Unidad 8

Actividades

1. a) $f(2)=\dfrac{3\cdot 2}{2^2-1}=2\,;\,f(-3)=\dfrac{3\cdot(-3)}{(-3)^2-1}=-\dfrac{9}{8}=-1{,}125$

b) La antiimagen de 0 será el valor de x para el que se cumple que $f(x)=0$:

$$\frac{3x}{x^2-1}=0\rightarrow 3x=0\rightarrow x=0$$

c) Para que una división tenga solución en $\mathbb{R}$, el denominador tiene que ser distinto de 0:

$$x^2-1\neq 0$$

$$x^2\neq 1\rightarrow\begin{cases}x_1\neq -1\\ x_2\neq 1\end{cases}$$

El dominio será: $D(f)=\mathbb{R}-\{-1,1\}$.

2. a) $f(2)=\sqrt{2^2-4}=0\,;\;f(-1)=\sqrt{(-1)^2-4}=\sqrt{-3}\rightarrow$ No tiene imagen en $\mathbb{R}$.

b) La antiimagen de 0 será el valor de x para el que se cumple que $f(x)=0$:

$$\sqrt{x^2-4}=0$$

$$x^2-4=0$$

$$x^2=4\rightarrow x=\pm\sqrt{4}\rightarrow\begin{cases}x_1=-2\\ x_2=2\end{cases}$$

c) Para que una raíz cuadrada tenga solución real, el radicando no puede ser negativo:

$$x^2-4\geq 0$$

$$(x+2)\cdot(x-2)\geq 0\rightarrow\begin{cases}x_1\leq -2\\ x_2\geq 2\end{cases}$$

$$D(f)=(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$$

$$R(f)=[0,+\infty)$$

3. a)

Tiempo transcurrido (x)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Contenido del depósito (y)	2	5	8	11	14	17	20	23	26	29	32

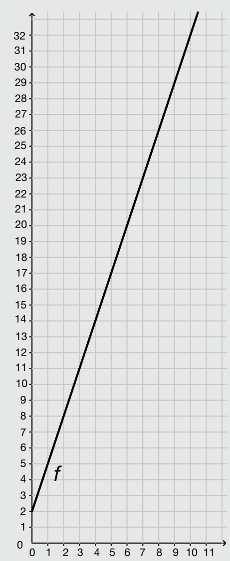
b) $y=2+3x$

Ni el tiempo ni el volumen pueden ser negativos, por lo tanto:

$$D(f)=[0,+\infty)$$

$$R(f)=[2,+\infty)$$

c)



4. Gráfica 1

Puntos de corte con el eje de abscisas: $(-0{,}2,0)$; $(-1{,}6,0)$; $(1{,}8,0)$.

Punto de corte con el eje de ordenadas: (0, 1).

Intervalos de decrecimiento: $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$.

Intervalo de crecimiento: (–1, 1).

Gráfica 2

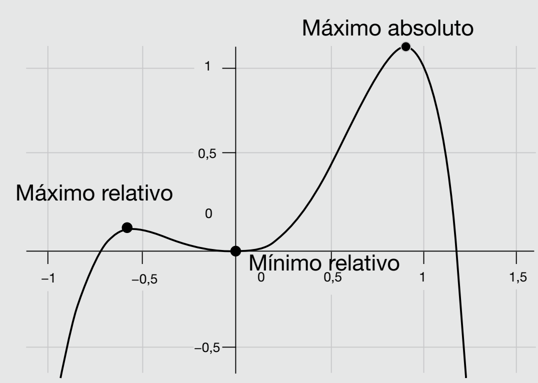
Puntos de corte con el eje de abscisas: (–2, 0); (1, 0).

Punto de corte con el eje de ordenadas: (0, 2).

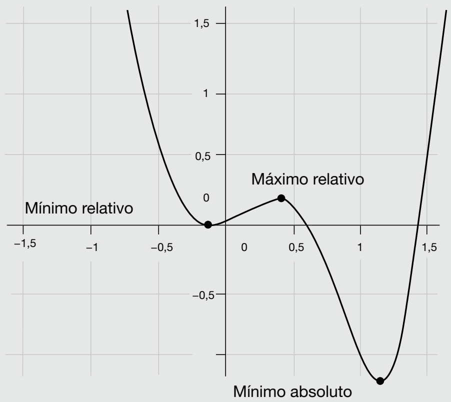
Intervalo de decrecimiento: (–1, 1).

Intervalos de crecimiento: $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$.

5.



© grupo edebé



6. a) Puntos de corte con el eje de abscisas: (–3, 0); (–1, 0).

Punto de corte con el eje de ordenadas: (0, 10).

Intervalos de crecimiento: $(-3,-2) \cup (-1,+\infty)$.

Intervalos de decrecimiento: $(-\infty,-3) \cup (-2,-1)$.

b) $f(-2)=1 \qquad f(-1)=0$

$$\text{TVM} = \frac{f(-1)-f(-2)}{(-1)-(-2)} = \frac{0-2}{-1+2} = -2$$

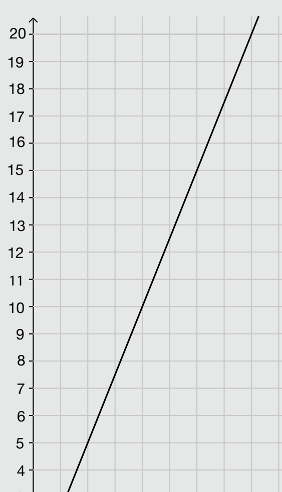
c) Mínimos absolutos en (–3, 0); (–1, 0).

Máximo relativo en (–2, 1).

d) Función continua, no periódica y simétrica respecto a la recta $x = -2$.

7. Tabla de valores:

Kilos de tomates (x)	1	2	3	4	5
Importe (y)	2,50	5	7,50	10	12,50



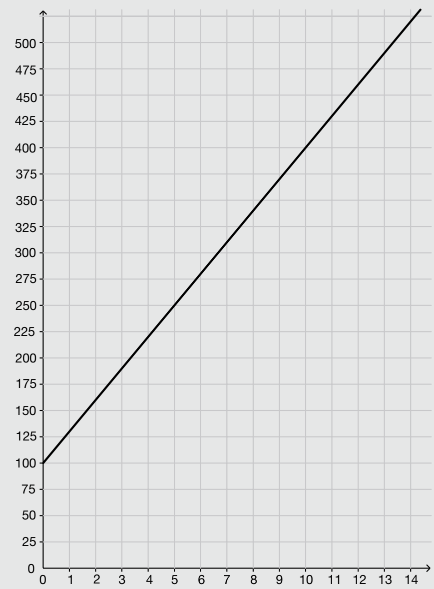
Expresión algebraica: $y = 2{,}50\ x$.

La gráfica de la función es una semirrecta cuyo punto inicial es el origen de coordenadas

y cuya pendiente es $m = \dfrac{y}{x} = 2{,}50$.

8. Tabla de valores:

Días de alquiler (x)	1	2	3	4	5
Importe (y)	130	160	190	220	250



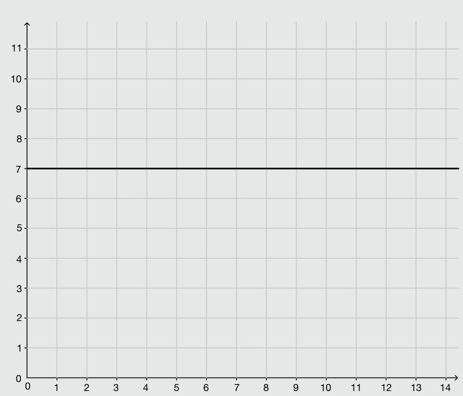
La función que relaciona los datos es una función afín cuya ecuación es $y = 100 + 30\ x$ con

$m = \dfrac{y}{x} = \dfrac{30}{1} = 30$ y $b = 100$.

La gráfica es una semirrecta de pendiente $m = 30$ y cuyo punto inicial es $m=12$ $b=0$.

9. Tabla de valores:

Tiempo de alquiler (x)	1	2	3	4	5
Importe (y)	7	7	7	7	7



© grupo edebé

Se trata de una función constante: $y = 7$.

Por lo tanto, no existe dependencia entre el coste del alquiler y el tiempo: pagaremos 7 €, independientemente del tiempo que permanezcamos en la playa.

La pendiente de la recta es $m = 0$ y la ordenada en el origen será 7.

Se podría discutir si, para aproximarse a una situación real, se debería limitar el tiempo máximo de alquiler. En ese caso, la representación gráfica sería un segmento con extremos $(0,\ 7)$ y $(t_{\text{máximo}},\ 7)$.

10. a) $y = 8x^2 \quad \Rightarrow \quad a = 8; \quad b = c = 0$

Vértice: $\left.\begin{aligned} x_0 &= \frac{-b}{2a} = 0 \\ y_0 &= 8 \cdot 0^2 = 0 \end{aligned}\right\} \rightarrow$ El vértice es el origen de coordenadas $(0, 0)$.

Eje de la parábola: $x = \dfrac{-b}{2a} = 0 \rightarrow$ es el eje de OY.

Puntos de corte con el eje *OX:*

$8x^2 = 0$

$x = 0$ → Punto de corte con *OX* (0, 0).

Punto de corte con el eje *OY:* (0, *c*) → (0, 0).

b) $y = x^2 - 1 \quad \Rightarrow \quad a = 1; \quad b = 0; \quad c = -1$

Vértice: $\left.\begin{aligned} x_0 &= \frac{-b}{2a} = 0 \\ y_0 &= 0^2 - 1 = -1 \end{aligned}\right\} \rightarrow$ El vértice es el punto (0, –1).

Eje de la parábola: $x = \dfrac{-b}{2a} = 0 \rightarrow$ es el eje *OY*.

Puntos de corte con el eje *OX:*

$x^2 - 1 = 0$

$x^2 = 1 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \end{cases}$

Los puntos de corte con el eje de abscisas son (1, 0) y (–1, 0).

Punto de corte con el eje *OY:* (0, *c*) → (0, –1).

c) $y = 2x^2 - 2 \quad \Rightarrow \quad a = 2; \quad b = 0; \quad c = -2$

Vértice: $\left.\begin{aligned} x_0 &= \frac{-b}{2a} = 0 \\ y_0 &= 2 \cdot 0^2 - 2 = -2 \end{aligned}\right\} \rightarrow$ El vértice es el punto (0, –2).

Eje de la parábola: $x = \dfrac{-b}{2a} = 0 \rightarrow$ es el eje *OY*.

Puntos de corte con *OX:*

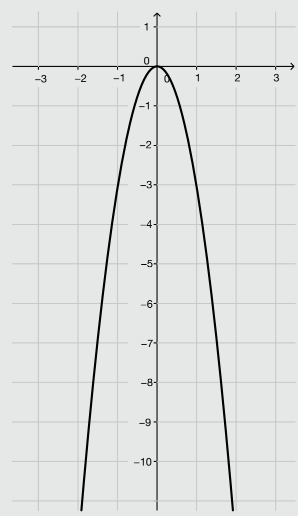
$2x^2 - 2 = 0$

$x^2 = \dfrac{2}{2} = 1 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \end{cases}$

Los puntos de corte con el eje de abscisas son (1, 0) y (–1, 0).

Punto de corte con el eje *OY:* (0, *c*) → (0, –2).

11. a)



$y = -3x^2$

Coeficientes: $a = -3 < 0; \quad b = c = 0$

$a < 0$; por tanto, la función es convexa, sus ramas se orientan hacia abajo y su vértice será el máximo de la función.

Cálculo de los componentes:

- Eje de la parábola: $x = \dfrac{-b}{2a} = 0 \rightarrow x = 0$. Es el eje *OY*.
- Vértice (x_0, y_0) :

$\left.\begin{aligned} x_0 &= \frac{-b}{2a} = 0 \\ y_0 &= -3 \cdot 0^2 = 0 \end{aligned}\right\}$

El vértice de la función es $V(0, 0)$, que coincide con el máximo.

- Puntos de corte con el eje *OX:* $(x_1, 0)$ y $(x_2, 0)$.

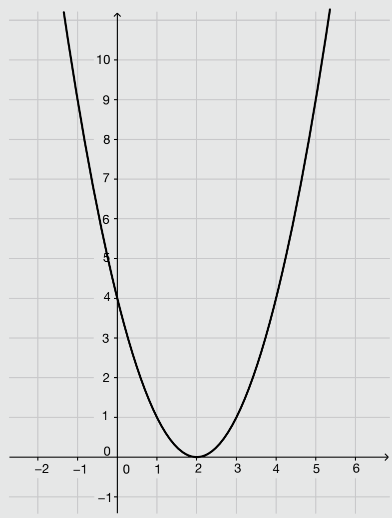
$-3x^2 = 0 \rightarrow x_1 = x_2 = 0$.

El punto de corte con el eje *OX* es el punto $V(0, 0)$.

- Punto de corte con el eje *OY:* $(0,\ c) \rightarrow (0,\ 0)$.

© grupo edebé

b)



$y = x^2 - 4x + 4$

Coeficientes: $a = 1 > 0$; $b = -4$; $c = 4$

$a > 0$; por tanto, la función es cóncava, sus ramas se orientan hacia arriba y su vértice será el mínimo de la función.

Cálculo de los componentes:

- Eje de la parábola: $x = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{4}{2} \to x = 2$.
- Vértice (x_0, y_0):

$$\left.\begin{array}{r} x_0 = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{4}{2} = 2 \\ y_0 = (2)^2 - 4 \cdot (2) + 4 = 0 \end{array}\right\}$$

El vértice de la función es $V(2, 0)$, que coincide con el mínimo de la función.

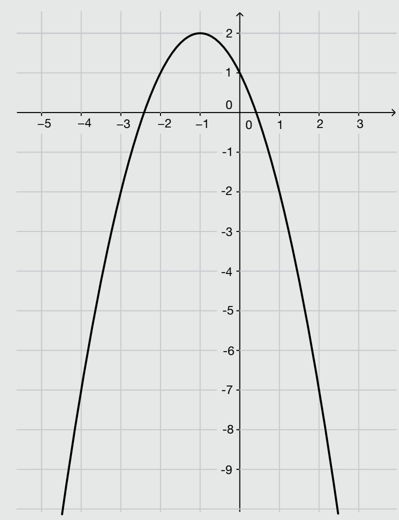
- Puntos de corte con el eje *OX:* $(x_1, 0)$ y $(x_2, 0)$.

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{-(-4) + \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} = 2 \\ x_2 = \dfrac{-(-4) - \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} = 2 \end{array}\right\} \to x_1 = x_2 = 2.$$

El punto de corte con el eje *OX* es el punto $V(2, 0)$.

- Punto de corte con el eje *OY:* (0, *c*) → (0, 4).

c)



$y = -x^2 - 2x + 1$

Coeficientes: $a = -1 < 0$; $b = -2$; $c = 1$

$a < 0$; por tanto, la función es convexa, sus ramas se orientan hacia abajo y su vértice será el máximo de la función.

Cálculo de los componentes:

- Eje de la parábola:

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{2}{-2} \quad \to \quad x = -1.$$

- Vértice (x_0, y_0):

$$\left.\begin{array}{r} x_0 = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{2}{-2} = -1 \\ y_0 = -(-1)^2 - 2 \cdot (-1) + 1 = 2 \end{array}\right\}$$

El vértice de la función es $V(-1, 2)$, que coincide con el máximo.

- Puntos de corte con el eje *OX:* $(x_1, 0)$ y $(x_2, 0)$.

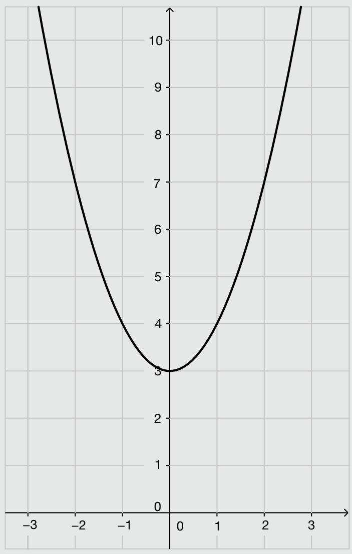
$$\left.\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{-(-2) + \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 1}}{2 \cdot (-1)} = -1 - \sqrt{2} \simeq -2{,}414 \\ x_2 = \dfrac{-(-2) - \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 1}}{2 \cdot (-1)} = -1 + \sqrt{2} \simeq 0{,}414 \end{array}\right\}$$

Por lo tanto, los puntos de corte con el eje *OX* son (–2,414, 0) y (0,414, 0).

- Punto de corte con el eje *OY:* (0, *c*) → (0, 1).

© grupo edebé

d)



$y = x^2 + 3$

Coeficientes: $a = 1 > 0$; $b = 0$; $c = 3$

$a > 0$; por tanto, la función es cóncava, sus ramas se orientan hacia arriba y su vértice será el mínimo de la función.

Cálculo de los componentes:

- Eje de la parábola:

$x = \frac{-b}{2a} = 0 \quad \rightarrow \quad x = 0$. Es el eje *OY*.

- Vértice (x_0, y_0) :

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= \frac{-b}{2a} = 0 \\ y_0 &= 0^2 + 3 = 3 \end{aligned}\right\}$$

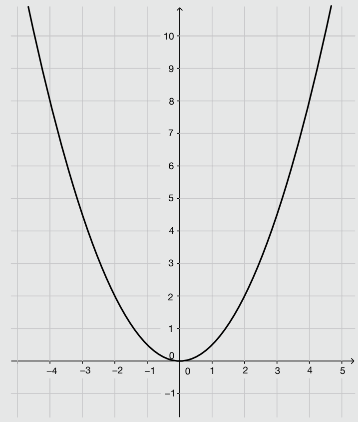
El vértice de la función es $V(0,3)$, que coincide con el mínimo.

- Puntos de corte con el eje *OX:* $(x_1, 0)$ y $(x_2, 0)$

$x^2 + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{-3} \quad \Rightarrow$ No tiene solución real, por lo que no corta con *OX*.

- Punto de corte con el eje *OY:* (0, *c*) → (0, 3).

12. a)

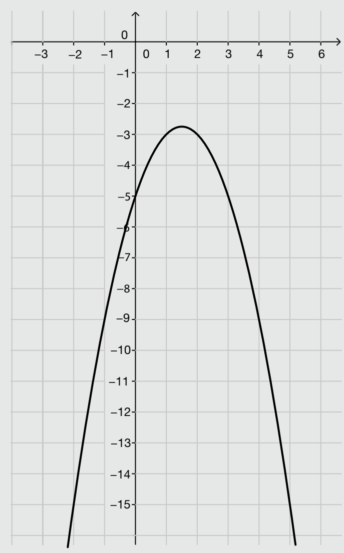


$y = \frac{x^2}{2}$

Coeficientes: $a = \frac{1}{2}$; $b = c = 0$

Expresión algebraica: $y = a\,x^2$

b)



$y = -x^2 + 3x - 5$

Coeficientes: $a = -1$; $b = 3 \neq 0$; $c = -5 \neq 0$

Expresión algebraica: $y = a\,x^2 + b\,x + c$

c)

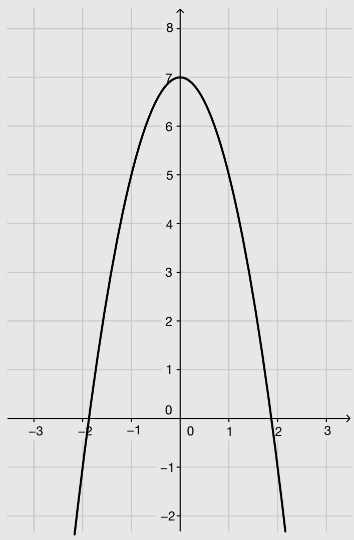
$y = 3x^2 + 2x$

Coeficientes: $a = 3$; $b = 2 \neq 0$; $c = 0$

Expresión algebraica: $y = a\,x^2 + b\,x$

© grupo edebé

d)

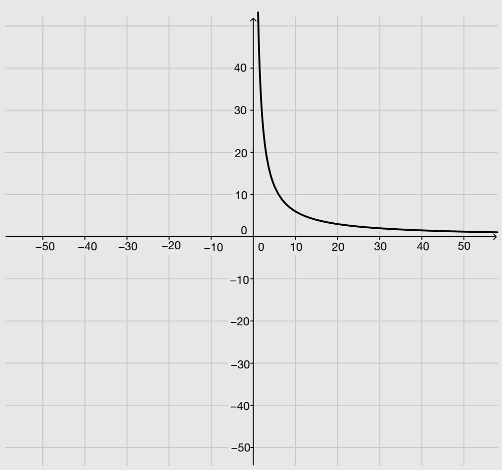


$y = -2x^2 + 7$

Coeficientes: $a = -2$; $b = 0$; $c = 7 \neq 0$

Expresión algebraica: $y = ax^2 + c$

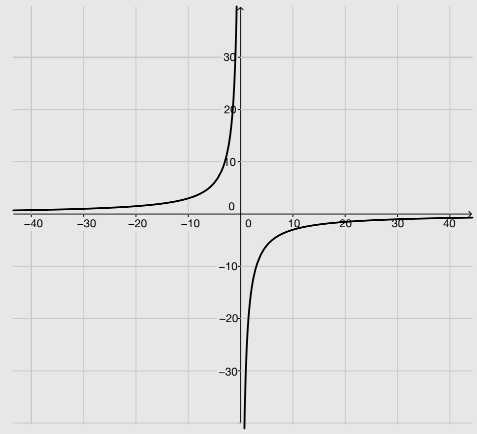
13. a)



$k = x \cdot y = 1 \cdot 60 = 2 \cdot 30 = 3 \cdot 20 = \ldots = 60$

Expresión algebraica: $y = \dfrac{60}{x}$

b)



$k = x \cdot y = 2 \cdot (-15) = 3 \cdot (-10) = 5 \cdot (-6) = \ldots = -30$

Expresión algebraica: $y = -\dfrac{30}{x}$

14. a) $f(2) = 3^2 = 9$

b) $f(-3) = 3^{-3} = \dfrac{1}{3^3} = \dfrac{1}{27} = 0{,}\widehat{037}$

c) $f\left(\dfrac{1}{4}\right) = 3^{1/4} = \sqrt[4]{3} \simeq 1{,}316$

d) $f\left(-\dfrac{3}{4}\right) = 3^{-3/4} = \dfrac{1}{3^{3/4}} = \dfrac{1}{\sqrt[4]{3^3}} = \dfrac{1}{\sqrt[4]{27}} \simeq 0{,}439$

15. a) $f(2) = 5^2 = 25$

$f(3) = 5^3 = 125$

$f(4) = 5^4 = 625$

b) $f(2) = \left(\dfrac{1}{5}\right)^2 = \dfrac{1}{25} = 0{,}04$

$f(3) = \left(\dfrac{1}{5}\right)^3 = \dfrac{1}{125} = 0{,}008$

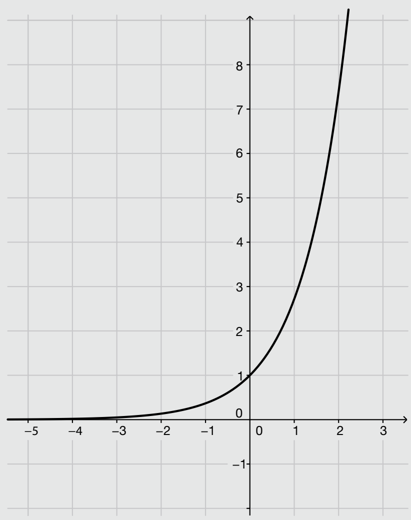
$f(4) = \left(\dfrac{1}{5}\right)^4 = \dfrac{1}{625} = 0{,}0016$

c) $f(64) = 4^{64} \simeq 3{,}402\,8 \cdot 10^{38}$

$f(1) = 4^1 = 4$

© grupo edebé

16. a)



$y = e^x$

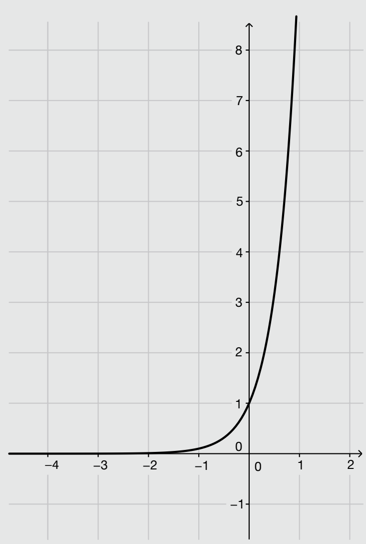
$D(f) = \mathbb{R}$ $\qquad R(f) = (0, +\infty)$

Intersección con el eje *OY* en el punto $(0, 1)$.

Es estrictamente creciente y continua.

La recta $y = 0$ es una asíntota horizontal.

b)



$y = 10^x$

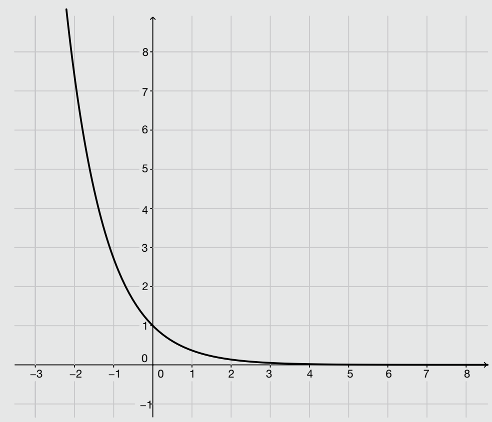
$D(f) = \mathbb{R}$ $\qquad R(f) = (0, +\infty)$

Intersección con el eje *OY* en el punto $(0, 1)$.

Es estrictamente creciente y continua.

La recta $y = 0$ es una asíntota horizontal.

c)



$y = e^{-x}$

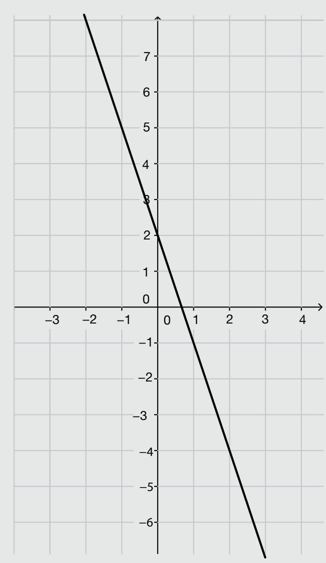
$D(f) = \mathbb{R}$ $\qquad R(f) = (0, +\infty)$

Intersección con el eje *OY* en el punto $(0, 1)$.

Es estrictamente decreciente y continua.

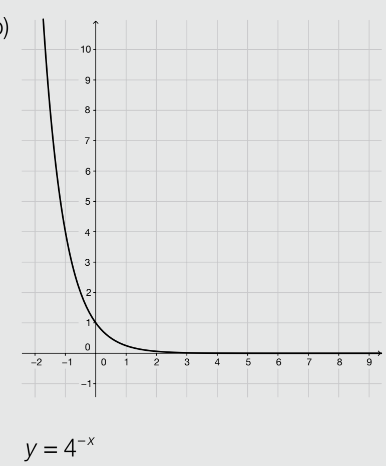
La recta $y = 0$ es una asíntota horizontal.

17. a)



$y = -3x + 2$

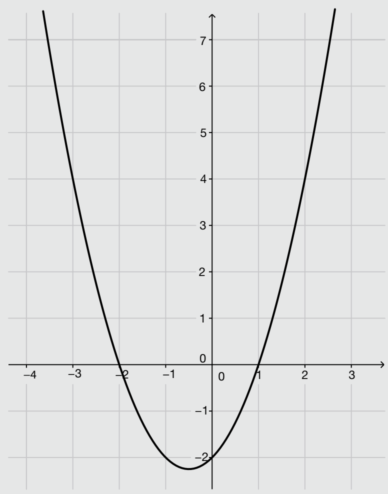
b)



$y = 4^{-x}$

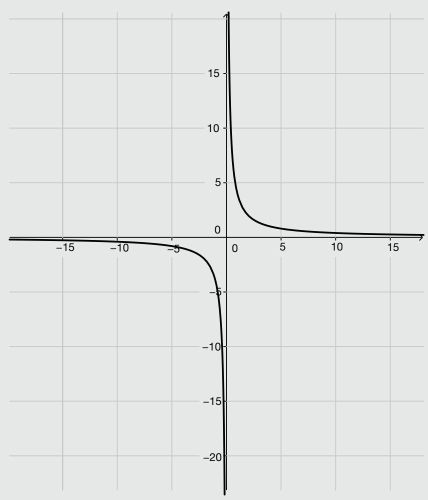
© grupo edebé

c)



$y = x^2 + x - 2$

d)



$y = \dfrac{4}{x}$

18. a) $y = 3x^2 - x - 8$

Función cuadrática.

Coeficientes: $a = 3 > 0$; $b = -1$; $c = -8$

$a > 0$; por tanto, la función es cóncava, sus ramas se orientan hacia arriba y su vértice será el mínimo de la función.

Cálculo de los componentes:

- Eje de la parábola:

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{1}{6} \quad \rightarrow \quad x = 0{,}1\widehat{6} \simeq 0{,}17$$

- Vértice (x_0, y_0):

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= \frac{-b}{2a} = \frac{1}{6} \\ y_0 &= 3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 - \frac{1}{6} - 8 = -\frac{97}{12} \end{aligned}\right\}$$

Vértice: $V\left(\dfrac{1}{6}, -\dfrac{97}{12}\right) \simeq V(0{,}17, -8{,}08)$,

que coincide con el mínimo.

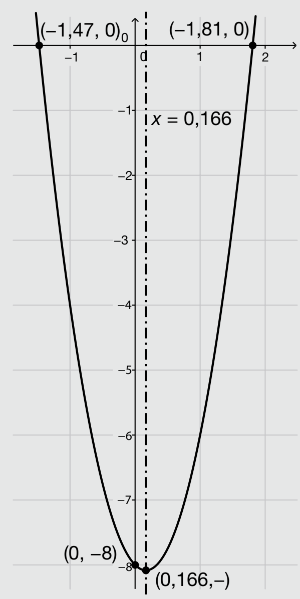
- Puntos de corte con el eje *OX:* $(x_1, 0)$ y $(x_2, 0)$.

$3x^2 - x - 8 = 0$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-8)}}{2 \cdot 3} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{6} - \dfrac{1}{6} \cdot \sqrt{97} \simeq -1{,}47 \\ x_2 = \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{6} \cdot \sqrt{97} \simeq 1{,}81 \end{cases}$$

Corta con el eje *OX* en (–1,47, 0) y (1,81, 0).

- Puntos de corte con el eje *OY:* (0, *c*) → (0, –8).



b) $y = 2x + 2$

Se trata de una función afín: una función polinómica de grado 1 cuya expresión algebraica tiene la forma: $y = mx + b$

Coeficientes: $m = 2$; $b = 2$

La representación es una recta con pendiente $m = 2$. Como $m > 0$, la función es creciente.

Punto de corte con el eje *OX:*

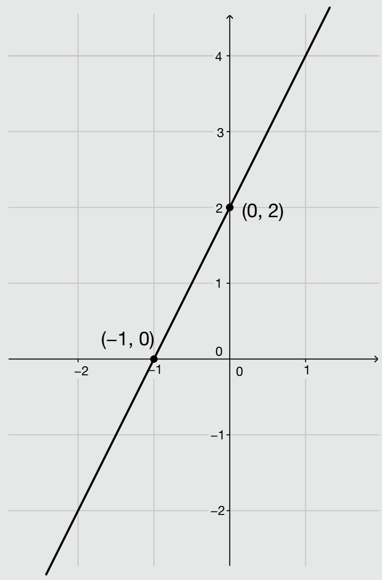
$2x + 2 = 0 \quad \rightarrow \quad x = -1$

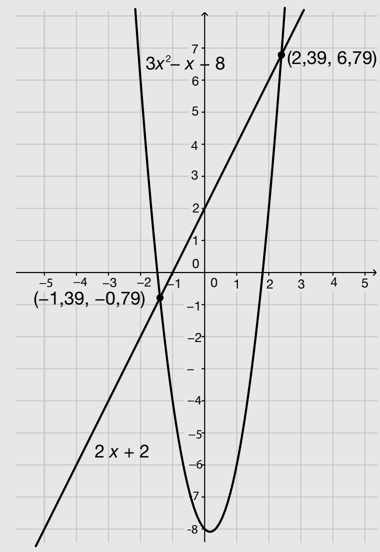
Corta con el eje *OX* en (–1, 0).

Punto de corte con el eje *OX:*

(0, *b*) → (0, 2).

© grupo edebé





c) Para que ambas funciones se corten, deben tener como mínimo un punto en común.
Para encontrar los puntos de corte, se debe solucionar el sistema de ecuaciones formado por ambas funciones:

$$\left.\begin{aligned} y &= 3x^2 - x - 8 \\ y &= 2x + 2 \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} y &= 3x^2 - x - 8 \\ y &= 2x + 2 \end{aligned}\right\} \rightarrow \begin{array}{r} y = \quad 3x^2 - x - 8 \\ -y = \qquad -2x - 2 \\ \hline 0 = 3x^2 - 3x - 10 \end{array}$$

(Se aplica el método de reducción)

Solucionando la ecuación de 2.º grado, tenemos:

$$x_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} \cdot \sqrt{129} \simeq -1{,}39$$

$$x_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \cdot \sqrt{129} \simeq 2{,}39$$

Sustituyendo cada uno de los valores en la función $y = 2x + 2$, obtendremos los valores de las ordenadas de los puntos:

$$y_1 = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6} \cdot \sqrt{129}\right) + 2 = 3 - \frac{1}{3}\sqrt{129} \simeq -0{,}79$$

$$y_2 = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6} \cdot \sqrt{129}\right) + 2 = 3 + \frac{1}{3}\sqrt{129} \simeq 6{,}79$$

Ambas funciones se cortan en los puntos:

$$P_1\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6} \cdot \sqrt{129},\quad 3 - \frac{1}{3}\sqrt{129}\right) \simeq P_1(-1{,}39,\quad -0{,}79)$$

$$P_2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6} \cdot \sqrt{129},\quad 3 + \frac{1}{3}\sqrt{129}\right) \simeq P_2(2{,}39,\quad 6{,}79)$$

Actividades finales

Concepto de función

19. a) Cierto.
b) Falso.
c) Falso.
d) Cierto.

20. a) $f(1) = \dfrac{2 \cdot 1}{(1)^2 - 4} = -\dfrac{2}{3} = -0{,}\widehat{6}$

$f(-4) = \dfrac{2 \cdot (-4)}{(-4)^2 - 4} = -\dfrac{8}{12} = -\dfrac{2}{3} = -0{,}\widehat{6}$

b) La antiimagen de 0 es el valor de x que verifica que $f(x) = 0$:

$$\frac{2x}{x^2 - 4} = 0 \rightarrow 2x = 0 \rightarrow x = 0$$

c) $D(f) = \mathbb{R} - \{-2, +2\}$
$R(f) = \mathbb{R}$

21. $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

a) $f(2) = \sqrt{2^2 - 1} = \sqrt{3}$
$f(-1) = \sqrt{(-1)^2 - 1} = 0$

b) La antiimagen de 0 es el valor de x que verifica que $f(x) = 0$:

$$\sqrt{x^2 - 1} = 0 \rightarrow x^2 - 1 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

Las antiimágenes de 0 son $x = -1$ y $x = 1$

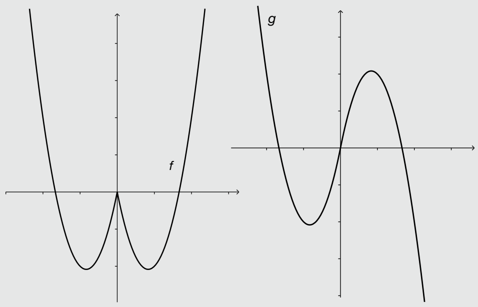
c) $D(f) = (-\infty,\ -1] \cup [1, +\infty)$
$R(f) = \mathbb{R}$

© grupo edebé

22. a) Una función par es simétrica respecto al eje de ordenadas, verificándose que $f(x) = f(-x)$.

Una función impar es simétrica respecto al origen de coordenadas, verificándose que $f(-x) = -f(x)$.

b)

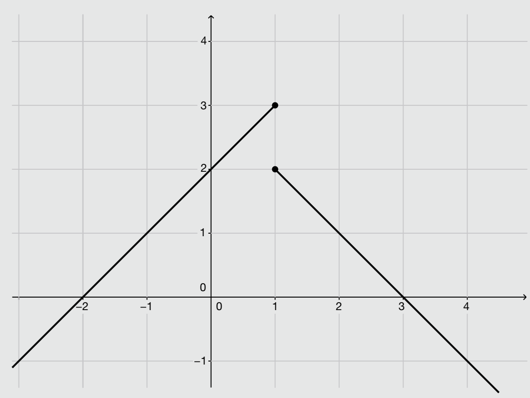


23.

		Gráfica 1	Gráfica 2
a)		$D(f) = \mathbb{R}$ $R(f) = \mathbb{R}$	$D(f) = \mathbb{R}$ $R(f) = (-\infty, 4]$
b)	Eje *OX*	(–1, 0)	(–2, 0) y (2, 0)
	Eje *OY*	(0, 1,6)	(0, 4)
c)		Estrictamente creciente	Creciente en $(-\infty, 0)$ Decreciente en $(0, +\infty)$
d)		$TMV = 1{,}6$	$TMV_{[-3,\,0]} = -3$ $TMV_{[0,\,3]} = 3$
e)		No, es una función lineal	Máximo en (0, 4)
f)		Continua No periódica No simétrica	Continua No periódica Simétrica Respecto a *OY*

		Gráfica 1	Gráfica 2
a)		$D(f) = \mathbb{R}$ $R(f) = [-9, +\infty)$	$D(f) = \mathbb{R}$ $R(f) = (0, +\infty)$
b)	Eje *OX*	(–3, 0) y (3, 0)	No hay punto de corte con *OX*
	Eje *OY*	(0, –9)	(0, 1)
c)		Decreciente en $(-\infty, 0)$ Creciente en $(0, +\infty)$	Estrictamente creciente
d)		$TMV_{[-3,\,0]} = -3$ $TMV_{[0,\,3]} = 3$	
e)		Mínimo en (0, –9)	Sin mínimos ni máximos
f)		Continua No periódica Simétrica respecto a *OY*	Continua No periódica No simétrica

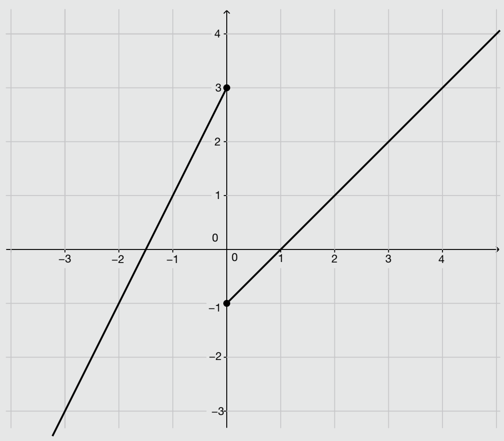
24. a)



- $D(f) = \mathbb{R}$
- Puntos de corte con *OX:* $(-2, 0)$ y $(3, 0)$
  Punto de corte con *OY:* $(0, 2)$
- Intervalo de crecimiento: $(-\infty, 1]$
  Intervalo de decrecimiento: $(1, +\infty)$
- $TMV_{(-\infty,\,1]} = 1$
  $TMV_{(1,+\infty)} = -1$
- Máximo en $(1, 3)$
- Discontinua
- No simétrica. No periódica

© grupo edebé

b)



- $D(f) = \mathbb{R}$
- Puntos de corte con *OX:* $(-1{,}5\,,\ 0)$ y $(1,\ 0)$

  Punto de corte con *OY:* $(0,\ -1)$
- Intervalo de crecimiento: $(-\infty,\ +\infty)$
- $TMV_{(-\infty,\ 0)} = 2$

  $TMV_{[0,+\infty)} = 1$
- Ni máximos, ni mínimos
- Discontinua
- No simétrica. No periódica

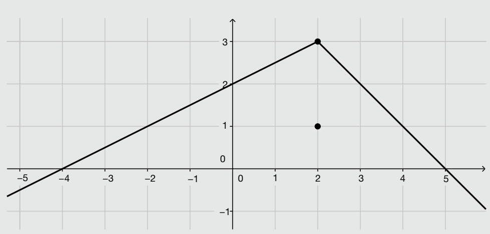
25. **Continuidad:** se trata de una función de proporcionalidad inversa que es discontinua en $x = 0$ al no existir para este valor de x un valor de y. Es una discontinuidad de salto infinito.

Simetría: se comprueba que $f(-x) = -f(x)$, por lo que se trata de una función impar y, por lo tanto, es simétrica respecto al origen de coordenadas.

26. El valor de la función se repite en un intervalo de x igual a 2π. Es decir $f(x+2\pi) = f(x)$.

Por lo tanto, la función es periódica y su periodo es $T = 2\pi$.

27.



a) La función no es continua, presenta una discontinuidad para $x = 2$.

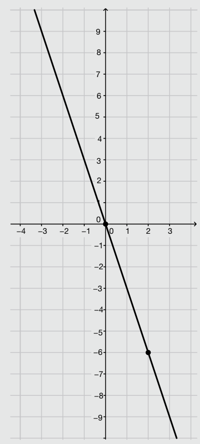
b) Presenta una discontinuidad evitable.

c) Para que fuese continua: $f(2) = 3$, por lo que podrá evitarse si:

$$f(x)\begin{cases} \dfrac{x}{2}+2 & \text{si } x \le 2 \\ -x+5 & \text{si } x > 2 \end{cases} \quad \text{o} \quad f(x)\begin{cases} \dfrac{x}{2}+2 & \text{si } x < 2 \\ -x+5 & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$$

Funciones lineales

28. a) $y = -3x$

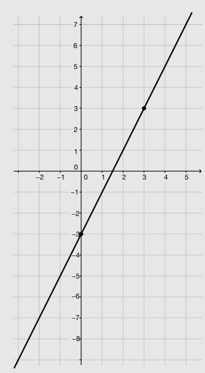


x	y
0	0
2	–6

Función lineal

$m = -3$ $b = 0$

b) $y = 2x - 3$

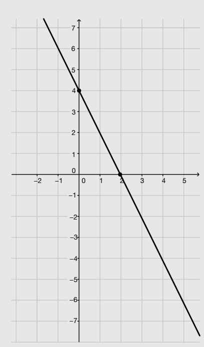


x	y
0	–3
3	3

Función afín

$m = 2$ $b = -3$

c) $y = -2x + 4$



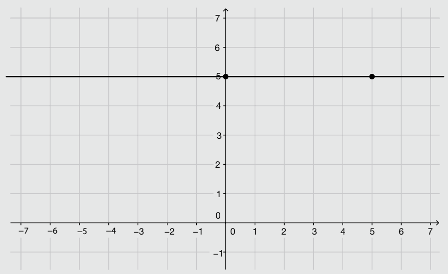
x	y
0	4
2	0

Función afín

$m = -2$ $b = 4$

© grupo edebé

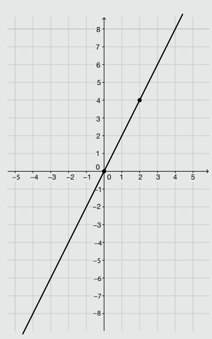
d) $y = 5$



x	y
0	5
5	5

Función constante
$m = 0$ $b = 5$

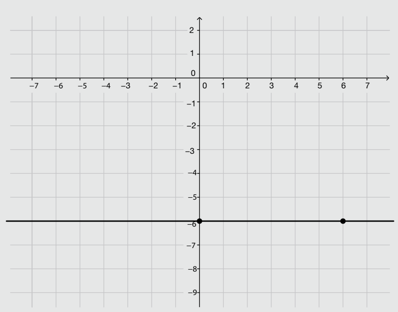
e) $y = 2x$



x	y
0	0
2	4

Función lineal
$m = 2$ $b = 0$

f) $y = -6$



x	y
0	−6
6	−6

Función constante
$m = 0$ $b = -6$

29. Por ser paralela a $y = 2x$, será de la forma: $y = 2x + b$ y, por lo tanto, $b = y - 2x$.
Como se conoce el punto $P(2, 7)$ de la recta, puede sustituirse el valor de *x* e *y* en la expresión anterior: $b = 7 - 2 \cdot 2 = 3$
La expresión algebraica será: $y = 2x + 3$

30. a) $y = 5$
b) $y = 4$
c) $y = -3x$
d) $y = -3x$

31. Se trata de una función afín, por lo que será de la forma: $y = mx + b$.
Si $f(1) + 3 = f(2)$, entonces:

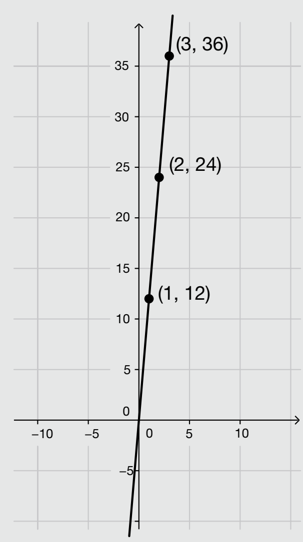
$$(m \cdot 1 + b) + 3 = m \cdot 2 + b$$
$$m + 3 = 2m$$
$$m = 3$$

Si $4 \cdot f(2) = f(6)$, entonces:

$$4 \cdot (m \cdot 2 + b) = m \cdot 6 + b$$
$$8m + 4b = 6m + b$$
$$2m = -3b$$
$$b = -\frac{2m}{3} = -\frac{2 \cdot 3}{3} = -2$$

La expresión algebraica es: $y = 3x - 2$

32.



a) Es una función lineal.
b) $m = 12$ $b = 0$
La expresión algebraica es: $y = 12x$
c) $D(f) = \mathbb{R}$ $R(f) = \mathbb{R}$

© grupo edebé

d) Punto de corte con OX: $(0,\ 0)$

Punto de corte con OY: $(0,\ 0)$

Función estrictamente creciente.

$$TVM_{[1,3]} = \frac{f(3)-f(1)}{3-1} = \frac{36-12}{3-1} = \frac{24}{2} = 12$$

e) $f\left(\frac{1}{2}\right) = 12 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) = 6$

$f\left(-\frac{1}{2}\right) = 12 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -6$

Es una función impar, ya que $f(-x) = -f(x)$.

33. Debemos recordar que la pendiente de una recta se corresponde con la tangente del ángulo que forma con el semieje positivo de abscisas

a) $m = tg\ 45° = 1$

La expresión algebraica buscada será de la forma: $y = x + b$

Como sabemos que pasa por el punto $P(-3,\ 2)$, puede sustituirse el valor de x e y en la expresión anterior: $2 = -3 + b \ \Rightarrow\ b = 5$

La expresión algebraica buscada es: $y = x + 5$

b) $m = tg\ 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$

La expresión algebraica buscada será de la forma:

$y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + b$

La recta pasa por el punto $Q(3,\ 1)$, por lo tanto:

$$b = y - \frac{\sqrt{3}}{3}x = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 3 = 1 - \sqrt{3}$$

La expresión algebraica buscada es:

$$y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 1 - \sqrt{3}$$

34. Se trata de una función afín, por lo que será de la forma: $y = mx + b$

En este caso: $b = -2 \ \Rightarrow\ y = mx - 2$

Por pasar por $P(1,\ -5)$: $-5 = m \cdot 1 - 2$

$m = -3$

La expresión algebraica es: $y = -3x - 2$

35. Se trata de una función afín, por lo que será de la forma: $y = mx + b$

En este caso: $m = \frac{4}{3} \ \rightarrow\ y = \frac{4}{3}x + b$

Por pasar por $A(-2,\ 1)$: $1 = \frac{4}{3} \cdot (-2) + b$

$b = 1 + \frac{8}{3} = \frac{11}{3}$

La expresión algebraica es: $y = \frac{4}{3}x + \frac{11}{3}$

36. a) $y = mx + b$

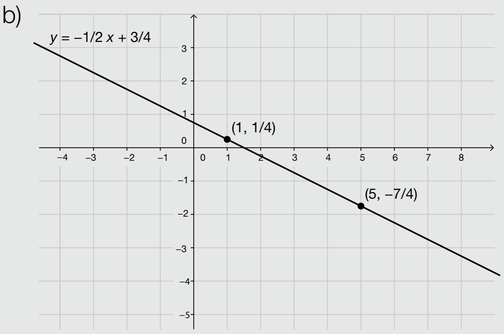
Sustituyendo x e y por los valores de los puntos dados, obtendremos un sistema de dos ecuaciones que deberemos solucionar para determinar m y b.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Punto } \left(1,\ \frac{1}{4}\right) \ \rightarrow\ \frac{1}{4} = m \cdot 1 + b \ \rightarrow\ m = \frac{1}{4} - b \\ \text{Punto } \left(5,\ -\frac{7}{4}\right) \ \rightarrow\ -\frac{7}{4} = m \cdot 5 + b \ \rightarrow\ 5m = -\frac{7}{4} - b \end{array}\right\}$$

Resolviendo el sistema, obtenemos: $\begin{cases} m = -\frac{1}{2} \\ b = \frac{3}{4} \end{cases}$

La expresión analítica es: $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}$

b)



c) Es decreciente, ya que tiene pendiente negativa.

d) Punto de corte con el eje OX: $(x_0, 0)$

$-\frac{1}{2}x + \frac{3}{4} = 0$

$-\frac{1}{2}x = -\frac{3}{4}$

$x = \frac{3}{2}$

Punto de corte con OX: $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$

Punto de corte con el eje OY: $(0, y_0)$

$y = -\frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{3}{4} = \frac{3}{4}$

Punto de corte con OY: $\left(0, \frac{3}{4}\right)$

La pendiente ya se ha determinado en el apartado a): $m = -\frac{1}{2}$

© grupo edebé

Otras funciones

37. a) $f(x)$ se corresponde con la gráfica 2.

$g(x)$ se corresponde con la gráfica 1.

$h(x)$ se corresponde con la gráfica 3.

b) $f(x)+2=\left(x^2-5x+1\right)+2=x^2-5x+3=g(x)$

Por lo tanto, la gráfica de la función $g(x)$ puede obtenerse trasladando dos unidades hacia arriba la gráfica de la función $f(x)$.

$g(x)-4=\left(x^2-5x+3\right)-4=x^2-5x-1=h(x)$

Por lo tanto, la gráfica de la función $h(x)$ puede obtenerse trasladando cuatro unidades hacia abajo la gráfica de la función $g(x)$.

38. Función cuadrática, será de la forma:

$y=ax^2+bx+c$

Se planteará un sistema de tres ecuaciones a partir de las condiciones dadas. Se obtendrán los coeficientes a, b y c resolviendo el sistema.

$$\left.\begin{array}{r} f(0)=24\rightarrow a\cdot 0^2+b\cdot 0+c=24\rightarrow c=24 \\ \text{Pasa por } P\left(3,\ 0\right)\rightarrow a\cdot 3^2+b\cdot 3+c=0\rightarrow 9a+3b+c=0 \\ f(4)=0\rightarrow a\cdot 4^2+b\cdot 4+c=0\rightarrow 16a+4b+c=0 \end{array}\right\}$$

Resolviendo el sistema, obtenemos:

$a=2 \qquad b=-14 \qquad c=24$

La expresión algebraica es: $y=2x^2-14x+21$

39. a) Eje: $x=-1$

Vértice: $V\left(-1,\ -8\right)$

b) Eje: $x=0$

Vértice: $V\left(0,\ 2\right)$

c) Eje: $x=1/4$

Vértice: $V\left(1/4,\ 1/8\right)$

d) Eje: $x=-4$

Vértice: $V\left(-4,\ -1\right)$

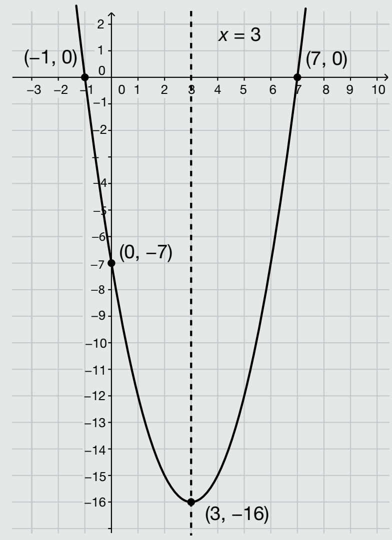
40. a) $\left(-5,\ 0\right)$

b) $\left(-9,\ 0\right)$ y $\left(1,\ 0\right)$

c) $\left(1,\ 0\right)$ y $\left(2,\ 0\right)$

d) La ecuación no tiene solución en $\mathbb{R}$, por lo que no corta co n el eje *OX*.

41. a)



$y=x^2-6x-7$

Coeficientes: $a=1>0 \quad b=-6 \quad c=-7$

$a>0$; por tanto, la función es cóncava, sus ramas se orientan hacia arriba y su vértice será el mínimo de la función.

Eje de la parábola: $x=3$.

Vértice: $V\left(3,-16\right)$, que coincide con el mínimo.

Puntos de corte con *OX:* $\left(-1,\ 0\right)$ y $\left(7,\ 0\right)$

Punto de corte con *OY:* $\left(0,\ -7\right)$

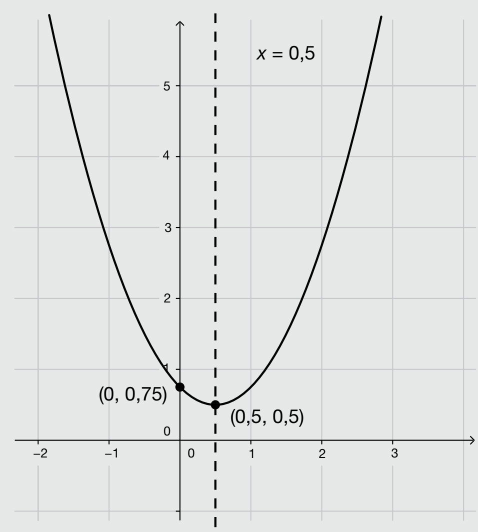
$D(f)=\mathbb{R} \qquad R(f)=\left[-16,\ +\infty\right)$

Decreciente en el intervalo $\left(-\infty,\ 3\right)$

Creciente en el intervalo $\left(3,\ +\infty\right)$

Función continua y no periódica.

b)



$y=x^2-x+\dfrac{3}{4}$

Coeficientes: $a=1>0 \quad b=-1 \quad c=\dfrac{3}{4}$

© grupo edebé

$a > 0$; por tanto, la función es cóncava, sus ramas se orientan hacia arriba y su vértice será el mínimo de la función.

Eje de la parábola: $x = \frac{1}{2}$.

Vértice: $V\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, que coincide con el mínimo.

Puntos de corte con *OX*: no corta con el eje de abscisas.

Punto de corte con *OY*: $\left(0, \frac{3}{4}\right)$

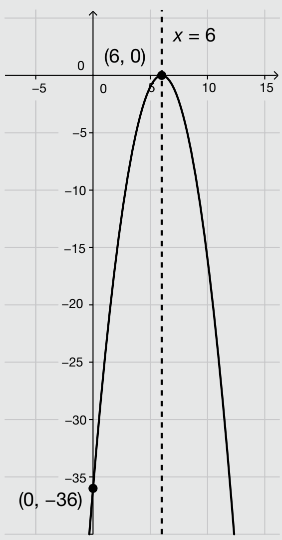
$D(f) = \mathbb{R}$ $\quad R(f) = \left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$

Decreciente en el intervalo $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$

Creciente en el intervalo $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$

Función continua y no periódica.

c)



$y = -x^2 + 12x - 36$

Coeficientes: $a = -1 < 0$ $\quad b = 12$ $\quad c = -36$

$a < 0$; por tanto, la función es convexa, sus ramas se orientan hacia abajo y su vértice será el máximo de la función.

Eje de la parábola: $x = 6$.

Vértice: $V(6, 0)$, que coincide con el máximo.

Punto de corte con *OX:* $(6, 0)$

Punto de corte con *OY:* $(0, -36)$

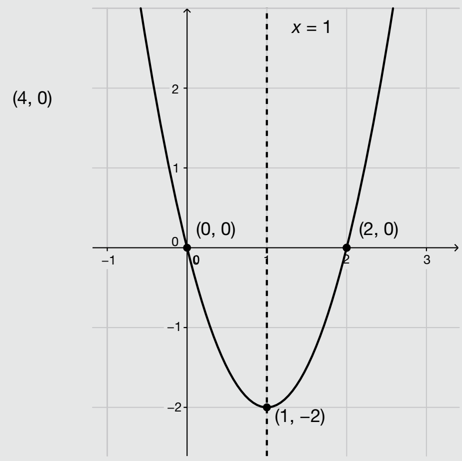
$D(f) = \mathbb{R}$ $\quad R(f) = (-\infty, 0]$

Creciente en el intervalo $(-\infty, 6)$

Decreciente en el intervalo $(6, +\infty)$

Función continua y no periódica.

d)



$y = 2x^2 - 4x$

Coeficientes: $a = 2 > 0$ $\quad b = -4$ $\quad c = 0$

$a > 0$; por tanto, la función es cóncava, sus ramas se orientan hacia arriba y su vértice será el mínimo de la función.

Eje de la parábola: $x = 1$.

Vértice: $V(1, -2)$, que coincide con el mínimo.

Puntos de corte con *OX:* $(0, 0)$ y $(2, 0)$

Punto de corte con *OY:* $(0, 0)$

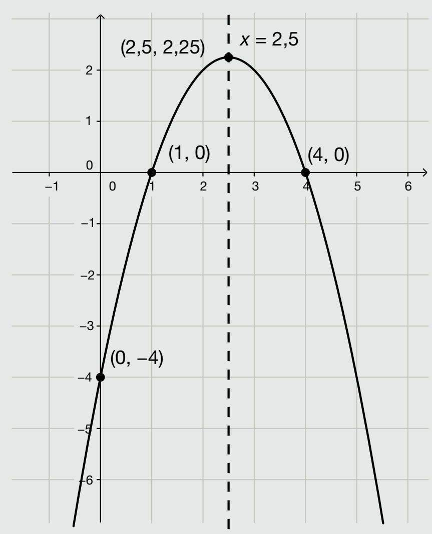
$D(f) = \mathbb{R}$ $\quad R(f) = [-2, +\infty)$

Decreciente en el intervalo $(-\infty, 1)$

Creciente en el intervalo $(1, +\infty)$

Función continua y no periódica.

e)



$y = -x^2 + 5x - 4$

Coeficientes: $a = -1 < 0$ $\quad b = 5$ $\quad c = -4$

$a < 0$; por tanto, la función es convexa, sus ramas se orientan hacia abajo y su vértice será el máximo de la función.

© grupo edebé

Eje de la parábola: $x = \frac{5}{2}$.

Vértice: $V\left(\frac{5}{2}, \frac{9}{4}\right)$, que coincide con el máximo.

Puntos de corte con *OX*: $(1,\ 0)$ y $(4,\ 0)$

Punto de corte con *OY*: $(0,\ -4)$

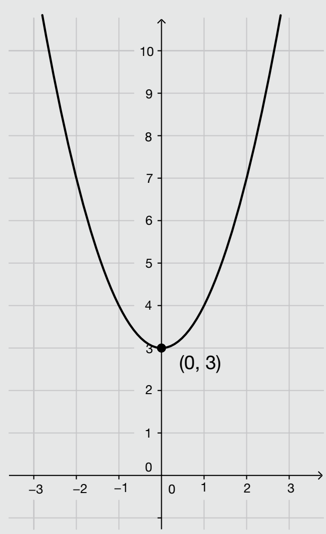
$D(f) = \mathbb{R} \qquad R(f) = \left(-\infty,\ \frac{9}{4}\right]$

Creciente en el intervalo $\left(-\infty,\ \frac{5}{2}\right)$

Decreciente en el intervalo $\left(\frac{5}{2},\ +\infty\right)$

Función continua y no periódica.

f)



$y = x^2 + 3$

Coeficientes: $a = 1 > 0 \quad b = 0 \quad c = 3$

$a > 0$; por tanto, la función es cóncava, sus ramas se orientan hacia arriba y su vértice será el mínimo de la función.

Eje de la parábola: $x = 0$, que es el eje de ordenadas.

Vértice: $V(0, 3)$, que coincide con el mínimo.

Puntos de corte con *OX*: no corta con el eje de abscisas.

Punto de corte con *OY:* $(0,\ 3)$

$D(f) = \mathbb{R} \qquad R(f) = [3,\ +\infty)$

Decreciente en el intervalo $(-\infty,\ 0)$

Creciente en el intervalo $(0,\ +\infty)$

Función continua y no periódica.

42. Función cuadrática, será de la forma:

$y = ax^2 + bx + c$

Se planteará un sistema de tres ecuaciones a partir de los puntos dados. Se obtendrán los coeficientes *a*, *b* y *c* resolviendo el sistema.

$$\left.\begin{array}{r} \text{Pasa por } (-1,\ 10) \rightarrow a\cdot(-1)^2 + b\cdot(-1) + c = 10 \rightarrow a - b + c = 10 \\ \text{Pasa por } (0,\ 2) \rightarrow a\cdot 0^2 + b\cdot 0 + c = 2 \rightarrow c = 2 \\ \text{Pasa por } (2,\ 4) \rightarrow a\cdot 2^2 + b\cdot 2 + c = 4 \rightarrow 4a + 2b + c = 4 \end{array}\right\}$$

Resolviendo el sistema, obtenemos:

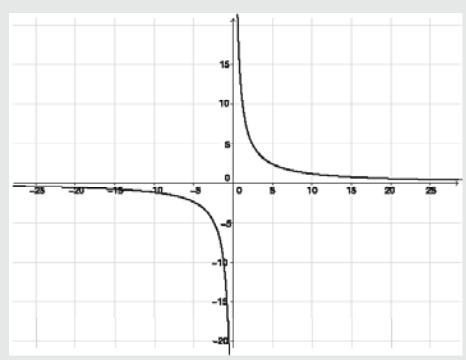
$a = 3 \qquad b = -5 \qquad c = 2$

La expresión algebraica es: $y = 3x^2 - 5x + 2$

43. a)

Base en cm (x)	2	4	5	8	10
Altura en cm (y)	6	3	2,4	1,5	1,2

b)



$A = \frac{1}{2}\cdot b\cdot h \rightarrow h = \frac{2\cdot A}{b}$

$y = \frac{12}{x}$

Se trata de una función de proporcionalidad inversa.

44. a) $k = x \cdot y$

En la tabla comprobamos que pasa por $\left(2,\ \frac{1}{5}\right)$,

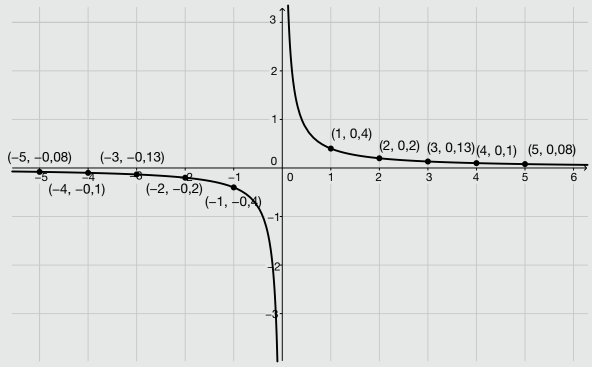
por lo que: $k = 2\cdot\frac{1}{5} = \frac{2}{5}$

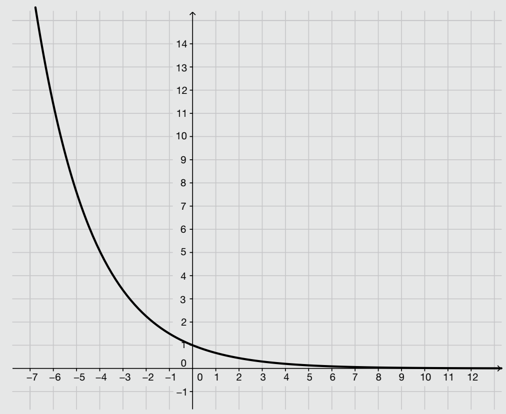
La expresión algebraica será: $y = \frac{2}{5x}$

b)

(x)	–5	–4	–3	–2	–1	1	2	3	4	5
$f(x)$	$-\frac{2}{25}$	$-\frac{1}{10}$	$-\frac{2}{15}$	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{25}$

© grupo edebé





45. $f(x) = k \cdot a^{x-1}$

$f(1) = 6{,}528 = k \cdot a^{1-1} \to k = 6{,}528$

$f(3) = 40{,}8 = 6{,}528 \cdot a^{3-1} \to a^2 = \dfrac{40{,}8}{6{,}528} \to a = 2{,}5$

La función es: $f(x) = 6{,}528 \cdot 2{,}5^{x-1}$

(x)	1	2	3	4
f(x)	6,528	16,32	40,8	102

46. $y = a^x$

a) Cierto. Si $a = 0$, para todo el dominio de la función $y = 0$, que es una función constante, un tipo de función lineal.

b) Cierto. Si $a = 1$, entonces $y = 1^x$, y para cualquier valor de *x* tendríamos la función constante $y = 1$.

c) Falso. El recorrido es $(0, +\infty)$.

d) Cierto. La función $y = a^x$ es un caso particular de $y = k \cdot a^x$ en el que $k = 1$. En las funciones exponenciales *k* representa el valor de *y* cuando $x = 0$, por lo tanto, si $k = 1$, la función corta el eje *OY* en el punto $(0, 1)$.

47. Tabla de valores: respuesta abierta, por ejemplo:

(x)	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
f(x)	7,594	5,062	3,375	2,25	1,5	1	0,667	0,444	0,296	0,198

$D(f) = \mathbb{R}$ $\quad R(f) = (0, +\infty)$

No corta el eje *OX*.

Corta el eje *OY* en $(0, 1)$.

Decreciente y continua.

48. Por ser una parábola, la expresión algebraica será de la forma: $y = ax^2 + bx + c$

Se planteará un sistema de tres ecuaciones a partir de los puntos dados. Se obtendrán los coeficientes *a*, *b* y *c* resolviendo el sistema.

$$\left.\begin{array}{r} \text{Punto } (0,\ 4) \to a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 4 \to c = 4 \\ \text{Punto } (-1,\ 1) \to a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + c = 1 \to a - b + c = 1 \\ \text{Punto } (2,\ -2) \to a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c = -2 \to 4a + 2b + c = -2 \end{array}\right\}$$

Resolviendo el sistema, obtenemos:

$a = -2 \qquad b = 1 \qquad c = 4$

La expresión algebraica es: $y = -2x^2 + x + 4$

49. $f(x) = k \cdot a^x$

Punto $(0, 5) \;\Rightarrow\; 5 = k \cdot a^0 \;\Rightarrow\; k = 5$

Por lo tanto, la función es de la forma:

$f(x) = 5 \cdot a^x$

$$f(2) = 2 \cdot f(1) \to 5a^2 = 2 \cdot (5a^1)$$

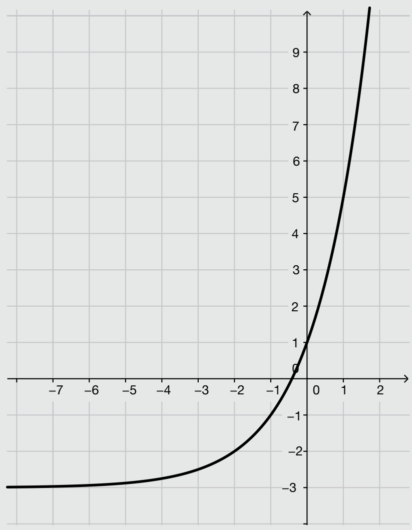
$$5a^2 = 10a$$

$$\frac{a^2}{a} = \frac{10}{5} \to a = 2$$

La expresión algebraica de la función es: $f(x) = 5 \cdot 2^x$

© grupo edebé

50.



$f(x)=2^{x+2}-3$

a) $D(f)=\mathbb{R}$ $\quad R(f)=(-3,\ +\infty)$

b) Función creciente.

c) Punto de corte con *OX:* $(x_0,\ 0)$

$$f(x_0)=0=2^{x+2}-3$$
$$2^{x+2}=3$$
$$\log 2^{x+2}=\log 3$$
$$(x+2)\cdot\log 2=\log 3$$
$$x=\frac{\log 3}{\log 2}-2=-0{,}415$$

Punto de corte con *OX:* $(-0{,}415\ ,\ 0)$

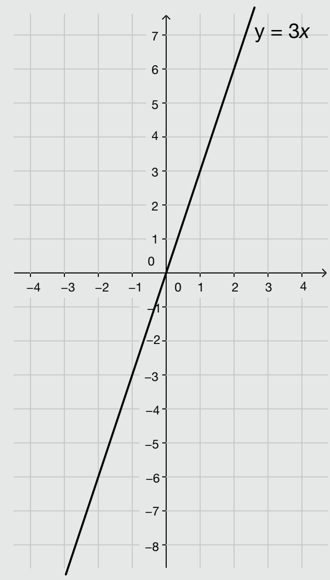
Punto de corte con *OY:* $(0,\ y_0)$

$y_0=2^{0+2}-3=2^2-3=4-3=1$

Punto de corte con *OY:* $(0,\ 1)$

Representación gráfica de funciones con recursos digitales

51.



a) $y=3x$

$D(f)=\mathbb{R}$ $\quad R(f)=\mathbb{R}$

Punto de corte con *OX:* $(0,\ 0)$

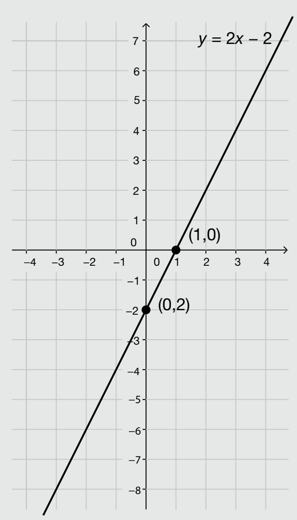
Punto de corte con *OY:* $(0,\ 0)$

Función estrictamente creciente.

Función continua y no periódica.

Sin máximos ni mínimos.

b)



$y=2x-2$

$D(f)=\mathbb{R}$ $\quad R(f)=\mathbb{R}$

Punto de corte con *OX:* $(1,\ 0)$

Punto de corte con *OY:* $(0,\ -2)$

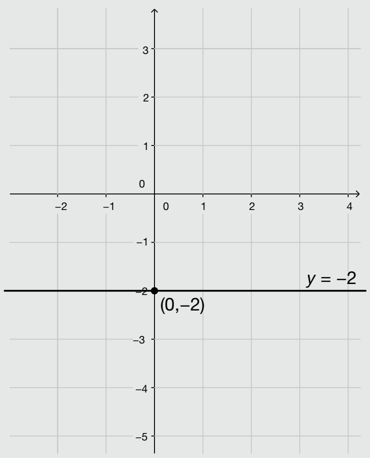
Función estrictamente creciente.

Función continua y no periódica.

Sin máximos ni mínimos.

© grupo edebé

c)



$y = -2$

$D(f) = \mathbb{R} \qquad R(f) = \{-2\}$

Puntos de corte con *OX:* sin puntos de corte con el eje de abscisas.

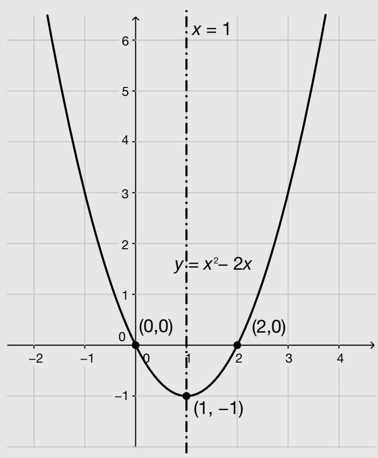
Punto de corte con *OY:* $(0,\ -2)$.

Función constante.

Función continua y no periódica.

Sin máximos ni mínimos.

d)



$y = x^2 - 2x$

$D(f) = \mathbb{R} \qquad R(f) = [-1,\ +\infty)$

Puntos de corte con *OX:*
$(0,\ 0)$ y $(2,\ 0)$

Punto de corte con *OY:* $(0,\ 0)$

Decreciente en el intervalo $(-\infty,\ 1)$.

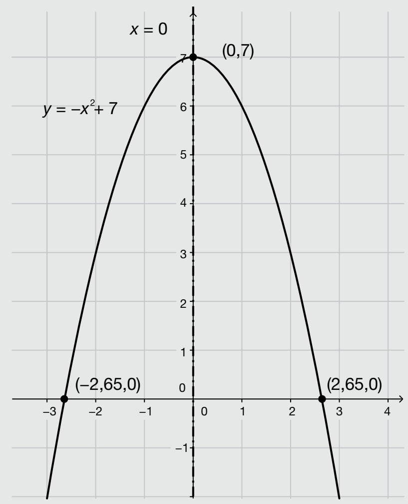
Creciente en el intervalo $(1,\ +\infty)$.

Mínimo absoluto en $V(1, -1)$.

Eje de la parábola: $x = 1$.

Función continua y no periódica.

e)



$y = -x^2 + 7$

$D(f) = \mathbb{R} \qquad R(f) = (-\infty,\ 7]$

Puntos de corte con *OX:* $(-2{,}65\ ,\ 0)$ y $(2{,}65\ ,\ 0)$.

Punto de corte con *OY:* $(0,\ 7)$.

Creciente en el intervalo $(-\infty,\ 0)$.

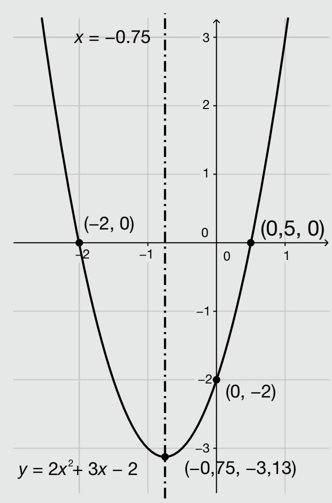
Decreciente en el intervalo $(0,\ +\infty)$.

Máximo absoluto en $V(0, 7)$.

Eje de la parábola: $x = 0$.

Función continua y no periódica.

f)



$y = 2x^2 + 3x - 2$

$D(f) = \mathbb{R} \qquad R(f) = [-3{,}13\ ,\ +\infty)$

Puntos de corte con *OX:*
$(-2\ ,\ 0)$ y $(0{,}5\ ,\ 0)$

Punto de corte con *OY:* $(0,\ -2)$

Decreciente en el intervalo $(-\infty,\ -0{,}75)$.

Creciente en el intervalo $(-0{,}75\ ,\ +\infty)$.

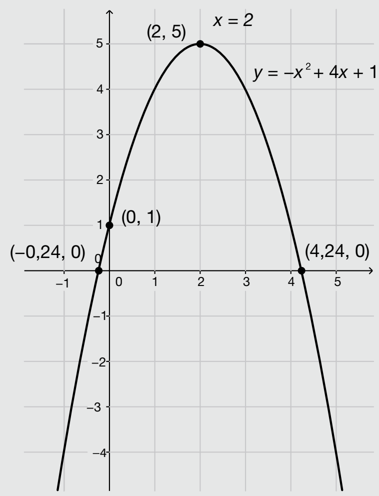
Mínimo absoluto en $V(-0{,}75\ , -3{,}13)$.

Eje de la parábola: $x = -0{,}75$.

Función continua y no periódica.

© grupo edebé

g)



$y = -x^2 + 4x + 1$

$D(f) = \mathbb{R} \qquad R(f) = (-\infty,\ 5]$

Puntos de corte con *OX:* $(-0{,}24\ ,\ 0)$ y $(4{,}24\ ,\ 0)$

Punto de corte con *OY:* $(0,\ 1)$

Creciente en el intervalo $(-\infty,\ 2)$.

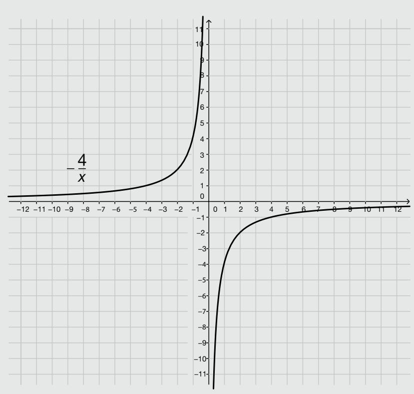
Decreciente en el intervalo $(2,\ +\infty)$.

Máximo absoluto en $V(2, 5)$.

Eje de la parábola: $x = 2$.

Función continua y no periódica.

h)



$y = \dfrac{-4}{x}$

$D(f) = \mathbb{R} - \{0\} \qquad R(f) = \mathbb{R} - \{0\}$

Puntos de corte con *OX:* no tiene.

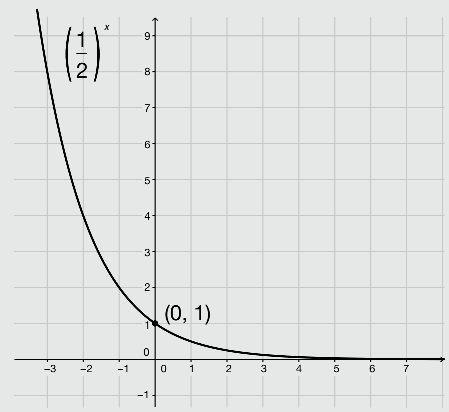
Puntos de corte con *OY:* no tiene.

Función de proporcionalidad inversa.

Sin máximos ni mínimos.

Función discontinua y no periódica.

i)



$y = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$

$D(f) = \mathbb{R} \qquad R(f) = (0,\ +\infty)$

Puntos de corte con *OX:* no tiene.

Punto de corte con *OY:* $(0,\ 1)$

Función estrictamente decreciente.

Sin máximos ni mínimos.

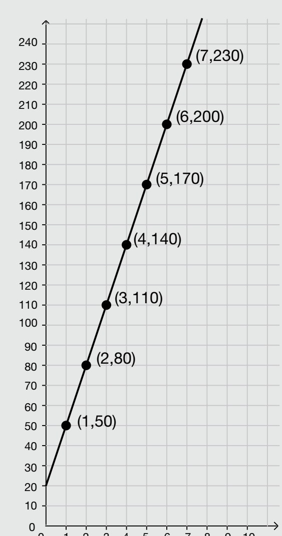
Función continua y no periódica.

Problemas

52. a) Tabla de valores (respuesta abierta, como por ejemplo):

Horas (x)	1	2	3	4	5	6	7
Importe (y)	50	80	110	140	170	200	230

b)



$f(x) = 30x + 20$

Si $f(x) = 95 \rightarrow 30x + 20 = 90 \rightarrow x = 2{,}5$

Habrá trabajado 2,5 horas.

© grupo edebé

53. Se trata de una función afín de la forma:
$y = mx + b$

Se planteará un sistema de 2 ecuaciones a partir de los datos del problema. Al solucionarlo obtendremos m y b.

$$\left.\begin{array}{l} f(20) = 103 \rightarrow 20m + b = 103 \\ f(30) = 153 \rightarrow 30m + b = 153 \end{array}\right\}$$

Solucionando del sistema, obtenemos:
$m = 5; b = 3$

La expresión algebraica es: $y = 5x + 3$

$f(25) = 5 \cdot 25 + 3 = 128$

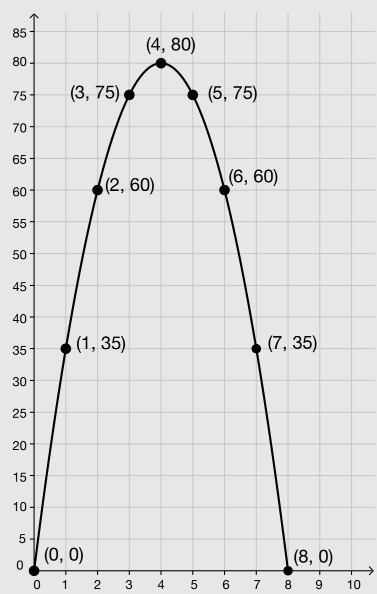
Por un envío de 25 paquetes, se pagarán 128 €.

54. $h(t) = 40t - 5t^2$

a) Tabla de valores (respuesta abierta, como por ejemplo):

Tiempo (t)	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Altura (h)	0	35	60	75	80	75	60	35	0

b)



Analíticamente:

$h(0) = 40 \cdot 0 - 5 \cdot 0^2 = 0$

Máximo en: $\dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-40}{2 \cdot (-5)} = 4$

con lo que $h(4) = 40 \cdot 4 - 5 \cdot 4^2 = 80$

$h(8) = 40 \cdot 8 - 5 \cdot 8^2 = 0$

La pelota inicia su ascenso en $t = 0$ desde una altura de 0 metros. A los 4 segundos alcanza su altura máxima, que es de 80 metros. A partir de ahí desciende, volviendo a una altura de 0 metros a los 8 segundos.

Gráficamente:

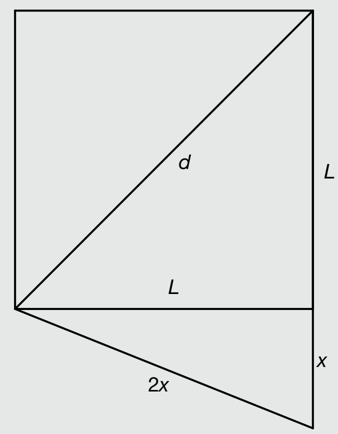
En la gráfica se comprueba que es creciente en $[0,\ 4)$ con el máximo en $t = 4$, donde $h = 80$.

En el intervalo $(4,\ 8]$, la gráfica es decreciente y la altura disminuye hasta $h = 0$ para $t = 8$.

c) La pelota alcanza la altura máxima a los 4 segundos.

d) Ascendente en $[0,\ 4)$. Descendente en $(4,\ 8]$.

55.



Aplicando el teorema de Pitágoras en los triángulos exteriores se verifica:

$L = \sqrt{4x^2 - x^2} = \sqrt{3}\,x$

Aplicando el teorema de Pitágoras en el triángulo formado por dos lados y una diagonal:

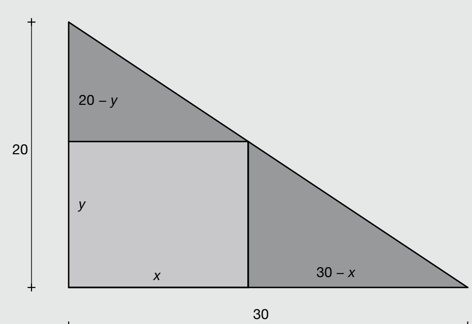
$d^2 = 2 \cdot L^2 = 2 \cdot x^2 \cdot 3 = 6x^2 \quad \Rightarrow \quad d = \sqrt{6}\,x$

$A_{cuadrado} = L^2 = 3x^2$

$A_{triángulo} = \dfrac{1}{2} \cdot L \cdot x = \dfrac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot x \cdot x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}x^2$

$A_{total} = A_{cuadrado} + 4A_{triángulo} = 3x^2 + 4 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2}x^2 = \left(3 + 2\sqrt{3}\right)x^2$

56.



Por semejanza de triángulos:

$$\frac{20 - y}{y} = \frac{x}{30 - x}$$

$$xy - 30y - 20x + 600 = xy$$

$$y = 20 - \frac{2}{3}x$$

© grupo edebé

El área de la casa será:

$A_{casa} = x \cdot y = 20x - \frac{2}{3}x^2$

Observamos que el área de la casa es una función cuadrática. En este caso, el máximo de la función coincidirá con el vértice de la parábola, por lo que:

Máximo: $\frac{-b}{2a} = \frac{-20}{2 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)} = 15$

El valor máximo del área se dará para $x = 15\,m$.

Con este valor: $A_{casa} = 150\text{ m}^2;\ y = 10\text{ m}$

Pon a prueba tus competencias

1. a) Carquiler: $c(x) = 30 + 0{,}5x$

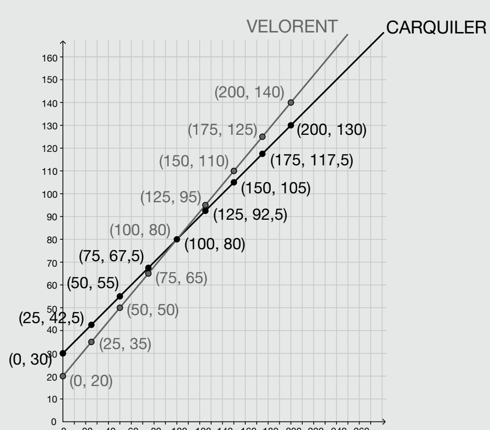
Velorent: $v(x) = 20 + 0{,}6x$

Siendo, en ambos casos, x el kilometraje.

b)

Km	Precio con Carquiler	Precio con Velorent
0	30	20
25	42,5	35
50	55	50
75	67,5	65
100	80	80
125	92,5	95
150	105	110
175	117,5	125
200	130	140

c)



d) Precio Carquiler < Precio Velorent

$30 + 0{,}5x < 20 + 0{,}6x$

$0{,}6x - 0{,}5x > 30 - 20$

$0{,}1x > 10$

$x > 100$

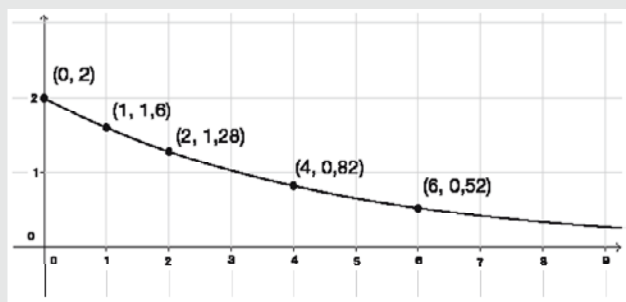
Carquiler será más rentable para kilometrajes superiores a los 100 km.

En la gráfica también se puede comprobar que a partir del punto de corte $(100,\ 80)$, la recta correspondiente a Carquiler va por debajo de la de Velorent.

2. a) Es una función exponencial, por lo que será de la forma: $y = k \cdot 0{,}8^x$

En la tabla, vemos que pasa por el punto $(0,\ 2)$, por lo que:

$2 = k \cdot 0{,}8^0 \rightarrow k = 2$. La expresión algebraica será: $y = 2 \cdot 0{,}8^x$



b) Supondremos que se puede hacer una nueva toma cuando la concentración en sangre sea 0, pero estamos ante una función exponencial, en la que y = 0 cuando x = ∞.

Si nos fijamos en las cifras significativas de los valores medidos de concentración en sangre, vemos que llegan hasta las centésimas, por lo que la concentración mínima que puede detectarse es de 0,01 mg.

Por tanto, podemos considerar que esta concentración es lo suficientemente baja como para poder realizar otra toma, ya que equivale a un 0,05% de la concentración inicial (2 mg).

Resolviendo la ecuación, se obtiene x = 23,75.

Se podrá volver a tomar el fármaco a las 24 horas.

© grupo edebé

3.

$$P(t) = 2 \cdot P_0 = P_0 \cdot (1+i)^t$$
$$2 = (1+i)^t$$
$$\log 2 = t \cdot \log(1+i)$$
$$t = \frac{\log 2}{\log(1+i)}$$

4. a)

$$1\,\text{día} \cdot 24\,{}^{\text{horas}}/_{\text{día}} \cdot 3\,600\,{}^{\text{segundos}}/_{\text{hora}} = 86\,400\ \text{segundos}$$

$$86\,400\,{}^{\text{segundos}}/_{\text{día}} \cdot \frac{1\,\text{huevo}}{20\ \text{segundos}} = 4\,320\,{}^{\text{huevos}}/_{\text{día}}$$

En 10 días pondrá 43 200 huevos.

b) El 50 % de 80 000 es 40 000.

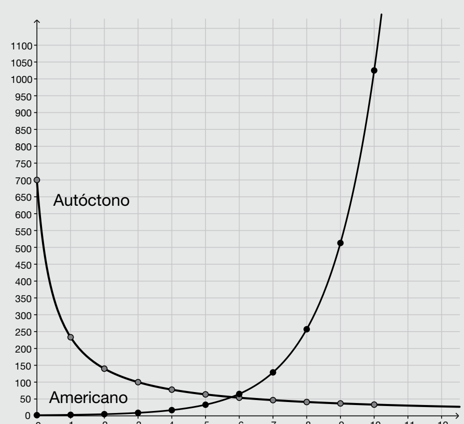
$$40000\ \text{huevos} \cdot \frac{1\,\text{día}}{4320\ \text{huevos}} = 9{,}26\ \text{días}$$

c) $y = 20\,x$, donde x es el tiempo en segundos.

5. a)

Años	Cangrejo autóctono	Cangrejo americano
0	700	2
1	233,33	3
2	140	5
3	100	9
4	77,78	17
5	63,64	33
6	53,85	65
7	46,67	129
8	41,18	257
9	36,84	513
10	33,33	1.025

b)



c) Los especialistas consideran que la población de cangrejos autóctonos es viable mientras su número en la laguna sea superior a 35 individuos.

$$a(t) > 35$$
$$\frac{700}{2t+1} > 35$$
$$700 > 70t + 35$$
$$t < \frac{665}{70} = 9{,}5$$

A partir de los 9,5 años, la población de cangrejo autóctono será inviable.

6. a) $V_g \rightarrow 18 \cdot 4{,}4 \cdot 1{,}25 = 99$ €

b) $V_d \rightarrow 18 \cdot 6{,}5 \cdot 1{,}16 = 135{,}72$ €

c) $V_g \rightarrow 11\,059$ €

$V_d \rightarrow 14\,685,\ 72$ €

d) Si llamamos k a los kilómetros recorridos:

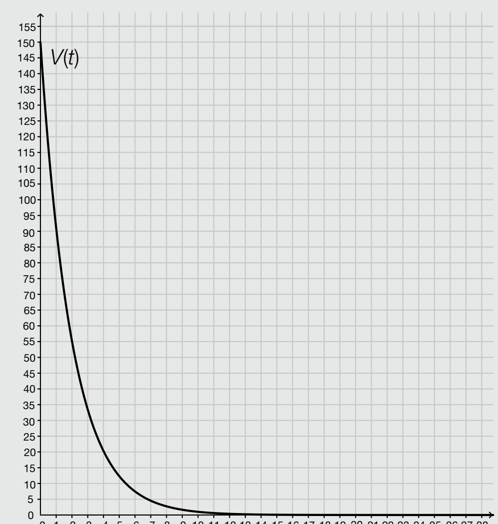
$P_g = 10\,960 + 5{,}5 \cdot k$

$P_d = 14\,550 + 7{,}54 \cdot k$

e) Nunca será igual, siempre es menor la inversión en la versión gasolina:

$10\,960 + 5{,}5 \cdot k = 14\,550 + 7{,}54 \cdot k$

7. a) $V = 150 \cdot e^{-0{,}5\,t}$



b) $V(1,\ 39) = 150 \cdot e^{-0{,}5 \cdot 1{,}39} = 74{,}86\ \text{m}^3$

$V(7) = 150 \cdot e^{-0{,}5 \cdot 7} = 4{,}53\ \text{m}^3$

© grupo edebé