Unidad 6

1. $A = b \cdot h$

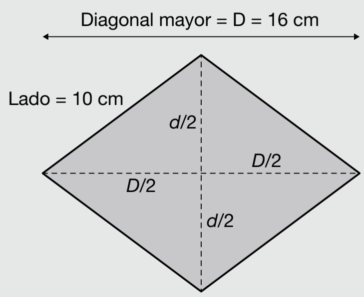
$$h = \frac{A}{b} = \frac{2\,958\text{ cm}^2}{87\text{ cm}} = 34\text{ cm}$$

$$P = 2b + 2h = 2 \cdot 87\text{ cm} + 2 \cdot 34\text{ cm} = 242\text{ cm}$$

2. $$A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{12 \cdot 6}{2} = 36\text{ cm}^2$$

$$P = b + L_1 + L_2 = 12 + 11 + 8 = 31\text{ cm}$$

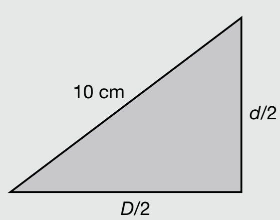
3.



$$A = \frac{D \cdot d}{2}$$

El lado del rombo es la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos son la mitad de las diagonales:

$$\frac{D}{2} = \frac{16}{2} = 8\text{ cm}$$



Aplicando el teorema de Pitágoras:

$$10^2 = 8^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 \quad \rightarrow \quad \frac{d^2}{4} = 100 - 64$$

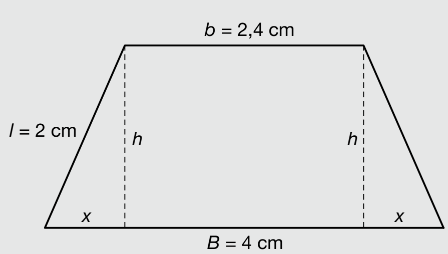
$$d = 2 \cdot \sqrt{36} = 12\text{ cm}$$

Finalmente:

$$A = \frac{D \cdot d}{2} = \frac{16 \cdot 12}{2} = 96\text{ cm}^2$$

$$P = 4 \cdot L = 4 \cdot 10 = 40\text{ cm}$$

4.



$$A = \frac{B + b}{2} \cdot h$$

h es uno de los catetos del triángulo rectángulo cuya hipotenusa es l, y su otro cateto, x.

$$B = 2x + b$$

$$x = \frac{B - b}{2} = \frac{4 - 2,4}{2} = 0,8\text{ cm}$$

Aplicando el teorema de Pitágoras:

$$h = \sqrt{l^2 - x^2} = \sqrt{2^2 - 0,8^2} = \sqrt{3,36} = 1,83\text{ cm}$$

Finalmente:

$$A = \frac{4 + 2,4}{2} \cdot 1,83 = 5,86\text{ cm}^2$$

$$P = B + b + 2 \cdot L = 4 + 2,4 + 2 \cdot 2 = 10,4\text{ cm}$$

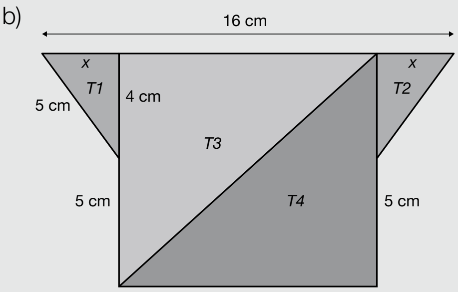
5. $$L = 2 \cdot \pi \cdot r \rightarrow r = \frac{L}{2 \cdot \pi} = \frac{25,12}{2 \cdot 3,14} = 4\text{ cm}$$

$$A = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot 4^2 = 50,27\text{ cm}^2$$

6. a) El pentágono se descompone en cinco triángulos de 10 cm de base y 8 cm de altura:

$$A_{\text{pentágono}} = 5 \cdot \frac{B \cdot h}{2} = 5 \cdot \frac{10 \cdot 8}{2} = 200\text{ cm}^2$$

b)



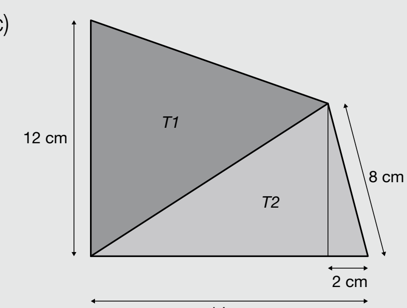
$$x = \sqrt{5^2 - 4^2} = \sqrt{25 - 16} = 3\text{ cm}$$

$$A_{T1} = A_{T2} = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6\text{ cm}^2$$

$$A_{T3} = A_{T4} = \frac{(5 + 4) \cdot (16 - 2 \cdot 3)}{2} = 45\text{ cm}^2$$

$$A_{\text{total}} = 2 \cdot A_{T1} + 2 \cdot A_{T3} = 2 \cdot 6 + 2 \cdot 45 = 102\text{ cm}^2$$

c)



Se descompone la figura en dos triángulos:

$b = 12$ cm

Triángulo T_1: $h = 14 - 2 = 12$ cm

$$A_{T1} = \frac{12 \cdot 12}{2} = 72 \text{ cm}^2$$

Triángulo T2:

b = 14 cm

$h \to$ La obtenemos aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo:

$$h = \sqrt{8^2 - 2^2} = \sqrt{64 - 4} = 7{,}75 \text{ cm}$$

$$A_{T2} = \frac{14 \cdot 7{,}75}{2} = 54{,}25 \text{ cm}^2$$

$$A_{total} = A_{T1} + A_{T2} = 72 + 54{,}25 = 126{,}26 \text{ cm}^2$$

7. a) – El área coloreada es el área del círculo menos el área del rectángulo.

– El área del círculo mide $A_{círculo} = \pi \cdot r^2 = 3{,}14 \cdot 10^2 = 314 \text{ m}^2$

– El área del rectángulo mide $A_{rectángulo} = B \cdot h = 8 \cdot 3 = 24 \text{ m}^2$

– El área roja mide $A_{círculo} - A_{rectángulo} = 314 - 24 = 290 \text{ m}^2$

b) – El área coloreada es el área del rectángulo menos el área del rombo.

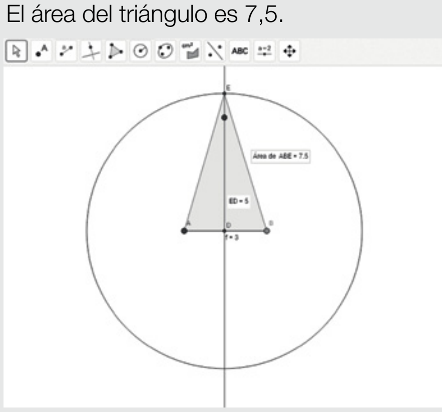
– El área del rombo mide $\dfrac{D \cdot d}{2} = \dfrac{36 \cdot 20}{2} = 360 \text{ m}^2$

– El área del rectángulo mide $b \cdot h = 20 \cdot 36 = 720 \text{ m}^2$

– El área verde mide $720 - 360 = 360 \text{ m}^2$

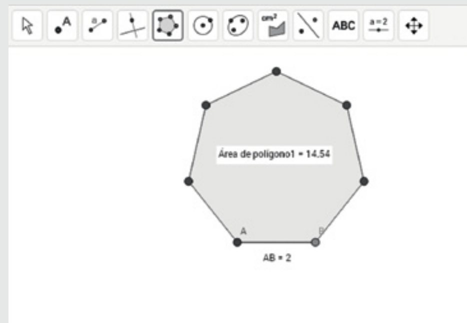
8. a) 1. Se dibuja el segmento $\overline{AB}$ de longitud 3, que será la base del triángulo.

2. Se traza una perpendicular a $\overline{AB}$ por el punto D.
3. Se dibuja una circunferencia de radio 5 con centro en el punto D.
4. El vértice superior del triángulo será E, punto de intersección de la perpendicular a $\overline{AB}$ con la circunferencia.
5. Con la función *Polígono* se dibuja el triángulo de vértices A, B y E.
6. El área del triángulo es 7,5.



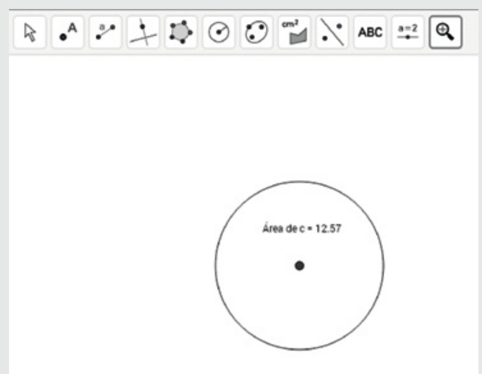
b) 1. Se dibuja el segmento $\overline{AB}$ de longitud 2.

2. Con la función *Polígono regular* se dibuja el lado del heptágono seleccionando los puntos A y B y, posteriormente, poniendo 7 como número de vértices.
3. El área del heptágono es 14,54.



c) 1. Se dibuja la circunferencia con la opción *Circunferencia (centro, radio)*: se selecciona un punto del plano y se introduce el radio igual a 2.

2. El área del círculo es 12,57.



9. a) Poliedro irregular y convexo:

n.º de caras: 6

n.º de vértices: 8

n.º de aristas: 12

b) Poliedro irregular y convexo:

n.º de caras: 6

n.º de vértices: 5

n.º de aristas: 9

c) Poliedro irregular y convexo:

n.º de caras: 6

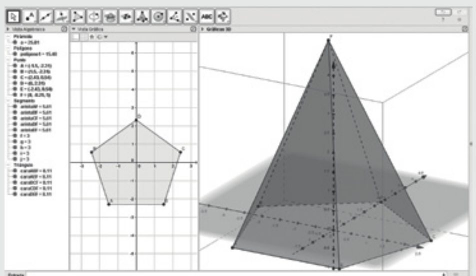
n.º de vértices: 8

n.º de aristas: 12

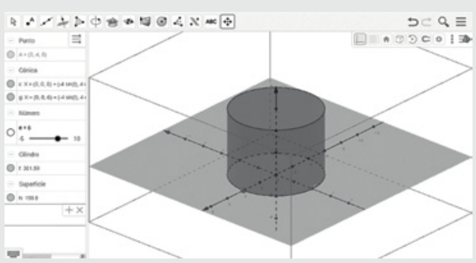
d) No es un poliedro, ya que sus caras no son polígonos.

10. a) 1. Seleccionamos dos puntos cualesquiera A y B.

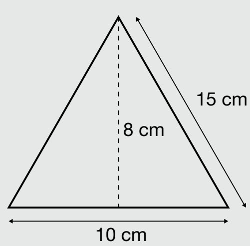
2. Dibujamos el pentágono que será la base con la opción *Polígono regular,* definiendo el segmento $\overline{AB}$ como lado del polígono y con número de vértices igual a 5.
3. En la vista *Gráfica 3D* seleccionamos *Pirámide o cono desde su base*. Seleccionamos el pentágono como base e introducimos 5 como altura, con lo que se dibuja la pirámide.



b) 1. En *Vista Gráfica 3D* seleccionamos el punto A sobre el eje *y,* en la coordenada 4, por el que haremos pasar la circunferencia que define la base.
2. Dibujamos la circunferencia con la opción *Circunferencia (eje, punto)*. Para ello seleccionamos el eje *z* y el punto A.
3. Para dibujar el cilindro utilizaremos la opción *Prisma o cilindro desde su base* e introducimos la altura 6.



11. Área lateral: Área de cinco triángulos:



l = arista lateral

b = arista de base

h = apotema

$$l^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + h^2$$

$$15^2 = \left(\frac{10}{2}\right)^2 + 8^2$$

$$225 = 25 + 64$$

$$225 \neq 89$$

No puede existir una pirámide con esas dimensiones.

12. Área lateral: Área de 6 rectángulos de 8 cm de altura y 5 cm de base:

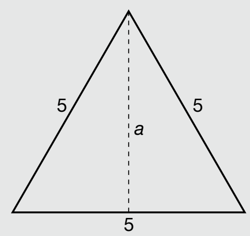
$$A = b \cdot h = 5 \cdot 8 = 10 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{lateral}} = 6 \cdot 40 = 240 \text{ cm}^2$$

Área total:

Las bases son dos hexágonos de 5 cm de lado.

Cada hexágono está construido con seis triángulos equiláteros de 5 cm de lado:



$$a^2 = 5^2 - 2{,}5^2 = 18{,}75$$

$$a = \sqrt{18{,}75} = 4{,}33 \text{ cm}$$

$$A_{\text{triángulo}} = \frac{b \cdot a}{2} = \frac{5 \cdot 4{,}33}{2} = 10{,}83 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{hexágono}} = 6 \cdot A_{\text{triángulo}} = 6 \cdot 10{,}83 = 64{,}98 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{total}} = 240 + 2 \cdot 64{,}98 = 369{,}96 \text{ cm}^2$$

13. $A_{\text{total}} = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot (h + r) =$

$$= 2 \cdot 3{,}14 \cdot 6 \cdot (20 + 6) = 979{,}68 \text{ cm}^2$$

14. $A_{\text{total}} = \pi \cdot r \cdot (g + r)$

$$g = \sqrt{2{,}5^2 + 16^2} = 16{,}19 \text{ cm}$$

$$A_{\text{total}} = 3{,}14 \cdot 2{,}5 \cdot (16{,}19 + 2{,}5) = 146{,}72 \text{ cm}^2$$

15. Como la esfera está inscrita en el cilindro, su diámetro será la altura del cilindro:

$$A_{\text{total}} = 4 \cdot \pi \cdot r^2 = 4 \cdot 3{,}14 \cdot \left(\frac{7}{2}\right)^2 = 153{,}86 \text{ cm}^2$$

16. $V = a \cdot b \cdot c = 1000 \text{ cm} \cdot 600 \text{ cm} \cdot 400 \text{ cm} = 2{,}4 \cdot 10^8 \text{ cm}^3$

17. Habitación: 40 dm de largo x 30 dm de ancho x 20 dm de alto.

Cajas: 12 dm de largo x 7 dm de ancho x 4 dm de alto.

Consideraremos que la base de las cajas siempre debe ser la cara de 12 x 7.

Alto: $\frac{20}{4} = 5$ → se pueden apilar 5 cajas.

Existen dos posibles distribuciones:

– Distribución 1: las cajas se colocan con su lado más largo paralelo al lado más largo de la habitación, con lo que tendremos:

$\frac{40}{12} = 3,\widehat{3}$ → caben tres cajas y queda un espacio de 40 – 3·12 = 4 dm.

$\frac{30}{7} \simeq 4,20$ → caben cuatro cajas y queda un espacio de 30 – 4·7 = 2 dm.

– Distribución 2: las cajas se colocan con su lado más largo paralelo al lado más corto de la habitación:

$\frac{30}{12} = 2,5$ → caben dos cajas y queda un espacio de 30 – 2·12 = 6 dm.

$\frac{40}{7} \simeq 5,71$ → caben cinco cajas y queda un espacio de 40 – 5·7 = 5 dm.

Número de cajas en el caso 1: 3·4·5 = 60 cajas.

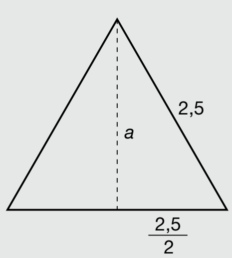
Número de cajas en el caso 2: 2·2·5 = 50 cajas.

Por lo tanto, podemos almacenar 60 cajas apoyadas en sus caras de 12 dm x 7 dm y colocadas con su lado mayor paralelo al lado más largo de la habitación.

18. $V = a^3 = 6^3 = 216 \text{ cm}^3$

19. $V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3 = \frac{4}{3} \cdot 3,14 \cdot \left(\frac{1,5}{2}\right)^3 = 1,77 \text{ m}^3$

20. $V = A_{base} \cdot h_{prisma}$



$a = \sqrt{2,5^2 - \left(\frac{2,5}{2}\right)^2} = 2,17 \text{ cm}$

$A_{base} = \frac{1}{2} \cdot b \cdot a = \frac{2,5 \cdot 2,17}{2} = 2,71 \text{ cm}^2$

$V = 2,71 \cdot 11 = 29,81 \text{ cm}^3$

21. $A_{total} = A_{base} + A_{lateral}$

$V = A_{base} \cdot h_{prisma}$

$A_{base} = \frac{P \cdot ap}{2} = \frac{(5 \cdot 4) \cdot 3}{2} = 30 \text{ m}^2$

Área lateral: área de cinco rectángulos de 25 por 4:

$A_{lateral} = 5 \cdot 25 \cdot 4 = 500 \text{ m}^2$

$A_{total} = 30 + 500 = 530 \text{ m}^2$

$V = 30 \cdot 25 = 750 \text{ m}^3$

22. $V_{cilindro} = \pi \cdot r^2 \cdot h$

La altura es el doble de la circunferencia de la base, por lo tanto:

$h = 2 \cdot (2 \cdot \pi \cdot r) = 4 \cdot \pi \cdot r$

Por lo tanto:

$V_{cilindro} = \left(\pi \cdot r^2\right) \cdot (4 \cdot \pi \cdot r) = 4 \cdot \pi^2 \cdot r^3 =$

$= 4 \cdot 3,14^2 \cdot \left(\frac{8}{2}\right)^3 = 2\,524,06 \text{ m}^3$

23. La lata tiene forma cilíndrica: $V_{cilindro} = \pi \cdot r^2 \cdot h$

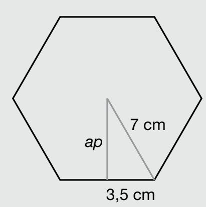
El diámetro de la base es la mitad de la altura:

$r = \frac{1}{2} \cdot d = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot h\right) = \frac{1}{4} \cdot h$

Por lo tanto: $V_{cilindro} = \pi \cdot \left(\frac{1}{4} \cdot h\right)^2 \cdot h = \frac{\pi}{16} \cdot h^3 =$

$= \frac{3,14}{16} \cdot 10^3 = 196,25 \text{ cm}^3$

24.



$V_{pirámide} = \frac{A_{base} \cdot h}{3}$

$A_{base} = \frac{P \cdot ap}{2}$

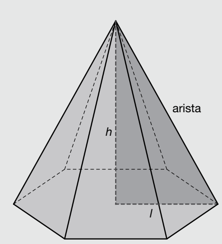
$ap = \sqrt{7^2 - 3,5^2} = 6,06 \text{ cm}$

$A_{base} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 6,06}{2} = 127,26 \text{ cm}^2$

$h = \sqrt{15^2 - 7^2} = 13,27 \text{ cm}$

Por lo tanto:

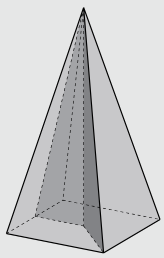
$V = \frac{127,26 \cdot 13,27}{3} = 562,91 \text{ cm}^3$



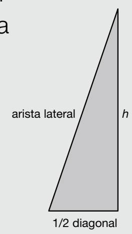
25.

$$V_{cono} = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3} = \frac{3{,}14 \cdot \left(\frac{14}{2}\right)^2 \cdot 35}{3} = 1795{,}03 \text{ cm}^3$$

26.



Para el cálculo del área lateral es necesario conocer la longitud de la arista lateral y la altura de los triángulos que forman las caras.



Longitud de la arista lateral:

Considerando el triángulo rectángulo cuya hipotenusa es la arista lateral, uno de sus catetos se corresponde con la altura de la pirámide y el otro es la mitad de la diagonal de la base:

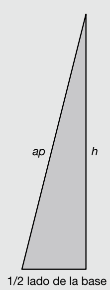
$$l = \sqrt{h^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2}$$

Diagonal del cuadrado de la base:

$$d = \sqrt{2 \cdot 12^2} = 12 \cdot \sqrt{2} = 16{,}97 \text{ cm}$$

Sustituyendo d y h en la ecuación anterior:

$$l = \sqrt{25^2 + \left(\frac{16{,}97}{2}\right)^2} = 26{,}4 \text{ cm}$$



Altura del triángulo lateral:

Considerando el triángulo rectángulo cuya hipotenusa es la altura del triángulo lateral *(ap)*, uno de sus catetos es la altura de la pirámide *(h)* y el otro cateto, la mitad del lado de la base:

$$ap = \sqrt{h^2 + \left(\frac{l_{base}}{2}\right)^2} = \sqrt{25^2 + 6^2} = 25{,}71 \text{cm}$$

Área lateral: área de 4 triángulos de 12 cm de base y 25,71 cm de altura.

$$A_{lateral} = 4 \cdot \frac{12 \cdot 25{,}71}{2} = 617{,}04 \text{ cm}$$

Área total:

$$A_{total} = A_{base} + A_{lateral} = 12^2 + 617{,}04 = 761{,}04 \text{ cm}^2$$

Volumen:

$$V_{pirámide} = \frac{A_{base} \cdot h}{3} = \frac{12^2 \cdot 25}{3} = 1200 \text{ cm}^3$$

27.

$$V_{esfera} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 = \frac{4}{3} \cdot 3{,}14 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 14{,}13 \text{ m}^3$$

Coincide con los $\frac{2}{3}$ del volumen del cilindro:

$$V_{cilindro} = \pi \cdot r^2 \cdot h = \pi \cdot \left(\frac{h}{2}\right)^2 \cdot h = \frac{\pi}{4} \cdot h^3 = \frac{3{,}14}{4} \cdot 3^3 = 21195 \text{ m}^3$$

$$V_{esfera} = \frac{2}{3} \cdot V_{cilindro} = \frac{2 \cdot 21{,}195}{3} = 14{,}13 \text{ m}^3$$

28.

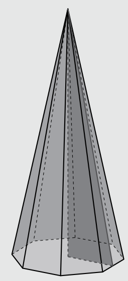
$$V_{semiesfera} = \frac{1}{2} \cdot V_{esfera} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3\right) = \frac{2}{3} \cdot 3{,}14 \cdot 8^3 =$$

$$= 1071{,}79 \text{ cm}^3$$

$$A_{semiesfera} = \frac{1}{2} \cdot A_{esfera} = \frac{1}{2} \cdot \left(4 \cdot \pi \cdot r^2\right) = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 8^2 =$$

$$= 401{,}92 \text{ cm}^2$$

29.

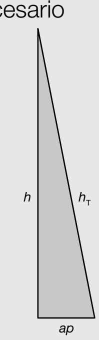


$$A_{total} = A_{base} + A_{lateral}$$

$$A_{base} = \frac{P \cdot ap}{2} = \frac{8 \cdot 4 \cdot 4{,}84}{2} = 77{,}44 \text{ cm}^2$$

Área lateral:

Será la suma del área de los 8 triángulos laterales. Para calcular el área de cada triángulo es necesario conocer su altura.



Considerando el triángulo rectángulo cuya hipotenusa se corresponde con la altura del triángulo lateral, uno de sus catetos será la altura de la pirámide y el otro será la apotema de la base octogonal.

$$h_T = \sqrt{h^2 + ap^2} = \sqrt{25^2 + 4{,}84^2} = 25{,}46 \text{ cm}$$

$$A_{lateral} = 8 \cdot \frac{4 \cdot 25{,}46}{2} = 407{,}36 \text{ cm}^2$$

$$A_{total} = A_{base} + A_{lateral} = 77{,}44 + 407{,}36 = 484{,}80 \text{ cm}^2$$

$$V_{pirámide} = \frac{A_{base} \cdot h}{3} = \frac{77{,}44 \cdot 25}{3} = 645{,}33 \text{ cm}^3$$

30. La superficie será la de un cilindro pero con solo una base.

$$A_{base} = \pi \cdot r^2 = 3{,}14 \cdot \left(\frac{17}{2}\right)^2 = 226{,}86 \text{ cm}^2$$

$$A_{lateral} = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h = 2 \cdot 3{,}14 \cdot \left(\frac{17}{2}\right) \cdot 45 = 2\,402{,}1 \text{cm}^2$$

$$A_{total} = A_{base} + A_{lateral} = 226{,}86 + 2\,402{,}1 = 2\,628{,}96 \text{ cm}^2$$

Actividades finales

Perímetros y áreas de las figuras planas

31.

Triángulo equilátero $P = 3 \cdot L$ Área: por ser un triángulo equilátero, es suficiente con conocer la longitud de un lado, ya que se cumple que $h = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot L$, con lo que $A = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot L^2$	Trapecio $P = B + b + L_1 + L_2$ Área: es necesario conocer la base mayor, la base menor y la altura: $A = \frac{B+b}{2} \cdot h$
Hexágono regular $P = 6 \cdot L$ Área: se descompone en 6 triángulos equiláteros. La apotema del hexágono se corresponde con la altura de los triángulos: $ap = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot L$. El área será: $A = \frac{ap \cdot P}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot L \cdot 6 \cdot L\right) =$ $= \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{2} \cdot L^2$	Figura compuesta por dos triángulos escalenos iguales, unidos por su lado mayor que coincide con la diagonal mayor de la figura. $P = 2 \cdot$ (lado mayor + lado menor) Área: es necesario conocer el valor de las diagonales de la figura $A = 2 \cdot \left(\frac{B \cdot h}{2}\right) = B \cdot h =$ $\text{Diagonal}_{mayor} \cdot \frac{1}{2} \cdot \text{Diagonal}_{menor}$

32. a) $P = 3 + 4 + \sqrt{3^2 + 4^2} = 12 \text{ cm}$

b) $P = 4 \cdot \sqrt{5^2 + 6^2} = 31{,}24 \text{ cm}$

c) $P = 4 \cdot \sqrt{144} = 48 \text{ cm}$

d) $P = 5 \cdot 5 = 25 \text{ cm}$

33. $P = 4 \cdot \sqrt{\left(\frac{14}{2}\right)^2 + \left(\frac{8}{2}\right)^2} = 32{,}25 \text{ cm}$

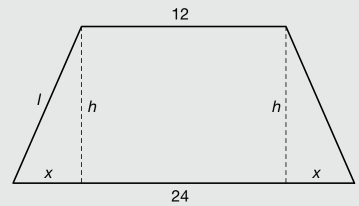
$A = \frac{D \cdot d}{2} = \frac{14 \cdot 8}{2} = 56 \text{ cm}^2$

34. $L = 2 \cdot \pi \cdot r = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 3 = 18{,}84 \text{ cm}$

$A = \pi \cdot r^2 = 3{,}14 \cdot 3^2 = 28{,}26 \text{ cm}^2$

35. $A = \frac{P \cdot ap}{2} = \frac{(8 \cdot 3) \cdot 4{,}5}{2} = 54 \text{ cm}^2$

36.



No conocemos la altura h, por lo que el resultado será una función dependiente de h.

$x = 6$

$l = \sqrt{36 + h^2}$

$P = 12 + 24 + 2 \cdot l \quad \Rightarrow \quad P(h) = 36 + 2 \cdot \sqrt{36 + h^2}$

$A(h) = \frac{12 + 24}{2} \cdot h = 18 \cdot h$

37. $h = \frac{A}{b} = \frac{80}{16} = 5 \text{ cm}$

38. $P = 2 \cdot b + 2 \cdot h \rightarrow 80 = 2 \cdot 24 + 2 \cdot h \rightarrow h = 16$

$A = b \cdot h = 24 \cdot 16 = 384 \text{ cm}^2$

39. $P = 2 \cdot \pi \cdot r = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 20 = 125{,}6 \text{ cm}$

$A = \pi \cdot r^2 = 3{,}14 \cdot 20^2 = 1256 \text{ cm}^2$

40. $b = 2 \cdot a$

$P = 2 \cdot b + 2 \cdot a = 4 \cdot a + 2 \cdot a = 6 \cdot a = 6 \cdot 20 = 120 \text{ cm}$

$A = b \cdot a = 2 \cdot a \cdot a = 2 \cdot a^2 = 2 \cdot 20^2 = 2 \cdot 400 = 800 \text{ cm}^2$

41. $P = 2 \cdot \pi \cdot r = 2 \cdot 3{,}14 \cdot \frac{45}{2} = 141{,}3 \text{ cm}$

$A = \pi \cdot r^2 = 3{,}14 \cdot \left(\frac{45}{2}\right)^2 = 1589{,}625 \text{ cm}^2$

42. $A = 3 \cdot a^2 + 3 \cdot a \cdot (b - a) = 3 \cdot a^2 + 3 \cdot a \cdot b - 3 \cdot a^2 =$

$= 3 \cdot a \cdot b = 63 \text{ cm}^2$

43. $A = 2 \cdot 1{,}5 + 3 \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = 15{,}5 \text{ cm}^2$

44. a) $A_{círculo} = \pi \cdot r^2 = 3{,}14 \cdot 4^2 = 50{,}24 \text{ cm}^2$

b) $A_{cuadrado} = (2 \cdot r)^2 = 8^2 = 64 \text{ cm}^2$

c) $A_{cuadrado} - A_{círculo} = 64 - 50{,}24 = 13{,}76 \text{ cm}^2$

45. $A_{corona} = A_{mayor} - A_{menor} = \pi \cdot (R^2 - r^2) =$

$= 3{,}14 \cdot (12^2 - 9^2) = 197{,}82 \text{ cm}^2$

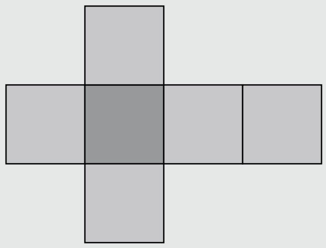
46. $A = \frac{l \cdot r}{2} = \frac{35 \cdot 18}{2} = 315 \text{ cm}^2$

47. $P = 6 \cdot L = 6 \cdot \frac{24}{2} = 72 \text{ cm}$

Poliedros

48. Cubo – Prisma recto octogonal – Tetraedro – Prisma recto triangular – Pirámide recta pentagonal.

49.



a) Cubo:

n.º de vértices: 8

n.º de aristas: 12

n.º de caras: 6

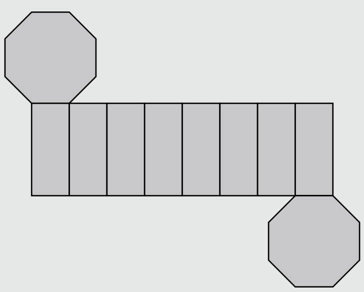
Figura plana de las caras: cuadrado.

Teorema de Euler:

caras + vértices = aristas + 2

6 + 8 = 12 + 2

14 = 14



b) Prisma recto octogonal:

n.º de vértices: 16

n.º de aristas: 24

n.º de caras: 10

Figura plana de las caras:

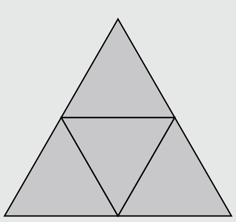
2 octógonos y 8 rectángulos.

Teorema de Euler:

caras + vértices = aristas + 2

10 + 16 = 24 + 2

26 = 26



c) Tetraedro:

n.º de vértices: 4

n.º de aristas: 6

n.º de caras: 4

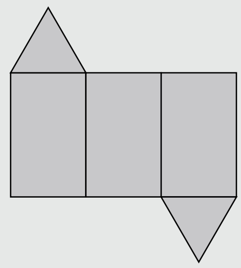
Figura plana de las caras: triángulos equiláteros.

Teorema de Euler:

caras + vértices = aristas + 2

4 + 4 = 6 + 2

8 = 8



d) Prisma recto triangular:

n.º de vértices: 6

n.º de aristas: 9

n.º de caras: 5

Figura plana de las caras:

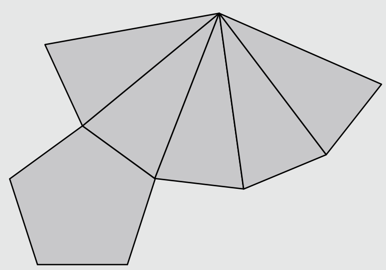
3 rectángulos y 2 triángulos equiláteros.

Teorema de Euler:

caras + vértices = aristas + 2

5 + 6 = 9 + 2

11 = 11



e) Pirámide recta pentagonal:

n.º de vértices: 6

n.º de aristas: 10

n.º de caras: 6

Figura plana de las caras:

1 pentágono y 5 triángulos isósceles.

Teorema de Euler:

caras + vértices = aristas + 2

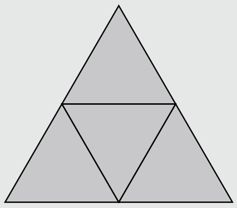
6 + 6 = 10 + 2

12 = 12

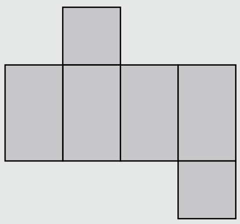
50. Respuesta abierta.

51. Respuesta abierta.

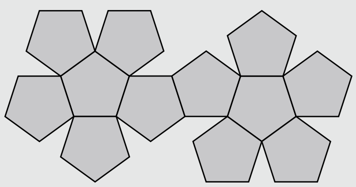
52. a)



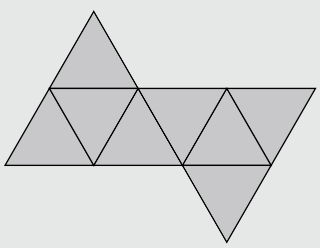
b)



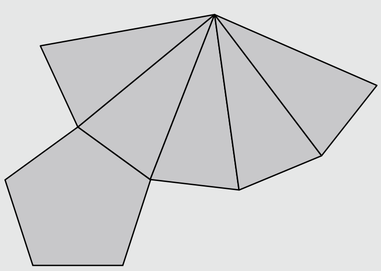
c)



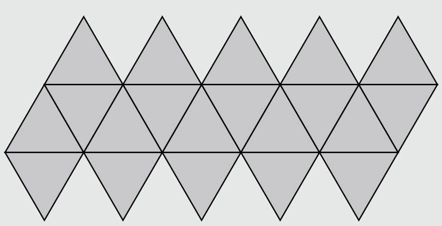
d)



e)



f)



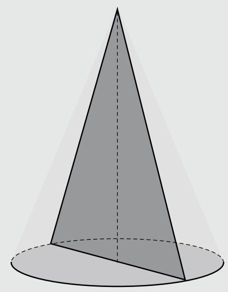
53. Todos los desarrollos se corresponden con un poliedro.

54. a) Cinco. b) Tres.

Cuerpos de revolución

55. $$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3 = \frac{4}{3} \cdot 3{,}14 \cdot \left(\frac{3\,474\,000}{2}\right)^3 = 2{,}19 \cdot 10^{19}\ \text{m}^3$$

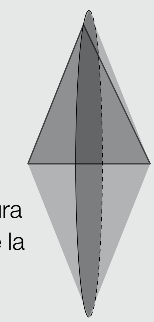
56.



Un triángulo isósceles girando alrededor de su altura genera un cono con diámetro de la base igual a la base del triángulo y con altura igual a la altura del triángulo.

Girando alrededor de la base, se generaría una figura compuesta formada por dos conos unidos por la base.

El radio de las bases sería igual a la altura del triángulo isósceles, y la altura de los conos sería igual a la mitad de la longitud de la base del triángulo isósceles.



57. Respuesta abierta.

58. Respuesta abierta.

59. a) Cubo, es un poliedro.

b) Pirámide recta hexagonal, es un poliedro.

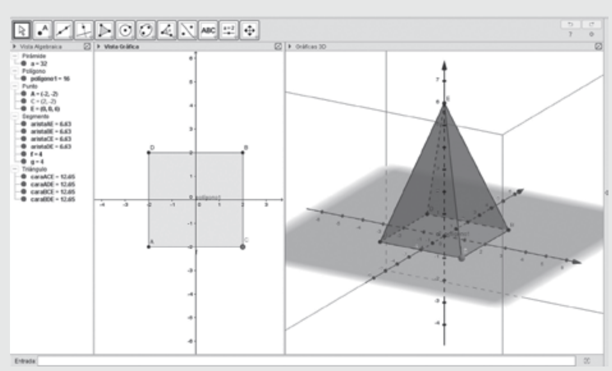
c) Cilindro, es un cuerpo de revolución.

d) Prisma recto cuadrangular, es un poliedro.

e) Cono, es un cuerpo de revolución.

f) Dodecaedro, es un poliedro.

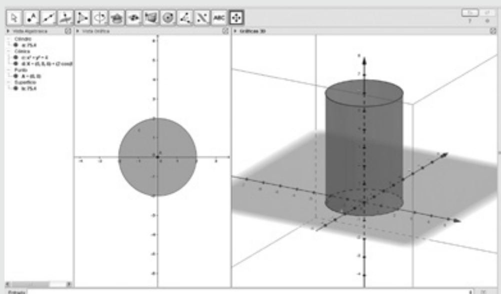
60. a)



1. En la *Vista Gráfica,* se selecciona el punto A (–2, –2).
2. Con la opción *Segmento de longitud* dada, se dibuja un segmento con origen en el punto A y con una longitud de 4 cm.

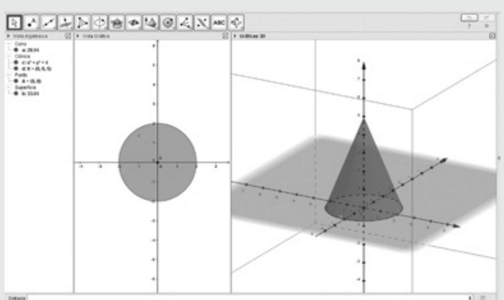
3. Con la opción *Polígono regular,* se selecciona el segmento dibujado y se introduce 4 en el número de vértices.
4. En la *Vista Gráfica 3D,* con la opción *Pirámide o cono desde su base,* se selecciona el cuadrado de la base y se introduce el valor 6 en la altura.

b)



1. En la *Vista Gráfica,* se selecciona el punto A (0,0)
2. Con la opción *Circunferencia (centro, radio),* se selecciona el punto A como centro de la circunferencia y se introduce el valor 2 como radio.
3. En la *vista 3D,* con la opción *Prisma o Cilindro desde su base,* se selecciona el círculo dibujado anteriormente como base del cilindro y se introduce el valor 6 como altura.

c)

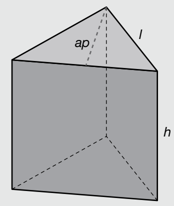


1. En la *Vista Gráfica,* se selecciona el punto A (0,0).
2. Con la opción *Circunferencia (centro, radio),* se selecciona el punto A como centro de la circunferencia y se introduce el valor 2 como radio.
3. En la *vista 3D,* con la opción *Pirámide o Cono desde su base,* se selecciona el círculo dibujado anteriormente como base del cono y se introduce el valor 5 como altura.

Áreas de los cuerpos geométricos

61. $A_{cubo} = 6 \cdot L^2 = 6 \cdot 25^2 = 3\,750 \text{ cm}^2$

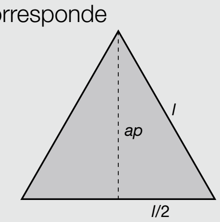
62.



ÁREA LATERAL: 3 rectángulos de base longitud del lado del triángulo equilátero de la base y altura igual a la arista del prisma:

$$A_{lateral} = 3 \cdot (l \cdot h)$$

ÁREA TOTAL: suma del ÁREA LATERAL más área de las bases, que corresponde al área de dos triángulos equiláteros de lado *l:*



$$ap = \sqrt{l^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot l$$

$$A_{bases} = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot l \cdot ap\right) = l \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot l = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot l^2$$

$$A_{total} = 3 \cdot l \cdot h + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot l^2$$

63. a) Área total: el área de 4 triángulos equiláteros de 60 cm de lado:

$$h = \sqrt{60^2 - 30^2} = \sqrt{2\,700} = 51962 \text{ cm}$$

$$A_{triángulo} = \frac{1}{2} \cdot 60 \cdot 51962 = 1558{,}86 \text{ cm}^2$$

$$A_{total} = 4 \cdot A_{triángulo} = 6\,235{,}44 \text{ cm}^2$$

b) Área total: el área de 8 triángulos equiláteros de 12 cm de lado:

$$h = \sqrt{12^2 - 6^2} = \sqrt{108} = 10\,392 \text{ cm}$$

$$A_{triángulo} = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 10{,}392 = 62{,}34 \text{ cm}^2$$

$$A_{total} = 8 \cdot A_{triángulo} = 8 \cdot 62{,}34 = 498{,}72 \text{ cm}^2$$

c) Área total: el área de 20 triángulos equiláteros de 8 cm de lado:

$$h = \sqrt{8^2 - 4^2} = \sqrt{48} = 6{,}93 \text{ cm}$$

$$A_{triángulo} = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 6{,}93 = 27{,}72 \text{ cm}^2$$

$$A_{total} = 20 \cdot A_{triángulo} = 20 \cdot 27{,}72 = 554{,}4 \text{ cm}^2$$

d) Área total: el área de 6 cuadrados de 15 cm de lado:

$$A_{cuadrado} = L^2$$

$$A_{cubo} = 6 \cdot L^2 = 6 \cdot 15^2 = 1350 \text{ cm}^2$$

64. $A = 6 \cdot L^2 \rightarrow L = \sqrt{\frac{A}{6}} = \sqrt{\frac{96}{6}} = 4 \text{ cm}$

65. $A_{lateral} = 4 \cdot 8 \cdot 10 = 320 \text{ cm}^2$

$$A_{total} = A_{lateral} + A_{bases} = 320 + 2 \cdot 8^2 = 448 \text{ cm}^2$$

66. $A_{lateral} = 4 \cdot 60^2 = 14\,400 \text{ cm}^2$

$A_{total} = 6 \cdot 60^2 = 21600 \text{ cm}^2$

67. $A_{cilindro} = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot (h+r) = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 4 \cdot (7+4) = 276{,}32 \text{ cm}^2$

$A_{cono} = \pi \cdot r \cdot (g+r) = \pi \cdot r \cdot \left(\sqrt{h^2+r^2}+r\right) =$

$= 3{,}14 \cdot 4 \cdot \left(\sqrt{7^2+4^2}+4\right) = 151{,}50 \text{ cm}^2$

68. a) $ap = \sqrt{4^2-2^2} = 3{,}46 \text{ cm}$

b) $A_{base} = \frac{1}{2} \cdot P \cdot ap = \frac{1}{2} \cdot (6 \cdot 4) \cdot 3{,}46 = 41{,}52 \text{ cm}^2$

c) $A_{lateral} = 6 \cdot 9 \cdot 4 = 216 \text{ cm}^2$

d) $A_{total} = A_{lateral} + 2 \cdot A_{base} = 216 + 2 \cdot 41{,}52 =$
$= 299{,}04 \text{ cm}^2$

69. $A_{lateral} = 2 \cdot 5 \cdot 40 + 2 \cdot 5 \cdot 6 = 460 \text{ cm}^2$

$A_{total} = A_{lateral} + A_{bases} = 460 + 2 \cdot 40 \cdot 6 = 940 \text{ cm}^2$

70. $ap = \sqrt{h^2+\left(\frac{l}{2}\right)^2} = \sqrt{12^2+5^2} = 13 \text{ cm}$

Volúmenes de los cuerpos geométricos

71. a) $A_{cubo} = L^3 = 8^3 = 512 \text{ cm}^3$

b) $A_{cubo} = A_{base} \cdot \sqrt{A_{base}} = 16 \cdot \sqrt{16} = 64 \text{ cm}^3$

c) $A_{total} = 6 \cdot L^2 \rightarrow L = \sqrt{\frac{A_{total}}{6}}$

$A_{cubo} = \sqrt{\left(\frac{A_{total}}{6}\right)^3} = \sqrt{\left(\frac{54}{6}\right)^3} = 27 \text{ cm}^3$

72. $ap = \sqrt{3^2-1{,}5^2} = 2{,}60 \text{ cm}$

$V = A_{base} \cdot h = \left(\frac{1}{2} \cdot P \cdot ap\right) \cdot h = \left(\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 3 \cdot 2{,}6\right) \cdot 8 =$

$= 23{,}4 \cdot 8 = 187{,}2 \text{ cm}^3$

73. $V_{pirámide} = \frac{1}{3} \cdot A_{base} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot l^2 \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 5^2 \cdot 14 =$

$= 116{,}67 \text{ cm}^3$

74. $V_{cono} = \frac{1}{3} \cdot A_{base} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2 \cdot h =$

$= \frac{1}{3} \cdot 3{,}14 \cdot \left(\frac{10}{2}\right)^2 \cdot 6 = 157 \text{ cm}^3$

75. $V_{esfera} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 = \frac{4}{3} \cdot 3{,}14 \cdot 6^3 = 904{,}32 \text{ cm}^3$

76.

Cuerpo	h (cm)	Área (cm²)	Volumen (cm³)
Prisma recto pentagonal	10	335	425
Pirámide recta octogonal	h	$42+12 \cdot \sqrt{12{,}25+h^2}$	$14 \cdot h$
Cilindro recto	6	70,65	42,39

77. $r_{cono} = 4 \cdot \sqrt{\frac{h_{cilindro}}{3}}$

78. El cono de la ilustración ya tiene 5 cm de radio de la base.

$V = \frac{1}{3} \cdot A_{base} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 3{,}14 \cdot 5^2 \cdot 12 =$

$= 314 \text{ cm}^3 = 314 \text{ mL}$

Problemas

79. $P = 2 \cdot 8 + 6 \cdot 2 = 28$,

Coste $= 28 \text{ m} \cdot 9{,}95 \, €/_{m} = 278{,}60$

80. $A = \pi \cdot r^2 = 3{,}14 \cdot 3{,}5^2 = 38{,}47 \text{ m}^2$

81. $A = 4 \cdot \pi \cdot r^2 = 4 \cdot 3{,}14 \cdot 4^2 = 200{,}96 \text{ cm}^2$

82. $V = 4 \cdot 2{,}5 \cdot h = 10 \cdot h$, siendo h la altura del paralelepípedo en cm.

83. a) Cuadrado de 15 m de lado.

b) Superficie de 225 m².

84. $V = \pi \cdot r^2 \cdot h = 3{,}14 \cdot 11^2 \cdot 11{,}5 = 4\,369{,}31 \text{ cm}^3$

Capacidad de 4 369,31 mL.

85. $h = \frac{250}{3 \cdot 3{,}14} = 26{,}54 \text{ cm}$

86. $h = 15{,}92 \text{ cm}$

87. $A_{peonza} = A_{cono} + A_{semiesfera} = 170{,}05 + 157 = 327{,}05 \text{ cm}^2$

$V_{peonza} = V_{cono} + V_{semiesfera} = 78{,}50 + 261{,}67 = 340{,}17 \text{ cm}^3$

88. La ecuación para el cálculo del volumen del cono es: $V = \frac{1}{3} \cdot A_B \cdot h = \frac{\pi}{3} \cdot r^2 \cdot h$

La expresión $r^2 \cdot h$, cuando el triángulo gira alrededor del cateto mayor es (cateto menor)² ·

· cateto mayor, pero si gira alrededor del cateto menor será (cateto mayor)^2 · cateto menor.

Siempre se cumplirá: (cateto menor)^2 · cateto mayor ≤ (cateto mayor)^2 · cateto menor

Por lo tanto, el volumen del cono será mayor al hacerlo girar alrededor del cateto menor.

En el ejemplo:

cateto mayor = $\sqrt{10^2 - 6^2} = 8$ cm

a) Volumen al girar alrededor del cateto mayor:

$$V_1 = \frac{3{,}14}{3} \cdot 6^2 \cdot 8 = 301{,}44 \text{ cm}^3$$

b) Volumen al girar alrededor del cateto menor:

$$V_1 = \frac{3{,}14}{3} \cdot 8^2 \cdot 6 = 401{,}92 \text{ cm}^3$$

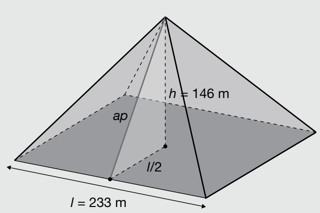
89. Tardará 565,2 minutos, que equivalen a 9 horas y 25 minutos.

90. Caben como máximo 7,92 litros de agua.

$$V_{figura} = 22 \cdot 18 \cdot 0{,}9 = 356{,}4 \text{ cm}^3$$

Pon a prueba tus competencias

1.



a) Área lateral: área de 4 triángulos de 233 m de base y altura *ap:*

$$ap^2 = h^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2$$

$$ap = \sqrt{146^2 + \left(\frac{233}{2}\right)^2} = 186{,}784 \text{ m}$$

$$A_{lateral} = 4 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 233 \cdot 186{,}784\right) = 87\,041 \text{ m}^2$$

$$A_{total} = A_{lateral} + A_{base} = 87\,041 + 233^2 = 141\,330 \text{ m}^3$$

b) $V = \frac{1}{3} \cdot A_{base} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 233^2 \cdot 146 = 2\,642\,065 \text{ m}^3$

c) $V_{bloque} = \dfrac{2\,642\,065 \text{ m}^3}{2{,}3 \cdot 10^6 \text{ bloques}} \simeq 1{,}15 \text{ m}^3/\text{bloque}$

2. a) $V_{lámpara} = A_B \cdot h = \pi \cdot r^2 \cdot h = 3{,}14 \cdot \left(\frac{14}{2}\right)^2 \cdot 23 =$

$= 3\,538{,}78 \text{ cm}^3$

b) $V_{caja} = b \cdot a \cdot h = 25 \cdot 15 \cdot 15 = 5\,625 \text{ cm}^3$

$$V_{esfera} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 = \frac{4}{3} \cdot 3{,}14 \cdot 2^3 = 33{,}49\overset{\frown}{3} \text{ cm}^3$$

$$V_{libre} = V_{caja} - V_{lámpara} = 5\,625 - 3\,538{,}78 = 2\,086{,}22 \text{ cm}^3$$

Número de bolas =

$$\frac{V_{libre}}{V_{esfera}} = \frac{2\,086{,}22}{33{,}49\overset{\frown}{3}} = 62{,}29 \text{ bolas}$$

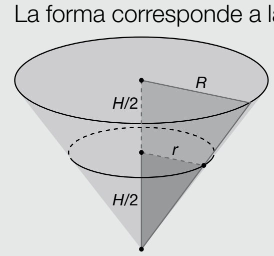
Podrán meterse 62 bolas de porexpán.

3. El volumen total extraído corresponde al de dos cilindros cuya base tiene un diámetro de 8,5 m y con una altura de 26 500 m.

$$V_{piedra} = 2 \cdot V_{cilindro} = 2 \cdot A_{base} \cdot h = 2 \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h =$$

$$= 2 \cdot 3{,}14 \cdot \left(\frac{8{,}5}{2}\right)^2 \cdot 26\,500 \simeq 3{,}01 \cdot 10^6 \text{ m}^3$$

4. La forma corresponde a la de un cono invertido.



$$V_{copa} = \frac{1}{3} \cdot A_{base} \cdot H = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot R^2 \cdot H$$

Si se llena hasta la mitad, tendremos un cono cuya altura es la mitad de la altura total (*H*/2).

El volumen de este cono sería:

$$V_{cono2} = \frac{1}{3} \cdot A_{base2} \cdot \frac{H}{2} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot \frac{H}{2} = \frac{1}{6} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot H$$

Para que fuese cierta la afirmación de que el volumen es la mitad del total, debería cumplirse:

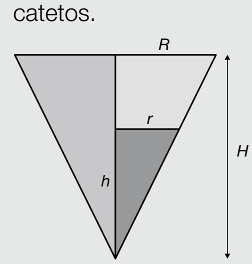
$$V_{cono2} = \frac{1}{2} \cdot V_{copa}$$

$$\frac{1}{6} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot H = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot R^2 \cdot H\right)$$

$r^2 = R^2 \rightarrow$ La igualdad es cierta si los dos radios son iguales.

Por lo tanto, si llenamos la copa hasta la mitad, no tenemos la mitad del volumen total.

Para encontrar la altura *h* para la que se cumple la afirmación de que el volumen es la mitad del volumen total, nos fijaremos en los triángulos que generan los conos al girar alrededor de uno de sus catetos.



Vemos que son triángulos semejantes, por lo que se cumple que $\frac{r}{R} = \frac{h}{H}$, de donde despejamos

$r = h \cdot \frac{R}{H}$ (Ecuación 1)

$$V_{\text{total}} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot R^2 \cdot H$$

$$V_{\text{mitad}} = \frac{1}{2} \cdot V_{\text{total}}$$

$$\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot R^2 \cdot H \quad \Rightarrow \quad r^2 \cdot h = \frac{1}{2} \cdot R^2 \cdot H$$

(Ecuación 2)

Sustituyendo r en la ecuación 2 por su la ecuación 1:

$$h^2 \cdot \frac{R^2}{H^2} \cdot h = \frac{1}{2} \cdot R^2 \cdot H$$

$$h^3 = \frac{1}{2} \cdot H^3$$

$$h = H \cdot \sqrt[3]{0,5} = 0,79 \cdot H \simeq 0,8 \cdot H \simeq \frac{4}{5} \cdot H$$

Por lo tanto, para obtener la mitad del volumen total debería llenarse la copa hasta una altura equivalente a 4/5 de la altura total.

No ocurre lo mismo en el caso de un cilindro: el área de la base es constante en toda la altura del cilindro, por lo que, una vez conocido el radio de la base, el volumen es directamente proporcional a la altura y se cumple que con una altura igual a la mitad de la inicial, el volumen es la mitad del total.

5. a) $V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 = \frac{4}{3} \cdot 3,14 \cdot \left(\frac{6}{2}\right)^3 = 113,04 \text{ cm}^3$

masa = V · densidad =

$113,04 \text{ cm}^3 \cdot 1,25 \text{ g/cm}^3 = 141,3 \text{ g}$

b) Coste = $0,1413 \text{ kg} \cdot 18,5 \text{ €/kg} = 2,61 \text{ €}$

6. $A_{\text{base}} = \pi \cdot r^2 = 3,14 \cdot \left(\frac{2,5}{2}\right)^2 = 4,91 \text{ m}^2$

$$A_{\text{cilindro}} = A_{\text{base}} \cdot h_{\text{cilindro}} = 4,91 \cdot h_{\text{cilindro}}$$

$$A_{\text{cono}} = \frac{1}{3} \cdot A_{\text{base}} \cdot h_{\text{cono}} = \frac{4,91}{3} \cdot h_{\text{cono}}$$

$$A_{\text{total}} = A_{\text{cilindro}} + A_{\text{cono}} = 4,91 \cdot h_{\text{cilindro}} + \frac{4,91}{3} \cdot h_{\text{cono}} = 25 \text{ m}^3$$

$$4,91 \cdot \left(h_{\text{cilindro}} + \frac{1}{3} \cdot h_{\text{cono}}\right) = 25$$

$$h_{\text{cilindro}} + \frac{1}{3} \cdot h_{\text{cono}} = 5,1$$

Las alturas del cilindro y del cono deben cumplir la relación: $h_{\text{cilindro}} = 5,1 - \frac{1}{3} \cdot h_{\text{cono}}$

7. a) Los meridianos son los círculos máximos que pasan por el eje y son perpendiculares al ecuador.

Si consideramos L la longitud del meridiano, por la definición de metro tenemos:

$$1 \text{ m} = \frac{1}{1 \cdot 10^7} \cdot \frac{L}{4}$$

$$L = 4 \cdot 10^7 = 2 \cdot \pi \cdot r_{\text{Tierra}}$$

$$r_{\text{Tierra}} = \frac{4 \cdot 10^7}{2 \cdot 3,14} = 6\,366 \text{ km}$$

$$A_{\text{Tierra}} = 4 \cdot \pi \cdot r^2_{\text{Tierra}} = 4 \cdot 3,14 \cdot 6\,366^2 = 5,1 \cdot 10^8 \text{ km}^3$$

b) $A_{\text{Tierra firme}} = (1 - 0,708) \cdot A_{\text{Tierra}} = 1,5 \cdot 10^8 \text{ km}^2$

c) $V_{\text{Tierra}} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3_{\text{Tierra}} = \frac{4}{3} \cdot 3,14 \cdot 6\,366^3 =$

$= 1,08 \cdot 10^{12} \text{ km}^3$

d) masa = V_{Tierra} · densidad = $1,08 \cdot 10^{27}$ cm^3 5,51 g/cm^3 = $5,95 \cdot 10^{27}$ g = $5,59 \cdot 10^{24}$ kg