4 División y factorización de polinomios

REFLEXIONA Y CONTESTA

¿Qué crees que ocurre si el número de ranuras es menor que el número de imágenes?

Si el número de ranuras es menor que el número de imágenes se verán las imágenes salteadas y no habrá sensación de movimiento.

ANALIZA Y SACA CONCLUSIONES

Elige uno de los artefactos que hayas encontrado y trata de construir una ilusión óptica.

Respuesta libre

Actividades propuestas

1. Divide los siguientes monomios e indica si el resultado es o no un monomio.

a) $\dfrac{-24x^4}{3x^2}$

b) $\dfrac{-45x^2t^4}{10x^2t^3}$

c) $\dfrac{8x^2}{16xy}$

d) $\dfrac{9x^5y^2}{3x^2y^3}$

e) $\dfrac{8a^3b^2}{4a^4b}$

f) $\dfrac{15z^2y^3}{30z^4y}$

a) $\dfrac{-24x^4}{3x^2} = -8x^2$ Es un monomio.

b) $\dfrac{-45x^2t^4}{10x^2t^3} = \dfrac{-9}{2}t$ Es un monomio.

c) $\dfrac{8x^2}{16xy} = \dfrac{x}{2y}$ No es un monomio.

d) $\dfrac{9x^5y^2}{3x^2y^3} = \dfrac{3x^3}{y}$ No es un monomio.

e) $\dfrac{8a^3b^2}{4a^4b} = \dfrac{2b}{a}$ No es un monomio.

f) $\dfrac{15z^2y^3}{30z^4y} = \dfrac{y^2}{2z^2}$ No es un monomio.

2. Indica cuál de los siguientes monomios es divisible por $4x^2y^2$.

a) $16xy^2$

b) $15x^3y$

c) $3xy$

d) x^3y^2

a) $\dfrac{16xy^2}{4x^2y^2} = \dfrac{4}{x} \Rightarrow$ No

b) $\dfrac{15x^3y}{4x^2y^2} = \dfrac{15x}{4y} \Rightarrow$ No

c) $\dfrac{3xy}{4x^2y^2} = \dfrac{3}{4xy} \Rightarrow$ No

d) $\dfrac{x^3y^2}{4x^2y^2} = \dfrac{x}{4} \Rightarrow$ Sí

3. Actividad resuelta

4. **Divide los siguientes polinomios y expresa el resultado como la suma de un polinomio y una fracción donde el grado del polinomio numerador sea de menor grado que el polinomio denominador.**

a) $(6x^3 - x^2 - 25x + 15) : (2x^2 + 3x - 4)$

b) $(x^4 + 5x^3 - 2x^2 + 17x - 18) : (x^2 + 4)$

c) $(3x^3 - 2x^2 + x + 18) : (x + 4)$

d) $(x^4 - 3x^2) : (x^2 - 4)$

e) $(x^4 - 2x + 8) : (x^2 + x)$

f) $(3x^3 - x + 5) : (2x + 1)$

a) $\dfrac{6x^3 - x^2 - 25x + 15}{2x^2 + 3x + 4} = 3x - 5 + \dfrac{2x - 5}{2x^2 + 3x - 4}$

$$\begin{array}{rrrr|l}
\cancel{6x^3} & -x^2 & -25x & +15 & 2x^2+3x-4 \\
-\cancel{6x^3} & -9x^2 & +12x & & 3x-5 \\ \hline
 & -\cancel{10x^2} & -13x & +15 & \\
 & \cancel{10x^2} & +15x & -20 & \\ \hline
 & & 2x & -5 &
\end{array}$$

d) $\dfrac{x^4 - 3x^2}{x^2 - 4} = x^2 + 1 + \dfrac{4}{x^2 - 4}$

$$\begin{array}{rrr|l}
\cancel{x^4} & -3x^2 & & x^2-4 \\
-\cancel{x^4} & +4x^2 & & x^2+1 \\ \hline
 & +x^2 & & \\
 & -\cancel{x^2} & +4 & \\ \hline
 & & 4 &
\end{array}$$

b) $\dfrac{x^4 + 5x^3 - 2x^2 + 17x - 18}{x^2 + 4} = x^2 + 5x - 6 + \dfrac{-3x + 6}{x^2 + 4}$

$$\begin{array}{rrrrr|l}
\cancel{x^4} & +5x^3 & -2x^2 & +17x & -18 & x^2+4 \\
-\cancel{x^4} & & -4x^2 & & & x^2+5x-6 \\ \hline
 & \cancel{5x^3} & -6x^2 & +17x & -18 & \\
 & -\cancel{5x^3} & & -20x & & \\ \hline
 & & -\cancel{6x^2} & -3x & -18 & \\
 & & \cancel{6x^2} & & +24 & \\ \hline
 & & & -3x & -6 &
\end{array}$$

e) $\dfrac{\cancel{x^4} - 2x^2 - 2x + 8}{x^2 + x} = x^2 - x - 1 + \dfrac{-x + 8}{x^2 + x}$

$$\begin{array}{rrrrr|l}
\cancel{x^4} & & -2x^2 & -2x & +8 & x^2+x \\
-\cancel{x^4} & -x^3 & & & & x^2-x-1 \\ \hline
 & -\cancel{x^3} & -2x^2 & -2x & +8 & \\
 & \cancel{x^3} & +x^2 & & & \\ \hline
 & & -\cancel{x^2} & -2x & +8 & \\
 & & \cancel{x^2} & +x & & \\ \hline
 & & & -x & +8 &
\end{array}$$

c) $\dfrac{\cancel{3x^3} - 2x^2 + x + 18}{x + 4} = 3x^2 - 14x + 57 - \dfrac{210}{x + 4}$

$$\begin{array}{rrrr|l}
\cancel{3x^3} & -2x^2 & +x & +18 & x+4 \\
-\cancel{3x^3} & -12x^2 & & & 3x^2-14x+57 \\ \hline
 & -\cancel{14x^2} & +x & +18 & \\
 & \cancel{14x^2} & +56x & & \\ \hline
 & & \cancel{57x} & +18 & \\
 & & -\cancel{57x} & -228 & \\ \hline
 & & & -210 &
\end{array}$$

f) $\dfrac{\cancel{3x^3} - x + 5}{2x + 1} = \dfrac{3}{2}x^2 - \dfrac{3}{4}x - \dfrac{1}{8} + \dfrac{\frac{41}{8}}{2x + 1}$

$$\begin{array}{rrrr|l}
\cancel{3x^3} & & -x & +5 & 2x+1 \\
-\cancel{3x^3} & -\frac{3}{2}x^2 & & & \frac{3}{2}x^2-\frac{3}{4}x-\frac{1}{8} \\ \hline
 & -\cancel{\frac{3}{2}x^2} & -x & +5 & \\
 & \cancel{\frac{3}{2}x^2} & +\frac{3}{4}x & & \\ \hline
 & & -\cancel{\frac{1}{4}x} & +5 & \\
 & & \cancel{\frac{1}{4}x} & +\frac{1}{8} & \\ \hline
 & & & \frac{41}{8} &
\end{array}$$

5. **Actividad resuelta**

6. Comprueba que los siguientes polinomios son múltiplos de $P(x) = 2x^2 + x - 3$ y escríbelos como producto de dos polinomios tales que uno de ellos sea $P(x)$.

a) $A(x) = 2x^3 + 9x^2 + x - 12$

b) $B(x) = 2x^4 + 3x^3 - 18x^2 - 11x + 24$

c) $C(x) = -4x^2 - 2x + 6$

a) $2x^3 + 9x^2 + x - 12 = (x + 4) \cdot (2x^2 + x - 3)$

$$\begin{array}{rrrr|l}
\cancel{2x^3} & +9x^2 & +x & -12 & 2x^2+x-3 \\ \cline{5-5}
-\cancel{2x^3} & -x^2 & +3x & & x+4 \\ \cline{1-4}
& \cancel{8x^2} & +4x & -12 & \\
& \cancel{8x^2} & -4x & +12 & \\ \cline{2-4}
& & & 0 &
\end{array}$$

c) $-4x^2 - 2x + 6 = -2 \cdot (2x^2 + x - 3)$

$$\begin{array}{rrr|l}
-4x^2 & -2x & +6 & 2x^2+x-3 \\ \cline{4-4}
+4x^2 & -2x & +6 & -2 \\ \cline{1-3}
& & 0 &
\end{array}$$

b) $(2x^4 + 3x^3 - 18x^2 - 11x + 24) = (x^2 + x - 8) \cdot (2x^2 + x - 3)$

$$\begin{array}{rrrrr|l}
\cancel{2x^4} & +3x^3 & -18x^2 & -11x & +24 & 2x^2+x-3 \\ \cline{6-6}
-\cancel{2x^4} & -x^3 & +3x^2 & & & x^2+x-8 \\ \cline{1-5}
& \cancel{2x^3} & -15x^2 & -11x & +24 & \\
& \cancel{-2x^3} & -x^2 & +3x & & \\ \cline{2-5}
& & \cancel{-16x^2} & -8x & +24 & \\
& & \cancel{+16x^3} & -8x & -24 & \\ \cline{3-5}
& & & & 0 &
\end{array}$$

7. Actividad resuelta

8. Calcula, en cada caso, el valor de k para que las siguientes divisiones de polinomios sean exactas.

a) $\dfrac{6x^3 - 21x^2 + 21x + k}{3x^2 - 3x + 3}$

b) $\dfrac{4x^4 - 5x^3 + x^2 + 12x + k}{4x - 1}$

c) $\dfrac{3x^4 - x^3 + 5x^2 + kx + 2}{3x^2 - x + 2}$

d) $\dfrac{3x^4 + 5x^3 - kx + 15}{-x + 3}$

a) $k + 15 = 0 \Rightarrow k = -15$

$$\begin{array}{rrrr|l}
\cancel{6x^3} & -21x^2 & +21x & +k & 3x^2-3x+3 \\ \cline{5-5}
-\cancel{6x^3} & +6x^2 & -6x & & 2x-5 \\ \cline{1-4}
& \cancel{-15x^2} & +15x & +k & \\
& \cancel{+15x^2} & -15x & -15 & \\ \cline{2-4}
& & & k-15 &
\end{array}$$

c) $1 - k = 0 \Rightarrow k = 1$

$$\begin{array}{rrrrr|l}
\cancel{3x^4} & -x^3 & +5x^2 & +kx & +2 & 3x^2-x+2 \\ \cline{6-6}
-\cancel{3x^4} & +x^3 & -2x^2 & & & x^2+1 \\ \cline{1-5}
& & 3x^2 & -kx & +2 & \\
& & \cancel{-3x^2} & +x & -2 & \\ \cline{3-5}
& & & (1-k)x & &
\end{array}$$

b) $k + 3 = 0 \Rightarrow k = -3$

$$\begin{array}{rrrrr|l}
\cancel{4x^4} & -5x^3 & +x^2 & +12x & +k & 4x-1 \\ \cline{6-6}
-\cancel{4x^4} & +x^3 & & & & x^3-x^2+3 \\ \cline{1-5}
& \cancel{-4x^3} & +x^2 & +12x & +k & \\
& \cancel{+4x^2} & -x^2 & & & \\ \cline{2-5}
& & & \cancel{12x} & +k & \\
& & & \cancel{-12x} & -3 & \\ \cline{4-5}
& & & & k-3 &
\end{array}$$

d) $393 - 3k = 0 \Rightarrow k = 131$

$$\begin{array}{rrrrr|l}
\cancel{3x^4} & +5x^3 & & -kx & +15 & -x+3 \\ \cline{6-6}
-\cancel{3x^4} & +9x^3 & & & & -3x^3-14x^2-42x-(126-k) \\ \cline{1-5}
& \cancel{+14x^3} & & -kx & +15 & \\
& \cancel{-14x^3} & +42x^2 & & & \\ \cline{2-5}
& & \cancel{+42x^2} & -kx & +15 & \\
& & \cancel{-42x^2} & +126x & & \\ \cline{3-5}
& & & \cancel{(126-k)x} & +15 & \\
& & & \cancel{-(126-k)x} & +378-3k & \\ \cline{4-5}
& & & & 393-3k &
\end{array}$$

9. Actividad resuelta

10. Calcula el cociente y el resto de las siguientes divisiones aplicando la regla de Ruffini.

a) $(3x^2 - 4x + 5) : (x - 3)$

b) $(2x^3 - 3x^2 + 2x - 3) : (x + 2)$

c) $(2x^4 - 3x + 2) : (x - 2)$

d) $(x^5 - x^3 + x^2 - 2x) : (x + 3)$

e) $(x^5 + 3x^4 - 5x^3 + x^2 - 1) : (x + 1)$

f) $(x^6 - x^4 + 2x^2) : (x - 1)$

a) $C(x) = 3x + 5$ y $R(x) = 20$

	3	–4	5
3		9	15
	3	5	20

b) $C(x) = 2x^2 - 7x + 16$ y $R(x) = -35$

	2	–3	2	–3
–2		–4	14	–32
	2	–7	16	–35

c) $C(x) = 2x^3 + 4x^2 + 8x + 13$ y $R(x) = 28$

	2	0	0	–3	2
2		4	8	16	26
	2	4	8	13	28

d) $C(x) = x^4 - 3x^3 + 8x^2 - 23x + 67$ y $R(x) = -201$

	1	0	–1	1	–2	0
–3		–3	9	–24	69	– 201
	1	–3	8	–23	67	–201

e) $C(x) = x^4 + 2x^3 - 7x^2 + 8x - 8$ y $R(x) = 7$

	1	3	–5	1	0	–1
–1		–1	–2	7	–8	8
	1	2	–7	8	–8	7

f) $C(x) = x^5 + x^4 - 4x^3 - 4x^2 - 2x^2 - 2x$ y $R(x) = -2$

	1	1	–5	0	2	0
1		1	1	–4	–4	–2
	1	1	–4	–4	–2	–2

11. Actividad resuelta

12. Calcula el cociente y el resto de las siguientes divisiones aplicando la regla de Ruffini.

a) $\left(x^2 - \frac{1}{2}x + 2\right) : (x - 2)$

b) $\left(x^3 - \frac{1}{3}x^2 + 2x + 1\right) : (x + 3)$

c) $\left(\frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{3}x^2 + 1\right) : (x - 1)$

d) $(x^5 - x^3 + 2x^2 - 3x - 1) : (x - 3)$

a) $C(x) = 2x + \frac{3}{2}$ y $R(x) = 5$

	1	$-\frac{1}{2}$	2
2		2	3
	1	$\frac{3}{2}$	5

b) $C(x) = x^2 - \frac{10}{3}x + 12$ y $R(x) = -35$

	1	$-\frac{1}{3}$	2	1
–3		–3	10	–36
	1	$-\frac{10}{3}$	12	–35

c) $C(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x + \frac{1}{6}$ y $R(x) = \frac{7}{6}$

	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	0	1
1		$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{7}{6}$

d) $C(x) = x^4 + 3x^3 + 8x^2 + 26x + 75$ y $R(x) = 224$

	1	0	–1	2	–3	–1
3		3	9	24	78	225
	1	3	8	26	75	224

13. Comprueba si las siguientes divisiones son exactas.

a) $(2x^3 - 3x^2 - 5x + 6) : (x - 2)$

b) $(x^4 + x^3 - x^2 + 3x + 2) : (x + 2)$

c) $(2x^4 - 5x^3 - 7x - 6) : (x - 3)$

d) $\left(x^3 - 2x^2 + \frac{1}{12}x - \frac{1}{6}\right) : (x - 2)$

a) Es exacta porque $R(x) = 0$

	2	–3	–5	6
2		4	2	–6
	2	1	–3	0

b) Es exacta porque $R(x) = 0$

	1	1	–1	3	2
–2		–2	2	– 2	–2
	1	–1	1	1	0

c) Es exacta porque $R(x) = 0$

	2	–5	0	–7	–6
3		6	3	9	6
	2	1	3	2	0

d) Es exacta porque $R(x) = 0$

	1	–2	$\frac{1}{12}$	$-\frac{1}{6}$
2		29	0	$\frac{1}{6}$
	1	0	$\frac{1}{12}$	0

14. Actividad resuelta.

15. En cada caso, calcula el valor de *k* para que las siguientes divisiones sean exactas.

a) $(-2x^2 - x - k) : (x - 2)$

b) $(x^3 - 2x^2 + 3x + k) : (x + 2)$

c) $(x^4 - x^3 - x - k) : (x + 3)$

d) $(4x^3 - 23x^2 + 17x + k) : (x - 5)$

e) $\left(x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + k\right) : (x - 2)$

f) $\left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x + \frac{k}{2}\right) : \left(x + \frac{1}{2}\right)$

a) $-k - 10 = 0 \Rightarrow k = -10$

	–2	–1	$-k$
2		–4	–10
	–2	–5	$-k - 10$

b) $k - 22 = 0 \Rightarrow k = 22$

	1	–2	3	k
–2		–2	8	–22
	1	–4	11	$k - 22$

c) $-k + 111 = 0 \Rightarrow k = 111$

	1	–1	0	–1	$-k$
– 3		–3	12	–36	111
	1	–4	12	–37	$-k + 111$

d) $k + 10 = 0 \Rightarrow k = -10$

	4	–23	17	k
5		20	–15	10
	4	–3	2	$k + 10$

e) $k + 9 = 0 \Rightarrow k = -9$

	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	k
2		2	5	9
	1	$\frac{5}{2}$	$\frac{9}{2}$	$k + 9$

f) $\frac{k}{2} + \frac{1}{24} = 0 \Rightarrow k = -\frac{1}{12}$

	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{k}{2}$
$-\frac{1}{2}$		$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{24}$
	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{12}$	$\frac{k}{2} + \frac{1}{24}$

16. Comprueba si son raíces de los polinomios los valores que se indican.

a) $P(x) = x^2 - 4x \quad x = 2$

b) $P(x) = 3x^3 + 8x^2 - 5x - 6 \quad x = -3$

c) $P(x) = x^5 - x^3 - 2x + 2 \quad x = 1$

a) No es raíz porque $P(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 = 4 - 8 = -4 \neq 0$

b) Es raíz porque $P(-3) = 3 \cdot (-3)^3 + 8 \cdot (-3)^2 - 5 \cdot (-3) - 6 = -81 + 72 + 15 - 6 = 0$

c) Es raíz porque $P(1) = 1^5 - 1^3 - 2 \cdot 1 + 2 = 1 - 1 - 2 + 2 = 0$

17. Sin realizar la división, calcula el valor del resto.

a) $(3x^2 - 4x + 3) : (x - 1)$ **b)** $(2x^3 - x^2 - 2x + 8) : (x + 1)$ **c)** $(x^4 - 3x^3 - x + 10) : (x - 2)$

¿Cuáles de las divisiones anteriores son exactas?

Aplicando el teorema del resto:

a) $R = P(1) = 3 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 + 3 = 3 - 4 + 3 = 2$

b) $R = P(-1) = 2 \cdot (-1)^3 - (-1)^2 - 2 \cdot (-1) + 8 = -2 - 1 + 2 + 8 = 7$

c) $R = P(2) = 2^4 - 3 \cdot 2^3 - 2 + 10 = 16 - 24 - 2 + 10 = 0$

Únicamente es exacta la división del apartado c).

18. ¿Cuáles de los siguientes valores son raíces del polinomio $P(x) = x^3 - 5x^2 + 7x + 3$?

a) $x = 1$ **b)** $x = -1$ **c)** $x = 3$ **d)** $x = -3$

a) $P(1) = 1^3 - 5 \cdot 1^2 + 7 \cdot 1 + 3 = 1 - 5 + 7 + 3 = 4 \neq 0 \Rightarrow x = 1$ no es raíz de $P(x)$

b) $P(-1) = (-1)^3 - 5 \cdot (-1)^2 + 7 \cdot (-1) + 3 = -1 - 5 - 7 + 3 = -10 \neq 0 \Rightarrow x = -1$ no es raíz de $P(x)$

c) $P(3) = 3^3 - 5 \cdot 3^2 + 7 \cdot 3 + 3 = 27 - 45 + 21 + 3 = 6 \neq 0 \Rightarrow x = 3$ no es raíz de $P(x)$

d) $P(-3) = (-3)^3 - 5 \cdot (-3)^2 + 7 \cdot (-3) + 3 = -27 - 45 - 21 + 3 = -110 \neq 0 \Rightarrow x = -3$ no es raíz de $P(x)$

19. Actividad resuelta

20. Calcula el valor de *k* para que el polinomio *P*(*x*) sea divisible por el binomio que se indica.

a) $P(x) = 2x^2 - 3x + k$ **divisible por** $x - 3$

b) $P(x) = x^3 - 2x^2 + x + k$ **divisible por** $x + 3$

c) $P(x) = x^5 - x^3 + k$ **divisible por** $x - 2$

d) $P(x) = \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 + \frac{1}{2}x + k$ **divisible por** $x + 2$

Para que el polinomio $P(x)$ sea divisible entre el binomio $x - a$, debe verificarse que $P(a) = 0$.

a) $P(3) = 2 \cdot 3^2 - 3 \cdot 3 + k = 9 + k = 0 \Rightarrow k = -9$

b) $P(-3) = (-3)^3 - 2 \cdot (-3)^2 + (-3) + k = -48 + k = 0 \Rightarrow k = 48$

c) $P(2) = 2^5 - 2^3 + k = 24 + k = 0 \Rightarrow k = -24$

d) $P(-2) = \frac{1}{2} \cdot (-2)^3 - 3 \cdot (-2)^2 + \frac{1}{2} \cdot (-2) + k = -17 + k = 0 \Rightarrow k = 17$

21. Calcula el valor de *k* para que el resto de la división $\left(\frac{1}{3}x^3 - x^2 - 2x - 2k\right) : (x + 2)$ valga $\frac{8}{3}$.

Por el teorema del resto, $P(-2) = \frac{1}{3} \cdot (-2)^3 - (-2)^2 - 2 \cdot (-2) - 2k = -\frac{8}{3} - 2k = \frac{8}{3} \Rightarrow k = \frac{-16}{6} = \frac{-8}{3}$

22. Actividad resuelta

23. Indica cuáles de los siguientes polinomios tienen como uno de sus factores a $x + 3$.

a) $P(x) = 2x^2 + x - 12$

b) $Q(x) = 2x^2 + x - 15$

c) $R(x) = 2x^3 + 6x^2 - 5x - 12$

d) $S(x) = 2x^3 + 6x^2 + 5x + 15$

$x + 3$ es un factor de $P(x)$ si $P(3) = 0$.

a) $P(-3) = 2 \cdot (-3)^2 + (-3) - 12 = 3 \Rightarrow x + 3$ no es un factor de $P(x)$

b) $Q(-3) = 2 \cdot (-3)^2 + (-3) - 15 = 0 \Rightarrow x + 3$ es un factor de $Q(x)$

c) $R(-3) = 2 \cdot (-3)^3 + 6 \cdot (-3)^2 - 5 \cdot (-3) - 12 = 3 \Rightarrow x + 3$ no es un factor de $R(x)$

d) $S(-3) = 2 \cdot (-3)^3 + 6 \cdot (-3)^2 - 5 \cdot (-3) - 12 = 0 \Rightarrow x + 3$ es un factor de $R(x)$

24. Sin necesidad de realizar la división, comprueba si el polinomio $P(x) = 3x^3 + 8x^2 - 9x + 28$ tiene como factor el monomio $x + 4$.

Por el teorema del factor, $x + 4$ es un factor de $P(x)$ si el resto de la división de $P(x)$ entre $x + 4$ es cero.

Aplicando el teorema del resto, $P(-4) = 3 \cdot (-4)^3 + 8 \cdot (-4)^2 - 9 \cdot (-4) + 28 = 0$.

Por tanto, $x + 4$ sí es un factor de $P(x)$.

25. ¿Cuáles de los siguientes binomios son factores del polinomio $P(x) = x^3 - 2x^2 - x - 2$?

a) $x - 2$ **b)** $x + 2$ **c)** $x + 1$ **d)** $x - 1$ **e)** $x - 3$ **f)** $x + 3$

a) $P(2) = 2^3 - 2 \cdot 2^2 - 2 - 2 = -4 \neq 0 \Rightarrow x - 2$ no es un factor de $P(x)$

b) $P(-2) = (-2)^3 - 2 \cdot (-2)^2 - (-2) - 2 = -14 \neq 0 \Rightarrow x + 2$ es un factor de $P(x)$

c) $P(-1) = (-1)^3 - 2 \cdot (-1)^2 - (-1) - 2 = -4 \neq 0 \Rightarrow x + 1$ no es un factor de $P(x)$

d) $P(1) = 1^3 - 2 \cdot 1^2 - 1 - 2 = -4 \neq 0 \Rightarrow x - 1$ no es un factor de $P(x)$

e) $P(3) = 3^3 - 2 \cdot 3^2 - 3 - 2 = 4 \neq 0 \Rightarrow x - 3$ no es un factor de $P(x)$

f) $P(-3) = (-3)^3 - 2 \cdot (-3)^2 - (-3) - 2 = -44 \neq 0 \Rightarrow x + 3$ no es un factor de $P(x)$

26. ¿Cuáles son los restos de las siguientes divisiones?

a) $\dfrac{x^{10} - 2}{x + 3}$

b) $\dfrac{x^{17} - x^{10} + x^5}{x + 1}$

a) Por el teorema del resto, el resto de la división $\dfrac{x^{10} - 2}{x + 3}$ coincidirá con el valor numérico de $x^{10} - 2$ en $x = -3$. Por tanto, $R = (-3)^{10} - 2 = 59\,047$.

b) Por el teorema del resto, el resto de la división $\dfrac{x^{17} - x^{10} + x^5}{x + 1}$ coincidirá con el valor numérico de $x^{17} - x^{10} + x^5$ en $x = -1$. Por tanto, $R = (-1)^{17} - (-1)^{10} + (-1)^5 = -3$.

27. Actividad resuelta

28. Calcula las raíces enteras de los polinomios:

a) $P(x) = x^2 - x - 12$

b) $Q(x) = x^3 + x^2 - 17x + 15$

c) $R(x) = x^3 + 7x^2 + 2x - 40$

a) Las raíces son 4 y –3

	1	–1	–12
4		4	12
	1	3	0

b) Las raíces son 1, 3 y –5

	1	1	–17	15
1		1	2	–15
	1	2	–15	0
3		3	15	
	1	5	0	

c) Las raíces son 2, – 4 y – 5

	1	7	2	–40
2		2	18	40
	1	9	20	0
– 4		–4	–20	
	1	5	0	

29. Utiliza la regla de Ruffini para factorizar los polinomios

a) $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$

b) $Q(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6$

c) $R(x) = x^3 - 7x + 6$

d) $S(x) = x^4 - 1$

a) $P(x) = (x - 1) \cdot (x - 2) \cdot (x - 3)$

	1	–6	11	–6
1		1	–5	6
	1	–5	6	0
2		2	–6	
	1	–3	0	

b) $Q(x) = (x - 1) \cdot (x - 2) \cdot (x + 3)$

	1	4	1	–6
1		1	5	6
	1	5	6	0
2		2	–6	
	1	–3	0	

c) $R(x) = (x - 1) \cdot (x - 2) \cdot (x + 3)$

	1	0	–7	6
1		1	1	–6
	1	1	–6	0
2		2	6	
	1	3	0	

d) $S(x) = (x - 1) \cdot (x + 1) \cdot (x^2 + 1)$

	1	0	0	0	–1
1		1	1	1	1
		1	1	1	0
–1		–1	0	–1	
	1	0	1	0	

30. Extrae factor común para factorizar los polinomios.

a) $P(x) = x^3 - x^2$

b) $Q(x) = -x^3 + 3x^2$

c) $R(x) = -2x^3 - 8x$

d) $S(x) = 6x^4 - 8x^3$

a) $P(x) = x^3 - x^2 = x^2 \cdot (x - 1)$

b) $Q(x) = -x^3 + 3x^2 = -x^2 \cdot (x - 3)$

c) $R(x) = -2x^3 - 8x = -2x \cdot (x^2 - 4) = -2x \cdot (x - 2) \cdot (x + 2)$

d) $S(x) = 6x^4 - 8x^3 = 2x^3 \cdot (3x - 4) = 6x^3 \cdot \left(x - \frac{4}{3}\right)$

31. Usa las igualdades notables y factoriza los polinomios:

a) $P(x) = 4x^2 - 16x + 16$

b) $P(x) = -x^2 + \frac{4}{9}$

c) $Q(x) = 9x^2 + 6x + 1$

d) $P(x) = \frac{1}{4}x^2 + x + 1$

a) $P(x) = 4x^2 - 16x + 16 = (2x - 4)^2$

b) $P(x) = -x^2 + \frac{4}{9} = \left(\frac{2}{3} - x\right) \cdot \left(\frac{2}{3} + x\right)$

c) $Q(x) = 9x^2 + 6x + 1 = (3x + 1)^2$

d) $P(x) = \frac{1}{4}x^2 + x + 1 = \left(\frac{1}{2}x + 1\right)^2$

32. Actividad resuelta

33. Factoriza los polinomios:

a) $P(x) = x^3 - 3x^2 + 4$

b) $P(x) = x^4 + 4x^3 + 4x^2$

c) $P(x) = x^4 - 2x^2 + 1$

d) $P(x) = x^4 + 5x^3 + 3x^2 - 9x$

a) $P(x) = x^3 - 3x^2 + 4 = (x + 1) \cdot (x - 2)^2$

	1	–3	0	4
–1		–1	4	–4
	1	–4	4	0
2		2	–4	
	1	–2	0	

b) $P(x) = x^4 + 4x^3 + 4x^2 = x^2 \cdot (x^2 + 4x + 1) = x^2 \cdot (x + 2)^2$

c) $P(x) = x^4 - 2x^2 + 1 = (x^2 - 1)^2 = (x - 1)^2 \cdot (x + 1)^2$

d) $P(x) = x^4 + 5x^3 + 3x^2 - 9x = x \cdot (x^3 + 5x^2 + 3x - 9) = x \cdot (x - 1) \cdot (x + 3)^2$

	1	5	3	–9
1		1	6	9
	1	6	9	0
–3		–3	–9	
	1	3	0	

34. Actividad interactiva

35. Indica si estas expresiones son fracciones algebraicas:

a) $\dfrac{x^3 + x + \sqrt{3}}{x^4 - 4x + 9}$

b) $\dfrac{x^{-2} + x}{3x^2 - x + 5}$

c) $\dfrac{x^3 + \sqrt{x}}{x - 4}$

a) Es fracción algebraica

b) Es fracción algebraica

c) No es fracción algebraica

36. Calcula el valor numérico de la fracción algebraica $\dfrac{x^3 + 5x^2 + 7x + 3}{x^4 + 8x^3 + 22x^2 + 24x + 9}$ en $x = 0$, en $x = -1$ y en $x = 1$.

Para $x = 0$ el valor numérico es $\dfrac{3}{9} = \dfrac{1}{3}$

Para $x = -1$ el valor numérico no existe porque $\dfrac{(-1)^3 + 5 \cdot (-1)^2 + 7 \cdot (-1) + 3}{(-1)^4 + 8 \cdot (-1)^3 + 22 \cdot (-1)^2 + 24 \cdot (-1) + 9} = \dfrac{0}{0}$

Para $x = 1$ el valor numérico es $\dfrac{1^3 + 5 \cdot 1^2 + 7 \cdot 1 + 3}{1^4 + 8 \cdot 1^3 + 22 \cdot 1^2 + 24 \cdot 1 + 9} = \dfrac{16}{64} = \dfrac{1}{4}$

37. Actividad resuelta

38. Simplifica las siguientes fracciones algebraicas.

a) $\dfrac{x^2+8x+15}{x^2-x-12}$ **b)** $\dfrac{x^2+2x+1}{x+1}$ **c)** $\dfrac{x^3+8x^2+21x+18}{x^2+5x+6}$

a) $\dfrac{x^2+8x+15}{x^2-x-12}=\dfrac{(x+3)\cdot(x-5)}{(x-4)\cdot(x+3)}=\dfrac{x-5}{x-4}$

$x^2+8x+15=0\Rightarrow x=\dfrac{-8\pm\sqrt{64-60}}{2}=\dfrac{-8\pm2}{2}=\begin{cases}-5\\-3\end{cases}\Rightarrow x^2+8x+15=(x+3)\cdot(x-5)$

$x^2-x-12=0\Rightarrow x=\dfrac{1\pm\sqrt{1+48}}{2}=\dfrac{1\pm7}{2}=\begin{cases}4\\-3\end{cases}\Rightarrow x^2-x-12=(x+3)\cdot(x-4)$

b) $\dfrac{x^2+2x+1}{x+1}=\dfrac{(x+1)^2}{x+1}=x+1$

c) $\dfrac{x^3+8x^2+21x+18}{x^2+5x+6}=\dfrac{(x+2)\cdot(x+3)^2}{(x+2)\cdot(x+3)}=x+3$

$x^3+8x^2+21x+18=(x+2)\cdot(x+3)\cdot(x+3)$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 8 & 21 & 18\\ -2 & & -2 & -12 & -18\\ \hline & 1 & 6 & 9 & 0\\ -3 & & -3 & -9 & \\ \hline & 1 & 3 & 0 & \end{array}$$

$x^2+5x+6=0\Rightarrow x=\dfrac{-5\pm\sqrt{25-24}}{2}=\dfrac{-5\pm1}{2}=\begin{cases}-2\\-3\end{cases}\Rightarrow x^2+5x+6=(x+3)\cdot(x+2)$

39. Actividad resuelta

40. Simplifica extrayendo factor común.

a) $\dfrac{2x^3+4x^2-6x}{2x^3+2x}$ **b)** $\dfrac{2x^2y-xy}{3x^2y+xy}$ **c)** $\dfrac{3x^3+3x^2y}{6x^2+6xy}$

a) $\dfrac{2x^3+4x^2-6x}{2x^3+2x}=\dfrac{x^2+2x-3}{x^2+1}$ **b)** $\dfrac{2x^3+4x^2-6x}{2x^3+2x}=\dfrac{x^2+2x-3}{x^2+1}$ **c)** $\dfrac{2x^3+4x^2-6x}{2x^3+2x}=\dfrac{x^2+2x-3}{x^2+1}$

41. Actividad resuelta

42. Simplifica $\dfrac{x^3+9x^2+17x-3}{x^3+8x^2+11x-2}$, tras mostrar que su numerador y su denominador son múltiplos de x^2+6x-1.

El numerador y el denominador son múltiplos de x^2+6x-1 porque las divisiones son exactas.

$$\begin{array}{rrrr|l} \cancel{x^3} & +9x^2 & +17x & -3 & x^2+6x-1\\ \cline{5-5} -\cancel{x^3} & -6x^2 & +x & & x+3\\ \cline{1-4} & \cancel{3x^2} & +18x & -3 & \\ & -\cancel{3x^2} & -18x & +3 & \\ \cline{2-4} & & & 0 & \end{array}\qquad\begin{array}{rrrr|l} \cancel{x^3} & +8x^2 & +11x & -2 & x^2+6x-1\\ \cline{5-5} -\cancel{x^3} & -6x^2 & +x & & x+2\\ \cline{1-4} & \cancel{2x^2} & +12x & -2 & \\ & -\cancel{2x^2} & -12x & +2 & \\ \cline{2-4} & & & 0 & \end{array}$$

Sustituyendo el numerador y el denominador en la fracción algebraica del enunciado:

$\dfrac{x^3+9x^2+17x-3}{x^3+8x^2+11x-2}=\dfrac{(x+3)\cdot(x^2+6x-1)}{(x+2)\cdot(x^2+6x-1)}=\dfrac{x+3}{x+2}$

43. Haz las siguientes operaciones de fracciones algebraicas.

a) $\dfrac{5x+6}{2x-5}+\dfrac{3x+2}{2x-5}-\dfrac{4x+3}{2x-5}$ b) $\dfrac{x^2-2x+1}{3x+1}-\dfrac{x+5}{3x+1}+\dfrac{x^2+3x}{3x+1}$

a) $\dfrac{5x+6}{2x-5}+\dfrac{3x+2}{2x-5}-\dfrac{4x+3}{2x-5}=\dfrac{4x+5}{2x-5}$

b) $\dfrac{x^2-2x+1}{3x+1}-\dfrac{x+5}{3x+1}+\dfrac{x^2+3x}{3x+1}=\dfrac{2x^2-4}{3x+1}$

44. Realiza estas operaciones con fracciones algebraicas.

a) $\dfrac{2x-2}{x-2}+\dfrac{x}{x+2}$ b) $\dfrac{3}{x-1}-\dfrac{2}{x-2}$

a) $\dfrac{2x-2}{x-2}+\dfrac{x}{x+2}=\dfrac{(2x-2)\cdot(x+2)+x\cdot(x-2)}{(x-2)\cdot(x+2)}=\dfrac{2x^2+4x-2x-4+x^2-2x}{x^2-4}=\dfrac{3x^2-4}{x^2-4}$

b) $\dfrac{3}{x-1}-\dfrac{2}{x-2}=\dfrac{3\cdot(x-2)-2\cdot(x-1)}{(x-1)\cdot(x-2)}=\dfrac{3x-6-2x+2}{x^2-2x-x+2}=\dfrac{x-4}{x^2-3x+2}$

45. Resuelve.

a) $\dfrac{2x^2}{x-1}\cdot\dfrac{3x}{x+2}$ b) $\dfrac{x}{2x-3}:\dfrac{x+1}{x^2+1}$ c) $\dfrac{-1}{x-3}:\dfrac{-3}{x+1}$

a) $\dfrac{2x^2}{x-1}\cdot\dfrac{3x}{x+2}=\dfrac{6x^3}{x^2+2x-2}$ b) $\dfrac{x}{2x-3}:\dfrac{x+1}{x^2+1}=\dfrac{x(x-1)}{2x-3}$ c) $\dfrac{-1}{x-3}:\dfrac{-3}{x+1}=\dfrac{x+1}{3x-9}$

46. Actividad resuelta.

47. Dadas las fracciones algebraicas $A(x)=\dfrac{x+3}{x+2}$ y $B(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$, calcula:

a) $A(x)+3B(x)$ b) $-2A(x)+B(x)$ c) $2A(x)-\dfrac{1}{2}B(x)$

a) $A(x)+3B(x)==\dfrac{(x-1)\cdot(x+3)+(x+2)\cdot(3x+3)}{(x+2)\cdot(x-1)}=\dfrac{x^2+3x-x-3+3x^2+3x+6x+6}{x^2-x+2x-2}=\dfrac{4x^2+11x+3}{x^2+x-2}$

b) $-2A(x)+B(x)=\dfrac{(-2x-6)\cdot(x-1)+(x+2)\cdot(x+1)}{(x+2)\cdot(x-1)}=\dfrac{-2x^2+2x-6x+6+x^2+x+2x+2}{x^2-x+2x-2}=\dfrac{-x^2-x+8}{x^2+x-2}$

c) $2A(x)-\dfrac{1}{2}B(x)=\dfrac{(2x+6)\cdot(2x-2)-(x+1)\cdot(x+2)}{(x+2)\cdot(2x-2)}=\dfrac{4x^2-4x+12x-12-x^2-2x-x-2}{2x^2-2x+4x-4}=\dfrac{3x^2+5x-14}{2x^2+2x-4}$

48. Actividad resuelta

49. Opera las siguientes fracciones algebraicas y simplifica.

a) $\dfrac{(x+1)^2}{(x-1)^2}\cdot\dfrac{x-1}{x+1}$ b) $\dfrac{x}{x+5}\cdot\dfrac{(x+5)^2}{x^3}$ c) $\dfrac{3x+6}{x+4}:\dfrac{2x+1}{x+4}$

a) $\dfrac{(x+1)^2}{(x-1)^2}\cdot\dfrac{x-1}{x+1}=\dfrac{(x+1)^{\cancel{2}}\cdot\cancel{(x-1)}}{(x-1)^{\cancel{2}}\cdot\cancel{(x+1)}}=\dfrac{x+1}{x-1}$

b) $\dfrac{x}{x+5}\cdot\dfrac{(x+5)^2}{x^3}=\dfrac{\cancel{x}\cdot(x+5)^{\cancel{2}}}{\cancel{(x+5)}\cdot x^2\cdot\cancel{x}}=\dfrac{x+5}{x^2}$

c) $\dfrac{3x+6}{x+4}:\dfrac{2x+1}{x+4}=\dfrac{(3x+6)\cdot\cancel{(x+4)}}{\cancel{(x+4)}\cdot(2x+1)}=\dfrac{3x+6}{2x+1}$

50. Actividad resuelta

51. Realiza estas operaciones con fracciones algebraicas.

a) $2x-3+\dfrac{x}{x+1}$

b) $x-\dfrac{3x}{2x-7}+\dfrac{x-5}{2x-7}$

a) $2x-3+\dfrac{x}{x+1}=\dfrac{2x\cdot(x+1)-3\cdot(x+1)+x}{x+1}=\dfrac{2x^2+2x-3x-3+x}{x+1}=\dfrac{2x^2-3}{x+1}$

b) $x-\dfrac{3x}{2x-7}+\dfrac{x-5}{2x-7}=\dfrac{x\cdot(2x-7)-3x+x-5}{2x-7}=\dfrac{2x^2-7x-3x+x-5}{2x-7}=\dfrac{2x^2-9x-5}{2x-7}$

52. Actividad interactiva

53. Efectúa las siguientes operaciones de monomios e indica si el resultado es o no un monomio.

a) $\dfrac{x^3}{x}$

b) $\dfrac{-\sqrt{2}x^2}{2x^3}$

c) $\dfrac{24a^2b^3}{8ab^2}$

d) $\dfrac{-81xy}{9y^2}$

e) $\dfrac{54x^3y^4z^3}{18x^2y^4z^2}$

f) $\dfrac{-25\cdot(x-3)^5}{15\cdot(x-3)^3}$

a) $\dfrac{x^3}{x}=x^2$ Monomio

b) $\dfrac{-\sqrt{2}x^2}{2x^3}=\dfrac{-\sqrt{2}}{2x}$ No monomio

c) $\dfrac{24a^2b^3}{8ab^2}=3ab$ Monomio

d) $\dfrac{-81xy}{9y^2}=\dfrac{-9x}{y}$ No monomio

e) $\dfrac{54x^3y^4z^3}{18x^2y^4z^2}=3xz$ Monomio

f) $\dfrac{-25(x-3)^5}{15(x-3)^3}=\dfrac{-5(x-3)^2}{3}$ Monomio

54. Realiza las siguientes divisiones de polinomios entre monomios.

a) $\dfrac{36a^2b^4-6a^3b^4+54a^3b^2}{6a^2b^2}$

b) $\dfrac{36ab^2-12ab^3+4a^2b^2}{-4ab}$

c) $\dfrac{54x^6-12x^5-18x^3}{6x^3}$

d) $\dfrac{-12x^3+6x^2-24x}{-2x}$

a) $\dfrac{36a^2b^4-6a^3b^4+54a^3b^2}{6a^2b^2}=6b^2-ab^2+9a$

b) $\dfrac{36ab^2-12ab^3+4a^2b^2}{-4ab}=-9b+3b^2-ab$

c) $\dfrac{54x^6-12x^5-18x^3}{6x^3}=9x^3-2x^2-3$

d) $\dfrac{-12x^3+6x^2-24x}{-2x}=6x^2-3x+12$

55. Haz las siguientes divisiones de polinomios.

a) $(6x^4 - 3x^2 - 21x + 10) : (2x^2 + 3x - 1)$

b) $(8x^3 + 18x^2 + x + 14) : (2x + 5)$

c) $(3x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 14x - 4) : (-x^2 + 3)$

d) $(6x^4 - 16x^3 + 21x^2 - 16x + 7) : (3x^2 - 2x + 2)$

a) $\dfrac{6x^3 - 3x^2 - 21x + 10}{2x^2 + 3x - 1} = 3x - 6 + \dfrac{4}{2x^2 + 3x - 1}$

$$\begin{array}{rrrr|l}
\cancel{6x^3} & -3x^2 & -21x & +10 & 2x^2+3x-1 \\ \cline{5-5}
-\cancel{6x^3} & -9x^2 & +3x & & 3x-6 \\ \cline{1-4}
 & -\cancel{12x^2} & -18x & +10 & \\
 & \cancel{12x^2} & +18x & -6 & \\ \cline{2-4}
 & & & 4 &
\end{array}$$

c) $\dfrac{3x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 14x - 4}{-x^2 + 3} = -3x^2 - 4x - 15 + \dfrac{26x + 41}{-x^2 + 3}$

$$\begin{array}{rrrrr|l}
\cancel{3x^4} & +4x^3 & +6x^2 & +14x & -4 & -x^2+3 \\ \cline{6-6}
-\cancel{3x^4} & & +9x^2 & & & -3x^2-4x-15 \\ \cline{1-5}
 & \cancel{4x^3} & +15x^2 & +14x & -4 & \\
 & -\cancel{4x^3} & & +12x & & \\ \cline{2-5}
 & & \cancel{15x^2} & +26x & -4 & \\
 & & -\cancel{15x^2} & & +45 & \\ \cline{3-5}
 & & & 26x & +41 &
\end{array}$$

b) $\dfrac{8x^3 + 18x^2 + x + 14}{2x + 5} = 4x^2 - x + 3 + \dfrac{-1}{2x + 5}$

$$\begin{array}{rrrr|l}
\cancel{8x^3} & +18x^2 & +x & +14 & 2x+5 \\ \cline{5-5}
-\cancel{8x^3} & -20x^2 & & & 4x^2-x+3 \\ \cline{1-4}
 & -\cancel{2x^2} & +x & +14 & \\
 & +\cancel{2x^2} & +5x & & \\ \cline{2-4}
 & & 6x & +14 & \\
 & & -6x & -15 & \\ \cline{3-4}
 & & & -1 &
\end{array}$$

d) $\dfrac{6x^4 - 16x^3 + 21x^2 - 16x + 7}{3x^2 - 2x + 2} =$

$$\begin{array}{rrrrr|l}
\cancel{6x^4} & -16x^3 & +21x^2 & -16x & +7 & 3x^2-2x+2 \\ \cline{6-6}
-\cancel{6x^4} & +4x^3 & -4x^2 & & & 2x^2-4x+3 \\ \cline{1-5}
 & -\cancel{12x^3} & +17x^2 & -16x & +7 & \\
 & +\cancel{12x^3} & -8x^2 & +8x & & \\ \cline{2-5}
 & & +\cancel{9x^2} & -8x & +7 & \\
 & & -\cancel{9x^2} & +6x & -6 & \\ \cline{3-5}
 & & & -2x & +1 &
\end{array}$$

56. Relaciona cada cociente y resto con el dividendo y el divisor en las siguientes divisiones.

Dividendo	Divisor	Cociente	Resto
$x^3 - 2x^2 + 2x - 3$	$x - 3$	$x - 4$	12
	$x^2 + 2x - 5$	$-x + 5$	$19x - 13$
	$-x^2 - 3x + 2$	$x^2 + x + 5$	$15x - 23$

Dividendo	Divisor	Cociente	Resto
$x^3 - 2x^2 + 2x - 3$	$x - 3$	$x^2 + x + 5$	12
	$x^2 + 2x - 5$	$x - 4$	$15x - 23$
	$-x^2 - 3x + 2$	$-x + 5$	$19x - 13$

57. Actividad resuelta

58. Calcula los valores de *a* y *b* para que la división de polinomios $(3x^2 + ax + b) : (x^2 - 2x + 1)$ sea exacta.

$$\begin{array}{rrr|l}
\cancel{3x^2} & +ax & +b & x^2-2x+1 \\ \cline{4-4}
-\cancel{3x^2} & +6x & -3 & 3 \\ \cline{1-3}
 & (a+6)x & +b-3 &
\end{array}$$

Para que $(a + 6)x + b - 3$ sea nulo: $\left.\begin{array}{l} a+6=0 \\ b-3=0 \end{array}\right\} \Rightarrow a = -6 \quad b = 3$

59. Calcula el cociente y el resto de las siguientes divisiones aplicando la regla de Ruffini.

a) $(6x^2 - x + 1) : (x - 3)$

b) $(x^3 - 3x^2 + 2x - 3) : (x + 1)$

c) $(2x^4 + x^2 - 3x + 2) : (x - 2)$

d) $(-x^3 + x^2 - 2x - 5) : (x + 3)$

a) $C(x) = 6x + 17$ y $R(x) = 52$

	6	–1	1
3		18	51
	6	17	52

b) $C(x) = x^2 - 4x + 6$ y $R(x) = -9$

	1	–3	2	–3
–1		–1	4	–6
	1	–4	6	–9

c) $C(x) = 2x^3 + 4x^2 + 9x + 15$ y $R(x) = 32$

	2	0	1	–3	2
2		4	8	18	30
	2	4	9	15	32

d) $C(x) = -x^2 + 4x - 14$ y $R(x) = 37$

	–1	1	–2	–5
–3		3	–12	42
	–1	4	–14	37

60. Mediante la regla de Ruffini, calcula el cociente y el resto de las siguientes divisiones y escríbelas de la forma $\frac{D(x)}{d(x)} = C(x) + \frac{R}{d(x)}$

a) $(2x^2 + x - 6) : (x + 2)$

b) $(3x^3 - 7x^2 - 11x + 5) : (x - 3)$

c) $\left(3x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{5}{2}x + 1\right) : \left(x + \frac{1}{2}\right)$

d) $(x^5 + 2x - 3) : (x - 2)$

e) $\left(x^4 + \frac{1}{2}x^2\right) : \left(x - \frac{1}{3}\right)$

a) $\frac{2x^2 + x - 6}{x + 2} = 2x - 3$

	2	1	–6
–2		–4	6
	2	–3	0

b) $\frac{3x^3 - 7x^2 - 11x + 5}{x - 3} = 3x^2 + 2x - 5 + \frac{-10}{x - 3}$

	3	–7	–11	5
3		9	6	–15
	3	2	–5	–10

c) $\frac{3x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{5}{2}x + 1}{x + \frac{1}{2}} = 3x^2 - \frac{5}{2} + \frac{\frac{9}{4}}{x + \frac{1}{2}}$

	3	$\frac{3}{2}$	$-\frac{5}{2}$	1
$-\frac{1}{2}$		$-\frac{3}{2}$	0	$\frac{5}{4}$
	3	0	$-\frac{5}{2}$	$\frac{9}{4}$

d) $\frac{x^5 + 2x - 3}{x - 2} = x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 8x + 18 + \frac{33}{x - 2}$

	1	0	0	0	2	–3
2		2	4	8	16	36
	1	2	4	8	18	33

e) $\frac{x^4 + \frac{1}{2}x^2}{x - \frac{1}{3}} = x^3 + \frac{1}{3}x^2 + \frac{11}{18}x + \frac{11}{54} + \frac{\frac{11}{162}}{x - \frac{1}{3}}$

	1	0	$\frac{1}{2}$	0	0
$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{11}{54}$	$\frac{11}{162}$
	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{11}{18}$	$\frac{11}{54}$	$\frac{11}{162}$

61. Calcula el resto de las siguientes divisiones.

a) $(3x^3 - 2x^2 + x + 2) : (x + 2)$

b) $\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{4}x + 2\right) : \left(x + \frac{1}{2}\right)$

c) $(x^2 - 3x + 4) : (x - 2)$

d) $(x^5 - x^2 - x + 1) : (x - 3)$

a) $R = 3 \cdot (-2)^3 - 2 \cdot (-2)^2 + (-2) + 2 = -32$

b) $R = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{4} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 2 = \frac{5}{2}$

c) $R = 2^2 - 3 \cdot 2 + 4 = 2$

d) $R = 3^5 - 3^2 - 3 + 1 = 232$

62. Calcula el valor de k para que el polinomio $P(x) = 2x^3 - x^2 + k$ sea divisible por el binomio $(x - 1)$.

Por el teorema del resto, $R = P(1) = 2 \cdot 1^3 - 1^2 + k = 1 + k = 0 \Rightarrow k = -1$

63. Calcula el valor de k para que el resto de la división entre el polinomio $P(x) = 2x^3 - x^2 + k$ y el binomio $(x + 2)$ valga 4.

Por el teorema del resto, $R = P(-2) = 2 \cdot (-2)^3 - (-2)^2 + k = -20 + k = 4 \Rightarrow k = 24$

64. Sin realizar la división, comprueba que el polinomio $P(x) = 3x^3 + 8x^2 - 9x + 28$ tiene como factor $x + 4$.

Por el teorema del factor, $x + 4$ es un factor de $P(x)$ porque $P(-4) = 3 \cdot (-4)^3 + 8 \cdot (-4)^2 - 9 \cdot (-4) + 28 = 0$.

65. Comprueba si los polinomios que se indican tienen como factor el monomio $x + 3$.

a) $P(x) = x^2 - 9$

b) $P(x) = 3x^2 + 4x - 15$

c) $P(x) = x^2 + 9$

d) $P(x) = 3x^2 - 14x + 15$

a) $P(-3) = (-3)^2 - 9 = 0 \Rightarrow$ Es factor.

b) $P(-3) = 3 \cdot (-3)^2 + 4 \cdot (-3) - 15 = 0 \Rightarrow$ Es factor.

c) $P(-3) = (-3)^2 + 9 = 18 \neq 0 \Rightarrow$ No es factor.

d) $P(-3) = 3 \cdot (-3)^2 - 14 \cdot (-3) + 84 \neq 0 \Rightarrow$ No es factor.

66. ¿Qué valor debe tener k para que el binomio $x + 3$ sea un factor del polinomio $P(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + k$?

Para que $x + 3$ sea un factor del polinomio $P(x)$, el resto de la división $P(x) : (x + 3)$ debe ser cero.

Por el teorema del resto, $R = P(-3) = (-3)^3 + 3 \cdot (-3) + 3 \cdot (-3) + k = -45 + k = 0 \Rightarrow k = 45$.

67. Calcula el resto de las siguientes divisiones.

a) $\dfrac{x^{50} - x^{25} + x + 3}{x - 1}$

b) $\dfrac{x^6 + x + 3}{x - 10}$

a) Llamando $P(x) = x^{50} - x^{25} + x + 3$, entonces $R = P(1) = 1^{50} - 1^{25} + 1 + 3 = 4$.

b) Llamando $P(x) = x^6 + x + 3$, entonces $R = P(10) = 10^6 + 10 + 3 = 1\,000\,012$.

68. Halla las raíces enteras de los siguientes polinomios y factorízalos usando el teorema del resto y la regla de Ruffini.

a) $P(x) = x^2 + 8x + 7$

b) $P(x) = 2x^3 - x^2 - 11x + 10$

c) $P(x) = x^4 - 2x^3 - 11x^2 + 12x + 36$

d) $P(x) = x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 6x + 9$

a) Las raíces son 1 y –7

$P(x) = (x + 1) \cdot (x + 7)$

	1	8	7
–1		–1	–7
	1	7	0

c) Las raíces son –2 y 3 (dobles)

$P(x) = (x + 2)^2 \cdot (x - 3)^2$

	1	–2	–11	12	36
–2		–2	8	6	–36
	1	–4	–3	18	0
–2		–2	12	–18	
	1	–6	9	0	
3		3	–9		
	1	–3	0		

b) Las raíces enteras son –1 y –7.

$P(x) = (x - 1) \cdot (x - 2) \cdot (2x + 5)$

	2	–1	–11	10
1		2	1	10
	2	1	–10	0
2		4	10	
	2	5	0	

d) La única raíz entera es 3 (doble)

$P(x) = (x^2 + 1)^2 \cdot (x - 3)^2$

	1	–6	10	–6	9
3		3	–9	3	–9
	1	–3	1	–3	0
3		3	0	3	
	1	0	1	0	

69. Extrae factor común para factorizar los polinomios.

a) $P(x) = 5x^3 - 15x^2$

b) $P(x) = -4x^4 + 8x^3$

c) $P(x) = 2x^3 - 3x^2 + x$

d) $P(x) = x^4 - 3x^3 + 5x^2$

a) $P(x) = 5x^3 - 15x^2 = 5x^2 \cdot (x - 3)$

b) $P(x) = -4x^4 + 8x^3 = 4x^3 \cdot (-x + 2)$

c) $P(x) = 2x^3 - 3x^2 + x = x \cdot (2x^2 - 3x + 1) = x \cdot (x - 1) \cdot (2x - 1)$

	2	–3	1
1		2	–1
	2	–1	0

d) $P(x) = x^4 - 3x^3 + 5x^2 = x^2 \cdot (x^2 - 3x + 5)$

70. Utiliza las igualdades notables para factorizar los polinomios.

a) $P(x) = 9x^2 - 30x + 25$

b) $P(x) = \frac{1}{4}x^2 + x + 1$

c) $P(x) = \frac{x^4}{4} - x^3 + x^2$

d) $P(x) = x^4 - 4$

a) $P(x) = 9x^2 - 30x + 25 = (3x - 5)^2$

b) $P(x) = \frac{1}{4}x^2 + x + 1 = \left(\frac{1}{2}x + 1\right)^2$

c) $P(x) = \frac{x^4}{4} - x^3 + x^2 = x^2 \cdot \left(\frac{x^2}{4} - x + 1\right) = x^2 \cdot \left(\frac{x}{2} - 1\right)^2$

d) $P(x) = x^4 - 4 = (x^2 - 2) \cdot (x^2 + 2)$

71. Actividad resuelta

72. Factoriza el polinomio $P(x) = 6x^3 + 7x^2 - 1$ sabiendo que $x = \frac{1}{3}$ es una de sus raíces y calcula el resto de ellas.

$P(x) = 6x^3 + 7x^2 - 1 = \left(x-\frac{1}{3}\right)\cdot(x+1)\cdot(6x+3)$

	6	7	0	–1
$\frac{1}{3}$		2	3	1
	6	9	3	0
–1		–6	–3	
	6	3	0	

Las raíces de $P(x)$ son -1, $-\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{3}$ (doble)

73. Sabiendo que $x = -\frac{1}{4}$ es una raíz de $P(x) = 16x^3 + 40x^2 + 17x + 2$, factorízalo y calcula el resto de sus raíces.

$P(x) = 16x^3 + 40x^2 + 17x + 2 = \left(x+\frac{1}{4}\right)\cdot(x+2)\cdot(16x+4) = 16\cdot\left(x+\frac{1}{4}\right)\cdot(x+2)\cdot\left(x+\frac{1}{4}\right) = 16\cdot\left(x+\frac{1}{4}\right)^2\cdot(x+2)$

	16	40	17	2
$-\frac{1}{4}$		–4	–9	–2
	16	36	8	0
–2		–32	–8	
	16	4	0	

Las raíces de $P(x)$ son -2 y $-\frac{1}{4}$ (doble).

74. Actividad resuelta

75. Mediante extracción de factor común, factoriza los siguientes polinomios de dos variables.

a) $P(x, y) = 2x^3y^2 - 2xy^4$

b) $P(x, y) = 15x^3y + 25x$

c) $P(x,y) = \frac{3}{9}x^3 - \frac{2}{15}xy$

d) $P(x,y) = \frac{1}{2}x^2y^2 - \frac{1}{6}y$

a) $P(x, y) = 2x^3y^2 - 2xy^4 = 2xy^2 \cdot (x^2 - y^2) = 2xy^2 \cdot (x - y) \cdot (x + y)$

b) $P(x, y) = 15x^3y + 25x = 5x \cdot (3x^2y + 5)$

c) $P(x,y) = \frac{3}{9}x^3 - \frac{2}{15}xy = \frac{1}{3}x\cdot\left(x^2 - \frac{2}{5}y\right)$

d) $P(x,y) = \frac{1}{2}x^2y^2 - \frac{1}{6}y = \frac{1}{2}y\cdot\left(x^2y - \frac{1}{3}\right)$

76. Di si son fracciones algebraicas las siguientes expresiones.

a) $\dfrac{x+\sqrt{7}}{\sqrt{x^2-1}}$ b) $\dfrac{x^3+x}{3x^2-x+5}$ c) $\dfrac{x^3}{\sqrt{5}-x}$

a) No es fracción algebraica **b)** Es fracción algebraica **c)** Es fracción algebraica

77. Calcula, si es posible, el valor numérico de la fracción $\dfrac{x^3+5x^2+7x+3}{x^4+8x^3+22x^2+24x+9}$ en $x = -1$ y $x = 2$.

Para $x = -1$ no existe porque $\dfrac{(-1)^3+5\cdot(-1)^2+7\cdot(-1)+3}{(-1)^4+8\cdot(-1)^3+22\cdot(-1)^2+24\cdot(-1)+9}=\dfrac{-1+5-7+3}{1-8+22-24+9}=\dfrac{0}{0}$

Para $x = 2$ el valor numérico es $\dfrac{2^3+5\cdot 2^2+7\cdot 2+3}{2^4+8\cdot 2^3+22\cdot 2^2+24\cdot 2+9}=\dfrac{8+20+14+3}{16+64+88+48+9}=\dfrac{45}{225}=\dfrac{1}{5}$

78. ¿Son equivalentes las siguientes fracciones algebraicas?

a) $A(x)=\dfrac{x^2+x+4}{x^2+6x+3}$ y $B(x)=\dfrac{x-2}{x+3}$ b) $A(x)=\dfrac{6x^2-7x-3}{12x^2+7x+1}$ y $B(x)=\dfrac{2x-3}{4x+1}$

a) No son equivalentes porque $(x^2+x+4)\cdot(x+3) = x^3+4x^2+7x+12 \neq x^3+4x^2-9x-6 = (x^2+6x+3)\cdot(x-2)$.

b) Sí son equivalentes porque $(6x^2-7x-3)\cdot(4x+1) = 24x^3-22x^3-19x-3 = (12x^2+7x+1)\cdot(2x-3)$.

79. Factoriza el numerador y el denominador de las siguientes fracciones algebraicas y simplifícalas.

a) $\dfrac{2x^2-5x-3}{3x^2-8x-3}$ b) $\dfrac{x^3+5x^2+6x}{x^2+4x+4}$ c) $\dfrac{x^2+6x+9}{2x^2+7x+3}$ d) $\dfrac{x^3+4x^2+x-6}{x^3+5x^2+2x-8}$

a) $2x^2-5x-3=(x-3)\cdot(2x+1)$ $3x^2-8x-3=(x-3)\cdot(3x+1)$

$$\begin{array}{r|rrr} & 2 & -5 & -3 \\ 3 & & 6 & 3 \\ \hline & 2 & 1 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrr} & 3 & -8 & -3 \\ 3 & & 9 & 3 \\ \hline & 3 & 1 & 0 \end{array}$$

$$\frac{2x^2-5x-3}{3x^2-8x-3}=\frac{\cancel{(x-3)}\cdot(2x+1)}{\cancel{(x-3)}\cdot(3x+1)}=\frac{2x+1}{3x+1}$$

b) $\dfrac{x^3+5x^2+6x}{x^2+4x+4}=\dfrac{x\cdot(x^2+5x+6)}{(x+2)^2}=\dfrac{x\cdot\cancel{(x+2)}\cdot(x+3)}{(x+2)^{\cancel{2}}}=\dfrac{x\cdot(x+3)}{x+2}=\dfrac{x^2+3x}{x+2}$

c) $2x^2+7x+3=(x+3)\cdot(2x+1)$

$$\begin{array}{r|rrr} & 2 & 7 & 3 \\ -3 & & -6 & -3 \\ \hline & 2 & 1 & 0 \end{array}$$

$$\frac{x^2+6x+9}{2x^2+7x+3}=\frac{(x+3)^{\cancel{2}}}{\cancel{(x+3)}\cdot(2x+1)}=\frac{x+3}{2x+1}$$

d) $x^3+4x^2+x-6=(x-1)\cdot(x+2)\cdot(x+3)$ $x^3+5x^2+2x-8=(x-1)\cdot(x+2)\cdot(x+4)$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 4 & 1 & -6 \\ 1 & & 1 & 5 & 6 \\ \hline & 1 & 5 & 6 & 0 \\ -2 & & -2 & -6 & \\ \hline & 1 & 3 & 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrrr} & 1 & 5 & 2 & -8 \\ 1 & & 1 & 6 & 8 \\ \hline & 1 & ¤ & 8 & 0 \\ -2 & & -2 & -8 & \\ \hline & 1 & 4 & 0 & \end{array}$$

$$\frac{x^3+4x^2+x-6}{x^3+5x^2+2x-8}=\frac{\cancel{(x-1)}\cdot\cancel{(x+2)}\cdot(x+3)}{\cancel{(x-1)}\cdot\cancel{(x+2)}\cdot(x+4)}=\frac{x+3}{x+4}$$

80. Actividad resuelta

81. Mediante la extracción de factor común, simplifica las siguientes fracciones algebraicas.

a) $\boldsymbol{A(x,y)=\dfrac{5x^2y^2-5xy^2}{10x^2y^2+20xy^2}}$ **b)** $\boldsymbol{A(a,b)=\dfrac{a^3b-ab^3}{2a^3b^2-2ab^4}}$

a) $A(x,y)=\dfrac{5x^2y^2-5xy^2}{10x^2y^2+20xy^2}=\dfrac{5\,\cancel{xy^2}\cdot(x-1)}{10\,\cancel{xy^2}\cdot(x+2)}=\dfrac{x-1}{2\cdot(x+2)}=\dfrac{x-1}{2x+4}$

b) $A(a,b)=\dfrac{a^3b-ab^3}{2a^3b^2-2ab^4}=\dfrac{\cancel{ab}\cdot\left(\cancel{a^2-b^2}\right)}{2\cancel{a}b^{\cancel{2}}\cdot\left(\cancel{a^2-b^2}\right)}=\dfrac{1}{2b}$

82. Realiza estas sumas y restas de fracciones algebraicas.

a) $\boldsymbol{\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{x}{x+3}}$ **c)** $\boldsymbol{\dfrac{2x-1}{x+1}-\dfrac{3x-2}{x-2}}$

b) $\boldsymbol{\dfrac{x^2-2}{x+3}+\dfrac{x^2+3}{x-3}}$ **d)** $\boldsymbol{\dfrac{2x^2-x+1}{x+1}-\dfrac{x^2+x-3}{x+2}}$

a) $\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{x}{x+3}=\dfrac{x+3+x\cdot(x-1)}{(x-1)\cdot(x+3)}=\dfrac{x+3+x^2-x}{x^2+3x-x-3}=\dfrac{x^2+3}{x^2+2x-3}$

b) $\dfrac{x^2-2}{(x+3)}+\dfrac{x^2+3}{x-3}=\dfrac{(x^2-2)\cdot(x-3)+(x^2+3)\cdot(x+3)}{(x+3)\cdot(x-3)}=\dfrac{x^3-3x^2-2x+6+x^3+3x^2+3x+9}{x^2-9}=\dfrac{2x^3+x+15}{x^2-9}$

c) $\dfrac{2x-1}{x+1}-\dfrac{3x-2}{x-2}=\dfrac{(2x-1)\cdot(x-2)-(3x-2)\cdot(x+1)}{(x+1)\cdot(x-2)}=\dfrac{2x^2-4x-x+2-3x^2-3x+2x+2}{x^2-2x+x-2}=\dfrac{-x^2-6x+4}{x^2-x-2}$

d) $\dfrac{2x^2-x+1}{x+1}-\dfrac{x^2+x-3}{x+2}=\dfrac{2x^3+4x^2-x^2-2x+x+2-x^3-x^2-x^2-x+3x+3}{x^2+2x+x+2}=\dfrac{x^3+x^2+x+5}{x^2+3x+2}$

83. Dadas $\boldsymbol{A(t)=\dfrac{2t+3t^2}{t-2}}$ **y** $\boldsymbol{B(t)=\dfrac{2t-1}{t+5}}$**, calcula:**

a) $\boldsymbol{A(t)+2B(t)}$ **b)** $\boldsymbol{3A(t)+5B(t)}$ **c)** $\boldsymbol{-2A(t)+2B(t)}$

a) $A(t)+2B(t)=\dfrac{2t+3t^2}{t-2}+2\cdot\dfrac{2t-1}{t+5}=\dfrac{2t^2+10t+3t^3+15t^2+4t^2-8t-2t+4}{t^2-2t+5t-10}=\dfrac{3t^3+21t^2+4}{t^2+3t-10}$

b) $3A(t)+5B(t)=3\cdot\dfrac{2t+3t^2}{t-2}+5\cdot\dfrac{2t-1}{t+5}=\dfrac{6t^2+30t+9t^3+45t^2+10t^2-20t-5t+10}{t^2-2t+5t-10}=\dfrac{9t^3+61t^2+5t+10}{t^2+3t-10}$

c) $-2A(t)+2B(t)=-2\cdot\dfrac{2t+3t^2}{t-2}+2\cdot\dfrac{2t-1}{t+5}=\dfrac{-4t^2-20t-6t^3-30t^2+4t^2-8t-2t+4}{t^2+5t-2t-10}=\dfrac{-6t^3-30t^2-30t+4}{t^2+3t-10}$

84. Actividad resuelta

85. Resuelve las siguientes sumas y restas de fracciones algebraicas.

a) $\frac{1}{(x-3)^2}+\frac{2}{x-3}$

b) $\frac{x}{x+5}+\frac{x}{(x+5)^2}$

c) $\frac{2x-1}{x-1}+\frac{2x}{(x-1)^2}+\frac{x-2}{(x-1)^3}$

d) $\frac{x-4}{x+3}-\frac{x}{(x+3)^2}-\frac{x-2}{(x+3)^3}$

a) $\frac{1}{(x-3)^2}+\frac{2}{x-3}=\frac{1+2\cdot(x-3)}{(x-3)^2}=\frac{1+2x-6}{x^2-6x+9}=\frac{2x-5}{x^2-6x+9}$

b) $\frac{x}{x+5}+\frac{x}{(x+5)^2}=\frac{x\cdot(x+5)+x}{(x+5)^2}=\frac{x^2+5x+x}{(x+5)^2}=\frac{x^2+6x}{x^2+10x+25}$

c) $\frac{2x-1}{x-1}+\frac{2x}{(x-1)^2}+\frac{x-2}{(x-1)^3}=\frac{(x-1)^2\cdot(2x-1)+2x\cdot(x-1)+x-2}{(x-1)^3}=\frac{(x^2-2x+1)\cdot(2x-1)+2x\cdot(x-1)+x-2}{(x-1)^3}=$

$=\frac{2x^3-x^2-4x^2+2x+2x-1+2x^2-2x+x-2}{x^3-3x^2+3x-1}=\frac{2x^3-3x^2+3x-3}{x^3-3x^2+3x-1}$

d) $\frac{x-4}{x+3}-\frac{x}{(x+3)^2}-\frac{x-2}{(x+3)^3}=\frac{(x+3)^2\cdot(x-4)-x\cdot(x+3)-(x-2)}{(x+3)^3}=\frac{(x^2+6x+9)\cdot(x-4)-x\cdot(x+3)-(x-2)}{(x+3)^3}=$

$=\frac{x^3-4x^2+6x^2-24x+9x-36-x^2-3x-x+2}{x^3+9x^2+27x+27}=\frac{x^3+x^2-31x-34}{x^3+9x^2+27x+27}$

86. Realiza las siguientes operaciones con fracciones algebraicas.

a) $2+\frac{x}{x+5}$

b) $2x-3+\frac{2x-1}{x+1}$

c) $3-\frac{3x-1}{2x+3}$

d) $\frac{3x-5}{x^2+1}-x^2+2$

a) $2+\frac{x}{x+5}=\frac{2\cdot(x+5)+x}{x+5}=\frac{2x+10+x}{x+5}=\frac{3x+10}{x+5}$

b) $2x-3+\frac{2x-1}{x+1}=\frac{(2x-3)\cdot(x+1)+2x-1}{x+1}=\frac{2x^2+2x-3x-3+2x-1}{x+1}=\frac{2x^2+x-4}{x+1}$

c) $3-\frac{3x-1}{2x+3}=\frac{3\cdot(2x+3)-(3x-1)}{2x+3}=\frac{6x+9-3x+1}{2x+3}=\frac{3x+10}{2x+3}$

d) $\frac{3x-5}{x^2+1}-x^2+2=\frac{3x-5+(x^2+1)\cdot(-x^2+2)}{x^2+1}=\frac{3x-5-x^4+2x^2-x^2+2}{x^2+1}=\frac{-x^4+x^2+3x-3}{x^2+1}$

87. Realiza los siguientes productos de fracciones algebraicas.

a) $\frac{3x-4}{2x+3}\cdot\frac{2x+1}{x-3}$

b) $\frac{x^2-3x+1}{x+2}\cdot\frac{2x-1}{x^2-3}$

a) $\frac{3x-4}{2x+3}\cdot\frac{2x+1}{x-3}=\frac{(3x-4)\cdot(2x+1)}{(2x+3)\cdot(x-3)}=\frac{6x^2+3x-8x-4}{2x^2-6x+3x-9}=\frac{6x^2-5x-4}{2x^2-3x-9}$

b) $\frac{x^2-3x+1}{x+2}\cdot\frac{2x-1}{x^2-3}=\frac{(x^2-3x+1)\cdot(2x-1)}{(x+2)\cdot(x^2-3)}=\frac{2x^3-x^2-6x^2+3x+2x-1}{x^3-3x+2x^2-6}=\frac{2x^3-7x^2+5x-1}{x^3+2x^2-3x-6}$

88. Divide las siguientes fracciones algebraicas.

a) $\frac{4x-3}{x-4}:\frac{2x+1}{2x-3}$

b) $\frac{-3x+1}{3x+2}:\frac{x^2+2x-1}{x^2-3x-3}$

a) $\frac{3x-4}{2x+3}\cdot\frac{2x+1}{x-3}=\frac{(3x-4)\cdot(2x+1)}{(2x+3)\cdot(x-3)}=\frac{6x^2+3x-8x-4}{2x^2-6x+3x-9}=\frac{6x^2-5x-4}{2x^2-3x-9}$

b) $\frac{x^2-3x+1}{x+2}\cdot\frac{2x-1}{x^2-3}=\frac{(x^2-3x+1)\cdot(2x-1)}{(x+2)\cdot(x^2-3)}=\frac{2x^3-x^2-6x^2+3x+2x-1}{x^3-3x+2x^2-6}=\frac{2x^3-7x^2+5x-1}{x^3+2x^2-3x-6}$

89. Opera las siguientes fracciones algebraicas y simplifica el resultado.

a) $\dfrac{2x-3}{x-1}\cdot\dfrac{(x-1)^2}{(2x-3)^3}$

b) $\dfrac{x}{x-1}\cdot\dfrac{x-2}{x^2}\cdot\dfrac{x-1}{x-2}$

c) $\dfrac{2x}{x+1}:\dfrac{8x^3}{(x+1)^3}$

d) $\dfrac{x-1}{x+1}:\dfrac{3x-3}{(x+1)^2}$

a) $\dfrac{2x-3}{x-1}\cdot\dfrac{(x-1)^2}{(2x-3)^3}=\dfrac{(2x-3)\cdot(x-1)^2}{(x-1)\cdot(2x-3)^3}=\dfrac{x-1}{(2x-3)^2}=\dfrac{x-1}{4x^2-12x+9}$

b) $\dfrac{x}{x-1}\cdot\dfrac{x-2}{x^2}\cdot\dfrac{x-1}{x-2}=\dfrac{x\cdot(x-2)\cdot(x-1)}{(x-1)\cdot x^2\cdot(x-2)}=\dfrac{1}{x}$

c) $\dfrac{2x}{x+1}:\dfrac{8x^3}{(x+1)^3}=\dfrac{2x\cdot(x+1)^3}{(x+1)\cdot 8x^3}=\dfrac{(x+1)^2}{4x^2}=\dfrac{x^2+2x+1}{4x^2}$

d) $\dfrac{x-1}{x+1}:\dfrac{3x-3}{(x+1)^2}=\dfrac{(x-1)\cdot(x+1)^2}{(x+1)\cdot(3x-3)}=\dfrac{(x-1)\cdot(x+1)}{3\cdot(x-1)}=\dfrac{x+1}{3}$

90. Actividad resuelta.

91. Realiza las siguientes operaciones con fracciones algebraicas.

a) $\dfrac{x+1}{3+\dfrac{x-1}{x+3}}$

b) $\dfrac{2-\dfrac{1}{x-3}}{\dfrac{2}{x+1}-4}$

a) $\dfrac{x+1}{3+\dfrac{x-1}{x+3}}=\dfrac{x+1}{\dfrac{3\cdot(x+3)+x-1}{x+3}}=\dfrac{x+1}{\dfrac{3x+9+x-1}{x+3}}=\dfrac{x+1}{\dfrac{4x+8}{x+3}}=(x+1):\dfrac{4x+8}{x+3}=\dfrac{(x+1)\cdot(x+3)}{4x+8}=\dfrac{x^2+4x+3}{4x+8}$

b) $\dfrac{2-\dfrac{1}{x-3}}{\dfrac{2}{x+1}-4}=\dfrac{\dfrac{2\cdot(x-3)-1}{x-3}}{\dfrac{2-4\cdot(x+1)}{x+1}}=\dfrac{\dfrac{2x-6-1}{x-3}}{\dfrac{2-4x-4}{x+1}}=\dfrac{\dfrac{2x-7}{x-3}}{\dfrac{-4x-2}{x+1}}=\dfrac{2x-7}{x-3}:\dfrac{-4x-2}{x+1}=\dfrac{(2x-7)\cdot(x+1)}{(x-3)\cdot(-4x-2)}=\dfrac{2x^2-5x-7}{-4x^2+10x+6}$

92. Comprueba si los siguientes binomios son factores del polinomio $P(x) = x^3 - 3x^2 + 4$.

a) $x - 2$
b) $x + 2$
c) $x + 1$
d) $x - 1$
e) $x - 3$
f) $x + 3$

a) $P(2) = 2^3 - 3\cdot 2^2 + 4 = 0 \Rightarrow$ Es factor.

b) $P(-2) = (-2)^3 - 3\cdot(-2)^2 + 4 = -16 \Rightarrow$ No es factor.

c) $P(-1) = (-1)^3 - 3\cdot(-1)^2 + 4 = 0 \Rightarrow$ Es factor.

d) $P(1) = 1^3 - 3\cdot 1^2 + 4 = 2 \Rightarrow$ No es factor.

e) $P(3) = 3^3 - 3\cdot 3^2 + 4 = 4 \Rightarrow$ No es factor.

f) $P(-3) = (-3)^3 - 3\cdot(-3)^2 + 4 = -50 \Rightarrow$ No es factor.

93. Calcula el valor de k para que las siguientes divisiones sean exactas-

a) $(2x^2 - x + k) : (2x + 5)$

b) $(x^3 - x^2 - 3x + k) : (x^2 + 2x + 3)$

c) $(x^3 + 11x^2 + 28x + k) : (x + 5)$

a) $k + 15 = 0 \Rightarrow k = -15$

$$\begin{array}{rrr|l} \cancel{2x^2} & -x & +k & 2x+5 \\ \hline -\cancel{2x^3} & -5x & & x-3 \\ \hline & -\cancel{6x} & +k & \\ & +\cancel{6x} & +15 & \\ \hline & & k+15 & \end{array}$$

b) $k + 10 = 0 \Rightarrow k = -10$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 11 & 28 & k \\ -5 & & -5 & -30 & 10 \\ \hline & 1 & 6 & -2 & k+10 \end{array}$$

c) $k + 9 = 0 \Rightarrow k = -9$

$$\begin{array}{rrrr|l} \cancel{x^3} & -x^2 & -3x & +k & x^2+2x+3 \\ \hline -\cancel{x^3} & -2x^2 & -3x & & x-3 \\ \hline & -3x^2 & -6x & +k & \\ & +\cancel{3x^2} & +6x & +9 & \\ \hline & & & k+9 & \end{array}$$

94. Comprueba que el polinomio $6x^3 + 11x^2 - 44x + 15$ es múltiplo del polinomio $2x^2 + 7x - 3$.

$6x^3 + 11x^2 - 44x + 15$ es múltiplo del polinomio $2x^2 + 7x - 3$ porque la división es exacta.

$$\begin{array}{rl}
\cancel{6x^3}+11x^2-44x+15 & \underline{|\,2x^2+7x-3} \\
\underline{-\cancel{6x^3}-21x^2+9x\quad} & \;3x-5 \\
-10x^2-35x+15 & \\
\underline{+\cancel{10x^2}+35x-15} & \\
0 &
\end{array}$$

95. Calcula el valor que debe tener k para que el resto de la división $(4x^3 - 3x^2 + 2x + k) : (x + 3)$ sea -146.

Por el teorema del resto: $P(-3) = 4 \cdot (-3)^3 - 3 \cdot (-3)^2 + 2 \cdot (-3) + k = 141 + k = -146 \Rightarrow k = -5$

96. Escribe un polinomio de tercer grado que sea divisible por $x - 1$ y por $x + 2$.

$P(x) = x \cdot (x - 1) \cdot (x + 2) = x^3 + x^2 - 2x$ es un polinomio de tercer grado divisible por $x - 1$ y por $x + 2$.

97. Dada la expresión $P(x) = (3x + 1) + (3x + 1)^2$:

a) Desarróllala, escribiéndola como un polinomio ordenado de segundo grado.

b) Factorízala como producto de dos polinomios de primer grado.

c) Calcula el valor numérico de $P(x)$ en los puntos $x = -\frac{1}{3}$ y $x = 0$.

a) $P(x) = (3x + 1) + (3x + 1)^2 = 3x + 1 + 9x^2 + 6x + 1 = 9x^2 + 9x + 2$.

b) $P(x) = (3x + 1) + (3x + 1)^2 = (3x + 1) \cdot (1 + (3x + 1)) = (3x + 1) \cdot (3x + 2)$

c) $P\left(-\frac{1}{3}\right) = \left(3\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)+1\right) + \left(3\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)+1\right)^2 = 0 + 0 = 0$

$P(0) = (3 \cdot 0 + 1) + (3 \cdot 0 + 1)^2 = 1 + 1 = 2$

98. Dada la fracción algebraica $\frac{6x^2-9x-27}{15x^2-48x+9}$:

a) Comprueba que tanto el numerador como el denominador de la fracción son múltiplos de $3x - 9$.

b) Simplifica la fracción y comprueba que en ambas se obtiene el mismo valor numérico para $x = 2$ y $x = 4$.

a) El numerador y el denominador de la fracción son múltiplos de $3x - 9$ porque tanto la división del numerador entre $3x - 9$ como la del denominador entre $3x - 9$ son exactas.

$6x^2 - 9x - 27 = (3x - 9) \cdot (2x + 3)$

$$\begin{array}{rl}
\cancel{6x^2}-9x-27 & \underline{|\,3x-9} \\
\underline{-\cancel{6x^2}+18x\quad} & \;2x+3 \\
\cancel{9x}-27 & \\
\underline{-\cancel{9x}+27} & \\
0 &
\end{array}$$

$15x^2 - 48x + 9 = (3x - 9) \cdot (5x - 1)$

$$\begin{array}{rl}
\cancel{15x^2}-48x+9 & \underline{|\,3x-9} \\
\underline{-\cancel{15x^2}+45x\quad} & \;5x-1 \\
-\cancel{3x}+9 & \\
\underline{+\cancel{3x}+9} & \\
0 &
\end{array}$$

b) $\frac{6x^2-9x-27}{15x^2-48x+9} = \frac{(3x-9)\cdot(2x+3)}{(3x-9)\cdot(5x-1)} = \frac{3\cdot(x-3)\cdot(2x+3)}{3\cdot(x-3)\cdot(5x-1)} = \frac{2x+3}{5x-1}$

$$x = 2 \Rightarrow \begin{cases} \frac{6\cdot 2^2-9\cdot 2-27}{15\cdot 2^2-48\cdot 2+9} = \frac{-21}{-27} = \frac{7}{9} \\ \frac{2\cdot 2+3}{5\cdot 2-1} = \frac{7}{9} \end{cases}$$

$$x = -4 \Rightarrow \begin{cases} \frac{6\cdot(-4)^2-9\cdot(-4)-27}{15\cdot(-4)^2-48\cdot(-4)+9} = \frac{105}{441} = \frac{5}{21} \\ \frac{2\cdot(-4)+3}{5\cdot(-4)-1} = \frac{-5}{-21} = \frac{5}{21} \end{cases}$$

99. Calcula el valor de *a* y *b* para que la división $(6x^3 + 4x^2 + ax + b) : (3x^2 + 2x - 5)$ sea exacta

$$\begin{array}{l|l} \cancel{6x^3} + 4x^2 + ax + b & 3x^2 + 2x - 5 \\ \cline{2-2} \cancel{-6x^3} - 4x^2 + 10x & 2x \\ \hline \quad (a+10)x + b & \end{array}$$

Para que $(a + 10)x + b$ sea nulo: $\left.\begin{array}{r} a+10=0 \\ b=0 \end{array}\right\} \Rightarrow a=-10 \quad b=0$

100. Calcula, en los casos en que sea posible, el valor de *k* para que las fracciones *A*(*x*) y *B*(*x*) sean equivalentes.

a) $A(x) = \dfrac{2x^2 - x + k}{3x^2 + 4x + 1}$ y $B(x) = \dfrac{2x-3}{3x+1}$ b) $A(x) = \dfrac{6x^2 - 7x - 3}{12x^2 + 7x + k}$ y $B(x) = \dfrac{2x-3}{4x+1}$

a) Si $A(x)$ y $B(x)$ son equivalentes entonces $(2x^2 - x + k) \cdot (3x + 1) = (3x^2 + 4x + 1) \cdot (2x - 3)$.

$(2x^2 - x + k) \cdot (3x + 1) = 6x^3 + 2x^2 - 3x^2 - x + 3kx + k = 6x^3 - x^2 + x \cdot (3k - 1) + k$

$(3x^2 + 4x + 1) \cdot (2x - 3) = 6x^3 - 9x^2 + 8x^2 - 12x + 2x + 3 = 6x^3 - x^2 - 9x + 3$

Igualando coeficientes $\begin{cases} 3k-1=-10 \\ k=-3 \end{cases} \Rightarrow k=-3$

b) Si $A(x)$ y $B(x)$ son equivalentes entonces $(6x^2 - 7x - 3) \cdot (4x + 1) = (12x^2 + 7x + k) \cdot (2x - 3)$.

$(6x^2 - 7x - 3) \cdot (4x + 1) = 24x^3 + 6x^2 - 28x^2 - 7x - 12x - 3 = 24x^3 - 22x^2 - 19x - 3$

$(12x^2 + 7x + k) \cdot (2x - 3) = 24x^3 - 36x^2 + 14x^2 - 21x + 2kx - 3k = 24x^3 - 22x^2 + (2k - 21)\, x - 3k$

Igualando coeficientes $\begin{cases} 2k-21=19 \\ -3=-3k \end{cases} \Rightarrow k=1$

101. Actividad resuelta

102. La fracción algebraica $C(x) = \dfrac{x^2 + 8x}{2x + 4}$ representa el precio, en euros, de bajar *x* canciones de una web.

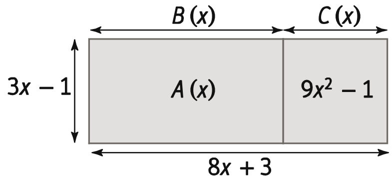
a) Calcula el precio de descargarse 10 canciones. ¿Cuánto cuesta, en este caso, cada canción?

b) Calcula la expresión algebraica que determina el precio de cada canción cuando se adquieren *x* canciones.

a) $C(10) = \dfrac{10^2 + 8 \cdot 10}{2 \cdot 10 + 4} = \dfrac{180}{24} = 7{,}5$ Al comprar 10 canciones cada una cuesta 7,5 : 10 = 0,75 €.

b) El precio unitario vendrá dado por $P(x) = \dfrac{x^2 + 8x}{2x + 4} : x = \dfrac{x^2 + 8x}{2x^2 + 4x} = \dfrac{x \cdot (x+8)}{x \cdot (2x+4)} = \dfrac{x+8}{2x+4}$.

103. Calcula las expresiones algebraicas que representan el área *A*(*x*) y las longitudes *B*(*x*) y *C*(*x*) de la figura.



$A(x) = (8x + 3) \cdot (3x - 1) - (9x^2 - 1) = 24x^2 - 8x + 9x - 3 - 9x^2 + 1 = 15x^2 + x - 2$

$B(x) = \dfrac{A(x)}{3x-1} = \dfrac{15x^2 + x - 2}{3x - 1} = 5x + 2$

$$\begin{array}{l|l} \cancel{15x^2} + x - 2 & 3x - 1 \\ \cline{2-2} -\cancel{15x^2} + 5x & 5x + 2 \\ \hline \qquad \cancel{6x} - 2 & \\ \quad \cancel{-6x} - 2 & \\ \hline \qquad\quad 0 & \end{array}$$

$C(x) = 8x + 3 - B(x) = 8x + 3 - (5x + 2) = 8x + 3 - 5x - 2 = 3x + 1$

104. Una de las raíces del polinomio $x^3 - ax + 6$ es $x = 1$. La suma de las otras dos raíces es:

A. 5 **B.** –1 **C.** 6 **D.** –8

Como $x = 1$ es raíz del polinomio entonces $1^3 - a + 6 = 0$. Entonces $a = 7$.

Utilizando Ruffini, se obtiene que las raíces del polinomio $x^3 - 7x + 6$ son 1, 2 y –3.

	1	0	–7	6
1		1	1	–6
	1	1	–6	0
2		2	6	
	1	3	0	

La respuesta correcta es la B.

105. El polinomio P(x) de 4º grado y coeficiente principal 2, tiene por raíces 0 y 1 y al dividirlo por x – 2 y x + 1 da 24 y 0 como resto, respectivamente. Sus coeficientes suman:

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

El polinomio es de la forma $P(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$.

Como 1 es raíz del polinomio, entonces $P(1) = a + b + c + d + e = 0$. Por tanto los coeficientes suman 0.

La respuesta correcta es la A.

106. Una expresión equivalente a $\dfrac{16a^2x - 25x}{12a^3 - 7a^2 - 10a}$ es:

A. $\dfrac{(4a+5)x}{(3a+2)a}$ **B.** $\dfrac{16ax - 25x}{12a^2 - 7a - 10}$ **C.** $\dfrac{-9x}{12a - 7 - \dfrac{10}{a}}$ **D.** Nada de lo anterior

Factorizamos el numerador: $16a^2x - 25x = x \cdot (16a^2 - 25) = x \cdot (4a - 5)(4a + 5)$

Factorizamos el denominador. Extraemos en primer lugar factor común: $12a^3 - 7a^2 - 10a = a \cdot (12a^2 - 7a - 10)$

Resolviendo la ecuación resultante al $12a^2 - 7a - 10 = 0$

$$a = \frac{7 \pm \sqrt{49+480}}{24} = \frac{7 \pm 23}{24} = \begin{cases} \dfrac{30}{24} = \dfrac{5}{4} \\[2mm] \dfrac{-16}{24} = \dfrac{-2}{3} \end{cases}$$

Por tanto el denominador se factoriza: $12a \cdot \left(a + \dfrac{2}{3}\right) \cdot \left(a - \dfrac{5}{4}\right) = a \cdot 3 \cdot \left(a + \dfrac{2}{3}\right) \cdot 4 \cdot \left(a - \dfrac{5}{4}\right) = a(3a+2) \cdot (4a-5)$

Sustituyendo el numerador y el denominador en la fracción algebraica del enunciado:

$$\frac{16a^2x - 25x}{12a^3 - 7a^2 - 10a} = \frac{x \cdot (16a^2 - 25)}{a \cdot (12a^2 - 7a - 10)} = \frac{x \cdot (4a-5) \cdot (4a+5)}{a \cdot (3a+2) \cdot (4a-5)} = \frac{x \cdot (4a-5)}{a \cdot (3a+2)} = \frac{(4a-5) \cdot x}{(3a+2) \cdot a}$$

La respuesta correcta es la A.

107. Al simplificar $\left(m + 1 + \dfrac{1}{1-m}\right) : \left(m - \dfrac{m^2}{m-1}\right)$ se obtiene:

A. $\dfrac{2-m^2}{m^2}$ **B.** $\dfrac{2-m^2}{m}$ **C.** $\dfrac{2}{1-m}$ **D.** $\dfrac{1}{m-1}$

$$\left(m + 1 + \frac{1}{1-m}\right) : \left(m - \frac{m^2}{m-1}\right) = \frac{(1+m) \cdot (1-m) + 1}{1-m} : \frac{m \cdot (m-1) - m^2}{m-1} = \frac{1 - m^2 + 1}{1-m} : \frac{m^2 - m - m^2}{m-1} = \frac{2-m^2}{1-m} : \frac{-m}{m-1} =$$

$$= \frac{(2-m^2) \cdot (m-1)}{(1-m) \cdot (-m)} = \frac{(2-m^2) \cdot \cancel{(m-1)}}{\cancel{(m-1)} \cdot (-1) \cdot (-m)} = \frac{2-m^2}{m}$$

La respuesta correcta es la B.

Encuentra el error

108. Encuentra el error en estas operaciones.

a) $$\frac{2x-1}{2x+1}-\frac{x-2}{(2x+1)^2}=\frac{(2x-1)\cdot(2x+1)-x+2}{(2x+1)^2}=\frac{4x^2-x+1}{4x^2+1}$$

b) $$\frac{2x-1}{2x+1}-\frac{x-2}{(2x+1)^2}=\frac{(2x-1)\cdot(2x+1)-x-2}{(2x+1)^2}=\frac{4x^2-x-3}{4x^2+4x+1}$$

a) $$\frac{2x-1}{2x+1}-\frac{x-2}{(2x+1)^2}=\frac{(2x-1)\cdot(2x+1)-x+2}{(2x+1)^2}=\frac{4x^2-1-x+2}{4x^2+4x+1}=\frac{4x^2-x+1}{4x^2+4x+1}$$

b) $$\frac{2x-1}{2x+1}-\frac{x-2}{(2x+1)^2}=\frac{(2x-1)\cdot(2x+1)-(x-2)}{(2x+1)^2}=\frac{4x^2-1-x+2}{4x^2+4x+1}=\frac{4x^2-x+1}{4x^2+4x+1}$$

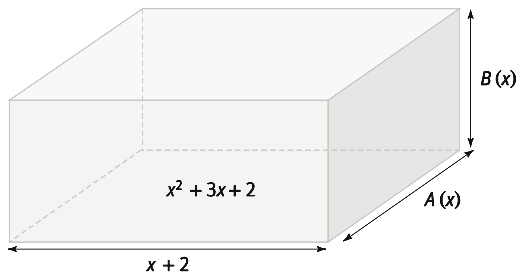
PONTE A PRUEBA

Tu estantería matemática

Actividad resuelta

El ortoedro

El área de la base de un ortoedro mide $x^2 + 3x + 2$ siendo uno de sus lados $x + 2$ tal y como muestra la figura. El volumen del cuerpo es $x^3 + 3x^2 + 2x$.



1. ¿Cuáles de estas expresiones representan las medidas de $A(x)$ y $B(x)$?

A. $A(x) = x + 1$ y $B(x) = x$ **C.** $A(x) = x - 1$ y $B(x) = x$

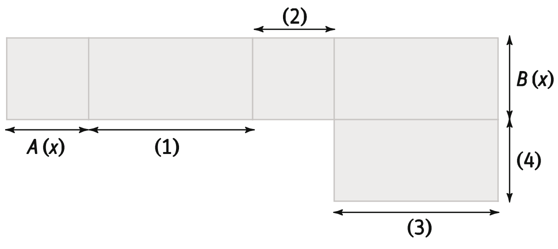
B. $A(x) = 2x + 1$ y $B(x) = 2x$ **D.** $A(x) = x + 1$ y $B(x) = 2x$

$$A(x)=\frac{x^2+3x+2}{x+2}=x+1 \qquad B(x)=\frac{x^3+3x^2+2}{x^2+3x+2}=x$$

$$\begin{array}{rl|l} \cancel{x^2} & +3x+2 & x+2 \\ -\cancel{x^2} & -2x & x+1 \\ \hline & x+2 & \\ & \cancel{-x}-2 & \\ \hline & 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{rl|l} \cancel{x^3} & +3x^2+2x & x^2+3x+2 \\ -\cancel{x^3} & -3x^2-2x & x \\ \hline & 0 & \end{array}$$

La respuesta correcta es la A.

2. La siguiente figura representa el desarrollo del ortoedro anterior. Escribe las expresiones algebraicas que corresponden a las longitudes (1), (2) (3) y (4).



(1) = $x + 2$

(2) = $A(x) = x + 1$

(3) = $x + 2$

(4) = $A(x) = x + 1$

3. Escribe una expresión algebraica que determine el área total que se precisa para construir el ortoedro.

$A_{total} = 2 \cdot [(x + 2) \cdot A(x) + A(x) \cdot B(x) + B(x) \cdot (x + 2)] = 2 \cdot (x^2 + 3x + 2 + x^2 + x + x^2 + 2x) = 6x^2 + 12x + 4$

Tecleando

Javier y Elena se han presentado a un concurso de mecanógrafos. Javier tiene que escribir un texto de 180 caracteres y Elena otro de 150 caracteres. Javier ha tardado 40 segundos más que Elena en terminar el texto.

1. ¿Cuál de estas expresiones algebraicas indica el tiempo que tarda Elena en escribir 100 caracteres?

A. $\dfrac{15\,000}{x}$ **B.** $\dfrac{18\,000}{x+4}$ **C.** $\dfrac{2x}{3}$ **D.** $\dfrac{5\cdot(x+4)}{9}$

Llamando x a los segundos que ha tardado Elena en teclear 150 caracteres, entonces ha tardado $\dfrac{x}{150}\cdot 100=\dfrac{100x}{150}=\dfrac{2x}{3}$ segundos en escribir 100 caracteres.

La respuesta correcta es la C.

2. ¿Cuál de estas expresiones algebraicas indica el tiempo que tarda Javier en escribir 100 caracteres?

A. $\dfrac{15\,000}{x}$ **B.** $\dfrac{18\,000}{x+4}$ **C.** $\dfrac{2x}{3}$ **D.** $\dfrac{5\cdot(x+40)}{9}$

Como Elena ha tardado x segundos en teclear 150 caracteres, entonces Javier ha tardado $x + 40$ en teclear 180 caracteres. Por tanto Javier ha tardado $\dfrac{x+40}{180}\cdot 100=\dfrac{100\cdot(x+40)}{180}=\dfrac{5\cdot(x+40)}{9}$ segundos en escribir 100 caracteres.

La respuesta correcta es la D.

3. Expresa el número de caracteres que escribirían, cada uno, en un minuto y el número total de caracteres que escribirían entre los dos si trabajaran durante un minuto cada uno con su ordenador.

Elena escribirá, en 60 segundos, $\dfrac{60\cdot 150}{x}=\dfrac{9000}{x}$ caracteres.

Javier escribirá, en 60 segundos, $\dfrac{60\cdot 180}{x+40}=\dfrac{10\,800}{x+40}$ caracteres.

Entre los dos escribirían, en 60 segundos, $\dfrac{9000}{x}+\dfrac{10\,800}{x+40}=\dfrac{9000\cdot(x+40)+10\,800x}{x\cdot(x+40)}=\dfrac{19\,800x+360\,000}{x^2+40x}$ caracteres.

4. ¿Cuánto tiempo tardarían entre los dos en escribir un documento de 4500 caracteres? ¿De esos 4500 caracteres, cuántos habrían escrito cada uno de ellos?

Entre los dos tardarían $\dfrac{4500\cdot 60}{\dfrac{19\,800x+360\,000}{x^2+40x}}=\dfrac{270\,000\cdot(x^2+40x)}{19\,800x+360\,000}=\dfrac{150\cdot(x^2+40x)}{11x+200}$ segundos.

Elena habría escrito $\left(\dfrac{150\cdot(x^2+40x)}{11x+200}\cdot 150\right):x=\dfrac{22\,500\cdot(x^2+40x)}{11x^2+200x}=\dfrac{22\,500\cdot(x+40)}{11x+200}$ caracteres y Javier habría escrito $\left(\dfrac{150\cdot(x^2+40x)}{11x+200}\cdot 180\right):(x+40)=\dfrac{27\,000\cdot(x^2+40x)}{(11x+200)\cdot(x+40)}=\dfrac{27\,000x}{11x+200}$ caracteres.

5. Si la velocidad de Elena es de 150 caracteres en 40 segundos, calcula el tiempo que tardarían los dos juntos en realizar la tarea del apartado 4. ¿Cuántos caracteres habrían escrito cada uno de ellos?

Entre los dos tardarían $\dfrac{150\cdot(40^2+40\cdot 40)}{11\cdot 40+200}=750$ segundos en escribir 4500 caracteres.

Elena habría escrito $\dfrac{22\,500\cdot(40+40)}{11\cdot 40+200}2813$ caracteres y Javier habría escrito $\dfrac{27\,000\cdot 40}{11\cdot 40+200}=1688$ caracteres.

AUTOEVALUACIÓN

1. Divide los polinomios.

a) $(10x^3 - 25x^2) : (-5x)$ **b) $(2x^3 - 7x^2 + 3x - 5) : (x^2 + 2x - 5)$**

a) $(10x^3 - 25x^2) : (-5x) = -2x^2 + 5x$ b) $(2x^3 - 7x^2 + 3x - 5) : (x^2 + 2x - 5) = (x^2 + 2x - 5) \cdot (2x - 11) + 35x - 60$

$$\begin{array}{rl|l} \cancel{2x^3} - 7x^2 + 3x - 5 & & x^2 + 2x - 5 \\ \hline -\cancel{2x^3} - 4x^2 + 10x & & 2x - 11 \\ \hline -11x^2 + 13x - 5 & & \\ \cancel{+11x^2} + 22x - 55 & & \\ \hline 35x - 60 & & \end{array}$$

2. Aplica la regla de Ruffini para calcular el cociente y el resto de las siguientes divisiones.

a) $(2x^3 - 5x^2 + 4x - 2) : (x + 3)$ **b) $(x^5 - x^2 + 5) : (x - 2)$**

En cada caso, escribe el dividendo en función del divisor, cociente y resto.

a) $2x^3 - 5x^2 + 4x - 2 = (x + 3) \cdot (2x^2 - 11x + 37) - 113$ **b)** $(x^5 - x^2 + 5) = (x - 2) \cdot (x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 7x + 14) + 33$

	2	–5	4	–2
–3		–6	33	–111
	2	–11	37	–113

	1	0	0	–1	0	5
2		2	4	8	14	28
	1	2	4	7	14	33

3. Sin realizar la división, comprueba que uno de los factores del polinomio $P(x) = 3x^3 + 4x^2 + x + 10$ es $x + 2$.

Por el teorema del factor, $x + 2$ es un factor de $P(x)$ porque $P(-2) = 3 \cdot (-2)^3 + 4 \cdot (-2)^2 + (-2) + 10 = 0$.

4. Calcula el valor de k para que sea exacta la división $(x^4 + 2x^3 - 7x^2 + k) : (x + 4)$.

Por el teorema del resto, el resto de la división $(x^4 + 2x^3 - 7x^2 + k) : (x + 4)$ coincide con el valor numérico del polinomio $P(x) = x^4 + 2x^3 - 7x^2 + k$ en $x = -4$. Como $P(-4) = (-4)^4 + 2 \cdot (-4)^3 - 7 \cdot (-4)^2 + k = 16 + k$, entonces la división será exacta si $16 + k = 0$; es decir, si $k = -16$.

5. Factoriza los siguientes polinomios.

a) $P(x) = 2x^3 + 7x^2 + 2x - 3$ **c) $P(x) = 9x^2 - 12x + 4$**

b) $P(x) = x^4 - x^2$ **d) $P(x) = 2x^3y^3 + 4xy^4$**

a) $P(x) = 2x^3 + 7x^2 + 2x - 3 = (x + 1) \cdot (x + 3) \cdot (2x - 1)$ **c)** $P(x) = 9x^2 - 12x + 4 = (3x - 2)^2$

	2	7	2	–3
–1		–2	–5	3
	2	5	–3	0
–3		–6	3	
	2	–1	0	

b) $P(x) = x^4 - x^2 = x^2 \cdot (x^2 - 1) = x^2 \cdot (x - 1) \cdot (x + 1)$ **d)** $P(x) = 2x^3y^3 + 4xy^4 = 2xy^3 \cdot (x^2 + 2)$

6. Calcula las raíces del polinomio $P(x) = 3x^3 - 9x + 6$.

$P(x) = 3x^3 - 9x + 6 = 3 \cdot (x^3 - 3x + 2)$. Factorizamos el polinomio $x^3 - 3x + 2$, aplicando la Ruffini.

	1	0	–3	2
1		1	1	–2
	1	1	–2	0
–2		–2	2	
	1	–1	0	

Como $x^3 - 3x + 2 = (x - 1)^2 \cdot (x + 2)$, entonces $P(x) = 3 \cdot (x - 1)^2 \cdot (x + 2)$. Las raíces de $P(x)$ son 1 (doble) y –2.

7. Simplifica las siguientes fracciones algebraicas.

a) $A(x)=\dfrac{2x^2+x-15}{2x^2-x-10}$ **b)** $B(x)=\dfrac{2x^3y+3x^2y^2}{2x^2y^2+3xy^3}$

a) $2x^2+x-15=(x+3)\cdot(2x-5)$ $2x^2-x-10=(x+2)\cdot(2x-5)$

$$\begin{array}{r|rrr} & 2 & 1 & -15 \\ -3 & & -6 & 15 \\ \hline & 2 & -5 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r|rrr} & 2 & -1 & -10 \\ -2 & & -4 & 10 \\ \hline & 2 & -5 & 0 \end{array}$$

$$A(x)=\frac{2x^2+x-15}{2x^2-x-10}=\frac{(x+3)\cdot\cancel{(2x-5)}}{(x+2)\cdot\cancel{(2x-5)}}=\frac{x+3}{x+2}$$

b) $B(x)=\dfrac{2x^3y+3x^2y^2}{2x^2y^2+3xy^3}=\dfrac{x^{\cancel{2}}\cancel{y}\cdot\cancel{(2x+3y^2)}}{\cancel{x}y^{\cancel{2}}\cdot\cancel{(2x+3y^2)}}=\dfrac{x}{y}$

8. Realiza las siguientes sumas y restas de fracciones algebraicas y simplifica todo lo que puedas los resultados.

a) $\dfrac{2x}{x-2}+\dfrac{3x-1}{x+2}$ **b)** $\dfrac{2x-3}{x+3}-\dfrac{2x-1}{x+2}$

a) $\dfrac{2x}{x-2}+\dfrac{3x-1}{x+2}=\dfrac{2x\cdot(x+2)+(3x-1)\cdot(x-2)}{(x-2)\cdot(x+2)}=\dfrac{2x^2+4x+3x^2-6x-x+2}{x^2-4}=\dfrac{5x^2-3x+2}{x^2-4}$

b) $\dfrac{2x-3}{x+3}-\dfrac{2x-1}{x+2}=\dfrac{(2x-3)\cdot(x+2)-(2x-1)\cdot(x+3)}{(x+3)\cdot(x+2)}=\dfrac{2x^2+4x-3x-6-2x^2-6x+x+3}{x^2+2x+3x+6}=\dfrac{-4x-3}{x^2+5x+6}$

9. Realiza las siguientes multiplicaciones y divisiones de fracciones algebraicas y simplifica todo lo que puedas los resultados.

a) $\dfrac{x^2+2x+1}{x^2+x}\cdot\dfrac{x}{(x+1)^3}$ **b)** $\dfrac{2x+3}{x^3}:\dfrac{(2x+3)^3}{x^4}$

a) $\dfrac{x^2+2x+1}{x^2+x}\cdot\dfrac{x}{(x+1)^3}=\dfrac{x\cdot(x+1)^2}{x\cdot(x+1)^4}=\dfrac{1}{(x+1)^2}$ **b)** $\dfrac{2x+3}{x^3}:\dfrac{(2x+3)^3}{x^4}=\dfrac{(2x+3)\cdot x^4}{x^3\cdot(2x+3)^3}=\dfrac{x}{(2x+3)^2}$

10. Una de las dimensiones de un rectángulo es $L(x)=x^2+1$ y su área vale $A(x)=3x^3+x^2+3x+1$.

a) Calcula la medida del otro lado. **b) Calcula las medidas y el área del rectángulos si $x=\dfrac{1}{2}$**

a) Llamando L_1 a la medida del otro lado se tiene que $L_1(x)=\dfrac{A(x)}{L(x)}=\dfrac{3x^3+x^2+3x+1}{x^2+1}=3x+1$

$$\begin{array}{rrr|l} \cancel{3x^3} & +x^2+3x & +1 & x^2+1 \\ -\cancel{3x^3} & -3x & & 3x+1 \\ \hline & x^2 & +1 & \\ & \cancel{-x^2} & -1 & \\ \hline & & 0 & \end{array}$$

b) Las medidas serán $L\left(\dfrac{1}{2}\right)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+1=\dfrac{5}{4}$, $L_1\left(\dfrac{1}{2}\right)=3\cdot\dfrac{1}{2}+1=\dfrac{5}{2}$ y $A\left(\dfrac{1}{2}\right)=3\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^3+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+3\cdot\dfrac{1}{2}+1=\dfrac{25}{8}$.