Unidad 1

1.

$\sqrt{7}$	Irracional
54	Natural
3,125 656 56…	Racional
–19	Entero
$\frac{7}{2}$	Racional
2,010 010 001 000 01…	Irracional
$\frac{10}{3}$	Racional

2.

$\frac{2}{9} = 0{,}222\,222\,22\ldots$	Racional
$\sqrt{6} = \pm 2{,}449\,489\,74\ldots$	Irracional
$\pi = 3{,}141\,592\,653\,5\ldots$	Irracional
$\frac{17}{2} = 8{,}5$	Racional
$\sqrt{5} = \pm 2{,}236\,067\,97\ldots$	Irracional

$\sqrt{6}$, π, $\sqrt{5}$ son irracionales porque su parte decimal es infinita no periódica.

3. El conjunto numérico mayor es el de los números reales, que incluye a racionales e irracionales.

4. $\pi = 3{,}141\,592\ldots$

$\frac{1}{3} = 0{,}333\,333\ldots$

–1,999 999…

$-\sqrt{2} = -1{,}414\ 213\ldots$

$e = 2{,}718\,281\ldots$

$\sqrt{3} = 1{,}732\,050\ldots$

0,989 898…

$3\sqrt{2} = 4{,}242\,640$

Orden de mayor a menor:

$3\sqrt{2};\ \pi;\ e;\ \sqrt{3};\ 0{,}989\,898\ldots;\ \frac{1}{3};\ -\sqrt{2};\ -1{,}999\,999\ldots$

5. Respuesta abierta.

6.

$\sqrt[3]{125} = 5$	Radical racional
$\sqrt{7} = \pm 2{,}645\,75\ldots$	Radical irracional
$\sqrt{121} = \pm 11$	Radical racional
$\sqrt[5]{64} = 2{,}297\,396\,7\ldots$	Radical irracional
$3\sqrt{2} = \pm 4{,}242\,64\ldots$	Radical irracional

7. $\sqrt[3]{125} \in \{\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}\}$

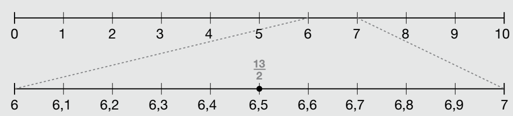
$\sqrt{7} \in \{\mathbf{I} \subset \mathbf{R}\}$

$\sqrt{121} \in \{\mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}\}$

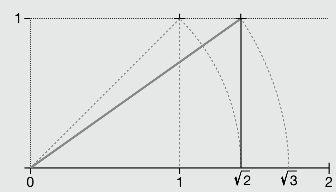
$\sqrt[5]{64} \in \{\mathbf{I} \subset \mathbf{C}\}$

$3 \cdot \sqrt{2} \in \{\mathbf{I} \subset \mathbf{C}\}$

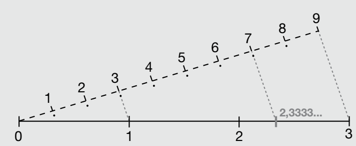
8. a) $\frac{13}{2} = 6{,}5$



b) $\sqrt{3}$



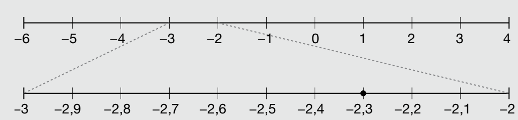
c) $2{,}333\,333\ldots = \frac{23-2}{9} = \frac{21}{9} = \frac{7}{3}$



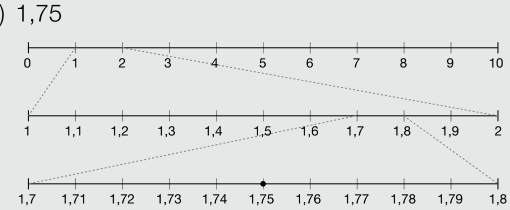
Cada unidad se divide en tres partes (denominador).

Se eligen 7 partes (numerador).

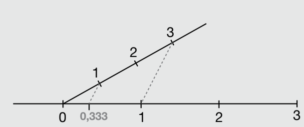
d) –2,3



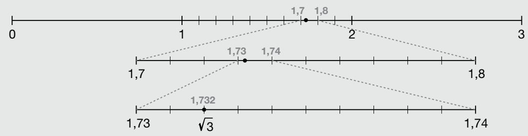
e) 1,75



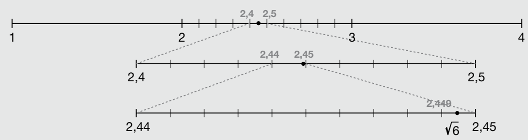
f) $0{,}333\,33\ldots = \frac{1}{3}$



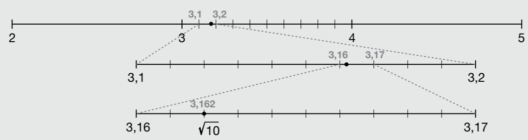
9. $\sqrt{3}$



$\sqrt{6}$



$\sqrt{10}$

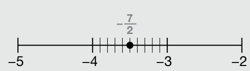


10. a) Marcar los valores –1 y 0.

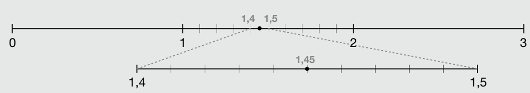
b) Respuesta abierta. Cualquier fracción cuyo resultado esté entre –1 y 1 o cualquier número periódico entre –1 y 1.

c) Respuesta abierta. Por ejemplo, cualquier raíz cuadrada de un número entre 1 y 8, excepto 1, 4 y 9, ya que dan como resultado números racionales.

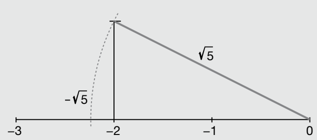
11. $-\dfrac{7}{2} = -3{,}5$



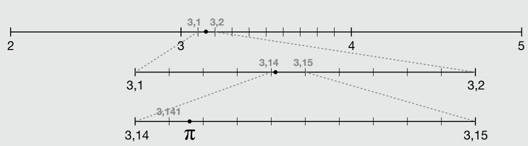
1,45



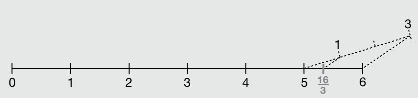
$-\sqrt{5} = -\sqrt{(2^2+1^2)}$



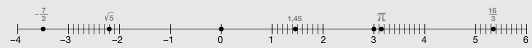
$\pi = 3{,}1415926535...$



$\dfrac{16}{3} = \dfrac{15}{3} = \dfrac{1}{3} = 5 + \dfrac{1}{3}$



Representación aproximada de todos los números sobre la recta real:



Siguiendo la representación sobre la recta real, el orden de menor a mayor es:

$-\dfrac{7}{2}; -\sqrt{5}; 0; 1{,}45; 3; \pi; \dfrac{16}{3}$

12. a) $\dfrac{3}{2} > 1$ Cierto: La expresión decimal de $\dfrac{3}{2}$ es 1,5, que es mayor que 1

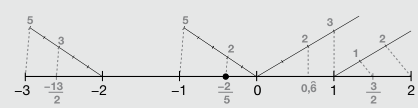
b) $1{,}5 > \sqrt{3}$ Falso: La expresión decimal de $\sqrt{3}$ es 1,732 050 80… que es mayor que 1,5

c) $3{,}1\hat{4} \leq \pi$ Falso: π es igual a 3,141 59…, que es menor que 3,144 444 4…..

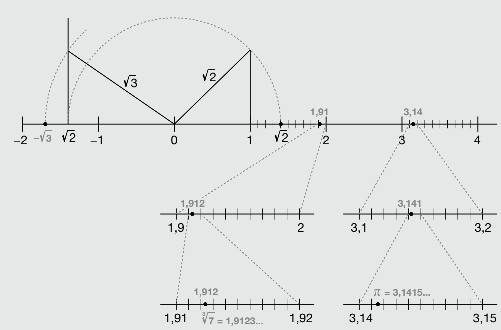
d) $-\sqrt{5} < -\dfrac{5}{2}$ Falso: la expresión decimal de $-\sqrt{5}$ es –2,236 06…, que es mayor que –2,5

13. a)

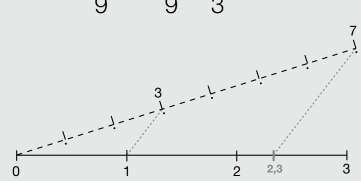
b)



c)



14. $2{,}\hat{3} = \dfrac{23-2}{9} = \dfrac{21}{9} = \dfrac{7}{3}$



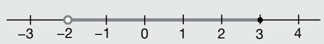
15. $A = -1{,}5 = -\dfrac{3}{2}$

$B = 0{,}7 = \dfrac{7}{10}$

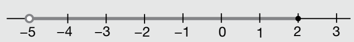
15a. $\sqrt{2} = 1{,}414\,213...$

Intervalo	Aproximación por		Error menor que
	Defecto	Exceso	
[1, 2]	1	2	1 unidad
[1,4, 1,5]	1,4	1,5	1 décima
[1,41, 1,42]	1,41	1,42	1 centésima
[1,414, 1,415]	1,414	1,415	1 milésima

16. a) $(-2,3]$

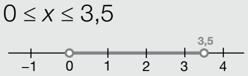


b) $-5 < x \le 2$

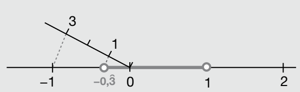


c) $\left[-3,\frac{9}{2}\right)$

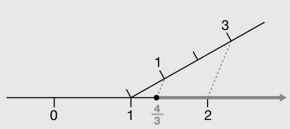
d) $0 \le x \le 3,5$



e) $\left(-0,\hat{3},\ 1\right)$



f) $x \ge \frac{4}{3}$



16a.

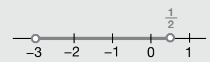
Número	Orden de aproximación	Aproximación por redondeo	Aproximación por truncamiento
75,379	Décimas	75,4	75,3
1,0032	Centésimas	1,00	1,00
134,856	Unidades	135	134
– 20,6341	Centésimas	– 20,63	– 20,63

17. Debe ser un intervalo abierto.

Si fuese un intervalo cerrado, se estaría fijando un valor para infinito y no es posible, puesto que una vez fijado siempre puede encontrarse un número mayor, lo que haría que por definición de infinito, el número fijado como extremo del intervalo ya no lo fuese.

17a. Aproximación por redondeo.

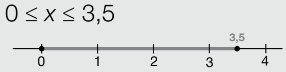
18. a) $\left(-3,\frac{1}{2}\right]$



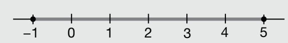
b) $-2 < x \le 3,\widehat{6}$

c) $(-\infty,1)$

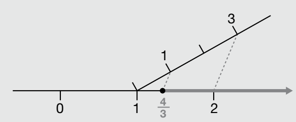
d) $0 \le x \le 3,5$



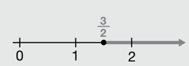
e) $[-1, 5]$



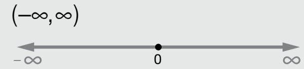
f) $x \ge \frac{4}{3}$



g) $\left[\frac{3}{2},\infty\right)$



h) $(-\infty,\infty)$



i) $0 \le x < \infty$

18a. a) Aproximación por redondeo.

b)

Número	Orden de aproximación	Aproximación por redondeo	Aproximación por truncamiento
3,1416	Milésimas	3,142	3,141
	Centésimas	3,14	3,14
	Décimas	3,1	3,1

19. El valor mayor es exactamente $3,\widehat{6}$.

El valor menor tiene que ser mayor que –2, pero no puede fijarse con exactitud, ya que es un intervalo abierto y entre dos números reales hay infinitos número reales: al fijar un número mayor que –2 como valor de *x*, siempre podríamos encontrar otro número entre éste y –2.

19a. Aproximación por redondeo: 1,26 m
Aproximación por truncamiento: 1,25 m

20a. a)…Falso c)…Verdadero
b)…Falso d)…Falso

21a. Respuesta abierta.

22a. $E_a = 0{,}000\,929$ $E_r = 0{,}036\ \%$

23a. Valor real = 13,025

Medida (m)	E_a (m)	E_r (%)
13,02	0,005	0,038
13,03	0,005	0,038
13,04	0,015	0,115
13,01	0,015	0,115

Actividades finales

El conjunto de los números irracionales

24. Respuesta abierta:
a) Cualquier número entero negativo.
b) Cualquier número decimal finito, decimal infinito periódico o decimal infinito semiperiódico.

25. a) Naturales
b) Fraccionarios
c) Enteros negativos
d) Naturales
e) Fraccionarios
f) Enteros
g) Fraccionarios
h) Irracionales

26.

Número	Expresión decimal	
$\frac{9}{10}$	0,90	Racional
$\frac{16}{25}$	0,64	Racional
ϕ	1,62	Irracional
$\frac{14}{7}$	2,00	Racional
$\frac{13}{2}$	6,50	Racional
e	2,72	Irracional
$\sqrt{3}$	1,73	Irracional

No todos son racionales.
Los irracionales no pueden expresarse como fracción de dos números enteros, ya que tienen decimales infinitos no periódicos.

27. a) Decimal finito.
b) Decimal infinito periódico puro.
c) Decimal finito.
d) Decimal infinito periódico mixto.

28. a) $\frac{21}{11} = 1{,}909\,09...$
Decimal infinito periódico puro.
Parte entera: 1
Periodo: 90

b) $\frac{17}{6} = 2{,}8333...$
Decimal infinito periódico mixto.
Parte entera: 2
Periodo: 3

c) $\frac{14}{30} = 0{,}46666...$
Decimal infinito periódico mixto.
Parte entera: 0
Periodo: 6

d) $\frac{4}{3} = 1{,}3333...$
Decimal infinito periódico puro.
Parte entera: 1
Periodo: 3

29. $\pi = 3{,}14159...$
$\sqrt{7} = 2{,}64575...$
$3\sqrt{2} = 4{,}242\,64...$
$\frac{7}{3} = 2{,}3333...$
Ordenados de mayor a menor: $3\sqrt{2};\ \pi;\ \sqrt{7};\ \frac{7}{3}$

30. a) Irracional: número infinito de decimales no periódicos. No puede representarse como fracción de dos números reales
b) Racional: es un decimal finito que puede representarse como fracción:
$$0{,}325 = \frac{13}{40}$$
c) Racional: es un periódico puro con periodo 3.
Puede expresarse como fracción de dos números enteros:
$$0{,}3333... = \frac{1}{3}$$

d) Irracional. La parte decimal sigue un patrón: 145 245 345 445 … pero no puede representarse por una fracción, ya que no existe un período que se repita.

e) Racional: es un número periódico puro con periodo 18 325.

Puede expresarse como fracción de dos números enteros:

$$4{,}18325183251... = \frac{418321}{99999}$$

31. a) Irracional: π es irracional, por lo que si lo dividimos entre cualquier número distinto a sí mismo, el resultado también será irracional.

b) Irracional: es un decimal infinito no periódico que no puede representarse como fracción de dos números enteros.

c) Irracional: $\sqrt{3}$ es un número irracional, por lo que si lo dividimos entre cualquier número distinto a sí mismo, el resultado también será irracional.

32. Son irracionales c), d), e), f).

33. Son irracionales b), f)

34. a) Irracional. c) Irracional.
b) Racional. d) Irracional.

35. $d = \sqrt{2}$ Se obtiene un número irracional.

36. Respuesta abierta.

37. $\overline{AC} = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$ Se obtiene un número irracional.

38. $\sqrt{-1}$ y $\sqrt[4]{-81}$ No son números reales, por lo que tampoco pueden ser irracionales.

$\sqrt[3]{8} = 2$ Es un número natural.

39. a) $\sqrt{5} = 2{,}236...$

$\sqrt{17} = 4{,}1231...$

Entre 2,236 y 4,123 están los enteros 3 y 4, por lo que la afirmación es FALSA.

b) CIERTO.

La recta es una sucesión infinita de infinitos puntos. Los números reales también son infinitos y, por lo tanto, cada punto de la recta podrá asociarse a un número real.

c) FALSO.

Todo número racional se puede expresar como una fracción de números enteros. Los números irracionales o decimales no periódicos no pueden expresarse de este modo.

d) CIERTO.

Los números irracionales son un subconjunto de los número reales.

40. Ambos son números reales. Entre dos números reales existen infinitos números reales que son la unión de racionales e irracionales, que también son infinitos.

El conjunto de los números reales

41.

Naturales **N**	Enteros **Z**	Racionales **Q**	Reales **R**	Irracionales **I**
$\sqrt{64}$	$\sqrt{64}$	$\sqrt{64}$	$\sqrt{64}$	$\sqrt{33}$
1	$\sqrt[3]{-27}$	$\sqrt[3]{-27}$	$\sqrt[3]{-27}$	π
3	1	$2{,}\widehat{3}$	$\sqrt{33}$	$\sqrt[7]{35}$
	-4	$\frac{7}{3}$	$2{,}\widehat{3}$	
	3	1	$\frac{7}{3}$	
		-4	1	
		$\frac{4}{6}$	π	
		3	-4	
			$\sqrt[7]{35}$	
			$\frac{4}{6}$	
			3	

$\sqrt{-8}$ es un número imaginario. No tiene cabida en la tabla.

42. $-\frac{1}{5}x;\ x \cdot 10^{-2};\ 0{,}\widehat{3}x;\ \frac{2}{5}x;\ \frac{4x}{9};\ x$

43. $h = \frac{\sqrt{3}}{2}$

44. a) FALSO.

El resultado debería ser un número real que multiplicado por sí mismo un número par de veces, diese como resultado el número negativo ***a***.

Si solo nos fijamos en el signo del resultado, vemos que si fuese positivo, multiplicado un número par de veces daría un número positivo.

Si el signo fuese negativo, multiplicado por sí mismo un número par de veces, obtendríamos un número positivo.

En ambos casos el signo del resultado sería positivo, siendo *a* de signo negativo, por lo que la afirmación es falsa.

b) FALSO.

Todo número real positivo multiplicado por sí mismo dará como resultado un número real positivo, independientemente de que se multiplique un número par o impar de veces.

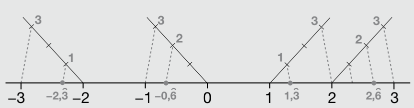
Por lo tanto, tendrá solución real tanto si *n* es par como impar.

45. $1,\hat{3}=\frac{4}{3}$ $\rightarrow$ Se representará $1+\frac{1}{3}$

$2,\hat{6}=\frac{8}{3}$ $\rightarrow$ Se representará $2+\frac{2}{3}$

$-0,\hat{6}=-\frac{2}{3}$

$-2,\hat{3}=-\frac{7}{3}$ $\rightarrow$ Se representará $-2-\frac{1}{3}$

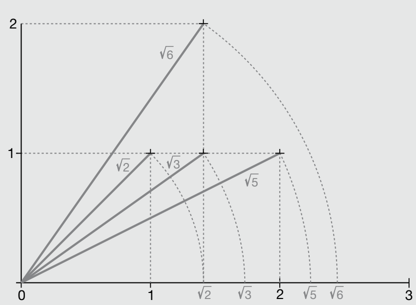


46. Aplicando el teorema de Pitágoras:

$\sqrt{3}=\sqrt{1^2+(\sqrt{2})^2}$

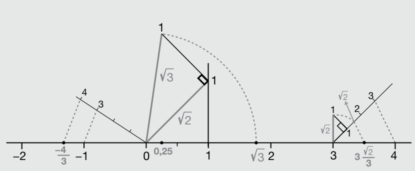
$\sqrt{5}=\sqrt{1^2+2^2}$

$\sqrt{6}=\sqrt{2^2+(\sqrt{2})^2}$



47. Orden de menor a mayor:

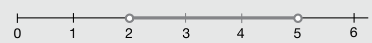
$-\frac{4}{3};\ 0,25;\ \sqrt{3};\ 3\frac{\sqrt{2}}{3}$



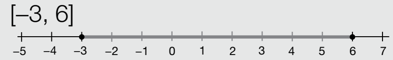
48. Sí. El problema se reduce a la posibilidad de representar de manera exacta $\sqrt{5}$ en la recta real, y sí puede hacerse aplicando el teorema de Pitágoras: $\sqrt{5}=\sqrt{1^2+2^2}$

49. a) (2, 5)

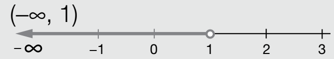
b) (–4, ∞)



c) [–3, 6]

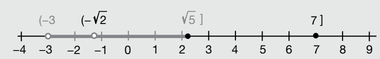


d) (–∞, 1)



50. a) (0, 3] b) [–4, 4] c) (–∞, –3)

51. $\left(-\sqrt{2},\ \sqrt{5}\right]$



52. a) $x \in \left[-2, 8\right]$

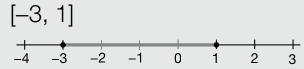
$y \in \left[-2, 4\right]$ solo si $y = 4$

b) [2, 14)

53. a) (–4, 4)

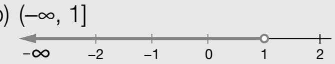
b) (–1, 5)

c) [–3, 1]



54. a) [–3, 2]

b) (–∞, 1]



c) (0, 7)

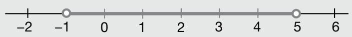
d) (–1, +∞)

e) (–1, 5]

f) [–7, –3)

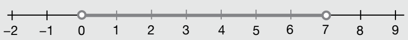
55. a) $[-3, 2)$

b) $(-1, 5)$

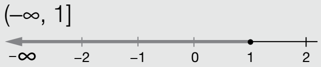


c) $(-1, +\infty)$

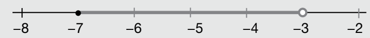
d) $(0, 7)$



e) $(-\infty, 1]$



f) $[-7, -3)$



56. a) Longitud > 35

b) Edad > 65

c) 9 ≤ Temperatura ≤ 18

57. $P = \sqrt{44}$

$Q = \sqrt{45}$

58. Aproximación de $P = \sqrt{44} = 6{,}633249...$

Aproximación	Potencia	Intervalo
Entera	$6^2 = 36$ $7^2 = 49$	$6 < \sqrt{44} < 7$
Decimal	$6{,}6^2 = 43{,}56$ $6{,}7^2 = 44{,}89$	$6{,}6 < \sqrt{44} < 6{,}7$
Centesimal	$6{,}63^2 = 43{,}9569$ $6{,}64^2 = 44{,}0896$	$6{,}63 < \sqrt{44} < 6{,}64$
Milesimal	$6{,}633^2 = 43{,}996689$ $6{,}634^2 = 44{,}009956$	$6{,}633 < \sqrt{44} < 6{,}634$

Aproximación de $Q = \sqrt{45} = 6{,}708203...$

Aproximación	Potencia	Intervalo
Entera	$6^2 = 36$ $7^2 = 49$	$6 < \sqrt{45} < 7$
Decimal	$6{,}7^2 = 44{,}89$ $6{,}8^2 = 46{,}24$	$6{,}7 < \sqrt{45} < 6{,}8$
Centesimal	$6{,}70^2 = 44{,}89$ $6{,}71^2 = 45{,}0241$	$6{,}70 < \sqrt{45} < 6{,}71$
Milesimal	$6{,}708^2 = 44{,}997264$ $6{,}709^2 = 45{,}010681$	$6{,}708 < \sqrt{45} < 6{,}709$

Las aproximaciones en los números reales

59.

Intervalo	Aproximación por Defecto	Aproximación por Exceso	Error menor que
[1, 2]	1	2	1 unidad
[1,4, 1,5]	1,4	1,5	1 décima
[1,41, 1,42]	1,41	1,42	1 centésima
[1,414, 1,415]	1,414	1,415	1 milésima

60. El orden de la última cifra significativa es el orden de aproximación.

a) Cifras significativas: 3
Orden de aproximación: 1 centésima.

b) Cifras significativas: 2
Orden de aproximación: 1 décima.

c) Cifras significativas: 4
Orden de aproximación: 1 milésima.

61. a) Cifras significativas: 3
Orden de aproximación: 1 diezmilésima.

b) Cifras significativas: 4
Orden de aproximación: 1 décima.

c) Cifras significativas: 2
Orden de aproximación: 1 décima.

d) Cifras significativas: 2
Orden de aproximación: 1 centésima.

62. $\sqrt{13} = 3{,}605551...$

Aproximación	Truncamiento	Redondeo
1 cifra	3	4
2 cifras	3,6	3,6
3 cifras	3,60	3,61

La diferencia de resultados se debe a que en la aproximación por truncamiento se suprimen directamente las cifras del número a partir de la cifra solicitada. En el caso de la aproximación por redondeo, se observa la primera cifra a suprimir y, en función de su valor, se redondea por defecto o por exceso.

63. $l = 2\pi r = 2 \cdot \pi \cdot 5 = 31{,}415926 54...$
l_1 = 31,4 cm – Por defecto
l_2 = 31,42 cm – Por exceso
l_3 = 31,416 cm – Por exceso
l_4 = 31,4159 cm – Por defecto

64. Por defecto: 3,91
Por exceso: 3,911

65. a) 1,732 b) 0,2 c) 4,22

66. 7,07 cm

67. a)

Calle	Valor exacto (V_e)	Valor exacto (V_a)	$V_e - V_a$	E_a	E_r
A	1500	1452	48	48	0,032
B	905	952	–47	47	0,051
C	299	325	–26	26	0,086

b) La medida de la calle A es la que se realizó con mayor precisión.

68. a) $E_a = 0{,}0002$
$E_r = 0{,}00119$ %
b) $E_a = 0{,}0016$
$E_r = 0{,}051$ %
c) $E_a = 0{,}414214$
$E_r = 29{,}3$ %
d) $E_a = 0{,}0000322$
$E_r = 0{,}0026$ %

69. a) $n = 3k - \frac{33}{5}$ con $\begin{cases} k \in N \\ k > 0 \end{cases}$

b) $n = \frac{k-3}{\pi}$ con $\begin{cases} k \in Z \\ k < 0 \end{cases}$

c) $n = 3 \cdot (k - \sqrt{2})$ con $k \in N$

d) $n = \frac{\pi}{3} \cdot (k-2)$ con $k \in I$

e) $n = \frac{\sqrt{27}}{5} \cdot k - 3 \cdot \sqrt{3}$ con $k \in Z$

70. $\sqrt{27} = \sqrt{3^3} = \sqrt{3^2 \cdot 3} = 3 \cdot \sqrt{3} \approx 3 \cdot 1{,}7320 \approx 5{,}1960$

71. Actividad en grupo.

72. a = 1,42 b = 1,41
Solo la afirmación c) es cierta.

Problemas

73. Serán suficientes si la longitud de la circunferencia es menor que los metros de valla.
$L = 2\pi r = 2 \cdot \pi \cdot 0{,}75 = 4{,}7123...\ m$, por lo que no son suficientes 4,71 m.

74. 4 decimales.

75. En un paquete con forma de prisma de 40 cm de altura y con base cuadrada de, como mínimo, 38,2 cm de lado.

76. Longitud de la hilera: E_a = 1 m E_r = 0,2 %
Anchura de la hilera: E_a = 1 m E_r = 10 %
El error absoluto es de 1 m en ambos casos.
La medida de menor calidad ha sido la de la anchura de la hilera, ya que su error relativo (10 %) es mayor que el error relativo de la medida de la longitud de la hilera (0,2 %).

77. Altura: E_a = 2 cm E_r = 1,11 %
Longitud de la pista: E_a = 0,5 m E_r = 0,5 %
La medida con menor error relativo es la de la longitud de la pista de atletismo.

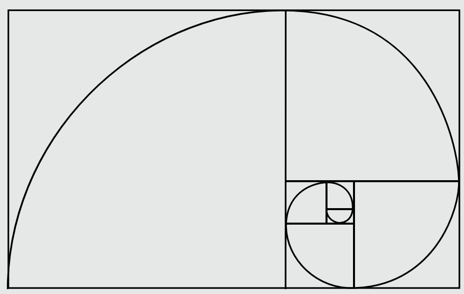
78. a) El valor más probable es la media de los valores medidos: 7
b) Medida 7,3: E_a = 0,3 E_r = 4,29 %
Medida 7,5: E_a = 0,5 E_r = 7,14 %
Medida 6,7: E_a = 0,3 E_r = 4,29 %
Medida 6,8: E_a = 0,2 E_r = 2,86 %

79. Se ahorrará más con la tela de tipo C.

80. En la sucesión de Fibonacci, cada número se calcula sumando los dos anteriores a él: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13…

El coeficiente de dos números consecutivos de la sucesión está muy próximo al *número áureo* ϕ.

La representación gráfica es la llamada *espiral de Fibonacci*, que se genera al dibujar los arcos circulares que conectan las esquinas opuestas de cuadrados de lado igual a los valores de la sucesión. Se adosan sucesivamente cuadrados de lado 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13…



Pon a prueba tus competencias

1.
a) 10,535 hm
b) 0,421 km^2
c) 5,292 hm
d) 3166 m
e) 13 bobinas
f) 234 €

2.
a) 1,96 m
b) E_a = 0,002 98 m
c) E_r = 0,152 3 %
d) 20,58 m^3
e) |Error absoluto| < 0,1 m^3

3.
a) 0,24 g
b) E_a = 0,004 g
c) E_a = 0,01 g
d) 1,18 quilates
e) E_r = 1,695 %

4.
a) 16 ft
b) 4,876 8 m
c) E_a = 0,123 2 m
d) E_r = 2,526 %
e) 115,99 m^3

5.
a) 5 580 segundos
b) 5 561,4 segundos
c) E_a = 0,31 minutos
d) |Error absoluto| < 0,5 minutos
e) E_r = 0,335 %