MATEMÁTICAS ORIENTADAS A LAS ENSEÑANZAS ACADÉMICAS
4.º ESO

somoslink

SOLUCIONES AL LIBRO DEL ALUMNO

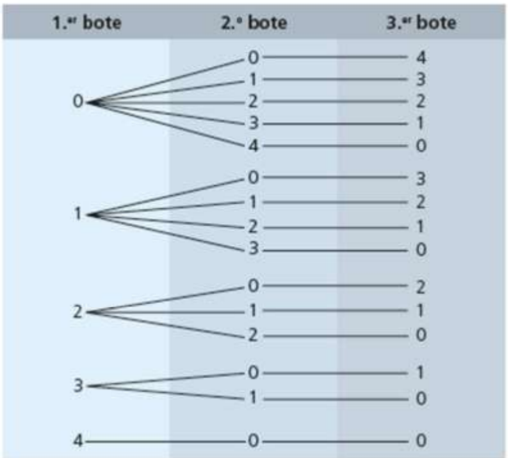
Unidad 13. Combinatoria

© José Manuel Ocaña Fernández; Damaris Mejía Sánchez-Bermejo; Rosana Romero Torralba
© GRUPO EDELVIVES

Unidad 13. Combinatoria

SOLUCIONES PÁG. 289

1 Se quiere introducir 4 canicas iguales en 3 botes distintos, de modo que no se descarta que alguno de ellos quede vacío. ¿De cuántas formas se puede realizar esto? Representa en un diagrama de árbol las posibles soluciones.



2 Jaime desea regalar un cuadro de su colección a cada uno de sus tres hijos. Si la colección consta de 18 cuadros, de los cuales cinco los ha pintado él mismo:

a. ¿De cuántas formas distintas puede hacer el regalo?
$18 \cdot 17 \cdot 16 = 4\,896 \Rightarrow$ Puede hacer el regalo de 4 896 formas diferentes.

b. ¿Y si de los tres cuadros que quiere regalar exactamente uno debe ser de los pintados por él?
$3 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 12 = 2\,340 \Rightarrow$ Puede hacer el regalo de 2 340 formas diferentes.

3 Se lanzan 2 dados y se suman los resultados obtenidos en las caras superiores. ¿De cuántas formas se puede obtener un resultado que sea múltiplo de 2? ¿Y menor de 4?

Los múltiplos de dos son $6 \cdot 3 = 18 \Rightarrow$ Se puede obtener de 18 formas. Los menores de cuatro son 3 resultados: (1 , 1) , (1 , 2) y (2 , 1)

4 Se lanzan dos dados distintos, uno rojo y otro verde. Indica de cuántas formas diferentes se puede obtener:

a. Una suma de 7 u 11.
Hay 8 resultados: (1 , 6), (2 , 5), (3 , 4), (4 , 3), (5 , 2), (6 , 1), (5 , 6), (6 , 5)

b. Que únicamente salga un 2.
Hay 10 resultados: (2 , 1), (2 , 3), (2 , 4), (2 , 5), (2 , 6), (1 , 2), (3 , 2), (4 , 2), (5 , 2), (6 , 2)

© José Manuel Ocaña Fernández; Damaris Mejía Sánchez-Bermejo; Rosana Romero Torralba
© GRUPO EDELVIVES

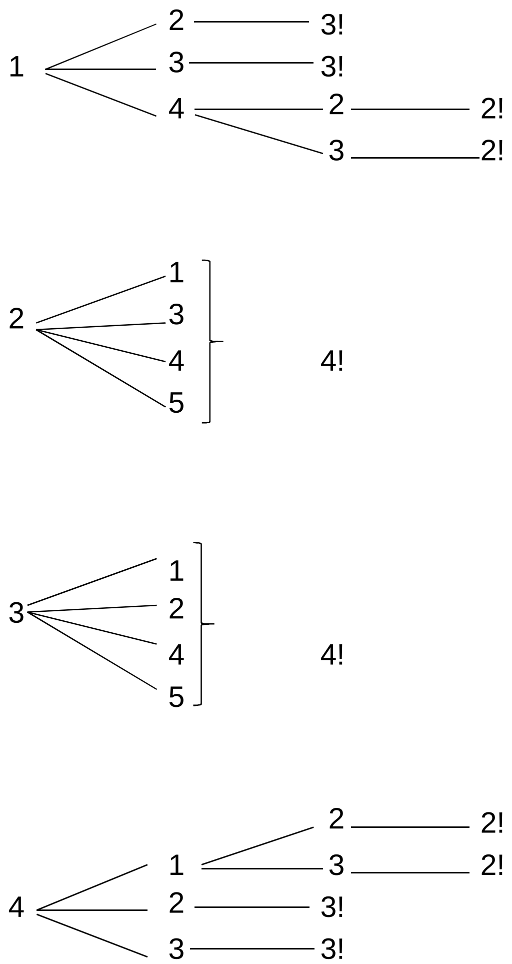
5 **Silvia quiere visitar a cinco familiares que están en sus respectivas casas, pero no puede pasar dos veces por ninguna de ellas. De cuántas formas diferentes puede realizar las visitas si:**

a. Tiene que empezar y terminar en la misma casa.

$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120 \Rightarrow$ 24 formas.

b. No puede visitar al familiar cinco hasta no haber realizado la visita al familiar dos o al tres.

$4 \cdot 2! + 4 \cdot 3! + 2 \cdot 4! = 80 \Rightarrow$ 80 formas.



6 **En el hotel en el que se aloja Carmen ofrecen un desayuno completo compuesto por un producto de bollería a elegir entre croissant, una tostada o cereales; un zumo que puede ser de naranja, piña o manzana, y, finalmente, café o cacao. ¿De cuántas formas diferentes puede combinar Carmen su desayuno?**

$3 \cdot 3 \cdot 2 = 18 \Rightarrow$ 18 desayunos distintos.

7 **Inés se está preparando para realizar el entrenamiento diario y debe elegir su ropa deportiva entre 3 pares de deportivas, 2 camisetas, 3 pantalones cortos y 4 mallas. ¿De cuántas formas distintas puede vestirse Inés si no puede llevar pantalón corto y mallas a la vez?**

$3 \cdot 2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 \cdot 4 = 42 \Rightarrow$ 42 formas de vestirse.

© José Manuel Ocaña Fernández; Damaris Mejía Sánchez-Bermejo; Rosana Romero Torralba
© GRUPO EDELVIVES

8 **En una reunión de viejos amigos se han dado cita 5 parejas. Al presentarse, cada amigo se saluda dando un abrazo a los demás, exceptuando a su respectiva pareja.**

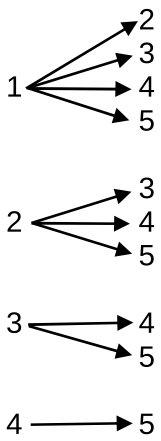
a. ¿Cuántos abrazos se han dado en total en ese encuentro?

$10 \cdot \frac{8}{2} = 40 \Rightarrow 40$ abrazos.

b. Si se hubieran dado 84 abrazos, ¿cuántas parejas habrían asistido?

$x \cdot (x - 2) = 2 \cdot 84 \Rightarrow x^2 - 2x = 168 \Rightarrow x = 14$, tomando únicamente el valor positivo. Por lo tanto, se obtiene que habrían asistido 7 parejas.

9 **A la hora de formalizar la matrícula en una escuela de turismo, Esther debe elegir dos materias entre las cinco que se ofertan. ¿De cuántas formas podría escoger Esther las dos optativas?**



Puede escoger las dos optativas de diez formas distintas.

10 **Considerando los vértices de un hexágono, ¿cuántos segmentos se pueden dibujar con extremos en sus vértices? ¿Y cuántas diagonales se pueden trazar en el hexágono?**

Se pueden trazar 15 segmentos con extremos en sus vértices. Se pueden trazar 9 diagonales.

SOLUCIONES PÁG. 291

11 **Calcula las siguientes permutaciones:**

a. $P_5 = 5! = 120$

b. $P_8 = 8! = 40\,320$

c. $PR_6^{2,2,2} = \frac{n!}{a! \cdot b! \cdot c!} = \frac{6!}{2! \cdot 2! \cdot 2!} = \frac{720}{8} = 90$

d. $P_7 = 7! = 5\,040$

© José Manuel Ocaña Fernández; Damaris Mejía Sánchez-Bermejo; Rosana Romero Torralba
© GRUPO EDELVIVES

12 Una familia formada por los dos padres y sus tres hijos ha comprado entradas para el cine y deben sentarse en cinco butacas consecutivas.

a. ¿De cuántas maneras distintas pueden acomodarse?
$P_5 = 5! = 120$

b. ¿Y si los padres deciden sentarse en los extremos?
$2 \cdot P_3 = 2 \cdot 3! = 12$

13 Con las letras de la palabra PRENSA:

a. ¿Cuántas ordenaciones distintas se pueden hacer?
$P_6 = 6! = 720$

b. ¿Cuántas empiezan por N?
$P_5 = 5! = 120$

c. ¿Cuántas empiezan por N y acaban por A?
$P_4 = 4! = 24$

14 En una urna hay dos bolas verdes, cinco azules y tres rojas. ¿De cuántas maneras distintas pueden extraerse las bolas de la urna una a una?

$PR_{10}^{2,\,5,\,3} = \frac{n!}{a! \cdot b! \cdot c!} = \frac{10!}{2! \cdot 5! \cdot 3!} = 2\,520$

15 Calcula mentalmente las siguientes permutaciones:

a. $\mathbf{P_3} = 3! = 6$

b. $\mathbf{P_4} = 4! = 24$

c. $\mathbf{PR_5^{3,\,2}} = \frac{n!}{a! \cdot b!} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = 10$

d. $\mathbf{PR_4^{2,\,2}} = \frac{n!}{a! \cdot b!} = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = 6$

16 Jimena tiene una estantería con ocho libros. Indica de cuántas formas puede colocarlos si:

a. Es posible cualquier ordenación.
$P_8 = 8! = 40\,320$

b. Dos libros concretos deben estar juntos.
$7 \cdot P_2 \cdot P_6 = 7 \cdot 2! \cdot 6! = 10\,080$

c. Dos libros determinados deben ocupar los extremos.
$2 \cdot P_6 = 2 \cdot 6! = 1\,440$

17 Actividad resuelta

18 ¿De cuántas formas distintas se pueden sentar cinco personas alrededor de una mesa circular?

$PC_5 = (n - 1)! = 4! = 24$

© José Manuel Ocaña Fernández; Damaris Mejía Sánchez-Bermejo; Rosana Romero Torralba
© GRUPO EDELVIVES

SOLUCIONES PÁG. 293

19 Calcula las siguientes variaciones:

a. $\mathbf{V_{9,\,3}} = \frac{m!}{(m-n)!} = \frac{9!}{6!} = 504$

b. $\mathbf{VR_{5,\,3}} = 5^3 = 125$

c. $\mathbf{V_{8,\,4}} = \frac{m!}{(m-n)!} = \frac{8!}{4!} = 1\,680$

d. $\mathbf{VR_{4,\,5}} = 4^5 = 1\,024$

20 En una asociación de montañismo hay 75 afiliados. Anualmente hay que renovar los cargos del presidente, el secretario y el tesorero. Indica de cuántas formas se pueden cubrir los cargos si los actuales:

a. No pueden volver a presentarse.

$V_{72,\,3} = \frac{m!}{(m-n)!} = \frac{72!}{69!} = 357\,840$

b. Pueden volver a renovar el cargo o cambiar a otro.

$V_{75,\,3} = \frac{m!}{(m-n)!} = \frac{75!}{72!} = 405\,150$

21 En la final de una prueba de natación compiten ocho nadadores por lograr un puesto en el pódium. ¿De cuántas formas diferentes pueden obtener las medallas de oro, plata y bronce?

$V_{8,\,3} = \frac{m!}{(m-n)!} = \frac{8!}{5!} = 336$

22 Calcula mentalmente:

a. $\mathbf{V_{6,\,2}} = \frac{m!}{(m-n)!} = \frac{6!}{4!} = 30$

b. $\mathbf{VR_{4,\,3}} = 4^3 = 64$

c. $\mathbf{V_{8,\,3}} = \frac{m!}{(m-n)!} = \frac{8!}{5!} = 336$

d. $\mathbf{VR_{2,\,5}} = 2^5 = 32$

23 El alfabeto morse utiliza un punto y una raya para codificar cualquier letra o número. Utilizando como máximo cuatro veces en cada ocasión estos signos:

a. ¿Cuántas secuencias distintas se pueden formar?

$2 + 4 + VR_{2,\,3} + VR_{2,\,4} = 2 + 4 + 2^3 + 2^4 = 30$

b. ¿Cuántas palabras con tres puntos y dos rayas se pueden crear?

$PR_5^{3,\,2} = \frac{n!}{a! \cdot b!} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = 10$

© José Manuel Ocaña Fernández; Damaris Mejía Sánchez-Bermejo; Rosana Romero Torralba
© GRUPO EDELVIVES

24 En cierto instituto se reparten al final de curso los premios al mejor expediente, al mejor deportista y al más solidario y este año han recaído todos en una misma clase de 25 alumnos. De cuántas formas se puede hacer el reparto si:

a. Los premios no son acumulativos.

$V_{25,\,3} = \frac{m!}{(m-n)!} = \frac{25!}{22!} = 13\,800$

b. Un alumno puede recibir más de un premio.

$VR_{25,\,3} = 25^3 = 15\,625$

25 Con los dígitos 5, 6, 7, 8 y 9:

a. ¿Cuántos números de cuatro cifras distintas se pueden formar?

$V_{5,\,4} = \frac{m!}{(m-n)!} = \frac{5!}{1!} = 120$

b. ¿Y si se pueden repetir las cifras?

$VR_{5,\,4} = 5^4 = 625$

26 ¿Cuántos números capicúas se pueden formar con seis cifras?

Los números capicúa son de la forma abccba. La forma de elegir los números abc, pero con a distinto de cero, son $VR_{10,\,3} - VR_{10,\,2} = 10^3 - 10^2 = 900$.

27 El sistema de matriculación europeo, por el que se rigen las matrículas de los vehículos en España, consiste en dos grupos de caracteres, el primero de los cuales es un número de cuatro cifras, mientras que el segundo está constituido por tres letras. El número se forma con los dígitos del 0 al 9 y las letras se escogen de entre 20, las que constituyen nuestro alfabeto exceptuando las vocales y la CH, la LL, la Ñ y la Q a fin de evitar combinaciones malsonantes y confusiones con otras letras.

a. ¿Cuántas matrículas se pueden formar en total?

$VR_{10,\,4} \cdot VR_{20,\,3} = 10^4 \cdot 20^3 = 80\,000\,000$

b. ¿Cuántas matrículas empiezan por 0?

$VR_{10,\,3} \cdot VR_{20,\,3} = 10^3 \cdot 20^3 = 8\,000\,000$

c. ¿Cuántas tendrán una única B?

$VR_{10,\,4} \cdot 3 \cdot VR_{19,\,2} = 10^4 \cdot 3 \cdot 19^2 = 10\,830\,000$

© José Manuel Ocaña Fernández; Damaris Mejía Sánchez-Bermejo; Rosana Romero Torralba
© GRUPO EDELVIVES

28 Se desea dibujar banderas que estén formadas por tres columnas verticales del mismo tamaño. Cada una de las columnas se pinta de un color diferente, para lo que se dispone de nueve colores:

a. ¿Cuántas banderas distintas se pueden realizar?

$V_{9,\,3} = \frac{m!}{(m-n)!} = \frac{9!}{6!} = 504$

b. Si el rojo tuviera que estar en la columna central, ¿cuántas banderas diferentes se pueden componer?

$V_{8,\,2} = \frac{m!}{(m-n)!} = \frac{8!}{6!} = 56$

c. ¿Cuántas banderas pueden pintarse si siempre ha de estar presente el color negro?

$3 \cdot V_{8,\,2} = 3 \cdot \frac{m!}{(m-n)!} = 3 \cdot \frac{8!}{6!} = 168$

d. ¿Y si tuviera que aparecer el negro, pero no el verde?

$3 \cdot V_{7,\,2} = 3 \cdot \frac{m!}{(m-n)!} = 3 \cdot \frac{7!}{5!} = 126$

SOLUCIONES PÁG. 295

29 Calcula los siguientes números combinatorios:

a. $\binom{\mathbf{6}}{\mathbf{2}} = \frac{6!}{2! \cdot 4!} = 15$

b. $\binom{\mathbf{11}}{\mathbf{9}} = \frac{11!}{9! \cdot 2!} = 55$

c. $\binom{\mathbf{10}}{\mathbf{7}} = \frac{10!}{7! \cdot 3!} = 120$

d. $\binom{\mathbf{8}}{\mathbf{4}} = \frac{8!}{4! \cdot 4!} = 70$

© José Manuel Ocaña Fernández; Damaris Mejía Sánchez-Bermejo; Rosana Romero Torralba
© GRUPO EDELVIVES

30 Demuestra las propiedades de los números combinatorios aplicando su expresión.

Propiedad 1

$\binom{n}{1} = \frac{n!}{1!\cdot(n-1)!}$ = n!

Propiedad 2

$\binom{n}{n} = \frac{n!}{n!\cdot(n-n)!}$ = 1

Propiedad 3

$\binom{n}{1} = \frac{n!}{1!\cdot(n-1)!} = \frac{n!\cdot(n-1)!}{(n-1)!}$ = n

Propiedad 4

$\binom{n}{n-1} = \frac{n!}{(n-1)!\cdot 1!}$ = n

Propiedad 5

Si n ≥ k, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \rightarrow \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$

Propiedad 6

Si n > k, $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1} \rightarrow \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!\cdot(n-k-1)!} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!\cdot(n-k)!} \rightarrow$

$\frac{n!(k+1)!}{(k+1)!\cdot(n-k)!} + \frac{n!(n-k)!}{(k+1)!\cdot(n-k)!} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!\cdot(n-k)!} \rightarrow \frac{n!(k+1+n-k)!}{(k+1)!\cdot(n-k)!} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!\cdot(n-k)!} \rightarrow$

$\frac{n!(1+n)}{(k+1)!\cdot(n-k)!} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!\cdot(n-k)!} \rightarrow \frac{(n+1)!}{(k+1)!\cdot(n-k)!} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!\cdot(n-k)!}$

31 Para los valores n = 7 y k = 5, comprueba las propiedades $\boldsymbol{\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}}$ y $\boldsymbol{\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}}$

$\binom{7}{5} = \frac{7!}{5!\cdot(7-5)!}$ = 21

$\binom{7}{2} = \frac{7!}{5!\cdot(7-5)!}$ = 21

$\binom{7}{5} + \binom{7}{6} = \frac{7!}{5!\cdot(7-5)!} + \frac{7!}{6!\cdot(7-6)!} = \frac{7!}{5!\cdot 2!} + \frac{7!}{6!\cdot 1!}$ = 21 + 7 = 28

$\binom{8}{6} = \frac{8!}{6!\cdot 2!}$ = 28

32 Demuestra la siguiente expresión aplicando la fórmula del número combinatorio:

$\boldsymbol{\binom{n}{1} + 2\cdot\binom{n}{2} = n^2}$

$\binom{n}{1} + 2\cdot\binom{n}{2} = \frac{n!}{1!\cdot(n-1)!} + 2\frac{n!}{2!\cdot(n-2)!} = \frac{n!}{(n-1)!} + \frac{n!}{(n-2)!} = \frac{n!+(n-1)\cdot n!}{(n-1)!} = \frac{n!\cdot(1+n-1)}{(n-1)!} =$

$= n\cdot n = n^2$

© José Manuel Ocaña Fernández; Damaris Mejía Sánchez-Bermejo; Rosana Romero Torralba
© GRUPO EDELVIVES

33 Calcula los elementos del triángulo de Pascal-Tartaglia hasta la fila diez.

$\binom{10}{0} = 1$ $\binom{10}{1} = 10$ $\binom{10}{2} = 45$ $\binom{10}{3} = 120$
$\binom{10}{4} = 210$ $\binom{10}{5} = 252$ $\binom{10}{6} = 210$ $\binom{10}{7} = 120$
$\binom{10}{8} = 45$ $\binom{10}{9} = 10$ $\binom{10}{10} = 1$

1, 10, 45, 120, 210, 252, 210, 120, 45, 10, 1

34 Desarrolla las potencias de los siguientes binomios:

a. $(2 + x)^2 = 4 + x^2 + 4x$

b. $(x + 3y)^3 = x^3 + 9x^2y + 27xy^2 + 27y^3$

c. $(2x + 4y)^4 = 16x^4 + 128x^3y + 384x^2y^2 + 512xy^3 + 256y^4$

d. $(x^2 + 3)^2 = x^4 + 9 + 6x^2$

35 Calcula el desarrollo de las potencias de binomios negativos, (a – b), aplicando el binomio de Newton al caso general [a + (–b)].

a. $(a - 1)^2 = a^2 + 1 - 2a$

b. $(2a - b)^2 = 4a^2 + b^2 - 4ab$

c. $(x - 2y)^2 = x^2 + 4y^2 - 4xy$

d. $(5a - 3y)^3 = 125a^3 - 225a^2y + 135ay^2 - 27y^3$

e. $(-x + 4)^3 = 64 - 48x + 12x^2 - x^3$

f. $(-x^2 + 3y)^3 = -x^6 + 3x^4y - 9x^2y^2 + 27y^3$

36 Desarrolla las potencias de los siguientes binomios:

a. $\left(a + \frac{1}{2}\right)^2 = a^2 + \frac{1}{4} + a$

b. $\left(\frac{3}{4} + b\right)^2 = \frac{9}{16} + b^2 + \frac{3}{2}b$

c. $\left(\frac{c}{2} - \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{c^2}{4} + \frac{1}{9} - \frac{C}{3}$

d. $\left(\frac{d}{5} - 2e\right)^2 = \frac{d^2}{25} + 4e^2 - \frac{4}{5}de$

© José Manuel Ocaña Fernández; Damaris Mejía Sánchez-Bermejo; Rosana Romero Torralba
© GRUPO EDELVIVES

SOLUCIONES PÁG. 297

37 Calcula las siguientes combinaciones:

a. $C_{7,\,2} = \binom{7}{2} = \frac{7!}{2!\cdot 5!} = 21$

b. $C_{10,\,5} = \binom{10}{5} = \frac{10!}{5!\cdot 5!} = 252$

c. $C_{5,\,4} = \binom{5}{4} = \frac{5!}{4!\cdot 1!} = 5$

d. $C_{6,\,3} = \binom{6}{3} = \frac{6!}{3!\cdot 3!} = 20$

38 En el aula de informática de 4.° de ESO de cierto instituto, los alumnos se agrupan por parejas para trabajar en cada uno de los ordenadores disponibles. Si hay 30 alumnos en clase y el aula dispone de 15 ordenadores, ¿cuántas parejas diferentes se pueden formar?

$C_{30,\,2} = \binom{30}{2} = \frac{30!}{2!\cdot 28!} = 435$

39 David quiere regalar a Sergio dos CD de música y los va a elegir de entre los 17 que integran su colección de música clásica. ¿De cuántas formas puede hacerlo?

$C_{17,\,2} = \binom{17}{2} = \frac{17!}{2!\cdot 15!} = 136$

40 ¿Cuántos triángulos se pueden formar con los vértices de un heptágono regular?

$C_{7,\,3} = \binom{7}{3} = \frac{7!}{3!\cdot 4!} = 35$

41 Un equipo de baloncesto dispone de 12 jugadores para jugar un partido este fin de semana.

a. ¿Cuántas alineaciones de 5 jugadores podrá formar?
$C_{12,\,5} = \binom{12}{5} = \frac{12!}{5!\cdot 7!} = 792$

b. Si deja siempre en pista al máximo anotador del equipo, ¿cuántas alineaciones son posibles?
$C_{11,\,4} = \binom{11}{4} = \frac{11!}{4!\cdot 7!} = 330$

42 En un juego de azar dan dos opciones, acertar un número elegido al azar entre 100 o acertar dos números elegidos al azar entre 15. ¿Con cuál crees que es más fácil acertar?

$C_{100,\,1} = \binom{100}{1} = \frac{100!}{1!\cdot 99!} = 100$; $C_{15,\,2} = \binom{15}{2} = \frac{15!}{2!\cdot 13!} = 105$. Es más fácil acertar con el primero.

© José Manuel Ocaña Fernández; Damaris Mejía Sánchez-Bermejo; Rosana Romero Torralba
© GRUPO EDELVIVES

43 En el supermercado hay 15 tipos diferentes de yogures. Espe quiere elegir solamente dos tipos; ¿de cuántas formas distintas puede hacerlo?

$C_{15,\,2} = \binom{15}{2} = \frac{15!}{2!\cdot 13!} = 105$

44 Un grupo de siete amigos ha resultado ganador en una rifa organizada para ayudar en la construcción de un orfanato. Si el premio han sido dos jamones, ¿de cuántas formas se los pueden repartir?

$C_{7,\,2} = \binom{7}{2} = \frac{7!}{2!\cdot 5!} = 28$

45 Un grupo de ocho niños participantes en un concurso de TV ha sido premiado con un viaje para dos personas. ¿De cuántas formas pueden organizarse para ir al viaje?

$C_{8,\,2} = \binom{8}{2} = \frac{8!}{2!\cdot 6!} = 28$

46 Cosme II de Medici, duque de Toscana, era un jugador habitual de dados y observó que, al sumar los puntos obtenidos en el lanzamiento de tres dados, era más frecuente que diese 10 que 9. No entendía por qué, ya que pensaba que ambas sumas se obtenían de seis maneras, con combinaciones de tres números. Pero Galileo lo sacó del error. Investiga cuál fue la solución que le dio el sabio italiano y calcula las posibilidades de cada caso.

Cosme II creía que los dos resultados, 9 y 10, se producían con el mismo número de casos, 6:
Para el 9: (1, 2, 6), (1, 3, 5), (1, 4, 4), (2, 2, 5), (2, 3, 4), (3, 3, 3).
Para el 10: (1, 3, 6), (1, 4, 5), (2, 2, 6), (2, 3, 5), (2, 4, 4), (3, 3, 4).

Galileo le sacó del error al demostrarle que cada uno de estos casos, dan lugar a varios al tener que considerar sus permutaciones. Así:
Para el 9: $P_3 + P_3 + PR_3^{2,\,1} + PR_3^{2,\,1} + P_3 + 1 = 6 + 6 + 3 + 3 + 6 + 1 = 25$
Para el 10: $P_3 + P_3 + PR_3^{2,\,1} + P_3 + PR_3^{2,\,1} + PR_3^{2,\,1} = 6 + 6 + 3 + 6 + 3 + 3 = 27$
Por tanto, es más ventajoso apostar al resultado 10 que al 9.

47 A la inauguración de una feria internacional del automóvil acuden 1 500 asistentes, de los cuales 1 100 son europeos y 400 asiáticos. ¿Cuántos tríos pueden formarse con personas del mismo continente?

$C_{1\,100,\,3} + C_{400,\,3} = \binom{1\,100}{3} + \binom{400}{3} = \frac{1\,100!}{3!\cdot 1\,097!} + \frac{400!}{3!\cdot 397!} =$
$= 221\,228\,700 + 10\,586\,800 = 231\,815\,500$

© José Manuel Ocaña Fernández; Damaris Mejía Sánchez-Bermejo; Rosana Romero Torralba
© GRUPO EDELVIVES

48 **Manuel ha utilizado para las diferentes materias del curso en total cinco cuadernos de tamaño A4 y dos de tamaño A5. Si se cogen tres cuadernos al azar:**

a. ¿De cuántas formas diferentes se pueden elegir?

$C_{7,\,3} = \binom{7}{3} = \frac{7!}{3!\cdot 4!} = 35$

b. ¿En cuántos de esos grupos habrá un solo cuaderno de tamaño A5?

$2 \cdot C_{5,\,2} = 2 \cdot \binom{5}{2} = 2 \cdot \frac{5!}{2!\cdot 3!} = 20$

49 **La jefa de recursos humanos de cierta empresa debe seleccionar a tres personas de entre los 30 candidatos que se han presentado para cubrir una oferta de empleo. ¿De cuántas maneras puede hacer la selección?**

$C_{30,\,3} = \binom{30}{3} = \frac{30!}{3!\cdot 27!} = 4\,060$

50 **En la elaboración de un batido de frutas se quiere utilizar cuatro tipos diferentes de fruta. Si se dispone de nueve frutas distintas:**

a. ¿Cuántos batidos distintos se pueden preparar?

$C_{9,\,4} = \binom{9}{4} = \frac{9!}{4!\cdot 5!} = 126$

b. Si se desea que la fresa esté presente en todos los batidos, ¿cuántos se podrán elaborar?

$C_{8,\,3} = \binom{8}{3} = \frac{8!}{3!\cdot 5!} = 56$

51 **En la biblioteca de un centro educativo hay ocho cuentos distintos de inglés y cuatro de francés. Alicia quiere coger dos de cada. ¿De cuántas maneras podrá hacerlo?**

$C_{8,\,2} \cdot C_{4,\,2} = \binom{8}{2} \cdot \binom{4}{2} = \frac{8!}{2!\cdot 6!} \cdot \frac{4!}{2!\cdot 2!} = 168$

52 **Como parte del plan para fomentar el uso del transporte público y reducir la contaminación provocada por los turismos, el Ayuntamiento de una localidad ha aumentado el número de trenes de cercanías. Aun así, el que coge Arturo va bastante lleno y solo quedan cinco asientos libres para las 20 personas que acaban de subir.**

a. ¿De cuántas formas se pueden distribuir los asientos?

$C_{20,\,5} = \binom{20}{5} = \frac{20!}{5!\cdot 15!} = 15\,504$

b. Si uno de ellos está reservado para una persona minusválida que acaba de subir, ¿cómo se distribuirá el resto de los asientos?

$C_{19,\,4} = \binom{19}{4} = \frac{19!}{4!\cdot 15!} = 3\,876$

© José Manuel Ocaña Fernández; Damaris Mejía Sánchez-Bermejo; Rosana Romero Torralba
© GRUPO EDELVIVES

53 **En la sala de espera de un odontólogo han dejado cinco revistas iguales para que los pacientes se entretengan hasta que son atendidos. Si hay 12 personas aguardando a pasar consulta, ¿de cuántas formas se podrían repartir las revistas?**

$C_{12,\,5} = \binom{12}{5} = \frac{12!}{5! \cdot 7!} = 792$

54 **¿Cuántas aleaciones distintas se pueden formar con cuatro metales diferentes? Cada aleación debe estar formada por dos o más metales.**

$C_{4,\,2} + C_{4,\,3} + 1 = \binom{4}{2} + \binom{4}{3} + 1 = \frac{4!}{2! \cdot 2!} + \frac{4!}{3! \cdot 1!} + 1 = 6 + 4 + 1 = 11$

SOLUCIONES PÁG. 299

1 **¿Por qué se caracteriza el principio de multiplicación?**

Se caracteriza porque el recuento de las posibilidades totales se obtiene al multiplicar el número de posibilidades de cada uno de los casos independientes en que se descompone una acción.

2 **Escribe el desarrollo de la potencia $(a + b)^3$.**

$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

3 **En las permutaciones sin repetición de n elementos, ¿en qué se diferencia cada uno de los grupos que se forman?**

En el orden de los elementos.

4 **¿A qué permutación sin repetición equivale la permutación circular de 6 elementos?**

Equivale a P_5.

5 **¿El orden de colocación de los elementos es una característica determinante para distinguir los diferentes grupos que se forman en las combinaciones sin repetición de n elementos tomados de k en k?**

No, solamente son distintos los grupos si difieren en alguno de los elementos.

6 **Escribe la diferencia entre las permutaciones sin repetición y las variaciones sin repetición.**

Las permutaciones son un caso especial de variaciones en las que el número de elementos diferentes que se toman coincide con el número de elementos de todos los posibles que se pueden tomar, p = n.

7 **Escribe la diferencia entre permutaciones y combinaciones.**

En las permutaciones influye el orden y en las combinaciones no.

© José Manuel Ocaña Fernández; Damaris Mejía Sánchez-Bermejo; Rosana Romero Torralba
© GRUPO EDELVIVES

8 Pon un ejemplo de una permutación de 4 elementos.

Respuesta abierta. Por ejemplo, en una liga de 4 equipos de baloncesto, ¿de cuántas maneras pueden acabar la competición?

9 Pon un ejemplo de una variación sin repetición de 5 elementos tomados de 3 en 3.

Respuesta abierta. Por ejemplo, en una carrera de 5 participantes, ¿de cuántas maneras pueden formar los puestos del pódium?

10 Pon un ejemplo de una combinación sin repetición de 5 elementos tomados de 3 en 3.

Respuesta abierta. Por ejemplo, si Juan dispone de 5 CD de música, pero solamente puede llevarse 3 para un viaje en coche, ¿de cuántas formas puede hacerlo?

11 ¿Con qué coeficientes coinciden los elementos del triángulo?

Coinciden con los coeficientes del desarrollo de la potencia de un binomio.

12 Prepara una presentación digital para tus compañeros sobre las distintas formas de recuento. Puedes hacer un documento PowerPoint, usar Glogster…

Respuesta abierta.

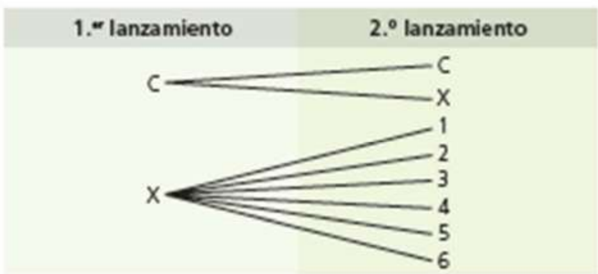
SOLUCIONES PÁG. 300

TÉCNICAS DE RECUENTO

1 Daniel sale apresurado todos los días al trabajo porque siempre se demora en decidir qué se pone. Si cuenta con 6 pantalones, 10 camisas y 2 cinturones distintos, ¿de cuántas formas diferentes se puede vestir?

$6 \cdot 10 \cdot 2 = 120 \Rightarrow$ Hay 120 formas de combinar pantalón, camisa y cinturón.

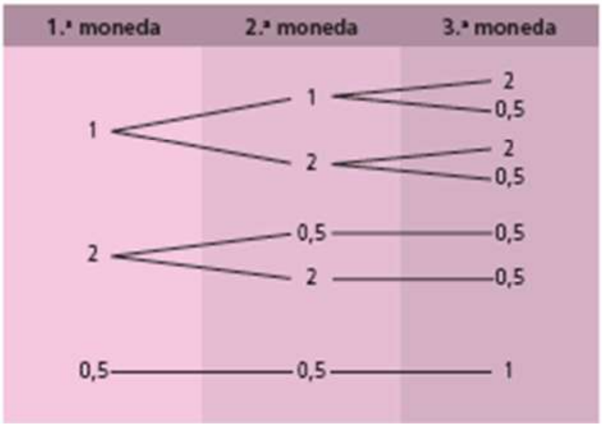
2 Se lanza una moneda y, si sale cara, se vuelve a lanzar, pero, si sale cruz, se lanza un dado. ¿Cuántos resultados diferentes se pueden dar? Realiza una representación gráfica con un diagrama de árbol.



Hay ocho resultados diferentes.

© José Manuel Ocaña Fernández; Damaris Mejía Sánchez-Bermejo; Rosana Romero Torralba
© GRUPO EDELVIVES

3 **Tomás tiene dos monedas de 1 €, dos de 2 € y dos de 50 cts. Tomando tres de las seis monedas, ¿cuántas sumas distintas puede hacer? Utiliza el diagrama de árbol para representar las diferentes posibilidades.**



Puede hacer 7 sumas distintas

4 **César tiene 10 € y decide participar en un juego de azar que consiste en lanzar una moneda 4 veces, apostando 10 € en cada una de las tiradas: si sale cruz, pierde lo apostado, pero, si sale cara, recupera lo apostado más 10 € de beneficio. Escribe todos los resultados posibles teniendo en cuenta que el juego finaliza en el momento en que César pierda todo su dinero.**

Hay 8 posibles resultados:
X, CCCC, CCCX, CCXC, CCXX, CXCC, CXCX, CXX

PERMUTACIONES

5 **Calcula las siguientes permutaciones:**

a. $\mathbf{P_7} = 7! = 5\,040$

b. $\mathbf{P_9} = 9! = 362\,880$

c. $\mathbf{PR_6^{2,\,2,\,2}} = \frac{n!}{a! \cdot b! \cdot c!} = \frac{6!}{2! \cdot 2! \cdot 2!} = 90$

d. $\mathbf{PC_5} = P_4 = 4! = 24$

6 **Escribe como cociente de números factoriales las siguientes expresiones:**

a. $\mathbf{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = \frac{9!}{5!}$

b. $\mathbf{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)} = \frac{n!}{(n-3)!}$

c. $\mathbf{(n+2) \cdot (n+1) \cdot n} = \frac{(n+2)!}{(n-1)!}$

d. $\mathbf{13 \cdot 12 \cdot 11} = \frac{13!}{10!}$

© José Manuel Ocaña Fernández; Damaris Mejía Sánchez-Bermejo; Rosana Romero Torralba
© GRUPO EDELVIVES

7 Indica de cuántas formas diferentes se puede sentar un grupo de 5 personas si:

a. Lo hacen en 5 sillas alineadas en una fila.
$P_5 = 5! = 120$ formas

b. Lo hacen alrededor de una mesa redonda de 5 plazas.
$PC_5 = P_4 = 4! = 24$ formas

8 Dadas las cifras 1, 2, 3 y 4, calcula cuántas ordenaciones se podrían hacer con la condición de que tanto las cifras pares como las impares estén siempre separadas.

Las posiciones de las cifras pares, por ejemplo, deben ser:
X _ X _ o _ X _ X
Sobre estas posiciones los pares pueden permutar, P_2, y también las cifras impares, P_2. Por tanto, habrá $2 \cdot P_2 \cdot P_2 = 8$ posiciones.

9 Tres amigos tienen que elegir un número del 1 al 3 ambos inclusive. Si deben evitar seleccionar el mismo número, ¿de cuántas formas podrán hacerlo?

$P_3 = 3! = 6 \Rightarrow 6$ formas

VARIACIONES

10 Calcula las siguientes variaciones:

a. $V_{4,3} = \frac{m!}{(m-n)!} = \frac{4!}{1!} = 24$

b. $VR_{3,5} = 3^5 = 243$

c. $VR_{5,3} = 5^3 = 125$

d. $V_{6,4} = \frac{m!}{(m-n)!} = \frac{6!}{2!} = 360$

11 Con los dígitos del 1 al 9, ambos inclusive, indica cuántos números de cinco cifras distintas se pueden formar, teniendo en cuenta las siguientes condiciones:

a. Debe ser un número par.
$4 \cdot V_{8,4} = 4 \cdot \frac{m!}{(m-n)!} = 4 \cdot \frac{8!}{4!} = 6\,720$ números

b. Ha de ser menor de 30 000.
$2 \cdot V_{8,4} = 2 \cdot \frac{m!}{(m-n)!} = 2 \cdot \frac{8!}{4!} = 3\,360$ números

c. Tiene que ser mayor o igual a 50 000.
$5 \cdot V_{8,4} = 5 \cdot \frac{m!}{(m-n)!} = 5 \cdot \frac{8!}{4!} = 8\,400$ números

d. Debe ser múltiplo de 5.
$V_{8,4} = \frac{m!}{(m-n)!} = \frac{8!}{4!} = 1\,680$ números

© José Manuel Ocaña Fernández; Damaris Mejía Sánchez-Bermejo; Rosana Romero Torralba
© GRUPO EDELVIVES

12 Con las letras de la palabra LAPICERO:

a. ¿Cuántas palabras, con o sin significado, se pueden formar?
$P_8 = 8! = 40\ 320$ palabras

b. ¿Cuántas de ellas comienzan por vocal?
$4 \cdot P_7 = 4 \cdot 7! = 20\ 160$ palabras

c. ¿Cuántas comienzan y terminan por consonante?
$V_{4,\,2} \cdot P_6 = \frac{4!}{2!} \cdot 6! = 8\ 640$ palabras

13 Resuelve las siguientes ecuaciones:

a. $\mathbf{V_{x,\,2} = 20} \Rightarrow x \cdot (x - 1) = 20 \Rightarrow x = -4$ (no es válida), $x = 5$

b. $\mathbf{V_{x,\,2} - VR_{x,\,2} = 4} \Rightarrow x \cdot (x - 1) - x^2 = 4 \Rightarrow x = -4$ (no es válida).

c. $\mathbf{V_{x-1},\ 2 = x - 2} \Rightarrow (x - 1) \cdot (x - 2) = (x - 2) \Rightarrow x = 2$

d. $\mathbf{VR_{x,\,3} + VR_{x,\,2} = 2x} \Rightarrow x^3 + x^2 = 2x \Rightarrow x = 0$, $x = -1$ (no es válida), $x = 2$

14 Diez amigos se van de acampada a la montaña. Si realizan el viaje en dos coches:

a. ¿De cuántas formas pueden distribuirse en los asientos del coche si todos tienen carnet de conducir?
$P_{10} = 10! = 3\ 628\ 800$ formas

b. ¿De cuántas formas pueden ir si solo cuatro de ellos tienen carnet de conducir?
$V_{4,\,2} \cdot P_8 = \frac{4!}{2!} \cdot 8! = 483\ 840$ formas

NÚMEROS COMBINATORIOS. TRIÁNGULO DE PASCAL-TARTAGLIA. BINOMIO DE NEWTON

15 Calcula los siguientes números combinatorios:

a. $\binom{\mathbf{7}}{\mathbf{3}} = \frac{7!}{3! \cdot 4!} = 35$

b. $\binom{\mathbf{6}}{\mathbf{4}} = \frac{6!}{4! \cdot 2!} = 15$

c. $\binom{\mathbf{13}}{\mathbf{8}} = \frac{13!}{8! \cdot 5!} = 1\ 287$

d. $\binom{\mathbf{12}}{\mathbf{7}} = \frac{12!}{7! \cdot 5!} = 792$

© José Manuel Ocaña Fernández; Damaris Mejía Sánchez-Bermejo; Rosana Romero Torralba
© GRUPO EDELVIVES

16 Desarrolla las potencias de estos binomios:

a. $\left(\boldsymbol{x}+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right)^{\mathbf{2}}$ = $x^2 + \frac{1}{4} + x$

b. $\left(\boldsymbol{3x}+\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}}\right)^{\mathbf{2}}$ = $9x^2 + \frac{\mathbf{16}}{\mathbf{9}} + 8x$

c. $\left(\boldsymbol{4x}+\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{2}}\right)^{\mathbf{3}}$ = $64x^3 + 120x^2 + 75x + \frac{125}{8}$

d. $\left(\frac{\boldsymbol{x}}{\mathbf{3}}+\frac{\boldsymbol{y}}{\mathbf{4}}\right)^{\mathbf{4}}$ = $\frac{x^4}{81} + \frac{x^3y}{27} + \frac{x^2y^2}{24} + \frac{xy^3}{48} + \frac{y^4}{256}$

17 Escribe los coeficientes de los términos de los siguientes desarrollos:

a. $\boldsymbol{(x+y)^6}$ = $x^6 + 6x^5y + 15x^4y^2 + 20x^3y^3 + 15x^2y^4 + 6xy^5 + y^6 \Rightarrow 1, 6, 15, 20, 15, 6, 1$

b. $\boldsymbol{(x+y)^8}$ = $x^8 + 8x^7y + 28x^6y^2 + 56x^5y^3 + 70x^4y^4 + 56x^3y^5 + 28x^2y^6 + 8xy^7 + y^8$

$\Rightarrow 1, 8, 28, 56, 70, 56, 28, 8, 1$

18 Escribe el tercer término de estos desarrollos:

a. $\mathbf{(2a + 3b^4)^4} \Rightarrow 6 \cdot 4a^2 \cdot 9b^8 = 216a^2b^8$

b. $\boldsymbol{(x^3 + 2y^2)^7} \Rightarrow 21 \cdot x^{15} \cdot 4y^4 = 84x^{15}y^4$

COMBINACIONES

19 Calcula las siguientes combinaciones:

a. $\mathbf{C_{7,3}} = \binom{7}{3} = \frac{7!}{3!\cdot 4!} = 35$

b. $\mathbf{C_{9,2}} = \binom{9}{2} = \frac{9!}{2!\cdot 7!} = 36$

c. $\mathbf{C_{11,4}} = \binom{11}{4} = \frac{11!}{4!\cdot 7!} = 330$

d. $\mathbf{C_{10,5}} = \binom{10}{5} = \frac{10!}{5!\cdot 5!} = 252$

20 En un estudio llevado a cabo para comprobar si se cumple la normativa en materia de protección a los menores en los programas emitidos en televisión en horario infantil, se han elegido dos programas al azar de los 18 emitidos en dicha franja horaria. ¿Cuántas posibilidades de elección de los dos programas hay?

$C_{18,2} = \binom{18}{2} = \frac{18!}{2!\cdot 16!} = 153$ posibilidades.

© José Manuel Ocaña Fernández; Damaris Mejía Sánchez-Bermejo; Rosana Romero Torralba
© GRUPO EDELVIVES

21 Al final de una clase de baile de salón, los alumnos deben bailar canciones del estilo que se ha ensayado en esa sesión. Si son 14 alumnos, ¿de cuántas maneras se podría formar una pareja de baile?

$C_{14,\,2} = \binom{14}{2} = \frac{14!}{2!\cdot 12!} = 91$ maneras.

22 En el juego de la lotería primitiva se marcan seis números sobre una tabla de 49 números encasillados del 1 al 49. ¿De cuántas formas diferentes se pueden marcar los seis números?

$C_{49,\,6} = \binom{49}{6} = \frac{49!}{6!\cdot 43!} = 13\ 983\ 816$ formas.

23 Un pastor que tiene un rebaño de 30 ovejas y que dispone de cuatro perros pastores se va a presentar al concurso de perros de pastoreo, para lo que tiene que inscribir a 12 ovejas y dos perros. ¿De cuántas formas puede elegir el equipo que va a participar?

$C_{4,\,2} \cdot C_{30,\,12} = \binom{4}{2} \cdot \binom{30}{12} = \frac{4!}{2!\cdot 2!} \cdot \frac{30!}{12!\cdot 18!} = 6 \cdot 86\ 493\ 225 = 518\ 959\ 350$ formas.

24 Los alumnos de una clase de pádel van a organizar un equipo para disputar un torneo. Se deben inscribir cinco jugadores y un entrenador, que se han de elegir de entre un grupo de 11 jugadores y tres entrenadores. ¿Cuántos equipos distintos se pueden formar?

$3 \cdot C_{11,\,5} = 3 \cdot \binom{11}{5} = 3 \cdot \frac{11!}{5!\cdot 6!} = 3 \cdot 462 = 1\ 386$ equipos.

25 De una baraja de 40 cartas se extraen seis. Determina los diferentes resultados que se pueden obtener, si la extracción de las cartas se realiza:

a. Cogiendo a la vez las seis cartas.

$C_{40,\,6} = \binom{40}{6} = \frac{40!}{6!\cdot 34!} = 3\ 838\ 380$ resultados

b. Sacándolas de una en una.

$V_{40,\,6} = \frac{40!}{34!} = 2\ 763\ 633\ 600$ resultados

c. Sacándolas de una en una y con reemplazamiento.

$VR_{40,\,6} = 40^6 = 4\ 096 \cdot 10^6$ resultados

EVALUACIÓN

1 Al lanzar dos dados y una moneda, el número de resultados posibles es:
a. 12 b. 72 c. 38 d. 40

$2 \cdot 6 \cdot 6 = 72$ Solución b.

© José Manuel Ocaña Fernández; Damaris Mejía Sánchez-Bermejo; Rosana Romero Torralba
© GRUPO EDELVIVES

2 **En un programa de radio intervienen cuatro tertulianos. Si dos de ellos tienen que entrevistar en directo a un político, el número de formas distintas para elegir a los tertulianos que realizarán la entrevista es:**

a. 6 **b. 24** **c. 16** **d. 12**

$C_{4,2} = \binom{4}{2} = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = 6$ Solución a.

3 **El número de formas distintas que pueden llegar a la meta siete atletas en una carrera de 110 metros vallas es:**

a. 2 500 **b. 3 800** **c. 4 050** **d. 5 040**

$P_7 = 7! = 5\ 040$ Solución d.

4 **Dolores fue este domingo a la hípica. En la carrera principal competían 10 caballos, y Dolores eligió tres de ellos para el primero, segundo y tercer puesto. El número de elecciones diferentes que debería haber hecho para tener la absoluta certeza de que acertaría es:**

a. 120 **b. 240** **c. 720** **d. 980**

$V_{10,3} = \frac{10!}{7!} = 720$ Solución c.

5 **Con los dígitos 1, 2, 3 y 4, la cantidad de números de tres cifras distintas que se pueden formar es:**

a. 24 **b. 64** **c. 4** **d. 64**

$P_4 = 4! = 24$ Solución a.

6 **El valor de la operación $\binom{9}{6} + \binom{9}{7}$ es:**

a. $\binom{9}{7}$ **b. $\binom{10}{7}$** **c. $\binom{10}{6}$** **d. $\binom{10}{8}$**

$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1} = \binom{9+1}{6+1} = \binom{10}{7}$ Solución b.

7 **Un comité de empresa formado por seis personas se ha reunido en la sala de conferencias de su sede alrededor de una mesa circular con espacio para seis puestos. El número de formas diferentes en que se pueden sentar es:**

a. 6 **b. 36** **c. 120** **d. 240**

$PC_6 = 5! = 120$ Solución c.

8 **Un equipo de balonmano está decidiendo el color de su equipamiento; pueden optar entre cuatro colores para la camiseta, tres colores para el pantalón y tres colores para los calcetines. El número de formas distintas para elegir su equipamiento es:**

a. 36 **b. 10** **c. 30** **d. 100**

$4 \cdot 3 \cdot 3 = 36$ Solución a.

© José Manuel Ocaña Fernández; Damaris Mejía Sánchez-Bermejo; Rosana Romero Torralba
© GRUPO EDELVIVES