Unidad 4

1. a) Polinomio de grado 3 y término independiente 9.

b) Monomio de grado 6.

c) Polinomio de grado 11 y término independiente –6.

d) Polinomio de grado 7 y término independiente –4.

2. a) $Q(-2) = -(-2)^3 + 4\cdot(-2)^2 - (-2) - 3 =$
$= -(-8) + 4\cdot(4) + 2 - 3 = 8 + 16 + 2 - 3 = 23$

Polinomio de grado 3.

b) $Q(-1) = 11\cdot(-1)^6 + 7\cdot(-1)^4 - (-1)^3 - 21 =$
$= 11\cdot 1 + 7\cdot 1 - (-1) - 21 = 11 + 7 + 1 - 21 = -2$

Polinomio de grado 6.

c) $Q(3) = -2\cdot(3)^3 + 5\cdot(3)^2 - 3\cdot(3) + 9 =$
$= -2\cdot 27 + 5\cdot 9 - 9 + 9 = -54 + 45 - 9 + 9 = -9$

Polinomio de grado 3.

3. a) $P(2, 3) = 2^2\cdot 3^3 + 4\cdot 2\cdot 3^2 - 3\cdot 3 =$
$= 4\cdot 27 + 4\cdot 2\cdot 9 - 3\cdot 3 = 108 + 72 - 9 = 171$

b) $R(-2, 1) = 8\cdot(-2)^4 - 7\cdot(-2)^2\cdot 1 + 10\cdot 1 - 11 =$
$= 8\cdot 16 - 7\cdot 4\cdot 1 + 10\cdot 1 - 11 = 128 - 28 +$
$+ 10 - 11 = 99$

4. a) $P(x) = -2x^3 + 4x^2 - 7x^2 + x + 5x - 6 + 12 =$
$= -2x^3 - 3x^2 + 6x + 6$

b) $Q(x, y) = 5x^2y^2 - x^2y^2 + 11xy^2 +$
$+ 3xy^2 + 8xy - 5xy - 1 =$
$= 4x^2y^2 + 14xy^2 + 3xy - 1$

5. a) $P(-1) = (-1)^3 - 3\cdot(-1) - 2 = -1 + 3 - 2 = 0 \rightarrow$ Sí

b) $Q(-1) = (-1)^6 + 7\cdot(-1)^4 - 10\cdot(-1)^3 - 21 =$
$= 1 + 7\cdot 1 - 10\cdot(-1) - 21 = 1 + 7 + 10 - 21 = -3 \rightarrow$ No

c) $R(-1) = (-1)^4 + (-1)^3 - 3\cdot(-1)^2 + (-1) + 4 =$
$= 1 + (-1) - 3\cdot 1 - 1 + 4 = 1 - 1 - 3 - 1 + 4 = 0 \rightarrow$ Sí

6. Haz las siguientes operaciones con polinomios.

a) $\left(5x^2 - 3x + 4\right) - \left(-x^2 + 6x - 7\right) =$
$= (5 + 1)x^2 + (-3 - 6)x + (4 + 7) =$
$= 6x^2 - 9x + 11$

b) $\left(-x^2 - 9x + 2\right)\cdot\left(x^2 + 2x\right) =$
$= -x^2\cdot\left(x^2 + 2x\right) - 9x\cdot\left(x^2 + 2x\right) + 2\cdot\left(x^2 + 2x\right) =$
$= -x^4 - 2x^3 - 9x^3 - 18x^2 + 2x^2 + 4x =$
$= -x^4 - 11x^3 - 16x^2 + 4x$

c) $\left(a^2b - 3ab - 3\right)\cdot\left(a^2 + 2b\right) =$
$= a^2b\cdot\left(a^2 + 2b\right) - 3ab\cdot\left(a^2 + 2b\right) - 3\cdot\left(a^2 + 2b\right) =$
$= a^4b + 2a^2b^2 - 3a^3b - 6ab^2 - 3a^2 - 6b =$
$= a^4b - 3a^3b - 3a^2 + 2a^2b^2 - 6ab^2 - 6b$

7. a) $P(x) + Q(x) = \left(x^3 - 2x^2 - x\right) + \left(x^2 + 4\right) =$
$= x^3 + (-2 + 1)\cdot x^2 - x + 4 =$
$= x^3 - x^2 - x + 4$

b) $P(x)\cdot Q(x) = \left(x^3 - 2x^2 - x\right)\cdot\left(x^2 + 4\right) =$
$= x^3\cdot\left(x^2 + 4\right) - 2x^2\cdot\left(x^2 + 4\right) - x\cdot\left(x^2 + 4\right) =$
$= x^5 + 4x^3 - 2x^4 - 8x^2 - x^3 - 4x =$
$= x^5 - 2x^4 + 3x^3 - 8x^2 - 4x$

c) $[Q(x)]^2 = \left(x^2 + 4\right)^2 = \left(x^2 + 4\right)\cdot\left(x^2 + 4\right) =$
$= x^2\cdot\left(x^2 + 4\right) + 4\cdot\left(x^2 + 4\right) =$
$= x^4 + 4x^2 + 4x^2 + 16 =$
$= x^4 + 8x^2 + 16$

8. a) $(2ab + 3b)^2 = (2ab)^2 + 2\cdot(2ab)\cdot(3b) + (3b)^2 =$
$= 4a^2b^2 + 12ab^2 + 9b^2$

b) $\left(3x^2 - 7\right)^2 = \left(3x^2\right)^2 - 2\cdot\left(3x^2\right)\cdot 7 + 7^2 =$
$= 9x^4 - 42x^2 + 49$

c) $\left(x^2y - 5x\right)\cdot\left(x^2y + 5x\right) =$
$= \left(x^2y\right)^2 - (5x)^2 = x^4y^2 - 25x^2$

d) $(8x + 6)\cdot(8x - 6) = (8x)^2 - 6^2 =$
$= 64x^2 - 36$

9. a) $(6 + 4x)\cdot(6 - 4x) = 6^2 - (4x)^2 =$
$= -16x^2 + 36$

b) $(-1 - x)\cdot(-1 + x) = (-1)^2 - x^2 =$
$= -x^2 + 1$

c) $\left(x^2 - 7x\right)\cdot\left(x^2 - 7x\right) = \left(x^2 - 7x\right)^2 =$
$= \left(x^2\right)^2 - 2\cdot\left(x^2\right)\cdot(7x) + (7x)^2 =$
$= x^4 - 14x^3 + 49x^2$

10. a)

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
x^5 & -3x^3 & & +4 & & x^3 + x \\
\hline
-x^5 & -x^3 & & & & x^2 - 4 \\
\hline
0 & -4x^3 & & +4 & & \\
 & 4x^3 & +4x & & & \\
\hline
 & 0 & 4x + 4 & & &
\end{array}
$$

$C(x) = x^2 - 4$

$R(x) = 4x + 4$

b)
$$\begin{array}{l|l}
\cancel{2x^6}+5x^4-x^3+4x^2-7 & 2x^2-1 \\ \hline
\underline{\cancel{-2x^6}+x^4} & x^4+3x^2-\tfrac{1}{2}x+\tfrac{7}{2} \\
0\quad \cancel{+6x^4}-x^3+4x^2 & \\
\quad\ \underline{\cancel{-6x^4}\qquad +3x^2} & \\
\qquad 0\quad \cancel{-x^3}+7x^2 & \\
\qquad\quad \underline{\cancel{+x^3}\qquad -\tfrac{1}{2}x} & \\
\qquad\qquad 0\quad \cancel{+7x^2}-\tfrac{1}{2}x-7 & \\
\qquad\qquad\quad \underline{\cancel{-7x^2}\qquad +\tfrac{7}{2}} & \\
\qquad\qquad\qquad 0\quad -\tfrac{1}{2}x-\tfrac{7}{2} &
\end{array}$$

$C(x)=x^4+3x^2-\tfrac{1}{2}x+\tfrac{7}{2}$

$R(x)=-\tfrac{1}{2}x-\tfrac{7}{2}$

c)
$$\begin{array}{l|l}
x^3+3 & x \\ \hline
\underline{-x^3} & x^2 \\
0\quad 3 &
\end{array}$$

$C(x)=x^2$

$R=3$

d)
$$\begin{array}{l|l}
2x^4+3x^3-2x & 2 \\ \hline
\underline{-2x^4} & x^4+\dfrac{3}{2}x^3-x \\
0\quad +3x^3 & \\
\quad \underline{-3x^3} & \\
\qquad 0\quad -2x & \\
\qquad\quad \underline{+2x} & \\
\qquad\qquad 0 &
\end{array}$$

$C(x)=x^4+\dfrac{3}{2}x^3-x$

$R=0$

11. a) Debe ordenarse el dividendo del término de mayor grado al de menor grado:

$10\ x^2\ -\ 5\ -\ 3x^4\ +\ 2x^3 = -\ 3x^4+\ 2x^3+10\ x^2\ -\ 5$

	–3	2	10	0	–5
–2		6	–16	12	–24
	–3	8	–6	12	–29

por lo tanto $\begin{cases} C(x)=-3x^3+8x^2-6x+12 \\ R=-29 \end{cases}$

b)

	2	–5	–2	1	–4
+3		6	3	3	12
	2	1	1	4	8

por lo tanto $\begin{cases} C(x)=2x^3+x^2+x+4 \\ R=8 \end{cases}$

c) Debe ordenarse el dividendo del término de mayor grado al de menor grado:

$3\quad 3x^3\ +\ 6x^4 = 6x^4\quad 3x^3\ +\ 3$

	6	–3	0	0	3
–1		–6	9	–9	9
	6	–9	9	–9	12

por lo tanto $\begin{cases} C(x)=6x^3-9x^2+9x-9 \\ R=12 \end{cases}$

d) Debe ordenarse el dividendo del término de mayor grado al de menor grado:

$x^6+8+6\ x^2+12x = x^6+6\ x^2+12x+8$

	1	0	0	0	6	12	8
+2		2	4	8	16	44	112
	1	2	4	8	22	56	120

por lo tanto $\begin{cases} C(x)=x^5+2x^4+4x^3+8x^2+22x+56 \\ R=120 \end{cases}$

e) Debe ordenarse el dividendo del término de mayor grado al de menor grado:

$x^6+8+6\ x^2+12x = x^6+6\ x^2+12x+8$

	1	0	0	0	6	12	8
–2		–2	4	–8	16	–44	64
	1	–2	4	–8	22	–32	72

por lo tanto $\begin{cases} C(x)=x^5-2x^4+4x^3-8x^2+22x-32 \\ R=72 \end{cases}$

f)

	1	0	–1
+1		1	1
	1	1	0

por lo tanto $\begin{cases} C(x)=x+1 \\ R=0 \end{cases}$

12. a) Ya está factorizado. Es la descomposición factorial de un polinomio de grado n con n raíces.

b) $x = \dfrac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4\cdot 2\cdot(-6)}}{2\cdot 2} = \dfrac{-4 \pm \sqrt{16+48}}{4} =$

$= \dfrac{-4 \pm \sqrt{64}}{4} = \dfrac{-4 \pm 8}{4} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x_1 = +1 \\ x_2 = -3 \end{cases}$

$$P(x) = 2\cdot(x+3)\cdot(x-1)$$

c) $x = \dfrac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4\cdot 1\cdot 9}}{2\cdot 1} = \dfrac{6 \pm \sqrt{36-36}}{2} =$

$= \dfrac{6}{2} = 3 \quad \rightarrow \quad \{x_1 = x_2 = 3$

$$Q(x) = (x-3)^2$$

d) $P(x) = (x+1)\cdot(x-1)$

13. a) $P(x) = x^2\cdot(x-3)$

b) $Q(x) = (5x+8)\cdot(5x-8)$

c) $R(x) = 2ab\cdot(1+4a-6b)$

d) $S(x) = 9x^2 - 12x + 4 = (3x-2)^2$

e) $T(x) = (x+1)\cdot(x-1)$

f) $U(x)$ es un polinomio irreducible

g) $V(x) = x\cdot(x^3+3x^2+3x+1) = x\cdot(x+1)^3$

h) $Z(x) = (x+y+z)^2$

14. a) $P(x) = 2x^4 + x^3 - 8x^2 - x + 6$

Son divisores del término independiente: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 2 & 1 & -8 & -1 & 6 \\
+1 & & 2 & 3 & -5 & -6 \\
\hline
 & 2 & 3 & -5 & -6 & 0 \rightarrow (x-1)\cdot(2x^3+3x^2-5x-6) \\
-1 & & -2 & -1 & 6 & \\
\hline
 & 2 & 1 & -6 & 0 & \rightarrow (x-1)\cdot(x+1)\cdot(2x^2+x-6) \\
-2 & & -4 & 6 & & \\
\hline
 & 2 & -3 & 0 & & \rightarrow (x-1)\cdot(x+1)\cdot(2x-3)\cdot(x+2)
\end{array}$$

$$P(x) = 2\cdot\left(x - \frac{3}{2}\right)\cdot(x-1)\cdot(x+1)\cdot(x+2)$$

b) $Q(x) = x^3 - x^2 + 4x - 4$

Son divisores del término independiente: $\pm 1, \pm 2, \pm 4$

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & -1 & 4 & -4 \\
+1 & & 1 & 0 & 4 \\
\hline
 & 1 & 0 & 4 & 0 \rightarrow (x-1)\cdot(x^2+4)
\end{array}$$

El polinomio (x^2+4) es irreductible, así que

$Q(x) = (x-1)\cdot(x^2+4)$.

c) $R(x) = x^3 - x + 6$

Son divisores del término independiente : $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & 0 & -1 & 6 \\
-2 & & -2 & 4 & -6 \\
\hline
 & 1 & -2 & 3 & 0 \rightarrow (x+2)\cdot(x^2-2x+3)
\end{array}$$

El polinomio (x^2-2x+3) es irreductible, así que $R(x) = (x+2)\cdot(x^2-2x+3)$.

d) $S(x) = 2x^4 + 6x^3 - 2x^2 - 6x =$

$= x\cdot(2x^3 + 6x^2 - 2x - 6)$

Son divisores del término independiente: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 2 & 6 & -2 & -6 \\
+1 & & 2 & 8 & 6 \\
\hline
 & 2 & 8 & 6 & 0 \rightarrow (x-1)\cdot(2x^2+8x+6) \\
-1 & & -2 & -6 & \\
\hline
 & 2 & 6 & 0 & \rightarrow (x-1)\cdot(x+1)\cdot(2x+6)
\end{array}$$

$S(x) = 2\cdot x\cdot(x-1)\cdot(x+1)\cdot(x+3)$

e) $U(x) = x^2 - 1$

Es divisor del término independiente: ± 1

$$\begin{array}{r|rrr}
 & 1 & 0 & -1 \\
+1 & & 1 & 1 \\
\hline
 & 1 & 1 & 0 \rightarrow (x-1)\cdot(x+1)
\end{array}$$

$U(x) = (x-1)\cdot(x+1)$

f) $V(x) = x^2 + 1$

V(x) es irreductible, ya que no tiene raíces reales.

g) $Z(x) = x^4 + 3x^3 + 3x^2 + x =$

$= x\cdot(x^3 + 3x^2 + 3x + 1)$

Son divisores del término independiente: ± 1

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & 3 & 3 & 1 \\
-1 & & -1 & -2 & -1 \\
\hline
 & 1 & 2 & 1 & 0 \rightarrow (x+1)\cdot(x^2+2x+1) \\
-1 & & -1 & -1 & \\
\hline
 & 1 & 1 & 0 & \rightarrow (x+1)\cdot(x+1)\cdot(x+1)
\end{array}$$

$Z(x) = x\cdot(x+1)^3$

15. Para calcular el resultado de $P(x)\cdot Q(x)$ aplicaremos el método de la multiplicación de polinomios: multiplicaremos cada término de uno de los polinomios por el otro polinomio, reduciremos y ordenaremos el resultado:

$P(x) \cdot Q(x) = (x^3 - 13x + 12) \cdot (x^2 - 4x + 3) =$
$= x^3 \cdot (x^2 - 4x + 3) - 13x \cdot (x^2 - 4x + 3) + 12 \cdot$
$\cdot\ (x^2 - 4x + 3) = x^5 - 4x^4 + 3x^3 - 13x^3 +$
$+\ 52x^2 - 39x + 12x^2 - 48x + 36 = x^5 - 4x^4 -$
$-\ 10x^3 + 64x^2 - 87x + 36$

Para efectuar la división se nos pide que antes factoricemos los polinomios.

El polinomio P(x) · $P(x)$ es de grado 3, por lo que se determinarán los divisores de la forma (x-a) aplicando la regla de Ruffini hasta obtener un polinomio de 2º grado que se factorizará resolviendo la ecuación correspondiente.

El polinomio $Q(x)$ es de 2º grado, por lo que directamente igualaremos a cero y solucionaremos la ecuación.

$P(x) = x^3 - 13x + 12$

Son divisores del término independiente 12:

± 1, ± 2, ± 3

	1	0	−13	12	
+1		1	1	−12	
	1	1	−12	0	$\rightarrow (x-1) \cdot (x^2 + x - 12)$

Se resuelve la ecuación de 2.º grado:

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-12)}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{49}}{2} =$$
$$= \frac{-1 \pm 7}{2} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -4 \end{cases}$$

Por lo que el resultado de la factorización del primer polinomio es:

$P(x) = (x+4) \cdot (x-1) \cdot (x-3)$

$Q(x) = (x^2 - 4x + 3)$

Resolviendo la ecuación de 2º grado:

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} =$$
$$= \frac{4 \pm 2}{2} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

Con lo que $Q(x) = (x-1) \cdot (x-3)$

Finalmente:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x^3 - 13x + 12}{x^2 - 4x + 3} =$$
$$= \frac{(x+4) \cdot \cancel{(x-1)} \cdot \cancel{(x-3)}}{\cancel{(x-1)} \cdot \cancel{(x-3)}} = x + 4$$

16. $P^3(x) = (x^3 - 13x + 12)^3 = (x+4)^3 \cdot (x-1)^3 \cdot (x-3)^3 =$
$= (x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot 4 + 3 \cdot x \cdot 4^2 + 4^3) \cdot$
$\cdot\ (x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot (-1) + 3 \cdot x \cdot (-1)^2 + (-1)^3) \cdot (x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot (-3) +$
$+ 3 \cdot x \cdot (-3)^2 + (-3)^3) =$
$= (x^3 + 12x^2 + 48x + 64) \cdot (x^3 - 3x^2 + 3x - 1) \cdot$
$\cdot\ (x^3 - 9x^2 + 27x - 27)$

Efectuando las multiplicaciones, obtenemos finalmente:

$P^3(x) = x^9 - 39x^7 + 36x^6 + 507x^5 - 936x^4 -$
$-1\,765x^3 + 6\,084x^2 - 5\,616x + 1\,728$

$P^4(x) = (x^3 - 13x + 12)^4 = (x+4)^4 \cdot (x-1)^4 \cdot (x-3)^4 =$
$= (x^4 + 4 \cdot x^3 \cdot 4 + 6 \cdot x^2 \cdot 4^2 + 4 \cdot x \cdot 4^3 + 4^4) \cdot$
$\cdot\ (x^4 + 4 \cdot x^3 \cdot (-1) + 6 \cdot x^2 \cdot (-1)^2 + 4 \cdot x \cdot (-1)^3 + (-1)^4) \cdot$
$\cdot\ (x^4 + 4 \cdot x^3 \cdot (-3) + 6 \cdot x^2 \cdot (-3)^2 + 4 \cdot x \cdot (-3)^3 + (-3)^4) =$
$= (x^4 + 16x^3 + 96x^2 + 256x + 256) \cdot (x^4 - 4x^3 + 6x^2 -$
$-\ 4x + 1) \cdot (x^4 - 12x^3 + 54x^2 - 108x + 81)$

Efectuando las multiplicaciones, obtenemos finalmente:

$P^4(x) = x^{12} - 52x^{10} + 48x^9 + 1014x^8 - 1872x^7 -$
$-\ 7\,924x^6 + 24\,336x^5 + 6\,097x^4 - 98\,544x^3 +$
$+\ 146\,016x^2 - 89\,856x + 20\,736$

$Q^3(x) = (x^2 - 4x + 3)^3 = (x-1)^3 \cdot (x-3)^3 =$
$= (x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot (-1) + 3 \cdot x \cdot (-1)^2 + (-1)^3) \cdot$
$\cdot\ (x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot (-3) + 3 \cdot x \cdot (-3)^2 + (-3)^3) =$
$= (x^3 - 3x^2 + 3x - 1) \cdot (x^3 - 9x^2 + 27x - 27) =$
$= x^6 - 12x^5 + 57x^4 - 136x^3 + 171x^2 - 108x + 27$

$Q^4(x) = (x^2 - 4x + 3)^4 = (x-1)^4 \cdot (x-3)^4 =$
$= (x^4 + 4 \cdot x^3 \cdot (-1) + 6 \cdot x^2 \cdot (-1)^2 + 4 \cdot x \cdot (-1)^3 + (-1)^4) \cdot$
$\cdot\ (x^4 + 4 \cdot x^3 \cdot (-3) + 6 \cdot x^2 \cdot (-3)^2 + 4 \cdot x \cdot (-3)^3 + (-3)^4) =$
$= (x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1) \cdot (x^4 - 12x^3 + 54x^2 - 108x + 81) =$
$= x^8 - 16x^7 + 108x^6 - 400x^5 + 886x^4 -$
$-\ 1\,200x^3 + 972x^2 - 432x + 81$

Actividades finales

Expresiones algebraicas

17. a) Coeficientes.

b) Es el mayor de los grados de los monomios que lo forman.

c) Dos monomios son semejantes si tienen la misma parte literal.

Al sumar dos monomios semejantes se obtiene un monomio. En caso de que los monomios no fuesen semejantes, se obtendría un polinomio.

18. a) y c) Son semejantes.

19. a) Polinomio de grado 5 con término independiente −2.

b) Monomio de grado 5.

c) No es un polinomio, ya que $\frac{1}{3x^5}$, que es igual a $3x^{-5}$, no es un monomio por tener un exponente negativo.

d) Monomio de grado 2.
e) Polinomio de grado 6.
f) Monomio de grado 3.

20. a) Trinomio. d) Binomio.
b) Trinomio. e) Polinomio.
c) Monomio. f) Polinomio.

21. Respuesta abierta.

22. a) $\frac{1}{2}x\cdot(x+5)=\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{2}x$

b) $\left(\frac{1}{2}x+2\right)^2=\frac{1}{4}x^2+2x+4$

c) $\frac{1}{2}(x+4)(x+2)=\frac{1}{2}(x^2+2x+4x+8)=$

$=\frac{1}{2}(x^2+6x+8)=\frac{x^2}{2}+3x+4$

d) $\frac{1}{2}(x+2)(x+6)=\frac{1}{2}(x^2+6x+2x+12)=$

$=\frac{1}{2}(x^2+8x+12)=\frac{x^2}{2}+4x+6$

23. a) Grado 5. $P(1)=6;\quad P(-1)=-6$
b) Grado 6. $P(1)=2;\quad P(-1)=4$
c) No es un polinomio por tener un literal como divisor. $P(1)=\frac{10}{9};\quad P(-1)=\frac{44}{9}$
d) No es un polinomio por tener un literal como divisor. $P(1)=-\frac{1}{3};\quad P(-1)=-\frac{11}{3}$

24. a) Grado 5. $P(1)=10;\quad P(-1)=18$
b) Grado 5. $P(1)=6;\quad P(-1)=0$
c) Grado 3. $R(1)=10;\quad R(-1)=10$

25. a = 3

Operaciones con polinomios

26. Sí, si al sumar los términos de grado mayor que 2, los resultados tienen coeficiente cero.

27. No, será un polinomio de grado 25. Los coeficientes de grado 5 deben ser diferentes de 0 para que el polinomio sea de grado 5. El producto de dos números diferentes de cero da como resultado un número distinto de cero.

28. Grado del cociente = grado del dividendo – grado del divisor

29. a) $P(x)+Q(x)=-7x^4-3x^3+3x^2-x+2$
b) $P(x)+Q(x)-R(x)=-7x^4-4x^3-4x^2-1$
c) $P(x)-3\cdot R(x)=x^4-3x^3-18x^2+x-2$
d) $2\cdot P(x)-Q(x)-R(x)=$
$=10x^4+2x^3-x^2-4x+16$

30. a) $P(x)\cdot Q(x)=2x^5+4x^4-10x^3+16x-16$

b) $\frac{1}{2}\cdot P(x)\cdot Q(x)=x^5+2x^4-5x^3+8x-8$

31. a) $10x^4-2x^3-4x^2$
b) $8x^4+4x^3-4x^2+2x+2$
c) $4x^7-11x^5+8x^3-4x$
d) $-4x^7-3x^5-2x^4+2x^3-3x^2+2x+2$
e) $C(x)=2x-4;\qquad R=5$
f) $C(x)=-2x^2+\frac{5}{2}x+\frac{23}{4};\qquad R=\frac{69}{4}$
g) $C(x)=x^4+3x^3+9x^2+26x+78;$
$R(x)=231x-3$

32. a) $C(x)=2x+6;\qquad R=0$ División exacta.
b) $C(x)=x-2;\qquad R(x)=4x-4$ No es división exacta.
c) $C(x)=x+5;\qquad R=0$ División exacta.

33. x^6-x^3-3x-3

34. $3x-14+\frac{45x^2-10x+75}{x^3+3x^2+x+5}$

35. a) $49x^2+70x+25$
b) $25x^2-\frac{20}{3}x+\frac{4}{9}$
c) $4a^2-4a+1$
d) $16x^4-8x^3+x^2$
e) $\frac{x^2}{4}+\frac{3}{2}x+\frac{9}{4}$

36. a) $+12x$
b) $3x^2$
c) $+4$
d) $-y^2$

37. a) $16x^4-x^2$
b) a^6-9x^4
c) $\frac{4}{9}b^2-\frac{1}{25}a^2$
d) x^2-5

38. a)
$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & 2 & -1 \\ -3 & & -3 & 3 \\ \hline & 1 & -1 & 2 \end{array} \quad \text{por lo tanto} \quad \begin{cases} C(x) = x-1 \\ R = 2 \end{cases}$$

b)
$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & -7 & 6 \\ -1 & & 1 & 1 & -6 \\ \hline & 1 & 1 & -6 & 0 \end{array} \quad \text{por lo tanto} \quad \begin{cases} C(x) = x^2+x-6 \\ R = 0 \end{cases}$$

c)
$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 8 & -23 & -30 \\ -10 & & -10 & 20 & 30 \\ \hline & 1 & -2 & -3 & 0 \end{array} \quad \text{por lo tanto} \quad \begin{cases} C(x) = x^2-2x-3 \\ R = 0 \end{cases}$$

d)
$$\begin{array}{r|rrrrr} & 4 & 8 & 12 & -3 & 20 \\ -3 & & -12 & 12 & -72 & 225 \\ \hline & 4 & -4 & 24 & -75 & 245 \end{array} \quad \text{por lo tanto} \quad \begin{cases} C(x) = 4x^3-4x^2+24x-75 \\ R = 245 \end{cases}$$

e)
$$\begin{array}{r|rrrrrr} & \frac{2}{3} & 0 & \frac{15}{4} & 7 & \frac{11}{12} & \frac{1}{2} \\ -3 & & -2 & 6 & -\frac{117}{4} & \frac{267}{4} & -209 \\ \hline & \frac{2}{3} & -2 & \frac{39}{4} & -\frac{89}{4} & \frac{209}{3} & -\frac{417}{2} \end{array} \quad \text{por lo tanto} \quad \begin{cases} C(x) = \frac{2}{3}x^4x^3-4x^2+24x-75 \\ R = 245 \end{cases}$$

39. $r = 6$

40. $r = -\dfrac{513}{4}$

41. a) Dividendo:

$7x^5 - 8yx^4 - 20y^2x^3 + 16y^3x^2 + y^4x + y^5$

Divisor: $x - 2y$

Cociente: $7x^4 + 6yx^3 - 8y^2x^2 + y^4$

Resto: $3y^5$

b) Dividendo: $3x^5 + 4x^4 - 5x^3 - x^2 - 13x - 63$

Divisor: $x - 2$

Cociente: $3x^4 + 10x^3 + 15x^2 + 29x + 45$

Resto: 27

42. a) $P(3) = -234 \neq 0 \rightarrow$ No es divisible

b) $P(-1) = -3 \neq 0 \rightarrow$ No es divisible

c) $P(3) = 95 \neq 0 \rightarrow$ No es divisible

d) $P(2/3) = \dfrac{97}{729} \neq 0 \rightarrow$ No es divisible

43. a) $P(-3) = 72$

b) $P(1) = -37$

44. a) $\dfrac{319}{90}$

b) $-\dfrac{3\,187}{375}$

45. Dividiremos el polinomio entre el factor que es un monomio. Si la igualdad es correcta, el cociente debe ser el otro polinomio y el resto debe ser 0.

a) $5x - 3x^3 + 8x^2 - 6 = (x-3)\cdot(-3x^2 - x + 2)$

$$\begin{array}{rrrr|l} \cancel{-3x^3} & +8x^2 & +5x & -6 & x-3 \\ \cline{5-5} \cancel{+3x^3} & -9x^2 & & & -3x^2-x+2 \\ \cline{1-2} 0 & \cancel{-x^2} & +5x & & \\ & \cancel{-x^2} & -3x & & \\ \cline{2-3} & 0 & \cancel{2x} & \cancel{-6} & \\ & & \cancel{-2x} & \cancel{+6} & \\ \cline{3-4} & & 0 & 0 & \end{array}$$

La igualdad SÍ es correcta.

b) $x^4 + 3ax^3 - 10a^2x^2 + 3x - 6a =$

$= (x+2a)\cdot(x^3 + 5ax^2 + 3)$

$$\begin{array}{rrrrr|l} \cancel{x^4} & +3ax^3 & -10a^2x^2 & +3x & -6a & x^3+5ax^2+3 \\ \cline{6-6} \cancel{-x^4} & -5ax^3 & & -3x & & x-2a \\ \cline{1-4} 0 & \cancel{-2ax^3} & \cancel{-10a^2x^2} & 0 & \cancel{-6a} & \\ & \cancel{+2ax^3} & \cancel{+10a^2x^2} & 0 & \cancel{+6a} & \\ \cline{2-5} & 0 & 0 & & 0 & \end{array}$$

La igualdad NO es correcta.

c) $x^4 + 3ax^3 - 10a^2x^2 + 3x - 6a =$

$= (x-2a)\cdot(x^3 + 5ax^2 + 3)$

La igualdad SÍ es correcta, como vemos en el resultado de la división del apartado b).

d) $4a^4 - 8a^2 - 6 + 2a^3 - 2a =$

$= (a-1)\cdot(4a^3 + 8a^2 + 4a + 4)$

$$
\begin{array}{l|l}
\cancel{4a^4}+2a^3-8a^2-2a-6 & 4a^3+8a^2+4a+4 \\ \hline
\underline{\cancel{-4a^4}-8a^3-4a^2-4a} & a-\dfrac{3}{2} \\
0 \quad \cancel{-6a^3}\ \cancel{-12a^2}\ \cancel{-6a}\ \cancel{-6} & \\
\underline{\cancel{+6a^3}\ \cancel{+12a^2}\ \cancel{+6a}\ \cancel{+6}} & \\
\quad 0 \quad\ 0 \quad\ 0 \quad 0 &
\end{array}
$$

La igualdad NO es correcta.

Operaciones con polinomios

46. a) $(x+3)\cdot(x-1)$

b) Polinomio irreducible.

c) $(x-1)\cdot(x-3)$

d) $(x+2)\cdot(x-1)\cdot(x-3)$

47. a) $2x^2+3x+2+\dfrac{k+2}{x-1}$

b) $(x+3)\cdot(x+1)\cdot(x-3)$

c) $(x+\sqrt{3})\cdot(x-\sqrt{3})\cdot(x^2+3)$

48. a) $(8-y)\cdot(8+y)$

b) $a^2\cdot\left(a-\dfrac{1}{2}\right)^2$

c) $(3x+y)^3$

d) $\left(3x^5-2y^2\right)\cdot\left(3x^5+2y^2\right)$

e) $\left(\dfrac{3}{4}a+1\right)\cdot\left(\dfrac{3}{4}a-1\right)$

49. a) $\text{M.C.D.}=(x+3)\cdot(x-1)=x^2+2x-3$

$\text{m.c.m.}=(x+3)\cdot(x+2)\cdot(x-1)\cdot(x-2)=$

$=x^4+2x^3-7x^2-8x+12$

b) $\text{M.C.D.}=x^3-3x^2+4$

$\text{m.c.m.}=2x^3-6x^2+8$

c) $\text{M.C.D.}=1$

$\text{m.c.m.}=\left(x^3+x^2-6x\right)\cdot\left(x^3-3x^2+10x+20\right)=$

$=x^6-2x^5-19x^4+28x^3+80x^2-120x$

50. $P(5)=0;\quad P(3)=0;\quad P(-1)=0$

Los valores $x = 5$, $x = 3$ y $x = -1$, son los ceros del polinomio.

$P(x)=(x-5)\cdot(x-3)\cdot(x+1)$

51. a) $P(x)=(x-2)\cdot(x-1)\cdot(x+1)$

b) $x^5-16x=x\cdot(x+2)\cdot(x-2)\cdot\left(x^2+4\right)$

52. a) $8-2a^2+4ab-2b^2=2\cdot\left(4-a^2+2ab-b^2\right)=$

$=2\cdot\left(4-\left(a^2-2ab+b^2\right)\right)=$

$=2\cdot\left(4-(a-b)^2\right)=8-2(a-b)^2$

b) $mx-bx+m^2-b^2=x\cdot(m-b)+$

$+(m-b)\cdot(m+b)=(m-b)\cdot(x+m+b)$

c) $x^2-y^2-2zy-z^2=x^2-\left(y^2+2zy+z^2\right)=$

$=x^2-(y+z)^2=\left(x-(y+z)\right)\cdot\left(x+(y+z)\right)=$

$=(x-y-z)\cdot(x+y+z)$

53. $A=-1$

54. $3x-2$

55. $k=-9$

56. $(x-3)\cdot(x+1)\cdot(x-2)=x^3-4x^2+x+6$

57. a) $(x+1)^2=x^2+2x+1$

b) $\left(x+(x-1)\right)^2=(2x-1)^2=4x^2-4x+1$

c) $(x-1)\cdot 3\cdot(x+1)=3\cdot\left(x^2-1\right)=3x^2-3$

d) $x^3-(x-1)^3=3x^2-3x+1$

58. $\dfrac{10}{3}x^2-\dfrac{1}{3}$

Problemas

59. x = edad del hijo

y = edad del padre

$$\left.\begin{cases} x=y-30 \\ y=4x \end{cases}\right\}\rightarrow\begin{cases} x=10\text{ años} \\ y=40\text{ años} \end{cases}$$

60. z = dinero del primer amigo

x = dinero del segundo amigo

y = dinero del tercer amigo

$$\begin{cases} x=z^2-5z \\ y=\left(\dfrac{x}{10}\right)^2=\left(\dfrac{z^2-5z}{10}\right)^2=\dfrac{\left(z^2-5z\right)^2}{100}=\dfrac{z^4-10z^3+25z^2}{100} \end{cases}$$

Total de dinero:

$T(z) = z + x + y =$

$= z + (z^2 - 5z) + \left(\dfrac{z^4 - 10z^3 + 25z^2}{100}\right) =$

$= \dfrac{z^4 - 10z^3 + 125z^2 - 400z}{100}$

Si $z = 10 \Rightarrow T(10) = \dfrac{10^4 - 10 \cdot 10^3 + 125 \cdot 10^2 - 400 \cdot 10}{100} =$

$= \dfrac{10\,000 - 10\,000 + 12\,500 - 4.000}{100}$

$T(10) = 85$

61. $A(x) = 9x^2 + \dfrac{35}{2}x - \dfrac{3}{2}$

62. Si llamamos t_1 al tiempo de respuesta de la policía y t al tiempo que tarda en capturar a los ladrones desde que sale del cuartel (ambos tiempos deben expresarse en horas):

$$t = \frac{40 + 70\,t_1}{25}$$

63. $P(x) = 2 \cdot (x + (x + 300)) = 4x + 600$

Si P (x) = 1,2 km = 1 200 m > 4x + 600 =
= 1 200 = x = 150

Lado menor = 150 m

Lado mayor = 450 m

65. $P(x) = -2x^2 - 4x + 6$

66. $A(x) = 4x^2 + 6x + 1$

$B(x) = 8x^2 + 12x + 2$

67. $A_{total} = 3x^2 - \dfrac{5}{6}x$

68. $A_{total} = \dfrac{5}{2}x^2 + 35x + 60$

69. Los posibles productos de tres números que multipliquen 36 son:

36 x 1 x 1, su suma da como resultado 38,

18 x 2 x 1, su suma da como resultado 21,

12 x 3 x 1, su suma da como resultado 16,

9 x 4 x 1, su suma da como resultado 14,

9 x 2 x 2, su suma da como resultado 13,

6 x 6 x 1, su suma da como resultado 13 y

6 x 3 x 2, su suma da como resultado 11.

No sabemos el número de la casa que coincide con la suma de las tres edades, pero el amigo sí y, aún así, dice que le falta un dato. Esto significa que el número es el 13, el único que se repite en la suma de las edades, ya que si fuese cualquier otro, ya hubiese dado la respuesta.

El dato de que la mayor toca el piano, en singular, nos indica que la solución es 9, 2 y 2.

Pon a prueba tus competencias

1.

Parada	N.º de mujeres	N.º de hombres	Usuarios totales
6	$x + 24$	$y + 36$	$x + y + 60$
7	$2 \cdot (x + 24) = 2x + 48$	$y + 20$	$2x + y + 68$
8	$2x + 48 - 12 = 2x + 36$	$2 \cdot (y + 20) = 2y + 40$	$2x + 2y + 76$
9	$\frac{1}{2} \cdot (2x + 36) = x + 18$	$\frac{2}{3} \cdot (2y + 40) = \frac{4}{3}y + \frac{80}{3}$	$x + \frac{4}{3}y + \frac{134}{3}$
10	$x + 18 + 15 = x + 33$	$\frac{6}{5} \cdot \left(\frac{4}{3}y + \frac{80}{3}\right) = \frac{5}{8}y + 32$	$x + \frac{8}{5}y + 65$

2. a) $x^2 + 12x - 36$

b) Si x = 8, el área es igual a cero.

3. $A(x) = 4x^2 - \frac{3}{2}x - 3$

$-x$	$-x$	$-x$	$-x$	$-x$	$-x$	$-x$	$-x$	x^2
1	1	1	1	1	1	1	1	$-x$
1	1	1	1	1	1	1	1	$-x$
1	1	1	1	1	1	1	1	$-x$
1	1	1	1	1	1	1	1	$-x$
1	1	1	1	1	1	1	1	$-x$
1	1	1	1	1	1	1	1	$-x$
1	1	1	1	1	1	1	1	$-x$
1	1	1	1	1	1	1	1	$-x$

4. $q^2 = \frac{1}{10\,000} \quad \rightarrow \quad q = \sqrt{\frac{1}{10\,000}} = \frac{1}{100}$

$q + p = 1 \quad \rightarrow \quad p = 1 - q$

$2pq = 2q \cdot (1 - q) = 2q - 2q^2 =$

$= 2 \cdot \frac{1}{100} - 2 \cdot \frac{1}{10\,000} = 0{,}0198 = 1{,}98\ \%$

5. a) x = n.º de ordenadores
y = n.º de carros de transporte

$P(x, y) = \frac{2\,905}{3}x + 440y + 3\,150$

b) Total presupuesto: $\frac{22\,800}{0{,}60} = 38\,000$

Aporte del instituto: $38\,000 \cdot 0{,}40 = 15\,200$

c) x = n.º de ordenadores = 30
y = n.º de carros de transporte

$\frac{2\,905}{3} \cdot 30 + 440y + 3\,150 = 38\,000$

$y = \frac{5\,800}{440} = 13{,}1818$

Se podrán comprar 13 carros de transporte.