Unidad 7

1. Serán semejantes si los lados tienen igual razón de semejanza:

$$k_1 = \frac{3}{9} = \frac{1}{3} \qquad k_2 = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \qquad k_3 = \frac{7}{49} = \frac{1}{7}$$

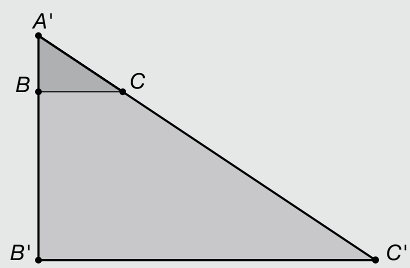
$$k_1 \neq k_2 \neq k_3$$

No son semejantes.

2. Por ser semejantes, sus lados homólogos mantienen la razón de semejanza:

$$k = \frac{10}{5} = \frac{12}{x} \rightarrow x = \frac{12 \cdot 5}{10} = 6$$

3.



$$b' = \sqrt{a'^2 + c'^2} = \sqrt{6^2 + 4^2} = 7{,}21 \text{ m}$$

Razón de semejanza:

$$k = \frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}$$

$$k = \frac{6}{a} = \frac{7{,}21}{b} = \frac{4}{c}$$

$$k = 4 \rightarrow \begin{cases} a = 1{,}5 \text{ m} \\ b = 1{,}8 \text{ m} \end{cases}$$

4. Como en ambos triángulos conocemos un ángulo (el recto) y los lados que lo forman, comprobaremos el criterio 3: *Dos triángulos son semejantes si tienen un ángulo igual y los lados que lo forman son proporcionales.*

$$k_1 = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \qquad k_2 = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

$$k_1 = k_2$$

Son triángulos semejantes.

5. a) $k = \frac{P'}{P} \rightarrow P' = k \cdot P = \frac{1}{4} \cdot 200 = 50 \text{ cm}$

b) $P' = 6 \cdot L' \rightarrow L' = \frac{P'}{6} = \frac{50}{6} = 8{,}33 \text{ cm}$

$P = 6 \cdot L \rightarrow L = \frac{P}{6} = \frac{200}{6} = 33{,}33 \text{ cm}$

Mantienen la razón de semejanza:

$$k = \frac{L'}{L} = \frac{8{,}33}{33{,}33} = 0{,}25 = \frac{1}{4}$$

c) Por ser dos figuras semejantes, sus apotemas también tienen $k = \frac{1}{4}$ como razón de proporcionalidad.

6. $k = \frac{P'}{P} \rightarrow P' = k \cdot P = 5 \cdot 49{,}98 = 249{,}9 \text{ cm}$

$$P' = 2 \cdot \pi \cdot r' \rightarrow r' = \frac{P'}{2 \cdot \pi} = \frac{249{,}9}{2 \cdot 3{,}14} = 39{,}8 \text{ cm}$$

7. $k = \frac{r'}{r} = \frac{h'}{h}$

$$\frac{2}{5} = \frac{r'}{7{,}5} = \frac{h'}{20} \rightarrow \begin{cases} r' = \frac{2}{5} \cdot 7{,}5 = 3 \text{ cm} \\ h' = \frac{2}{5} \cdot 20 = 8 \text{ cm} \end{cases}$$

La longitud de la circunferencia será:

$$C' = 2 \cdot \pi \cdot r' = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 3 = 18{,}84 \text{ cm}$$

8. La razón de las áreas es k^2, siendo k la razón de semejanza de los polígonos, por lo tanto:

$$k_{\text{polígonos}} = \sqrt{k_{\text{áreas}}} = \sqrt{\frac{64}{121}} = \frac{8}{11}$$

9. $k = \frac{60}{150} = \frac{2}{5}$

$$k^2 = \frac{A_{\text{menor}}}{A_{\text{mayor}}} \rightarrow A_{\text{menor}} = k^2 \cdot A_{\text{mayor}} = \left(\frac{2}{5}\right)^2 \cdot 500 = 80 \text{ cm}^2$$

10. $k^3 = \frac{V'}{V} \rightarrow V' = k^3 \cdot V = \left(\frac{7}{6}\right)^3 \cdot 904{,}78 = 1\,436{,}76 \text{ dm}^3$

$$V_{\text{esfera}} = \frac{4}{3} \cdot p \cdot r^3_{\text{esfera}} \rightarrow r_{\text{esfera}} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot V_{\text{esfera}}}{4 \cdot p}}$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 904{,}73}{4 \cdot p}} = 6 \text{ dm}$$

$$r' = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 1\,436{,}76}{4 \cdot p}} = 7 \text{ dm}$$

Comprobamos que cumplen la razón de semejanza:

$$k = \frac{r'}{r} \rightarrow \frac{7}{6} = \frac{7}{6}$$

11. $V = a \cdot b \cdot h = 3 \cdot 8 \cdot 5 = 120 \text{ cm}^3$

Para que los ortoedros sean semejantes, la razón de sus volúmenes debe cumplir que:

$$k^3 = \frac{V'}{V} = \frac{25\,920}{120} = 216$$

La razón entre los lados homólogos será:

$$k = \sqrt[3]{216} = 6$$

Por lo tanto:

$$k = \frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{h'}{h} = 6$$

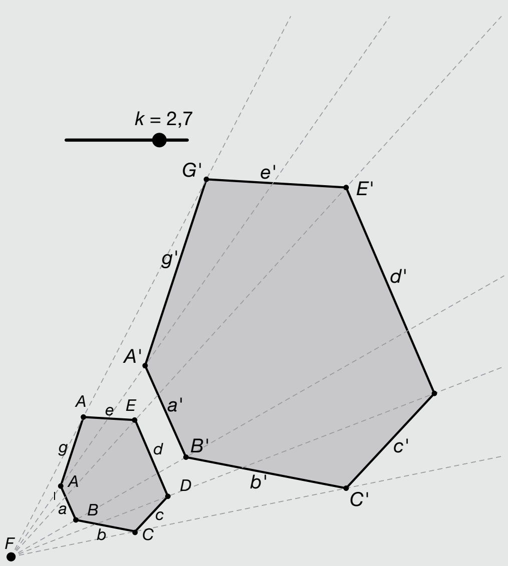
$$a' = 6 \cdot a = 6 \cdot 3 = 18 \text{ cm}$$

$$b' = 6 \cdot b = 6 \cdot 8 = 48 \text{ cm}$$

$$h' = 6 \cdot h = 6 \cdot 5 = 30 \text{ cm}$$

12. Respuesta abierta.

Sirva como ejemplo la siguiente figura:



Se ha dibujado siguiendo los pasos que se detallan en el texto, pero definiendo un polígono de 6 vértices, en lugar de uno de 4.

13. $h = \sqrt{c^2 + b^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10 \text{ cm}$

14. a) $h = \sqrt{4{,}5^2 - 1^2} = 4{,}39 \text{ cm}$

b) $d = \sqrt{4{,}5^2 - 3{,}5^2} = 2{,}83 \text{ cm}$

15. Aplicando el teorema de Tales:

$$\frac{6}{4{,}5} = \frac{3}{y} = \frac{x}{7{,}5} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{6}{4{,}5} = \dfrac{3}{y} \rightarrow y = \dfrac{3 \cdot 4{,}5}{6} = 2{,}25 \text{ cm} \\ \dfrac{6}{4{,}5} = \dfrac{x}{7{,}5} \rightarrow x = \dfrac{6 \cdot 7{,}5}{4{,}5} = 10 \text{ cm} \end{cases}$$

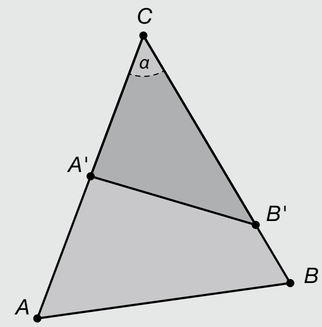
16. Las rectas *a, b, c* y *d* son paralelas, por lo que aplicando el teorema de Tales, los segmentos determinados al cortar las rectas secantes son proporcionales.

$$\frac{12}{30} = \frac{7}{x} = \frac{3}{y} \rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{7 \cdot 30}{12} = 17{,}5 \text{ cm} \\ y = \dfrac{3 \cdot 30}{12} = 7{,}5 \text{ cm} \end{cases}$$

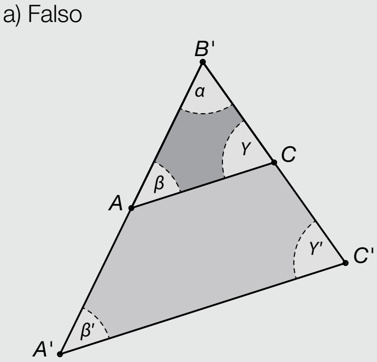
Actividades finales

Semejanza en las figuras planas

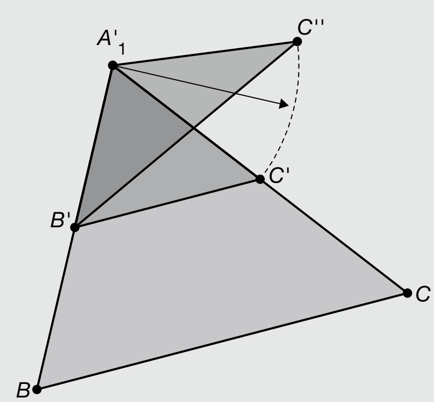
17.



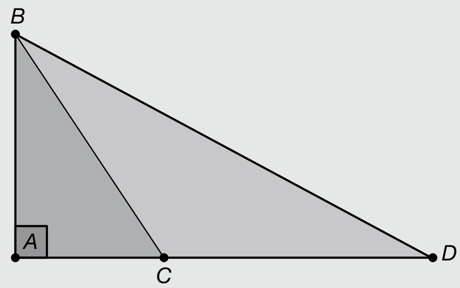
a) Falso



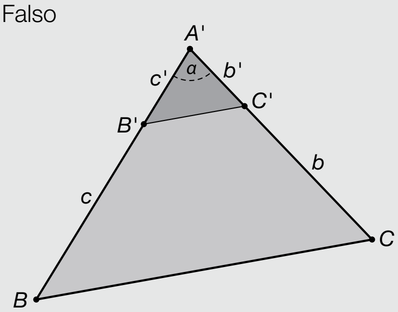
b) Verdadero



c) Falso

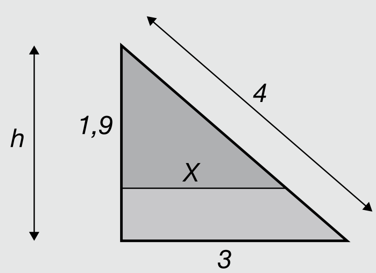


d) Falso



e) Verdadero

18.



$h = \sqrt{4^2 - 3^2} = 2{,}65 \text{ m}$

$\dfrac{x}{3} = \dfrac{1{,}9}{h} \rightarrow x = \dfrac{1{,}9 \cdot 3}{2{,}65} = 2{,}15 \text{ m}$

19. Aplicando el teorema de Pitágoras en el triángulo menor se obtiene:

$$(x+3)^2 = x^2 + (x+1{,}5)^2$$

$$x^2 - 3x - 6{,}75 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = -1{,}5 \\ x_2 = 4{,}5 \end{cases}$$

La solución tiene que ser positiva, por lo que las dimensiones del triángulo menor son:

AC: $x = 4{,}5$ cm

AB: $x + 1{,}5 = 6$ cm

BC: $x + 3 = 7{,}5$ cm

La razón de semejanza entre los dos triángulos es:

$$k = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC} = 2 \rightarrow \begin{cases} 2 = \dfrac{A'C'}{4{,}5} \rightarrow A'C' = 9 \text{ cm} \\ 2 = \dfrac{B'C'}{7{,}5} \rightarrow B'C' = 15 \text{ cm} \end{cases}$$

20. a) Son todos iguales y miden 120º.

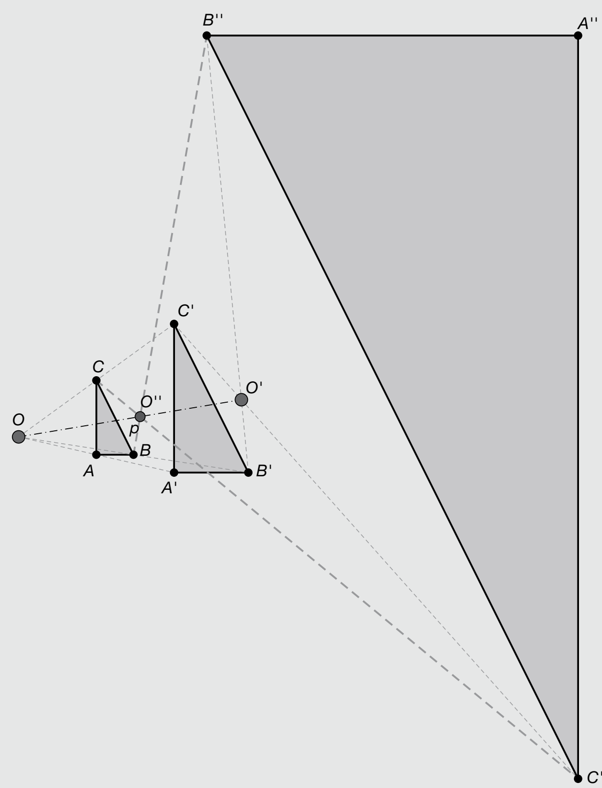
b) $k = \dfrac{F'A'}{FA} = \dfrac{1{,}2}{0{,}8} = 1{,}5$

Al escoger otro par de homólogos la razón se mantiene, ya que por ser polígonos regulares de igual número de lados son semejantes.

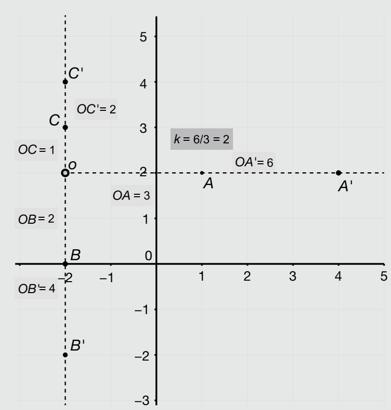
21. $k = \dfrac{h'}{h} \rightarrow h = \dfrac{h'}{k} = 15 : \dfrac{5}{3} = 9 \text{ dm}$

$h = 2 \cdot L \rightarrow L = \dfrac{h}{2} = 4{,}5 \text{ dm}$

22. Se puede transformar el triángulo inicial en el final mediante una homotecia de centro *O*" alineado con *O* y *O*', y razón $k = -10$



23. La razón de homotecia es $k = 2$.



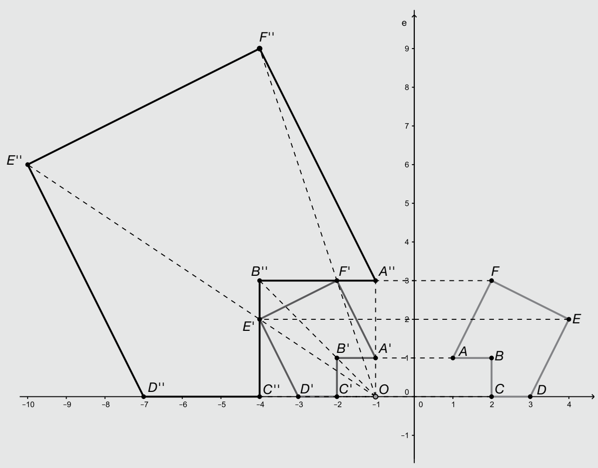
24. Por ser triángulos rectángulos: $\hat{C} = \hat{C}' = 90°$.

Por ser isósceles: $\hat{A} = \hat{B} = \hat{A}' = \hat{B}' = 45°$.

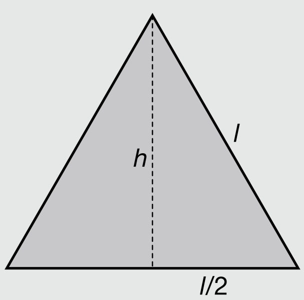
Tienen los tres ángulos iguales, por lo que son semejantes y, por lo tanto, homotéticos.

El centro de homotecia se encuentra en la intersección de AB con CC'. Midiendo los lados comprobaremos que la razón es $k = -\dfrac{1}{2}$.

25. La composición resultante es una semejanza.



26.



$$h_{mayor} = 2 \cdot \frac{5\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}$$

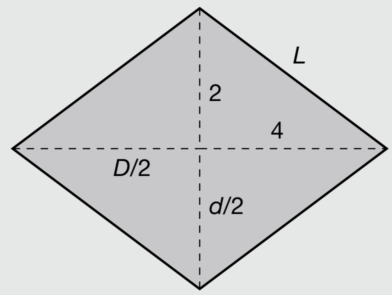
Por ser un triángulo equilátero:

$$h^2 = l^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2 = l^2 - \frac{l^2}{4} = \frac{3}{4} \cdot l^2$$

$$l = \sqrt{\frac{4}{3} \cdot h^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot h = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot 5 \cdot \sqrt{3} = 10 \text{ cm}$$

Perímetro = $3 \cdot l = 3 \cdot 10 = 30$ cm

27.



Las dimensiones del rombo inicial son:

$$L = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} = 2 \cdot \sqrt{5} \text{ cm}$$

$$P = 4 \cdot L = 4 \cdot \left(2 \cdot \sqrt{5}\right) = 8 \cdot \sqrt{5} \text{ cm}$$

$$A = \frac{D \cdot d}{2} = \frac{8 \cdot 4}{2} = 16 \text{ cm}^2$$

Calculamos ahora las dimensiones del semejante:

$$k = \frac{L'}{L} = \frac{P'}{P} \rightarrow \frac{7}{2} = \frac{L'}{2 \cdot \sqrt{5}} = \frac{P'}{8 \cdot \sqrt{5}} \rightarrow \begin{cases} L' = \frac{7}{2} \cdot \left(2 \cdot \sqrt{5}\right) = 7 \cdot \sqrt{5} \simeq 15{,}65 \text{ cm} \\ P' = \frac{7}{2} \cdot \left(8 \cdot \sqrt{5}\right) = 28 \cdot \sqrt{5} \simeq 62{,}60 \text{ cm} \end{cases}$$

El área será:

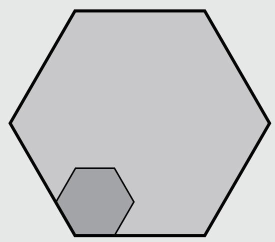
$$k^2 = \frac{A'}{A} \rightarrow A' = k^2 \cdot A = \left(\frac{7}{2}\right)^2 \cdot 16 = 196 \text{ cm}^2$$

28. a) 9 cm b) $k = \sqrt{\dfrac{13}{46}}$

29.

	Pirámide mayor	Pirámide menor
Lado de la base (cm)	10,97	5,20
Altura de la pirámide (cm)	6,55	3,11
Arista lateral (cm)	10,15	4,81
Apotema (cm)	8,54	4,05
Área de la base (cm²)	120,3	27
Área de una cara lateral (cm²)	46,84	10,53
Área lateral (cm²)	187,36	42,12
Área total (cm²)	307,66	69,12
Volumen (cm³)	262,65	27,99

30.



a) $k = \dfrac{10}{3}$

b) $k = \dfrac{10}{3}$

c) $k^2 = \dfrac{100}{9}$

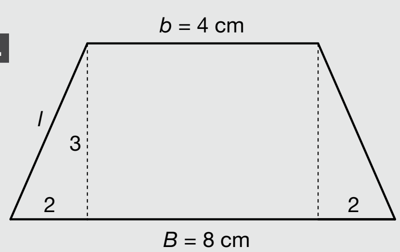
31. ACTIVIDAD EN GRUPO

El más económico es el pintor A.

32. Escala: 1:5 000 000.

La distancia real entre las dos ciudades es de 120 km.

33.



$l = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$

Altura:
$h' = k \cdot h = 4 \cdot 3 = 12$ cm

Base mayor:
$B' = k \cdot B = 4 \cdot 8 = 32$ cm

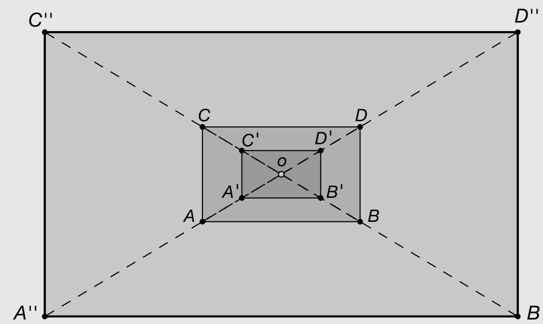
Base menor:
$b' = k \cdot b = 4 \cdot 4 = 16$ cm

Lados: $l' = k \cdot l = 4 \cdot \sqrt{13} \simeq 14{,}42$ cm

Perímetro:
$P' = k \cdot P = 4 \cdot \left(4 + 8 + 2 \cdot \sqrt{13}\right) \simeq 76{,}84$ cm

Área:
$A' = k^2 \cdot A = k^2 \cdot \left(\dfrac{D+d}{2} \cdot h\right) = 4^2 \cdot \left(\dfrac{4+8}{2} \cdot 3\right) = 288 \text{ cm}^2$

34.

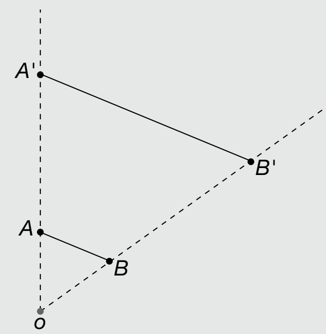


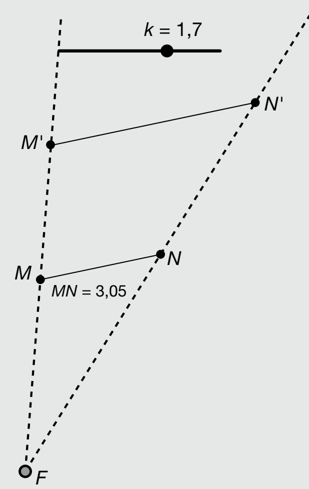
Sí son homotéticos.

Su razón de homotecia es:

$k_3 = \dfrac{C'D'}{C''D''} = \dfrac{CD \cdot k_1}{CD \cdot k_2} = \dfrac{k_1}{k_2} = 3 \div \dfrac{1}{2} = 6$

35.

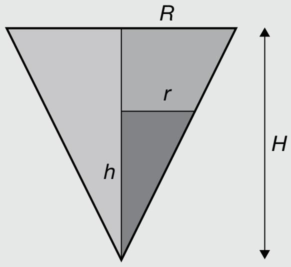




Los segmentos son paralelos.

Se deduce del teorema de Tales. Los triángulos *FMN, FM'N'* son semejantes, por lo que los segmentos *MN, M'N'* son paralelos.

36.



$$V_{cono} = \frac{1}{3} \cdot A_{base} \cdot h$$

Como se trata de semejanza de volúmenes:

$$V_{final} = \frac{V_{inicial}}{8}$$

$$k^3 = \frac{V_{final}}{V_{inicial}} = \frac{\left(\frac{V_{inicial}}{8}\right)}{V_{inicial}} = \frac{1}{8} \rightarrow k = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2}$$

La relación entre las alturas de los conos será:

$$k = \frac{h}{H} \rightarrow h = k \cdot H = \frac{1}{2} \cdot 20 = 10 \text{ cm}$$

Se deberá cortar a una altura desde la base de:

$$H - h = 20 - 10 = 10 \text{ cm}$$

37.

$$V = \frac{4}{3} \cdot p \cdot r^3$$

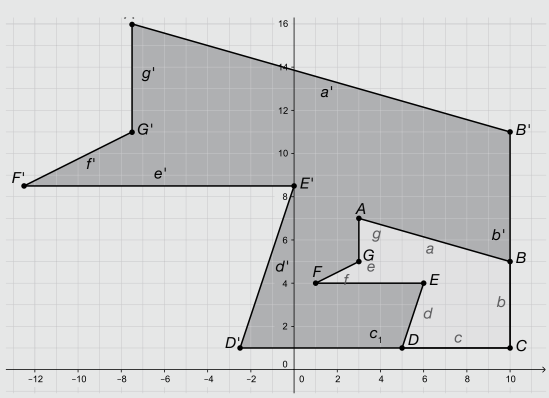
$$k^3 = \frac{V'}{V} \rightarrow V' = k^3 \cdot V = \left(\frac{3}{4}\right)^3 \cdot V = \frac{27}{64} \cdot V$$

$$V_{encerrado} = V - V' = V - \frac{27}{64} \cdot V = \frac{37}{64} \cdot V = \frac{37}{64} \cdot \left(\frac{4}{3} \cdot 3{,}14 \cdot 16^3\right)$$

$$V_{encerrado} = 9\,914{,}03 \text{ cm}^3$$

Obtención de figuras semejantes con recursos digitales (GeoGebra)

38.

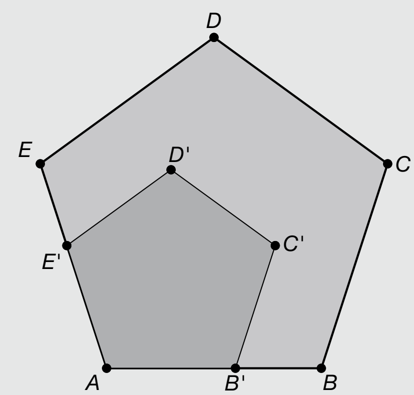


Dibujamos los puntos *A, B, C, D, E, F* y *G* a partir de las coordenadas del dibujo mediante la instrucción *punto[{coordenada x, coordenada y}].*

Con la opción *Polígono* se unen los puntos, de modo que tenemos la representación del polígono dibujado en la figura.

Se selecciona la opción *Homotecia*. A continuación se selecciona el polígono dibujado y, como centro de homotecia, un punto cualquiera del plano. En la resolución se ha tomado el punto *C*. Como valor del factor de escala, introducimos 2,5.

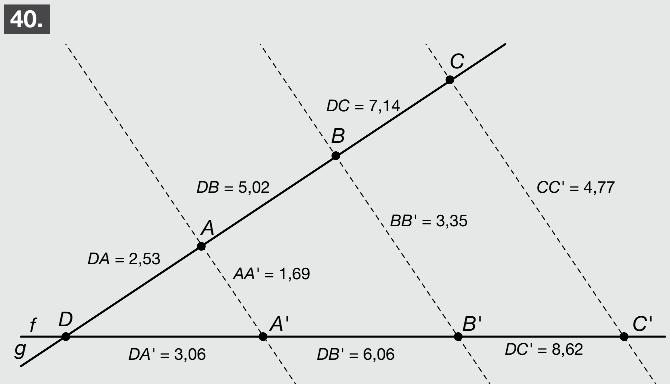
39.



Con la opción *Polígono regular* se dibuja el segmento *AB* y se introduce el valor 5 como número de vértices.

Con la opción *Homotecia* se selecciona el pentágono dibujado; como centro, cualquier punto del plano (en el ejemplo se ha tomado como centro el punto *A*), y como razón de homotecia, 0,6.

40.

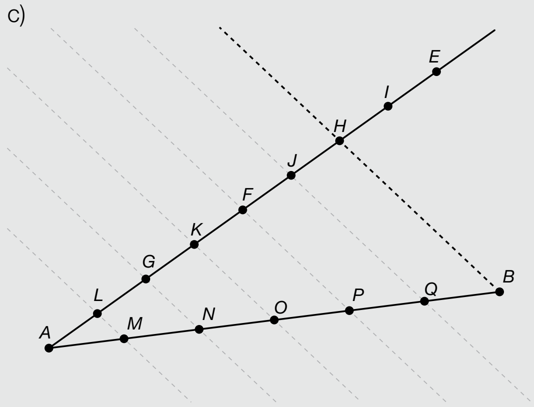


a) Sí. Están en la posición de Tales, por lo que son semejantes.

b) En el ejemplo dibujado:

$$k = \frac{DA'}{DA} = \frac{DB'}{DB} = \frac{DC'}{DC} = 1{,}21$$

c)



Se dibuja una semirrecta con origen uno de los extremos del segmento *AB*.

Se selecciona un punto *E* en la semirrecta.

Con la opción *Punto medio o centro,* que se encuentra en el menú *Punto,* se va dividiendo la semirrecta en partes iguales. Primero se seleccionan los puntos *A* y *E* para encontrar el punto medio *F*. A continuación se seleccionan los puntos *A* y *F* para encontrar el punto medio *G*, y los puntos *E* y *F* para encontrar el punto medio *H*, y así sucesivamente hasta tener las suficientes partes iguales para dividir el segmento *AB*.

Se une el extremo del sexto segmento en el que se ha divido la semirrecta (el punto *H*) con el extremo *B* del segmento a dividir, mediante una semirrecta con origen *B* y que pase por *H*.

Se trazan paralelas a la semirrecta obtenida que pasen por los puntos en los que se ha dividido la semirrecta con origen *A*.

Mediante la opción *Intersección* del menú *Punto*, se obtienen los puntos de intersección de las paralelas con el segmento, que lo dividirán en 6 partes.

Obtención indirecta de medidas

41. Por semejanza de triángulos:

$$\frac{3{,}75}{1} = \frac{H}{1{,}55} \rightarrow H = 3{,}75 \cdot 1{,}55 = 5{,}81\,\text{m}$$

42. Por semejanza de triángulos:

$$\frac{25}{5} = \frac{L}{3} \rightarrow L = \frac{25 \cdot 3}{5} = 15\,\text{m}$$

43. Respuesta abierta.

44. a) La ciudad 1 se encuentra a 20,84 km del hospital.

b) La distancia entre las ciudades 1 y 2 es de 57,88 km.

La distancia entre las ciudades 1 y 3 es de 160,78 km.

45. a) El ángulo de incidencia debe ser igual al ángulo de salida; por lo tanto, tenemos dos triángulos rectángulos semejantes de alturas 15 cm y 36 cm y bases *x* y 50 – *x*, respectivamente.

Por lo tanto:

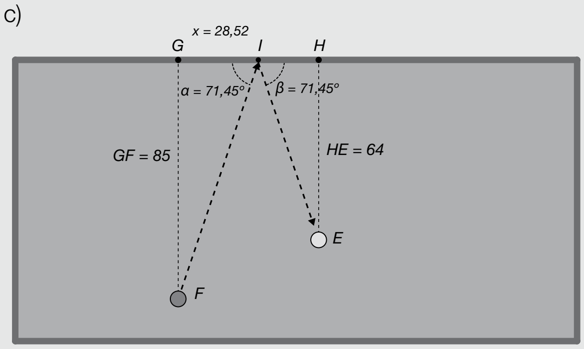
$$\frac{36}{15} = \frac{50 - x}{x}$$

$$36\,x = 150 - 15\,x \rightarrow x = 14{,}71$$

La bola blanca debe golpear a una distancia de 14,71 cm a la derecha de su posición actual.

b) Debería golpear en el mismo punto que la bola blanca.

c)



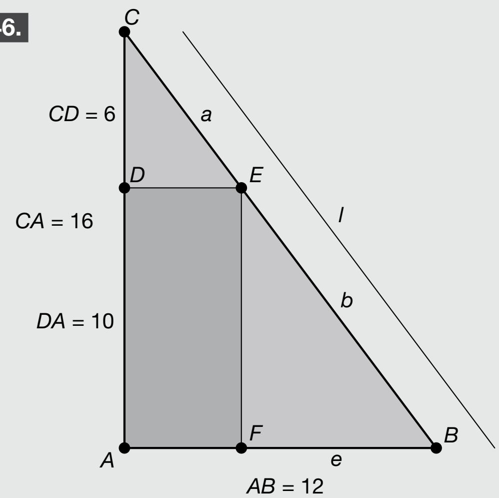
$$\frac{64}{85} = \frac{50 - x}{x}$$

$$64\,x = 4\,250 - 85\,x \rightarrow x = 28{,}52\text{ cm}$$

Deberá golpear en el lado superior a una distancia de 28,52 cm a la derecha de su posición actual.

Problemas

46.



$l = \sqrt{16^2 + 12^2} = 20\ \text{m}$

$\frac{6}{16} = \frac{12-e}{12} \rightarrow e = 7{,}5\ \text{m}$

Triángulo superior:

$A = \frac{1}{2} \cdot (12 - 7{,}5) \cdot 6 = 13{,}5\ \text{m}^2$

Rectángulo:

$A = 10 \cdot (12 - 7{,}5) = 45\ \text{m}^2$

Triángulo inferior:

$A = \frac{1}{2} \cdot 7{,}5 \cdot 10 = 37{,}5\ \text{m}^2$

47. Los conos son proporcionales, con razón: $k = \frac{5}{8}$

Por lo tanto, la relación entre los radios será:

$k = \frac{r}{R} = \frac{3}{R} = \frac{5}{8} \rightarrow R = \frac{3 \cdot 8}{5} = 4{,}8\ \text{cm}$

La generatriz se obtendrá como la hipotenusa del triángulo de catetos altura mayor y radio mayor:

$g = \sqrt{8^2 + 4{,}8^2} = 9{,}33\ \text{cm}$

48. a) Medidas a escala real:

Largo: $10{,}5 \cdot 43 = 451{,}5\ \text{cm} = 4{,}515\ \text{m}$

Ancho: $5 \cdot 43 = 215\ \text{cm} = 2{,}15\ \text{m}$

Alto: $4{,}5 \cdot 43 = 193{,}5\ \text{cm} = 1{,}935\ \text{m}$

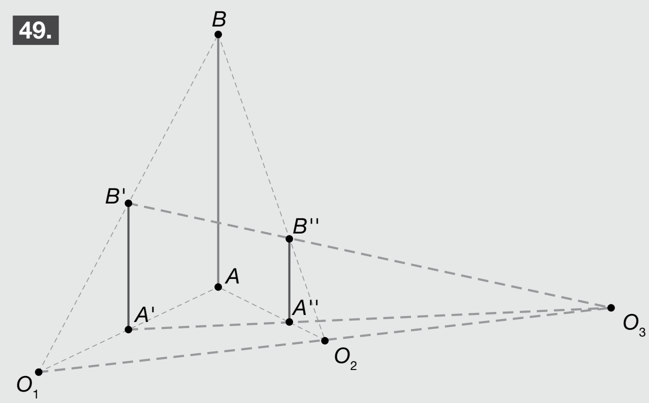
b) Medidas a escala 10:18

Largo: $4{,}515 \cdot \frac{10}{18} = 2{,}51\ \text{m}$

Ancho: $2{,}15 \cdot \frac{10}{18} = 1{,}19\ \text{m}$

Alto: $1{,}935 \cdot \frac{10}{18} = 1{,}075\ \text{m}$

49.



50. $\frac{1{,}75\ \text{cm}}{50\ \text{km}} = \frac{1{,}75\ \text{cm}}{5\,000\,000\ \text{cm}} \rightarrow E = 7 : 20\,000\,000$

$AB = \frac{1{,}7\ \text{cm}}{E} = 48{,}57\ \text{km}$

$AC = \frac{0{,}9\ \text{cm}}{E} = 25{,}71\ \text{km}$

$AD = \frac{1{,}6\ \text{cm}}{E} = 45{,}71\ \text{km}$

$AE = \frac{2{,}4\ \text{cm}}{E} = 68{,}57\ \text{km}$

$BC = \frac{1{,}1\ \text{cm}}{E} = 31{,}43\ \text{km}$

$BD = \frac{2{,}3\ \text{cm}}{E} = 65{,}71\ \text{km}$

$BE = \frac{1{,}9\ \text{cm}}{E} = 54{,}29\ \text{km}$

$CD = \frac{1\ \text{cm}}{E} = 28{,}57\ \text{km}$

$CE = \frac{1{,}4\ \text{cm}}{E} = 40{,}0\ \text{km}$

$DE = \frac{1{,}2\ \text{cm}}{E} = 34{,}29\ \text{km}$

51. a) $E_2 = 1{,}25 \cdot E_{\text{inicial}} = \frac{1{,}25}{200} = \frac{1}{160} \rightarrow E_2 = 1 : 160$

b) $E_3 = 0{,}40 \cdot E_2 = \frac{0{,}40}{160} = \frac{1}{400} \rightarrow E_3 = 1 : 400$

c) $9\ \text{m}^2 = 90\,000\ \text{cm}^2$

Plano original:

$$90\,000 \cdot \left(\frac{1}{200}\right)^2 = 2{,}25 \text{ cm}^2$$

1.ª fotocopia:

$$90\,000 \cdot \left(\frac{1}{160}\right)^2 = 3{,}52 \text{ cm}^2$$

Plano original:

$$90\,000 \cdot \left(\frac{1}{400}\right)^2 = 0{,}56 \text{ cm}^2$$

52. a) Falso: se cumple que $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$, por lo que si las tomamos como razones de semejanza, para un segmento de longitud L su transformada en el plano $\frac{L}{a}$ será mayor que $\frac{L}{b}$, así que el plano de escala $\frac{1}{a}$ es el que ocupa más.

b) Cierto: para transformar la medida real en la medida a escala se multiplica por el valor de la escala. En este caso $E = \frac{a}{1} > 1$, por lo que la medida a escala será mayor que la real.

53. Respuesta abierta.

54. Los radios son proporcionales, por lo tanto:

$$k = \frac{r_2}{r_1} = \frac{r_3}{r_2} = \frac{1}{3} \rightarrow \begin{cases} \frac{r_2}{r_1} = \frac{1}{3} \rightarrow r_2 = \frac{r_1}{3} \\ \frac{r_3}{r_2} = \frac{1}{3} \rightarrow r_3 = \frac{r_2}{3} = \frac{\frac{r_1}{3}}{3} = \frac{r_1}{9} \end{cases}$$

La suma de los diámetros es 78 cm, por lo que:

$$2\,r_1 + 2\,r_2 + 2\,r_3 = 2\left(r_1 + \frac{r_1}{3} + \frac{r_1}{9}\right) = 78 \rightarrow r_1 = 27 \text{ cm}$$

$$r_2 = \frac{27}{3} = 9 \text{ cm} \qquad r_3 = \frac{27}{9} = 3 \text{ cm}$$

55. $k^2 = \frac{49}{4} \rightarrow k = \frac{7}{2}$

La relación entre los lados homólogos de los rectángulos será:

$$k = \frac{\frac{x}{2}+5}{x-2} = \frac{4x+\frac{3}{2}}{2x-3} = \frac{7}{2} \rightarrow \frac{\frac{x}{2}+5}{x-2} = \frac{7}{2} \rightarrow x = 4 \text{ cm}$$

Por lo tanto:

Altura mayor: $\frac{x}{2} + 5 = 7$ cm

Base mayor: $4\,x + \frac{3}{2} = 17{,}5$ cm

Altura menor: $x - 2 = 2$ cm

Base menor: $2\,x - 3 = 5$ cm

56. Llamaremos b a los catetos mayores y h a los menores. Se cumple: $h = \frac{b}{2}$.

Llamamos *triángulo 1* al triángulo menor, situado en la parte inferior de la figura. Sus catetos serán b_1 y h_1.

Llamamos *triángulo 2* al triángulo situado en la parte izquierda de la figura. Sus catetos serán b_2 y h_2.

Llamamos *triángulo 3* al situado en la parte superior. Sus catetos serán b_3 y h_3.

Observando el triángulo 3, vemos que:

$b_3 = h_2 + b_1$ (ecuación 1)

Por ser proporcionales 1 y 2:

$$k = \frac{h_2}{h_1} \rightarrow h_2 = k \cdot h_1 = k \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot b_1\right) = \frac{k}{2} \cdot b_1$$

Sustituyendo en la ecuación 1:

$$b_3 = \frac{k}{2} \cdot b_1 + b_1 = b_1 \cdot \left(\frac{k}{2} + 1\right)$$

Por ser los triángulos 2 y 3 proporcionales y con igual razón de semejanza que la existente entre los triángulos 1 y 2:

$$b_3 = k \cdot b_2 = k \cdot (k \cdot b_1) = k^2 \cdot b_1$$

Igualando las dos ecuaciones de b_3 anteriores:

$$b_1 \cdot \left(\frac{k}{2} + 1\right) = k^2 \cdot b_1 \rightarrow k^2 - \frac{k}{2} - 1 = 0$$

Solucionando, obtenemos:

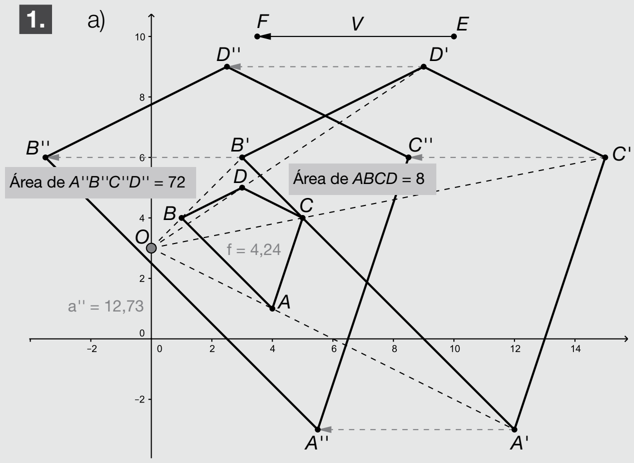
$$k_1 = \frac{1}{4} \cdot \left(1 - \sqrt{17}\right) \simeq -0{,}78$$

$$k_2 = \frac{1}{4} \cdot \left(1 + \sqrt{17}\right) \simeq 1{,}28$$

Como al aplicar la semejanza se obtiene un triángulo mayor al inicial, la razón es k_2.

Pon a prueba tus competencias

1. a)



b) $\frac{A'}{A} = k^2 \rightarrow A' = 9A$

$$\text{Incremento} = \frac{A' - A}{A} \cdot 100 = \frac{9A - A}{A} \cdot 100 = 800\ \%$$

c) En la figura representada en a), el segmento *a*" es el transformado del segmento *f*. Por lo que debe cumplirse la relación de semejanza entre ellos:

$$k = \frac{a''}{f} = \frac{12{,}73}{4{,}24} = 3$$

El polígono *A"B"D"C"* es el transformado del *ABDC* y sus áreas deben cumplir lo calculado en el apartado b):

$$k^2 = \frac{72}{8} = 9$$

$$\text{Incremento} = \frac{72 - 8}{8} \cdot 100 = \frac{64}{8} \cdot 100 = 800\ \%$$

2. a) $E = \frac{h_{\text{figura}}}{h_{\text{realidad}}} \rightarrow h_{\text{realidad}} = \frac{h_{\text{figura}}}{E} =$

$$= \frac{2{,}5}{1/2\,000} = 5\,000\ \text{cm} = 50\ \text{m}$$

b) $A_{\text{real}} = 45 \cdot 22 = 990\ \text{m}^2 = 9\,900\,000\ \text{cm}^2$

$$E^2 = \frac{A_{\text{figura}}}{A_{\text{real}}} \rightarrow A_{\text{figura}} = E^2 \cdot A_{\text{real}} =$$

$$= \left(\frac{1}{2\,000}\right)^2 \cdot 9\,900\,000 = 2{,}475\ \text{cm}^2$$

3. a) $E = \frac{\text{plano}}{\text{realidad}}$

$$E(\text{cm}) = \frac{2\ \text{cm}}{250\ \text{cm}} \Rightarrow E(\text{cm}) = 1:125$$

$$E(\text{m}) = \frac{0{,}02\ \text{m}}{2{,}5\ \text{m}} \Rightarrow E(\text{m}) = 1:125$$

E = 1:125, independientemente de las unidades utilizadas, pero debe recordarse que las unidades del denominador y las del numerador han de ser las mismas.

b) $A_{\text{total}} = 43{,}63\ \text{m}^2$

$A_{\text{cocina}} = 5{,}27\ \text{m}^2$

c) La escala debería ser la doble que la inicial: E = 2:125

4. La distancia del mercado al centro de salud, se calcula por Pitágoras (12,25 m) de la misma manera que la distancia del hotel al portal 2 (39 m).

Del resto solo se pueden calcular las distancias de los edificios situados en posiciones del triángulo de Thales.

Distancia de la parada del autobús al árbol:
BA → BA = (2,5·BP1)/12,5 m.

Distancia del portal 1 a la parada del autobús:
BP1 → BP1 = (12,5·BA)/2,5 m.

Distancia del portal 1 al árbol:
AP1 → AP1 = (2,5·BA)/12,25 m.

5. a) $E = \frac{r_{\text{maqueta}}}{r_{\text{real}}} = \frac{1}{1\,000\,000}$

$$r_{\text{maqueta}} = E \cdot r_{\text{real}} = \frac{1\,727\,000}{2} \cdot \frac{1}{1\,000\,000} = 0{,}86\ \text{m}$$

b) $h_{\text{maqueta}} = E \cdot h_{\text{real}} = \frac{300\ \text{mm}}{1\,000\,000} = 0{,}000\,3\ \text{mm}$

La altura de los volcanes en la maqueta debería estar entre 0,000 3 y 0,000 4 mm. Teniendo en cuenta que el grosor de un cabello está entre 0,06 y 0,09 mm, no pueden representarse a esa escala unas montañas de entre 30 y 40 cm de altura.

c) $A = 4 \cdot \pi \cdot r^2 = 4 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}86^2 = 9{,}29\ \text{m}^2$

Sabiendo el rendimiento de la pintura, podemos calcular los litros que se necesitarán:

$$9{,}29\ \text{m}^2 \cdot \frac{1\ \text{L}}{4\ \text{m}^2} = 2{,}32\ \text{L}$$

Como sabemos la capacidad de cada bote de spray:

$$2{,}32\ \text{L} \cdot \frac{1000\ \text{mL}}{1\text{L}} \cdot \frac{1\text{bote}}{350\ \text{mL}} = 6{,}63\ \text{botes}$$

Se necesitarán 7 botes de spray.

1. Las medidas de la piscina son: l = 13,6 m, a = 6 m, h = 2,05 m.

a) El área del suelo es:

A_{suelo} = 13,6 · 6 = 81,6 m².

El área de una baldosa es: $A_{baldosa} = 0{,}4^2$ = 0,16 m².

En total se necesitan:

$$\frac{A_{suelo}}{A_{baldosa}} = \frac{81{,}6}{0{,}16} = 510 \text{ baldosas}$$

b) Hallamos el área de las paredes de la piscina.

$A_{paredes} = 2 \cdot (l \cdot h + a \cdot h) = 2 \cdot 2{,}05 \cdot (13{,}6 + 6) =$ 80,36 m².

Cada bote permite pintar 5 m². Así, se necesitan:

$$\frac{A_{paredes}}{5} = \frac{80{,}36}{5} = 16{,}072$$, es decir 17 botes.

La pintura costará: 17 · 14 = 238 €.

c) Hallamos el perímetro del borde de la piscina:

$P = 2 \cdot (l + a) = 2\,(13{,}6 + 6) = 39{,}2$ m.

Se necesitan 39,2 m de tiras largas.

d) Hallamos el volumen de agua que se necesita. Si hay que dejar un margen de 10 cm, la altura:

$h' = h - 0{,}1 = 1{,}95$ m.

$V_{agua} = l \cdot a \cdot h' = 13{,}6 \cdot 6 \cdot 1{,}95 = 159{,}12$ m³.

$$159{,}12 \text{ m}^3 \cdot \frac{1000 \text{ L}}{1 \text{ m}^3} = 159\,120 \text{ L}$$

2. El área lateral del cono es: $A_{lateral} = \pi \cdot r \cdot g$

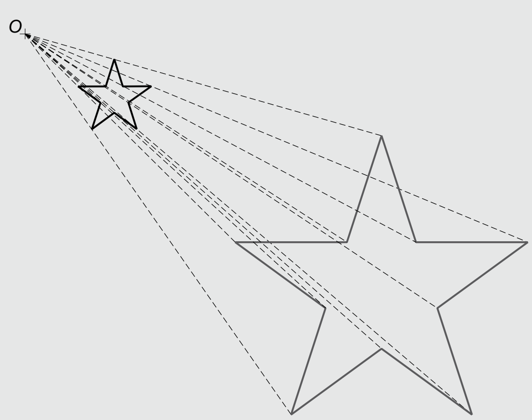
El área de cada sombrero que se recubre con hojas es dos veces el área lateral. Por tanto, para confeccionar 1 000 sombreros se necesita una superficie de hojas igual a:

$$A_{total} = 1000 \cdot 2 \cdot A_{lateral} =$$

$$1000 \cdot 2 \cdot \pi \cdot \frac{47}{2} \cdot 28 =$$

$$= 4{,}134 \cdot 10^6 \text{ cm}^2 = 413{,}4 \text{ m}^2$$

3.



4. Al ser el perímetro de 30 hm, tendrá que utilizar 30 · 100 = 3 000 m de cercado.

Para calcular lo que tendrá que pagar, hay que calcular la longitud en metros de los lados cortos (x) y la de los lados largos (y):

$$\left.\begin{array}{l} 2x + 2y = 30 \\ y = x + 2 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l} x + y = 15 \\ -x + y = 2 \end{array}$$

$$2y = 17 \rightarrow y = 8{,}5 \text{ hm}$$

$$x = y - 2 = 6{,}5 \text{ hm}$$

El precio total del cercado es:

$$8{,}5 \text{ hm} \cdot \frac{500\,€}{1 \text{ hm}} + (30 - 8{,}5) \text{ hm} \cdot \frac{300\,€}{1 \text{ hm}} =$$

$$= 10\,700\,€$$

5. a) La bicicleta mide: 12 · 15 = 180 cm = 1,8 m.

b) $180 \text{ cm} \cdot \dfrac{1 \text{ cm en el plano}}{18 \text{ cm}} = 10 \text{ cm}$

c) Si en el plano la bicicleta mide 18 cm, la escala es: $\dfrac{18 \text{ cm}}{180 \text{ cm}} = \dfrac{1}{10}$, es decir 1:10.

6. a) El área de las fachadas coincide con el área lateral de los prismas respectivos:

$$A_{exterior} = P_{exterior} \cdot h = 5 \cdot 40 \cdot 34 = 6\,800 \text{ m}^2$$

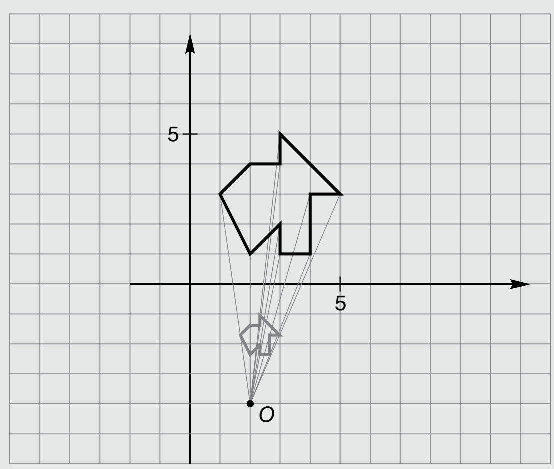
$$A_{interior} = P_{interior} \cdot h = 5 \cdot 10 \cdot 34 = 1700 \text{ m}^2$$

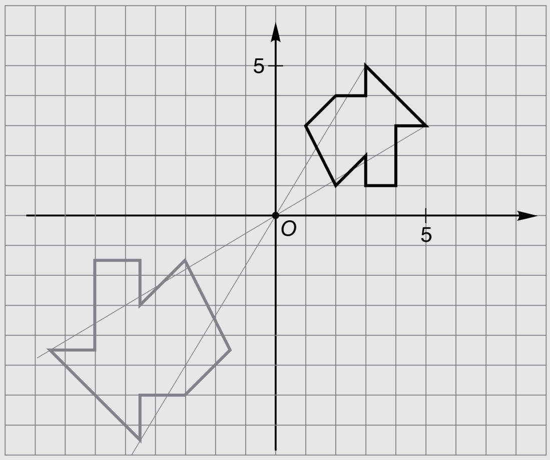
b) La superficie de la azotea es el área comprendida entre los dos pentágonos:

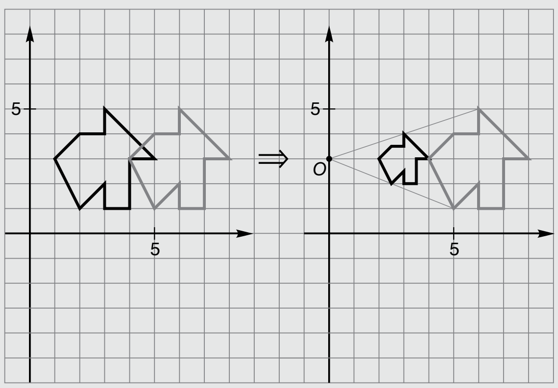
$$A_{azotea} = \frac{P_{ext} \cdot ap_{ext}}{2} - \frac{P_{int} \cdot ap_{int}}{2} =$$

$$= \frac{5 \cdot 40 \cdot 27{,}5}{2} - \frac{5 \cdot 10 \cdot 6{,}9}{2} = 2\,577{,}5 \text{ m}^2$$

7.







8. a) Significa que 25 metros reales se representan como 1 m en la maqueta.

b) Suponiendo una altura de 1,65 m, en Madurodam se mediría 0,066 m, es decir, 6,6 cm.

c) 0,061 m, es decir, 6,1 cm.

d) $\frac{h}{4,8} = \frac{2,5}{1,2} \rightarrow h = 10$ m

e) El semáforo debería medir: 0,1 m, es decir, 10 cm.

El edificio debería medir: 0,4 m, es decir, 40 cm.

Actividades de síntesis

1. $L=\sqrt{50^2-40^2}=30$

$P=2\cdot 30+2\cdot 40=140$ cm

$A=30\cdot 40=1\,200$ cm^2

2. $d=\sqrt{5^2-4^2}=3$ cm

$A=\dfrac{6\cdot 8}{2}=24$ cm^2

3. $h=\sqrt{10^2-6^2}=8$ cm

$A=\dfrac{(24+12)\cdot 8}{2}=144$ cm^2

$P=2\cdot 10+2+24=56$

4. $L=2\cdot\pi\cdot r=18{,}84\rightarrow r=3$

$a=\sqrt{3^2-1{,}5^2}=2{,}6$ cm

$A=\dfrac{(5\cdot 3)\cdot 8}{2}\cdot 2{,}6=19{,}5$ cm^2

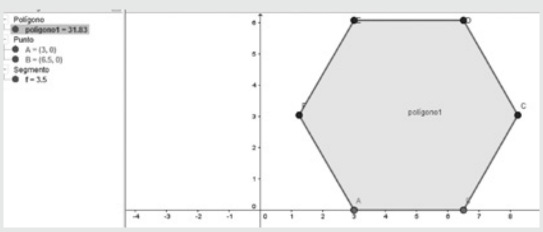
5. $A=19{,}5\cdot 27=526{,}5$ cm^2

$526{,}5\cdot 88=46\,332$ cm^2 $=4{,}63$ m^2

6. Los dos cuadrados que se colorean en la figura son iguales, así que el área es igual al área de un rectángulo de lados $3a$ y b, es decir, igual a $3ab$.

$A=3ab=30$ cm^2.

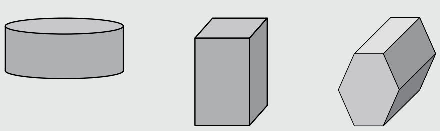
7.

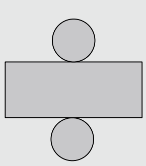


$a=3{,}04$ cm

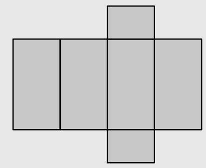
$A=\dfrac{(6\cdot 3{,}5)\cdot 3{,}04}{2}=31{,}92$ cm^2

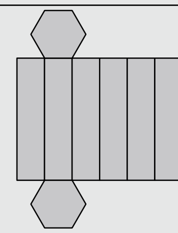
8. Completa la siguiente tabla con los cuerpos geométricos que se muestran:





El cilindro es un cuerpo de revolución formado por un rectángulo y dos circunferencias como bases.

Poliedro	Prisma rectangular
Desarrollo	
N.º de vértices	8
N.º de aristas	12
N.º de caras	6
Figura plana de las caras	6 rectángulos

Poliedro	Prisma hexagonal
Desarrollo	
N.º de vértices	12
N.º de aristas	18
N.º de caras	8
Figura plana de las caras	2 hexágonos y 6 rectángulos

9. Prisma:

$A_{lateral}=3\cdot(3\cdot 6)=54$ cm^2

$A_{bases}=2\cdot\left(\dfrac{5{,}6\cdot 6}{2}\right)=33{,}6$ cm^2

$A_{total}=87{,}6$ cm^2

$V=16{,}8\cdot 3=50{,}4$ cm^3

Cilindro:

$A_{lateral}=2\cdot\pi\cdot 2{,}5\cdot 3{,}3=51{,}81$ cm^2

$A_{bases}=2\cdot\pi\cdot 2{,}5^2=39{,}25$ cm^2

$A_{total}=91{,}06$ cm^2

$V=\pi\cdot 2{,}5^2\cdot 3{,}3=64{,}76$ cm^3

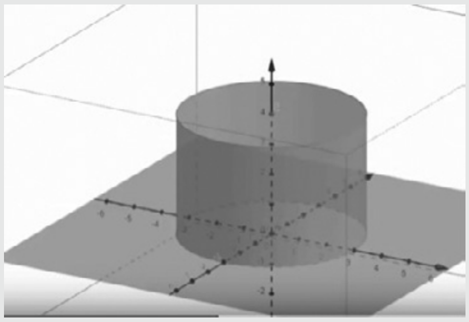
10. $A_{lateral}=4\cdot\left(\dfrac{10{,}3\cdot 5}{2}\right)=103$ cm^2

$A_{base}=5^2=25$ cm^2

11. $V=\dfrac{\pi\cdot 5^2\cdot 12}{3}=314$ cm^3

Suponiendo el mismo radio:

$V=\pi\cdot 5^2\cdot h=314$ cm^3 $\rightarrow h=4$ cm



12. $A_{\text{circunferencia}} = \pi \cdot 2{,}5^2 = 19{,}625 \simeq 20 \text{ cm}^2$

De cada circunferencia se obtienen dos filtros. Hay 6 equipos, así que se necesitan 6 filtros. El profesor debe comprar 60 cm².

13. Considerando al planeta Marte una esfera perfecta:

$S = 4 \cdot \pi \cdot 3397{,}5^2 \simeq 145 \cdot 10^6 \text{ km}^2$

14. $V = \frac{4}{3}\pi \cdot 6^3 = 904{,}32 \text{ cm}^3$

$904{,}32 \cdot 18{,}5 = 16{,}729 \simeq 17 \text{ kg}$

15. Se genera un cilindro (1) de base 5 cm de radio y de 2 cm de altura. Se genera un cilindro (2) de base 2 cm de radio y de 5 cm de altura.

$A_{1\text{lateral}} = 2 \cdot \pi \cdot 5 \cdot 2 = 62{,}8 \text{ cm}^2$

$A_{1\text{bases}} = 2 \cdot \pi \cdot 5^2 = 157 \text{ cm}^2$

$A_{1\text{total}} = 219{,}8 \text{ cm}^2$

$A_{2\text{lateral}} = 2 \cdot \pi \cdot 2 \cdot 5 = 62{,}8 \text{ cm}^2$

$A_{2\text{bases}} = 2 \cdot \pi \cdot 2^2 = 25{,}12 \text{ cm}^2$

$A_{2\text{total}} = 87{,}92 \text{ cm}^2$

Se obtiene el mismo valor de área lateral pero no del área de las bases, por lo que el área total no es la misma.

16. 1 m = 10 dm. El radio es de 5 dm.

Se necesita una altura mínima de 25,5 dm.

17. El radio de las semicircunferencias es la semidiagonal del cuadrado, es decir, $\sqrt{2}$. El diámetro de los círculos sombreados es entonces $2\sqrt{2} - 2$ y el área de esos cuatro círculos es $4 \cdot \pi \cdot (3 - 2\sqrt{2})$.

18. $V = 0{,}4^2 \cdot h = 0{,}5 \text{ dm}^3 \rightarrow h = 3{,}125 \text{ dm}$

$A_{\text{lateral}} = 4 \cdot (4 \cdot 31{,}25) = 500 \text{ cm}^2$

$A_{\text{bases}} = 2 \cdot 16 = 32 \text{ cm}^2$

$A_{\text{total}} = 532 \text{ cm}^2 = 5{,}32 \text{ m}^2$

Como son tres envases: 15,96 ~16 m².

19. $A = \frac{(6 \cdot 3) \cdot 2}{2} = 18 \text{ dm}^2$

$V = 18 \cdot 15 = 270 \text{ dm}^3$

$\frac{270}{50} = 5{,}4 \text{ min}$

20. a) Es falsa. Como ejemplo, consideremos dos triángulos isósceles, el primero con lados de longitudes 2 cm, 4 cm y 4 cm, y el segundo de longitudes 2 cm, 8 cm y 8 cm.

b) Es falsa. Considérense, por ejemplo, dos prismas cuyas bases tengan las mismas dimensiones pero cuyas alturas sean de distinto valor.

c) Es verdadera.

21. $l = \sqrt{\left(\frac{6}{2}\right)^2 + \left(\frac{8}{2}\right)^2} = \sqrt{(3)^2 + (4)^2} = 5 \text{ cm}$

22. $\frac{A'}{A} = k^2 = 25 \rightarrow k = 5$

La razón entre volúmenes es:

$\frac{V'}{V} = k^3 = 5^3 = 125$

23. a) $r' = 6 \cdot r = 36$ cm, 6 veces más.

b) $L' = 226{,}08$ cm, 6 veces más.

c) $A' = 4069{,}44$ cm², 6 veces más.

24. Primer par de triángulos:

$k = \frac{P'}{P} = \frac{12}{6} = 2$

$c = P - a - b = 6 - 2 - 1{,}5 = 2{,}5 \text{ cm}$

El área del triángulo rectángulo de catetos a y b es:

$A = \frac{1}{2} a \cdot b = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1{,}5 = 1{,}5 \text{ cm}^2$

Para el triángulo $A'B'C'$ se tiene:

$a' = k \cdot a = 2 \cdot 2 = 4 \text{ cm}$; $b' = k \cdot b = 2 \cdot 1{,}5 = 3 \text{ cm}$

$c' = k \cdot c = 2 \cdot 2{,}5 = 5 \text{ cm}$

$A' = k^2 \cdot A = 2^2 \cdot 1{,}5 = 6 \text{ cm}^2$

Segundo par de triángulos:

$k = \sqrt{\frac{A'}{A}} = \sqrt{\frac{270}{30}} = 3$

Aplicamos el teorema de Pitágoras al triángulo $A'B'C'$:

$a' = \sqrt{c'^2 - b'^2} = \sqrt{39^2 - 36^2} = 15 \text{ cm}$

$P' = a' + b' + c' = 15 + 36 + 39 = 90 \text{ cm}$

Las medidas del triángulo ABC son:

$a = \frac{a'}{k} = \frac{15}{3} = 5 \text{ cm}$; $b = \frac{b'}{k} = \frac{36}{3} = 12 \text{ cm}$

$c = \frac{c'}{k} = \frac{39}{3} = 13 \text{ cm}$; $P = \frac{P'}{k} = \frac{90}{3} = 30 \text{ cm}$

25. Hallamos el volumen del primer archivador:

V = 10 500 cm³

La razón de semejanza es: $k = \sqrt[3]{\frac{V'}{V}} = 1{,}2$

Las dimensiones del otro archivador son:

$$a = \frac{a'}{k} = \frac{10}{1{,}2} = 8{,}3 \text{ cm}$$

$$h = \frac{h'}{k} = \frac{35}{1{,}2} = 29{,}2 \text{ cm}$$

$$b = \frac{b'}{k} = \frac{30}{1{,}2} = 25 \text{ cm}$$

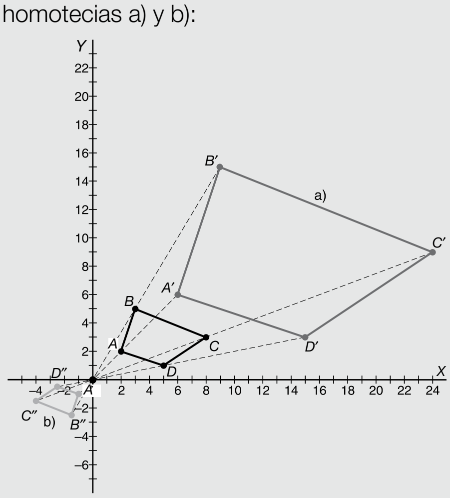
26. La masa de un cuerpo es igual a la densidad por el volumen. Dado que el material de ambas figuras es el mismo, la densidad es la misma, por lo que la relación entre los pesos de las figuras será la misma que la relación entre sus volúmenes.
Si la 2.ª figura mide la mitad que la primera, su volumen será 1/8 del volumen inicial, por lo que su peso será 1/8 del original, 195 g.

27. $2 \cdot V_1 = V_2$

$$2 \cdot \pi \cdot r_1^2 \cdot L = \pi \cdot r_2^2 \cdot L$$

$$r_2 = \sqrt{2 \cdot r_1^2} = r_1\sqrt{2} = 1{,}5 \cdot \sqrt{2} \approx 2{,}12 \text{ cm}$$

28. Al aplicar a un punto M de coordenadas (x_M, y_M) una homotecia de centro en (0, 0) y razón k, se obtiene un punto M' de coordenadas $(x'_M, y'_M) = (k \cdot x_M, k \cdot y_M)$. En la figura se representan las obtenidas al aplicar las dos homotecias a) y b):

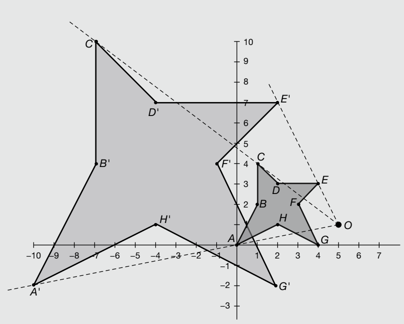


a) $A'(6, 6)$; $B'(9, 15)$; $C'(24, 9)$; $D'(15, 3)$

b) A″(–2, –2); B″(–3, –5); C″(–8, –3); D″(–5, –1);

— Los dos polígonos obtenidos son semejantes al primer polígono.

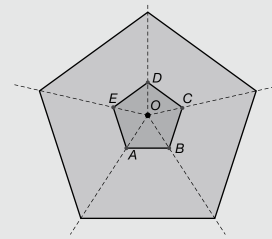
29.



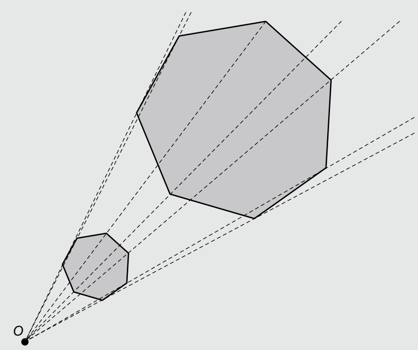
Las coordenadas de la nueva figura, son:

A' (–10, –2); B' (-7, 4); C' (–7,10); D' (–4,7); E' (2, 7); F' (–1, 4); G' (2, –2); H' (–4, 1).

30.



31.



32. $11{,}2 \ \cdot 3 \cdot 10^5 = 33{,}6 \cdot 10^5 \text{ cm} = 33{,}6 \text{ km}$

33. a) $2{,}5 \ \cancel{\text{cm en el mapa}} \cdot \dfrac{12 \text{ km}}{4 \ \cancel{\text{cm en el mapa}}} = 7{,}5 \text{ km}$

b) $16 \ \cancel{\text{km}} \cdot \dfrac{4 \text{ cm en el mapa}}{12 \ \cancel{\text{km}}} = 5{,}33 \text{ cm en el mapa}$

c) Al reducir un 20 %, la longitud en el mapa será:
4 · (1 0,20) = 3,2 cm.

$$\text{E} = \frac{\text{longitud mapa}}{\text{longitud real}} = \frac{3{,}2 \text{ cm}}{12 \cdot 10^5 \text{cm}} = \frac{1}{3{,}75 \cdot 10^5 \text{ cm}}$$

Es decir, E = 1 : 375.000

34. Las medidas reales del coche son:

Longitud = 8,4 · 42 = 352,8 cm = 3,528 m

Anchura = 3,5 · 42 = 147 cm = 1,47 m

Altura = 3,2 · 42 = 134,4 cm = 1,344 m

Una maqueta a escala 1:8 será más grande que una de escala 1:42.

La relación entre las medidas de ambas maquetas es: $\dfrac{42}{8} = \dfrac{21}{4} = 5{,}25$

35. $\dfrac{h}{6 \cdot s} = \dfrac{1{,}62}{s} \rightarrow h = 9{,}72 \text{ m}$