmética cuyo primer término es 3 y, la diferencia, 2.

$$\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_n = 2n+1 \end{cases} \Rightarrow S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{3+2n+1}{2} \cdot n = \frac{4+2n}{2} \cdot n = (2+n) \cdot n$$

La respuesta correcta es la **C.**

78. Si la suma 1 + 2 + 3 + … + *k* es un cuadrado perfecto menor que 10 000, los posibles valores de *k* son:

A. Solamente 1 **B. Solamente 1 y 8** **C. Solamente 8 y 49** **D. 1, 8 y 49**

Los sumandos de 1 + 2 + 3 +….+ *k* forman una progresión aritmética cuyo primer término es 1 y, la diferencia, 1.

Hay que calcular la suma de los *k* primeros términos de esta progresión.

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_k = k \end{cases} \Rightarrow S_k = \frac{a_1 + a_k}{2} \cdot k = \frac{1+k}{2} \cdot k = \frac{(1+k) \cdot k}{2}$$

Comprobamos si para *k* = 1, 8 o 49 el resultado $\frac{(1+k) \cdot k}{2}$ es un cuadrado perfecto.

$$k = 1 \Rightarrow \frac{(1+1) \cdot 1}{2} = 1 = 1^2 \qquad k = 8 \Rightarrow \frac{(1+8) \cdot 8}{2} = 36 = 6^2 \qquad k = 49 \Rightarrow \frac{(1+49) \cdot 49}{2} = 1225 = 35^2$$

La suma es un cuadrado perfecto para *k* = 1, 8 y 49. La respuesta correcta es la **D.**

79. ¿Cuál es el valor de la suma infinita $\frac{1}{7} + \frac{2}{7^2} + \frac{1}{7^3} + \frac{2}{7^4}$ ...?

A. $\frac{1}{5}$ **B.** $\frac{1}{24}$ **C.** $\frac{5}{48}$ **D.** $\frac{3}{16}$

$$\frac{1}{7} + \frac{2}{7^2} + \frac{1}{7^3} + \frac{2}{7^4} + ... = \left(\frac{1}{7} + \frac{1}{7^3} + ...\right) + \left(\frac{2}{7^2} + \frac{2}{7^4} + ...\right)$$

El primer paréntesis corresponde a la suma infinita de una progresión geométrica cuyo primer término es $\frac{1}{7}$ y, la razón, $\frac{1}{7^2}$. El segundo paréntesis corresponde a la suma infinita de una progresión geométrica cuyo primer término es $\frac{2}{7^2}$ y, la razón, $\frac{1}{7^2}$.

$$\frac{1}{7} + \frac{2}{7^2} + \frac{1}{7^3} + \frac{2}{7^4} + ... = \frac{\frac{1}{7}}{1 - \frac{1}{7^2}} + \frac{\frac{2}{7^2}}{1 - \frac{1}{7^2}} = \frac{\frac{1}{7} + \frac{2}{49}}{1 - \frac{1}{49}} = \frac{\frac{9}{49}}{\frac{48}{49}} = \frac{9}{49} : \frac{48}{49} = \frac{9}{48} = \frac{3}{16}$$

La respuesta correcta es la **D.**

80. Encuentra el error.

Plis y Plas son dos pulgas que van como locas la una al encuentro de la otra. Plis empieza en el número 0 y da brincos de longitud 2 y Plas empieza en el número 85 y da saltos de longitud 3. Si empiezan a la vez a saltar y dan los saltos a la vez, ¿en qué número se encontrarán?

Tanto Plis como Plas avanzan siguiendo progresiones aritméticas:

- **Plis: $a_1 = 0$, $d = 2$. Su término general es:**

  $a_n = 0 + 2(n - 1)$, es decir, $a_n = 2n - 2$

- **Plas: $b_1 = 85$, $d = -3$. Su término general es:**

  $b_n = 85 - 3(n - 1)$, es decir, $b_n = 88 - 3n$

Para averiguar dónde coinciden igualamos sus términos generales y resolvemos la ecuación:

$$a_n = b_n \Rightarrow 2n - 2 = 88 - 3n \Rightarrow 2n + 3n = 88 + 2 \Rightarrow 5n = 90 \Rightarrow n = \frac{90}{5} \Rightarrow n = 18$$

Respuesta: Plis y Plas se encontrarán en el número 18.

Hay dos errores. El primero es evidente: n es el número de saltos, no la posición. Además los términos generales no son correctos.

PLIS: $a_1 = 2$, en el primer salto acaba en 2.

$a_n = 2 + (n - 1) \cdot 2 = 2n$

PLAS: $b_1 = 82$

$b_n = 82 + (n - 1) \cdot (-3) = -3n + 85$

Igualando: $2n = -3n + 85 \Rightarrow n = 17$

Habrán dado 17 saltos. Se encontrarán en el número 34.

PONTE A PRUEBA

El logotipo

Actividad resuelta

Los panales

Las abejas construyen panales de forma hexagonal. El segundo hexágono lo construyen aprovechando un lado del primero y a partir del tercer hexágono utilizan siempre dos lados de los hexágonos ya construidos.

Si se considera cada lado de un hexágono como unidad:

- **Para construir un panal de una celda se necesitan 6 unidades.**
- **Para construir un panal de dos celdas se necesitan 11 unidades.**
- **Para construir un panal de tres celdas se necesitan 15 unidades.**

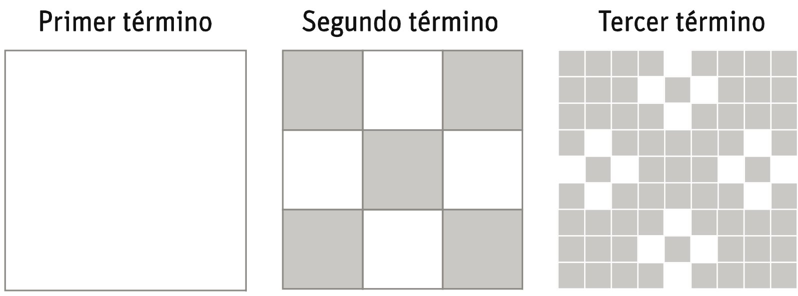
¿Cuántas celdas tendrá un panal que se ha construido con 51 unidades?

El número de hexágonos que necesitan para formar las celdas forman una sucesión recurrente que se rige por la siguiente ley: $a_1 = 6$ y $a_n = 4n + 3$, si $n > 1 \Rightarrow 51 = 4n + 3 \Rightarrow n = 12$

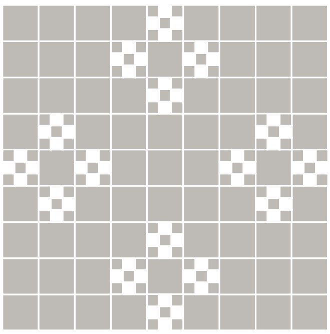
Un panal que se ha construido con 51 unidades tendrá 12 celdas.

Sucesión de cuadrados

En la siguiente imagen puedes ver los tres primeros términos de una sucesión de dibujos.



1. **Dibuja en tu cuaderno el cuarto término de la sucesión.**



2. **Explica razonadamente cómo lo has obtenido.**

   Cada cuadradito blanco del tercer término de la sucesión, se divide en 9 cuadrados iguales y se colorean los cuadrados de las esquinas y el central.

Los tenistas

La federación de tenis ha realizado un estudio sobre la evolución del número de federados y ha llegado a estas dos conclusiones:

1.ª: El 75 % de los federados renuevan su inscripción anual.

2.ª: Cada año se apuntan 200 nuevos federados.

1. **Si este año hay 4000 federados, calcula cómo varía el número de federados en los próximos cinco años.**

   En los próximos cinco años habrá 3200, 2600, 2150, 1813 y 1560 federados, respectivamente.

2. **Estudia si la sucesión que aparece es progresión aritmética o geométrica. ¿Cómo se llaman estas sucesiones?**

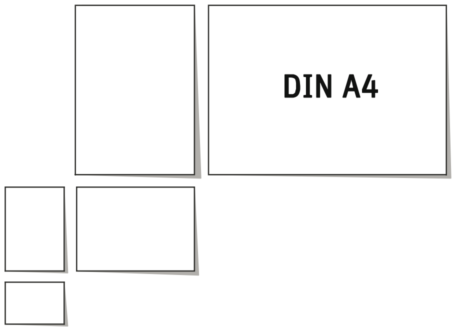
   No es ni una progresión aritmética ni una geométrica, porque para pasar de un término al siguiente ni se suma ni se multiplica por una cantidad fija. Estas sucesiones se llaman recurrentes.

3. **Encuentra su ley de formación.**

   $a_1 = 4000$ y $a_n = 0{,}75 \cdot a_{n-1} + 200$ si $n > 1$.

La norma DIN

Toma una hoja DIN A4 y divídela en dos mediante la mediatriz del lado mayor. Repite este proceso cuatro veces hasta obtener cinco hojas como las de la figura.



1. **Mide en milímetros las longitudes del lado más largo de cada hoja para formar una sucesión.**

   Las longitudes del lado más largo de cada hoja son, en milímetros, 297, 210, 148,5, 105 y 74,25.

2. **¿Qué tipo de sucesión es? Indica sus elementos.**

   Como al dividir cada término de la progresión entre el anterior siempre se obtiene el mismo valor, $\frac{\sqrt{2}}{2}$, se trata de una progresión geométrica cuyo primer término es 297 y, la razón, $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

3. **A la vista de los resultados obtenidos, ¿qué longitud tendrá el lado mayor de una hoja DIN A3? (Una hoja DIN A3 está formada por dos DIN A4 solapados por su lado mayor)**

   Llamando x al lado mayor de una hoja DIN A3 se cumple que $297 = x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = 297 : \frac{\sqrt{2}}{2} = 420$.

   La longitud del lado mayor de una hoja DIN A3 es 420 mm.

AUTOEVALUACIÓN

1. Estudia estas sucesiones y explica si son progresiones aritméticas, geométricas, de recurrencia o de ninguno de esos tipos.

a) 8, 18, 28, 38, 48…

b) 1, 1, 2, 3, 5, 8…

c) 3, 6, 12, 24, 48…

d) 120, 60, 30, 15…

a) Se trata de una progresión aritmética porque al restar a cada término su anterior siempre se obtiene 10.

b) Se trata de una sucesión de recurrencia porque $a_1 = 1$, $a_2 = 1$ y $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$.

c) Se trata de una progresión geométrica porque al dividir cada término con su anterior siempre se obtiene 2.

d) Se trata de una progresión geométrica porque al dividir cada término con su anterior siempre se obtiene $\frac{1}{2}$.

2. Encuentra el término que ocupa el lugar 35 de esta sucesión: 8, 12, 18, 27…

La sucesión 8, 12, 18, 27… es una progresión geométrica cuyo primer término es 8 y, la razón, 1,5.

Sustituyendo los valores en la fórmula general $a_n = 8 \cdot 1{,}5^{(n-1)}$.

El término que ocupa el lugar 35 de esta progresión es $a_{35} = 8 \cdot 1{,}5^{34} = 7\,765\,917{,}90$.

3. Halla la suma de los diez primeros términos de esta sucesión: 5, 10, 20, 40…

La sucesión 5, 10, 20, 40… es una progresión geométrica cuyo primer término es 5 y, la razón, 2.

Sustituyendo los valores en la fórmula general $a_n = 5 \cdot 2^{(n-1)}$. Por tanto:

$$\begin{cases} a_1 = 5 \\ a_{10} = 5 \cdot 2^9 = 2560 \end{cases} \Rightarrow S_{10} = \frac{a_{10} \cdot r - a_1}{r-1} = \frac{2560 \cdot 2 - 5}{2-1} = 5115$$

4. Los ángulos de un cuadrilátero forman una progresión aritmética. Calcúlalos sabiendo que el menor de ellos mide 30°.

Como los ángulos están en progresión aritmética los ángulos medirán 30, 30 + d, 30 + 2d y 30 + 3d, siendo d la diferencia de la progresión.

$$30 + 30 + d + 30 + 2d + 30 + 3d = 360 \Rightarrow 6d = 240 \Rightarrow d = 40$$

Los ángulos medirán 30º, 70º, 110º y 150º.

5. En la sucesión 7, 11, 15, 19, 23..., ¿cuál es el primer término mayor que 2500?

Se trata de una progresión aritmética cuyo primer término es 7 y, la diferencia, 4. Sustituyendo en la fórmula del término general $a_n = 7 + (n - 1) \cdot 4 = 3 + 4n$.

$$3 + 4n = 2500 \Rightarrow 4n = 2497 \Rightarrow n = 624{,}25$$

El primer término mayor que 2500 es el 625.

6. El término general de una sucesión es $a_n = 32^{n-5}$.

a) Calcula los cuatro primeros términos de la sucesión.

b) Demuestra que es una progresión geométrica.

c) Calcula su primer término y su razón.

a) $a_1 = 32^{1-5} = 32^{-4}$ $\quad a_2 = 32^{2-5} = 32^{-3}$ $\quad a_3 = 32^{3-5} = 32^{-2}$ $\quad a_4 = 32^{4-5} = 32^{-1}$

b) Es una progresión geométrica porque al dividir un término entre su anterior siempre se obtiene un mismo valor:

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{32^{n-5}}{32^{n-6}} = 32^{n-5-(n-6)} = 32^{n-5-n+6} = 32$$

c) $a_1 = 32^{1-5} = 32^{-4}$ y $r = 32$

7. Una empresa de pocería maneja estas tarifas: 250 € por abrir el agujero y a partir de ahí incrementa en 80 € cada metro excavado. Escribe los primeros términos de la sucesión de precios de la excavación según los metros alcanzados. ¿Qué precio tendrá la excavación de un pozo de 20 m de profundidad?

Los primeros términos de la sucesión de precios son 330, 410, 490, 570, 650…

Se trata de una progresión aritmética cuyo primer término es 330 y, la diferencia, 80. Sustituyendo en la fórmula del término general $a_n = 330 + (n - 1) \cdot 80 = 250 + 80n$.

Excavar un pozo de 20 m de profundidad costará $a_{20} = 250 + 80 \cdot 20 = 1850$ €.

8. Treinta alumnos de 3.º ESO se colocan en fila y juegan a "seguir la serie", gritando cada uno un número: ¡3!, ¡7!, ¡11!, ¡15!...

a) ¿Qué número gritará el último estudiante de la fila?

b) ¿Qué alumno gritó ¡71!?

c) El profesor se ha enfadado y les ha dicho: "Pues ahora tenéis que calcular la suma de todos los números que habéis gritado". ¿Cuánto es esta suma?

a) Los números que gritan los alumnos forman una progresión aritmética cuyo primer término es 3 y, la diferencia, 4. Sustituyendo en la fórmula general $a_n = 3 + (n - 1) \cdot 4 = 4n - 1$. El número que gritará el último estudiante de la fila será $a_{30} = 4 \cdot 30 - 1 = 119$.

b) $71 = 4n - 1 \Rightarrow 72 = 4n \Rightarrow n = 18 \Rightarrow$ El alumno que ocupa el lugar 18 gritó "¡71!"

c) $S_{30} = \dfrac{a_1 + a_{30}}{2} \cdot 30 = \dfrac{3 + 119}{2} \cdot 30 = 1830$

9. En el contrato de alquiler de una vivienda está estipulado que el precio del alquiler se incrementará de un año para otro en un porcentaje igual al IPC. Suponiendo que el IPC permanece constante e igual al 2 % durante los próximos diez años, ¿cuál será el precio al cabo de estos diez años si ahora es de 800 €?

Se trata de una progresión geométrica cuyo primer término es 800 y, su razón, 1,02. Sustituyendo en la fórmula del término general $a_n = 800 \cdot 1{,}02^{(n-1)}$. El precio al cabo de 10 años será $a_{10} = 800 \cdot 1{,}02^{(10-1)} = 956{,}07$ €.