MATEMÁTICAS ORIENTADAS A LAS ENSEÑANZAS ACADÉMICAS
4.º ESO

somoslink

SOLUCIONES AL LIBRO DEL ALUMNO

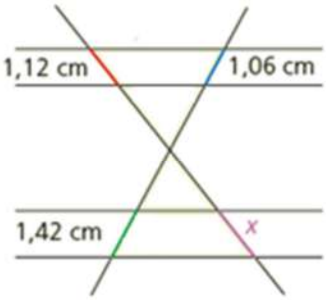
Unidad 6. Semejanza

Unidad 6. Semejanza

SOLUCIONES PÁG. 141

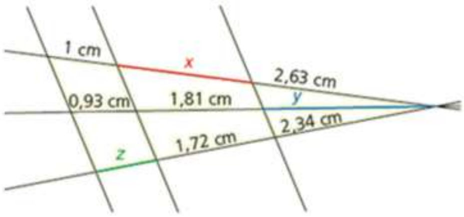
1 Halla las longitudes desconocidas en las siguientes figuras aplicando el teorema de Tales:

a.



$$\frac{1{,}12}{x} = \frac{1{,}06}{1{,}42} \Rightarrow x = 1{,}5 \Rightarrow x = 1{,}5 \text{ cm}$$

b.

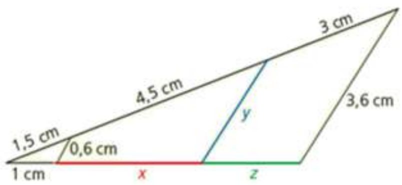


$$\frac{1}{0{,}93} = \frac{x}{1{,}81} \Rightarrow x = 1{,}95 \text{ cm}$$

$$\frac{1{,}95}{1{,}81} = \frac{2{,}63}{y} \Rightarrow y = 2{,}44 \text{ cm}$$

$$\frac{0{,}93}{z} = \frac{1{,}81}{1{,}72} \Rightarrow z = 0{,}88 \text{ cm}$$

c.



$$\frac{1{,}5}{1} = \frac{1{,}5 + 4{,}5}{1 + x} \Rightarrow \frac{1{,}5}{1} = \frac{6}{1 + x} \Rightarrow x = 3 \text{ cm}$$

$$\frac{1{,}5}{0{,}6} = \frac{6}{y} \Rightarrow y = 2{,}4 \text{ cm}$$

$$\frac{1{,}5}{1} = \frac{1{,}5 + 4{,}5 + 3}{1 + 3 + z} \Rightarrow \frac{1{,}5}{1} = \frac{9}{4 + z} \Rightarrow z = 2 \text{ cm}$$

2 Determina el cuarto proporcional a los siguientes segmentos:

a. 2, 3, 5

$$\frac{2}{3}=\frac{5}{x}\Rightarrow x=\frac{15}{2}=7,5$$

b. 10, 9, 15

$$\frac{10}{9}=\frac{15}{x}\Rightarrow x=\frac{135}{10}=\frac{27}{2}=13,5$$

c. 5, 6, 6

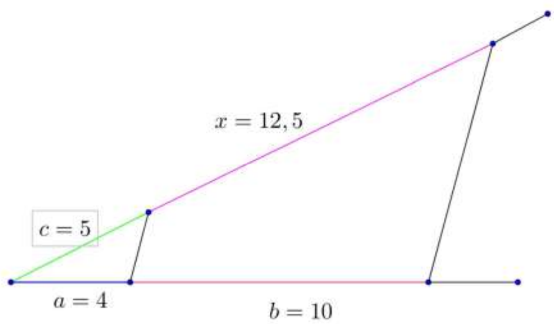
$$\frac{5}{6}=\frac{6}{x}\Rightarrow x=\frac{36}{5}=7,2$$

d. 50, 12, 30

$$\frac{50}{12}=\frac{30}{x}\Rightarrow x=\frac{360}{50}=\frac{36}{5}=7,2$$

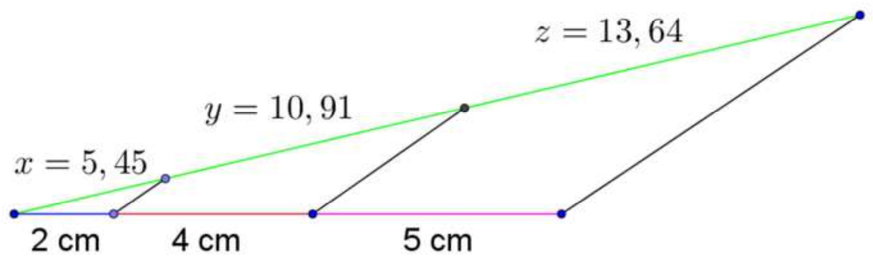
3 Utilizando el teorema de Tales, construye el cuarto proporcional a los segmentos de longitudes 4 cm, 10 cm y 5 cm.

$$\frac{4}{10}=\frac{5}{x}\Rightarrow x=\frac{10\cdot 5}{4}\Rightarrow x=12,5$$



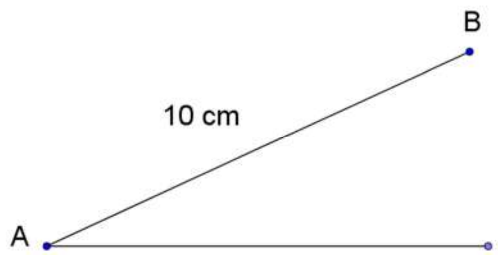
4 Divide el segmento $\overline{AB}$, de 30 cm de longitud, en tres segmentos proporcionales a los segmentos que tienen por longitud 2 cm, 4 cm y 5 cm, respectivamente.

$$\frac{30}{11}=\frac{x}{2}\Rightarrow x=\frac{30\cdot 2}{11}\Rightarrow x=5,45$$
$$\frac{30}{11}=\frac{y}{4}\Rightarrow y=\frac{30\cdot 4}{11}\Rightarrow y=10,91$$
$$\frac{30}{11}=\frac{z}{5}\Rightarrow z=\frac{30\cdot 5}{11}\Rightarrow z=13,64$$

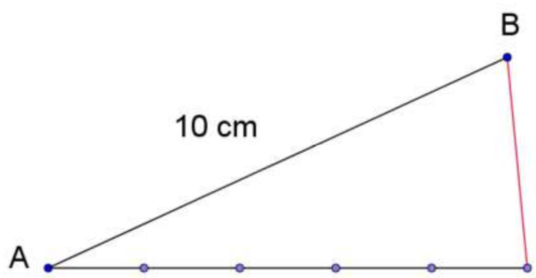


5 Aplicando el teorema de Tales, divide el segmento $\overline{AB}$ de 10 cm de longitud en cinco partes iguales.

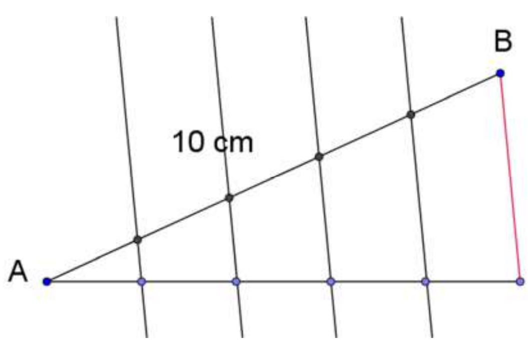
1. Situamos el segmento $\overline{AB}$ de longitud 10 cm y una semirrecta que concurra con dicho segmento en el punto A.



2. Se dibujan 5 segmentos iguales en la semirrecta, uniendo el extremo del último segmento con el punto B.

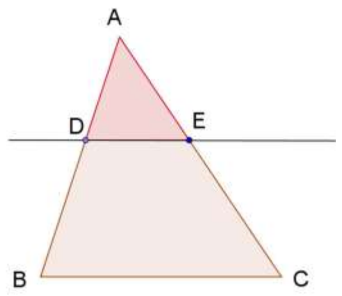


3. Se trazan paralelas para obtener las 5 divisiones en el segmento $\overline{AB}$.



6 Si dibujas un triángulo y trazas una paralela a uno de los lados que corte dicho triángulo, ¿cómo son los lados del nuevo triángulo respecto al triángulo original? Justifica tu respuesta una vez dibujada dicha situación.

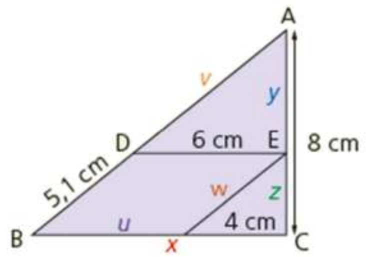
Al trazar una paralela a uno de los lados del triángulo $\overset{\triangle}{ABC}$ se obtiene otro triángulo $\overset{\triangle}{ADE}$



Por el teorema de Tales dos rectas que cortan a rectas paralelas delimitan segmentos proporcionales, por lo que el triángulo $\overset{\triangle}{ADE}$ es proporcional al triángulo original $\overset{\triangle}{ABC}$, cumpliéndose que:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AE}}$$

7 Calcula los lados desconocidos de la siguiente figura:



Los tres triángulos formados son semejantes.
u = 6 cm, ya que es igual a $\overline{DE}$.
w = 5,1 cm, ya que es igual a $\overline{BD}$.

$$\frac{y}{6} = \frac{8}{6+4} \Rightarrow y = \frac{8 \cdot 6}{10} = 4{,}8 \Rightarrow y = 4{,}8 \text{ cm}$$

$z = 8 - 4{,}8 = 3{,}2 \Rightarrow z = 3{,}2$ cm
$x = 6 + 4 = 10 \Rightarrow x = 10$ cm

$$\frac{v}{6} = \frac{5{,}1 + v}{6+4} \Rightarrow 10v = 6 \cdot (5{,}1 + v) \Rightarrow v = 7{,}65 \text{ cm}$$

8 Visualiza el siguiente vídeo en clase, en el que el conjunto musical Les Luthiers explica el teorema de Tales cantando. Después de verlo, comentad en grupos qué elementos matemáticos aparecen en el vídeo aparte del citado teorema.

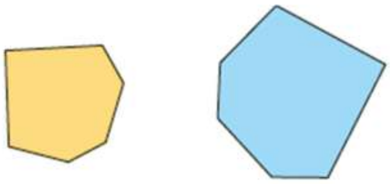
https://www.youtube.com/watch?v=Q8F538tA-jI

Respuesta abierta.

SOLUCIONES PÁG. 143

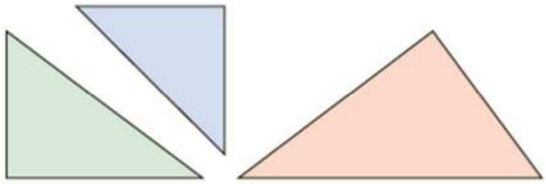
9 Indica si las siguientes figuras son o no semejantes:

a.



Sí son semejantes.

b.



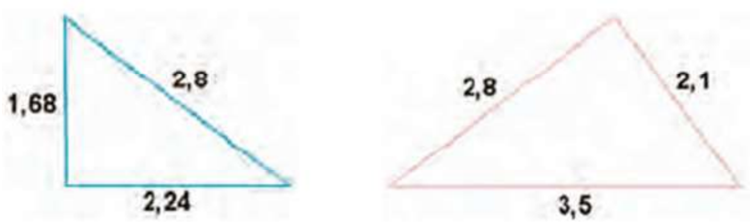
Son semejantes el triángulo de la izquierda y el de la derecha.

10 Mide las figuras semejantes de la actividad anterior e indica su razón de semejanza.

a.

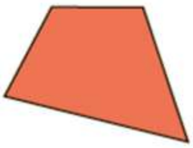
$$r = \frac{1{,}5}{1{,}1} = \frac{15}{11} = 1{,}36$$

b.

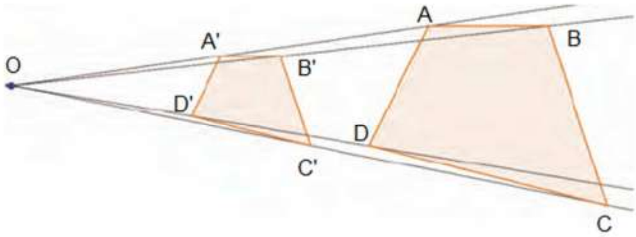


$$r = \frac{5}{4} = 1{,}25$$

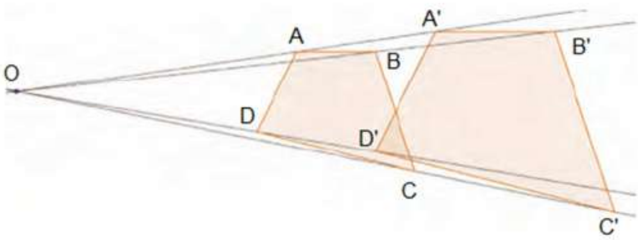
11 Construye dos figuras semejantes a la siguiente, con razones de semejanza r = 0,5 y r’ = 1,5, respectivamente, mediante el método de proyección.



- Con r = 0,5



- Con r = 1,5



12 Un dibujo cuyas medidas son 10 × 8 cm se reduce al 60 % en una fotocopiadora.

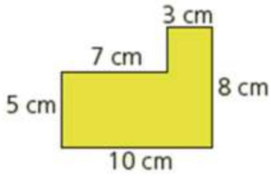
a. ¿Será el dibujo resultante semejante? ¿Cuáles serán sus dimensiones finales? ¿Y la razón de semejanza?

Sí será semejante, porque el dibujo será igual pero de distinto tamaño. Al reducir un 60 %, las nuevas dimensiones serían de 6 cm × 4,8 cm. La razón de semejanza es r = 0,6.

b. Contesta a las preguntas del apartado anterior considerando que en lugar de una reducción se ha realizado una ampliación del 112 %.

En este caso, al ampliar al 112 %, las dimensiones del dibujo ampliado serían de 11,2 cm × 8,96 cm. La razón de semejanza es r = 1,12.

13 El plano de esta habitación está realizado a escala 1:60. Calcula las medidas reales de la habitación.



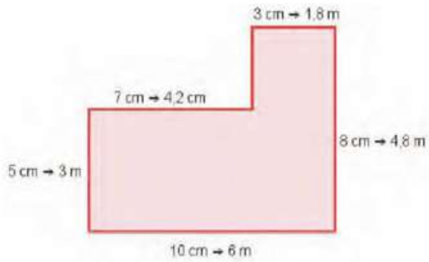
$\frac{1}{60} = \frac{3}{x} \Rightarrow x = 180$ cm = 1,8 m

$\frac{1}{60} = \frac{8}{x} \Rightarrow x = 480$ cm = 4,8 m

$\frac{1}{60} = \frac{10}{x} \Rightarrow x = 600$ cm = 6 m

$\frac{1}{60} = \frac{5}{x} \Rightarrow x = 300$ cm = 3 m

$\frac{1}{60} = \frac{7}{x} \Rightarrow x = 420$ cm = 4,2 m



14 Contesta a las siguientes preguntas:

a. ¿Son todos los círculos figuras semejantes? ¿Cómo se calcula su razón de semejanza?

Sí, todos los círculos son figuras semejantes al tener la misma forma y su razón de semejanza es la razón entre los radios.

b. ¿Qué condición necesaria ha de cumplirse para que un polígono regular sea semejante a otro?

Para que un polígono regular sea semejante a otro tienen que tener el mismo número de lados.

SOLUCIONES PÁG 145

15 Indica si los siguientes triángulos son semejantes. Si no lo son, corrige los datos para que lo sean.

a. Un triángulo que tiene lados de 4 cm, 6 cm y 8 cm y otro triángulo que tiene lados de 10 cm, 15 cm y 20 cm.

Sí son semejantes, ya que $\frac{10}{4} = \frac{15}{6} = \frac{20}{8} = 2{,}5$

b. Un triángulo con ángulos de 45° y 60° y otro triángulo con ángulos de 45° y 85°.

No son semejantes, ya que los ángulos del primer triángulo son 45°, 60° y 180° – (45° + 60°) = 75°, y los del segundo son 45°, 85° y 180° – (45° + 85°) = 50°. Para que fueran semejantes los triángulos tendrían que tener los ángulos iguales entre sí.

c. Un triángulo con dos lados de 8 cm y 6 cm que forman un ángulo de 30° y otro triángulo dos de cuyos lados miden 9 cm y 8 cm y que también forman un ángulo de 30°.

No son semejantes porque, aunque el ángulo es igual, los lados no son semejantes.

d. Un triángulo con un ángulo de 78° y otro de 34° y otro triángulo con un ángulo de 68° y otro de 34°.

Sí son semejantes ya que tienen los mismos ángulos: 78°, 34° y 68°.

e. Un triángulo cuyos lados miden 9 cm, 12 cm y 30 cm y otro triángulo que tiene lados de 10 cm, 18 cm y 45 cm.

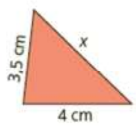
No son semejantes porque: $\frac{45}{30} = \frac{18}{12} = 1{,}5 \neq \frac{10}{9} = 1{,}1$

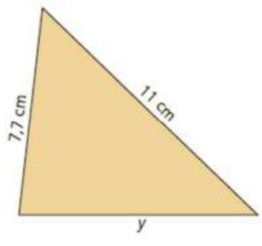
f. Un triángulo con lados de 2 cm, 3 cm y 5 cm y otro triángulo cuyos lados miden $\sqrt{50}$ cm, $3\sqrt{2}$ cm y $\frac{4}{\sqrt{2}}$ cm.

Sí son semejantes porque:

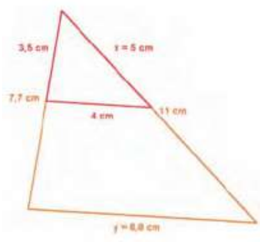
$$\left.\begin{array}{l}\sqrt{50} = 5\sqrt{2} \\ \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}\end{array}\right\} \frac{5\sqrt{2}}{5} = \frac{3\sqrt{2}}{3} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$, siendo r = $\sqrt{2}$.

16 Dibuja en tu cuaderno los siguientes triángulos colocándolos en posición de Tales y calcula los lados que son desconocidos:





$\Rightarrow$

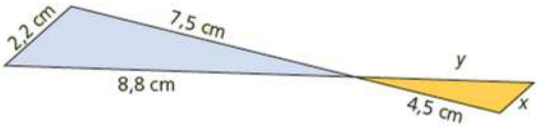


$$\frac{3{,}5}{7{,}7} = \frac{x}{11} = \frac{4}{y}$$

$$\frac{3{,}5}{7{,}7} = \frac{x}{11} \Rightarrow x = 5 \text{ cm}$$

$$\frac{3{,}5}{7{,}7} = \frac{4}{y} \Rightarrow y = 8{,}8 \text{ cm}$$

17 Indica por qué los siguientes triángulos son semejantes y halla las medidas desconocidas:



Son semejantes porque tienen los tres ángulos iguales.

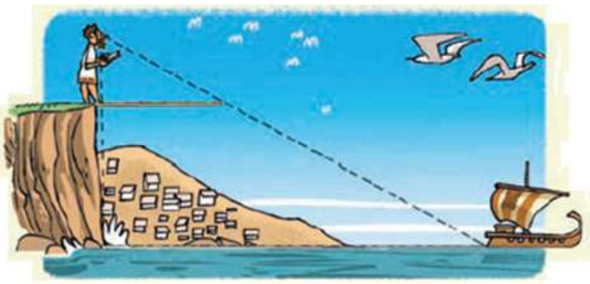
$$\frac{7,5}{4,5}=\frac{8,8}{y}=\frac{2,2}{x}$$

$$\frac{7,5}{4,5}=\frac{8,8}{y}\Rightarrow y=5,28 \text{ cm}$$

$$\frac{7,5}{4,5}=\frac{2,2}{x}\Rightarrow x=1,32 \text{ cm}$$

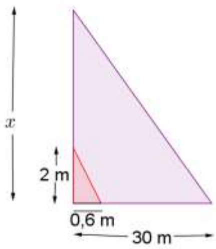
18 Investiga en Internet cómo solucionó Tales el siguiente problema y prepara, junto con tu compañero, una presentación en la que expliquéis dicha resolución.

Cuando la ciudad de Mileto, situada en la costa griega, iba a ser atacada por los barcos enemigos, el ejército recurrió a Tales, ya que necesitaba saber a qué distancia se encontraba una nave para ajustar el tiro de sus catapultas.



Respuesta abierta.

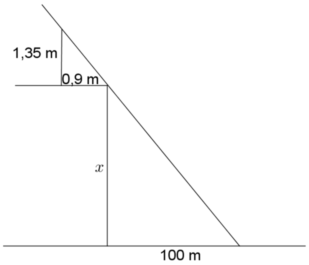
19 Una torre proyecta una sombra de 30 m. Si a la misma hora un árbol de 2 m de altura arroja una sombra de 60 cm, ¿qué altura tiene la torre?



$$\frac{0,6}{30}=\frac{2}{x}\Rightarrow x=\frac{60}{0,6}=100$$

La torre tiene una altura de 100 m.

20 Daniel se sitúa a 90 cm del borde de un acantilado. Desde ahí, su visual une dicho borde con la posición de un barco que se encuentra a 100 m del acantilado. Si Daniel mide 1,35 m, ¿qué altura tiene el acantilado?



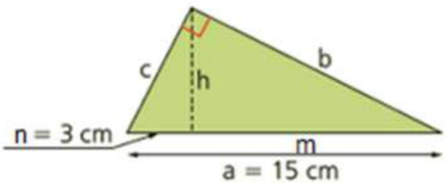
$$\frac{1,35}{x} = \frac{0,9}{100} \Rightarrow x = \frac{135}{0,9} = 150$$

El acantilado tiene una altura de 150 m.

SOLUCIONES PÁG. 147

21 Calcula las medidas desconocidas de los siguientes triángulos, utilizando los teoremas del cateto, de la altura y de Pitágoras:

a.



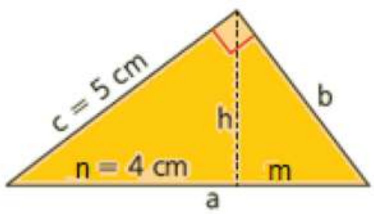
$m = a - n \Rightarrow m = 15 - 3 = 12 \Rightarrow m = 12$ cm

$h^2 = m \cdot n \Rightarrow h = \sqrt{m \cdot n} \Rightarrow h = \sqrt{12 \cdot 3} = 6 \Rightarrow h = 6$ cm

$c^2 = a \cdot n \Rightarrow c = \sqrt{a \cdot n} \Rightarrow c = \sqrt{15 \cdot 3} = 6,71 \Rightarrow c = 6,71$ cm

$b^2 = a \cdot m \Rightarrow b = \sqrt{a \cdot m} \Rightarrow b = \sqrt{15 \cdot 12} = 13,42 \Rightarrow b = 13,42$ cm

b.



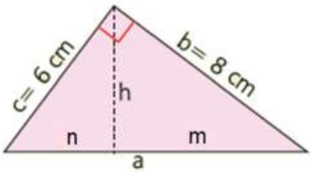
$h^2 = c^2 - n^2 \Rightarrow h = \sqrt{c^2 - n^2} \Rightarrow h = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3 \Rightarrow h = 3$ cm

$c^2 = a \cdot n \Rightarrow a = \frac{c^2}{n} \Rightarrow a = \frac{5^2}{4} = 6,25 \Rightarrow a = 6,25$ cm

$m = a - n \Rightarrow m = 6,25 - 4 = 2,25 \Rightarrow m = 2,25$ cm

$b^2 = a \cdot m \Rightarrow b = \sqrt{a \cdot m} \Rightarrow b = \sqrt{6,25 \cdot 2,25} = 3,75 \Rightarrow b = 3,75$ cm

c.



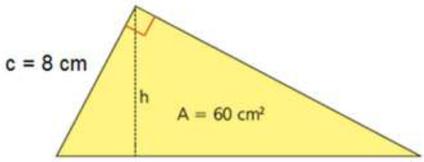
$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a = \sqrt{8^2 + 6^2} \Rightarrow a = 10 \Rightarrow a = 10$ cm

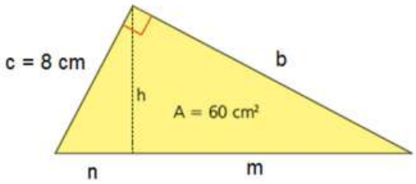
$c^2 = a \cdot n \Rightarrow n = \dfrac{c^2}{a} \Rightarrow n = \dfrac{6^2}{10} = 3{,}6 \Rightarrow n = 3{,}6$ cm

$b^2 = a \cdot m \Rightarrow m = \dfrac{b^2}{a} \Rightarrow m = \dfrac{8^2}{10} = 6{,}4 \Rightarrow m = 6{,}4$ cm

$h^2 = m \cdot n \Rightarrow h = \sqrt{m \cdot n} \Rightarrow h = \sqrt{6{,}4 \cdot 3{,}6} = 4{,}8 \Rightarrow h = 4{,}8$ cm

22 Un triángulo rectángulo de 60 cm^2 de área tiene un cateto que mide 8 cm. ¿Cuánto mide la altura sobre la hipotenusa?





Se calcula la longitud del lado b:

$A_{\text{triángulo}} = \dfrac{b \cdot c}{2} \Rightarrow b = \dfrac{A_{\text{triángulo}} \cdot 2}{c} \Rightarrow b = \dfrac{60 \cdot 2}{8} = 15 \Rightarrow b = 15$ cm

Se aplica el teorema de Pitágoras para hallar la hipotenusa:

$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a = \sqrt{15^2 + 8^2} \Rightarrow a = 17 \Rightarrow a = 17$ cm

Se calcula el valor de n:

$c^2 = a \cdot n \Rightarrow n = \dfrac{c^2}{a} \Rightarrow n = \dfrac{8^2}{17} = 3{,}76 \Rightarrow n = 3{,}76$ cm $\Rightarrow n = 3{,}76$ cm

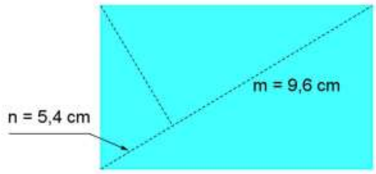
$m = a - n \Rightarrow m = 17 - 3{,}76 = 13{,}24 \Rightarrow m = 13{,}24$ cm

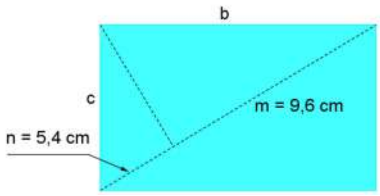
Por último, se halla la altura sobre la hipotenusa:

$h^2 = m \cdot n \Rightarrow h = \sqrt{m \cdot n} \Rightarrow h = \sqrt{13{,}24 \cdot 3{,}76} = \sqrt{49{,}78} = 7{,}06$

La altura sobre la hipotenusa mide 7,06 cm.

23 Halla el perímetro y el área de la siguiente figura, utilizando los teoremas del cateto y de la altura:





$c^2 = a \cdot n \Rightarrow c = \sqrt{a \cdot n} \Rightarrow c = \sqrt{15 \cdot 5{,}4} = 9 \Rightarrow c = 9$ cm

$b^2 = a \cdot m \Rightarrow b = \sqrt{a \cdot m} \Rightarrow b = \sqrt{15 \cdot 9{,}6} = 12 \Rightarrow b = 12$ cm

$P = 2 \cdot b + 2 \cdot c \Rightarrow P = 2 \cdot 12 + 2 \cdot 9 = 42 \Rightarrow P = 42$ cm

$A_{\text{rectángulo}} = b \cdot c \Rightarrow A_{\text{rectángulo}} = 12 \cdot 9 = 108 \Rightarrow A_{\text{rectángulo}} = 108 \text{ cm}^2$

SOLUCIONES PÁG. 149

24 Un hexágono regular de 2 cm de lado y 1,73 cm de apotema es semejante a otro hexágono regular de 41,52 cm² de área.

a. ¿Cuál es la razón de semejanza?

Se halla el área del hexágono semejante, *A’:*

$$A'_{\text{hexágono}} = \frac{P \cdot ap}{2} \Rightarrow A'_{\text{hexágono}} = \frac{6 \cdot 2 \cdot 1{,}73}{2} = 10{,}38 \Rightarrow A'_{\text{hexágono}} = 10{,}38 \text{ cm}^2$$

La razón de semejanza entre las áreas de figuras semejantes es el cuadrado de la razón de semejanza:

$$\frac{A'}{A} = r^2 \Rightarrow \frac{10{,}38}{41{,}52} = r^2 \Rightarrow \frac{1}{4} = r^2 \Rightarrow r = \frac{1}{2}$$

b. ¿Cuál es el lado de la segunda figura?

La razón de semejanza entre los lados coincide con la razón de semejanza:

$$\frac{l'}{l} = r \Rightarrow l = \frac{l'}{r} \Rightarrow l = \frac{2}{\frac{1}{2}} = 4 \Rightarrow l = 4 \text{ cm}$$

c. Halla el perímetro de las dos figuras, comprobando su relación de semejanza.

$$\left.\begin{array}{l} P = 6 \cdot 4 = 24 \\ P' = 6 \cdot 2 = 12 \end{array}\right\} \frac{P'}{P} = \frac{12}{24} = \frac{1}{2} = r$$

25 Un ortoedro cuyas aristas miden 5 cm, 10 cm y 15 dm, respectivamente, es semejante a otro ortoedro de 24,576 m^3 de volumen. ¿Cuáles son las dimensiones de este segundo ortoedro?

Se halla el volumen del ortoedro semejante, *V'*:

$V'_{\text{ortoedro}} = 1{,}5 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}05 = 0{,}0075 \text{ m}^3$

La razón de semejanza entre los volúmenes de figuras semejantes es el cubo de la razón de semejanza:

$$\frac{V'}{V} = r^3 \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{V'}{V}} \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{0{,}0075}{24{,}576}} = \sqrt[3]{0{,}0003} = 0{,}067 \Rightarrow r = 0{,}067$$

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} = r \Rightarrow \frac{0{,}05}{a} = \frac{0{,}1}{b} = \frac{1{,}5}{c} = 0{,}067$$

$$\frac{0{,}05}{a} = 0{,}067 \Rightarrow a = 0{,}75 \text{ m}$$

$$\frac{0{,}1}{b} = 0{,}067 \Rightarrow b = 1{,}49 \text{ m}$$

$$\frac{1{,}5}{c} = 0{,}067 \Rightarrow c = 22{,}39 \text{ m}$$

26 Un prisma pentagonal tiene una base de 60 cm^2 de área. Dicho prisma es semejante a otro de 12 cm de altura y 6,48 dm^3 de volumen. ¿Cuál es el volumen del primer prisma? ¿Qué altura tiene dicho prisma?

Se calcula el área del prisma inicial, *A:*

$$V = A_{\text{base}} \cdot h \Rightarrow A_{\text{base}} = \frac{V}{h} \Rightarrow A_{\text{base}} = \frac{6\,480}{12} = 540 \Rightarrow A_{\text{base}} = 540 \text{ cm}^2$$

La razón de semejanza entre las áreas de figuras semejantes es el cuadrado de la razón de semejanza:

$$\frac{A'}{A} = r^2 \Rightarrow \frac{60}{540} = r^2 \Rightarrow \frac{1}{9} = r^2 \Rightarrow r = \frac{1}{3}$$

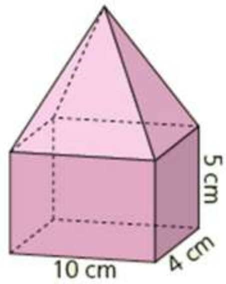
La razón de semejanza entre los volúmenes de figuras semejantes es el cubo de la razón de semejanza:

$$\frac{V'}{V} = r^3 \Rightarrow V' = V \cdot r^3 \Rightarrow V' = 6\,480 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 = 240 \Rightarrow V' = 240 \text{ cm}^3 = 0{,}24 \text{ dm}^3$$

La razón de semejanza entre las alturas coincide con la razón de semejanza:

$$\frac{h'}{h} = r \Rightarrow h' = r \cdot h \Rightarrow h' = \frac{1}{3} \cdot 12 = 4 \Rightarrow h = 4 \text{ cm} = 0{,}4 \text{ dm}$$

27 La siguiente figura es semejante a otra de 2,24 dm^3 de volumen.



Sabiendo que el ortoedro de la segunda figura tiene un volumen de 1,6 dm^3:

a. ¿Cuál es la razón de semejanza?

Se halla el volumen del ortoedro de la figura:

$$V'_{\text{ortoedro}} = a \cdot b \cdot c \Rightarrow V'_{\text{ortoedro}} = 10 \cdot 4 \cdot 5 = 200 \Rightarrow V'_{\text{ortoedro}} = 200 \text{ cm}^3 = 0,2 \text{ dm}^3$$

$$\frac{V'_{\text{ortoedro}}}{V_{\text{ortoedro}}} = r^3 \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{V'_{\text{ortoedro}}}{V_{\text{ortoedro}}}} \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{0,2}{1,6}} = \sqrt[3]{0,125} = 0,5 \Rightarrow r = 0,5$$

b. ¿Cuál es el volumen de la primera figura?

$$\frac{V'}{V} = r^3 \Rightarrow V' = V \cdot r^3 \Rightarrow V' = 2,24 \cdot 0,5^3 = 0,28 \Rightarrow V' = 0,28 \text{ dm}^3$$

c. ¿Cuál es el volumen de ambas pirámides?

$V_{\text{pirámide}} = V_{\text{figura}} - V_{\text{ortoedro}} \Rightarrow V_{\text{pirámide}} = 2,24 - 1,6 = 0,64 \Rightarrow V_{\text{pirámide}} = 0,64 \text{ dm}^3$

$$\frac{V'_{\text{pirámide}}}{V_{\text{pirámide}}} = r^3 \Rightarrow V'_{\text{pirámide}} = r^3 \cdot V_{\text{pirámide}} \Rightarrow V'_{\text{pirámide}} = 0,5^3 \cdot 0,64 = 0,08$$

$$V'_{\text{pirámide}} = 0,08 \text{ dm}^3$$

28 Una figura de 56 cm^2 de área es semejante a otra de 207,2 cm^2.

a. ¿Cuál es la razón entre las áreas?

$$\frac{A'}{A} = \frac{56}{207,2} = \frac{10}{37}$$

b. ¿Es igual dicha razón que la razón de semejanza entre ambas figuras? ¿Cuál es esta razón de semejanza?

$$\frac{A'}{A} = r^2 \Rightarrow \frac{56}{207,2} = r^2 \Rightarrow r = \sqrt{\frac{10}{37}} = \sqrt{0,27} = 0,52 \Rightarrow r = 0,52$$

SOLUCIONES PÁG. 135

1 **Explica en qué consiste el teorema de Tales.**

El teorema de Tales afirma que si dos rectas *r* y *s* se cortan por un sistema de paralelas, los segmentos determinados por los puntos de intersección sobre una de ellas son proporcionales a los determinados por los segmentos correspondientes en la otra.

2 **¿Qué condiciones tienen que darse para que dos figuras sean semejantes?**

Dos figuras son semejantes si tienen los ángulos homólogos iguales y los lados homólogos proporcionales.

3 **¿Qué significa que dos triángulos están en posición de Tales? ¿Qué consecuencia tiene que estén en dicha posición?**

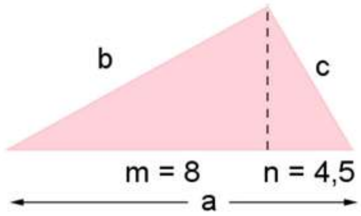
Dos triángulos están en posición de Tales si tienen un ángulo común, α, y los lados opuestos a dicho ángulo son paralelos. Si dos triángulos están en posición de Tales, entonces son semejantes.

4 **Enuncia el teorema del cateto e indica qué teorema puede ser demostrado a partir de él.**

En un triángulo rectángulo, el cuadrado de un cateto es igual al producto de su hipotenusa por la proyección de dicho cateto sobre la hipotenusa:

$$b^2 = a \cdot m \qquad\qquad c^2 = a \cdot n$$

5 **Aplica el teorema del cateto para obtener los catetos de un triángulo rectángulo cuyas proyecciones sobre la hipotenusa son de 8 cm y 4,5 cm.**



$$b^2 = a \cdot m \Rightarrow b = \sqrt{12{,}5 \cdot 8} \Rightarrow b = 10 \text{ cm}$$
$$c^2 = a \cdot n \Rightarrow c = \sqrt{12{,}5 \cdot 4{,}5} \Rightarrow c = \sqrt{56{,}25} = 7{,}5 \Rightarrow c = 7{,}5 \text{ cm}$$

6 **Enuncia el teorema de la altura y aplícalo para calcular la altura de un triángulo las proyecciones de cuyos catetos sobre la hipotenusa son de 8 cm y 10 cm.**

En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la altura sobre la hipotensa es igual al producto de las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa:

$$h^2 = m \cdot n \Rightarrow h = \sqrt{m \cdot n} \Rightarrow h = \sqrt{8 \cdot 10} = \sqrt{80} = 8{,}94 \Rightarrow h = 8{,}94 \text{ cm}$$

7 ¿Puede ser un triángulo rectángulo semejante a un triángulo isósceles? ¿Y a un triángulo equilátero?

Un triángulo rectángulo puede ser semejante a un triángulo isósceles si los ángulos iguales son de 45º. Pero no puede ser semejante a un triángulo equilátero porque este tiene todos sus ángulos iguales a 60º.

8 Si una figura es semejante a otra con una razón de semejanza r = $\frac{1}{2}$, ¿cómo es su perímetro? ¿Y su área? ¿Y si la razón de semejanza fuera r = 2?

Si r = $\frac{1}{2}$, el perímetro sería la mitad y su área un cuarto del área del original. Si r = 2, el perímetro sería el doble y su área sería cuatro veces más grande que el área del original.

9 Prepara una presentación digital para tus compañeros. Puedes hacer un documento PowerPoint, usar Glogster...

Respuesta abierta.

SOLUCIONES PÁG. 152 - REPASO FINAL

TEOREMA DE TALES

1 Averigua el cuarto proporcional de los siguientes números:

a. 5, 7, 6

$$\frac{5}{7} = \frac{6}{x} \Rightarrow x = \frac{42}{5} = 8,4$$

b. 12, 8, 4

$$\frac{12}{8} = \frac{4}{x} \Rightarrow x = \frac{32}{12} = 2,67$$

c. 20, 72, 5

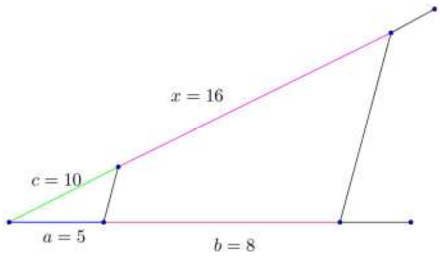
$$\frac{20}{72} = \frac{5}{x} \Rightarrow x = \frac{360}{20} = 18$$

d. 93, 57, 31

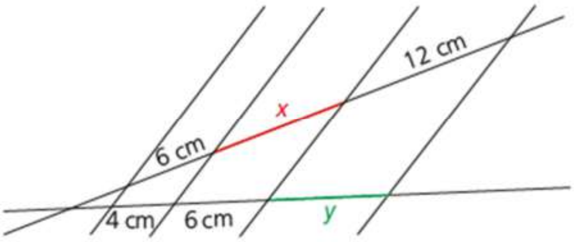
$$\frac{93}{57} = \frac{31}{x} \Rightarrow x = \frac{1767}{93} = 19$$

2 Construye el cuarto proporcional a los números 5, 8 y 10 utilizando el teorema de Tales.

$$\frac{5}{8}=\frac{10}{x}\Rightarrow x=\frac{8\cdot 10}{5}\Rightarrow x=16$$



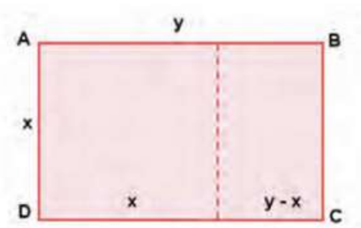
3 Calcula, mediante el teorema de Tales, las medidas que se desconocen de la siguiente figura:



$$\frac{4}{6}=\frac{6}{x}\Rightarrow x=9\text{ cm}$$
$$\frac{4}{6}=\frac{y}{12}\Rightarrow y=8\text{ cm}$$

FIGURAS SEMEJANTES

4 Es característico de los rectángulos áureos que, si se corta el cuadrado de su lado menor, se obtiene otro rectángulo semejante. ¿Cuál es la razón entre las longitudes de un rectángulo áureo?
Nota: puedes utilizar un rectángulo cuyo lado pequeño mida 1 m de longitud.



El rectángulo ABCD es áureo y sus dimensiones son *x* de ancho e *y* de largo.
Se corta el cuadrado de su lado menor y se obtiene el rectángulo EBCF, que es semejante a él.

La razón de semejanza es:

$$\frac{y}{x}=\frac{x}{y-x}\Rightarrow y\cdot(y-x)=x^2\Rightarrow y^2-xy-x^2=0$$

$$y=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\Rightarrow y=\frac{-(-x)\pm\sqrt{(-x)^2-4\cdot1\cdot(-x^2)}}{2\cdot1}=\frac{x\pm\sqrt{x^2+4x^2}}{2}=$$

$$=\frac{x\pm\sqrt{5x^2}}{2}=\frac{x\pm x\sqrt{5}}{2}$$

Se toma la solución positiva, al tratarse de una distancia, con lo que la razón de semejanza es:

r = $\frac{x}{y}=\frac{x}{\frac{x\pm x\sqrt{5}}{2}}\Rightarrow \mathrm{r}=\frac{2\cancel{x}}{\cancel{x}\cdot\left(1+\sqrt{5}\right)}=\frac{2}{1+\sqrt{5}}$, que es la inversa del número de oro.

5 Una ciudad, A, está separada 15 cm en un mapa de otra ciudad, B. Si en la realidad distan entre sí 210 km, ¿cuál es la escala del mapa?

$$\frac{15}{21\,000\,000}=\frac{1}{1\,400\,000}$$

La escala es 1 : 1 400 000

6 La maqueta de un bloque de edificios tiene unas dimensiones de 10 cm × 15 cm × 40 cm. Si dicha maqueta está realizada a escala 1:2 000, ¿cuáles son las dimensiones reales de dicho bloque de edificios?

$$\frac{1}{2000}=\frac{10}{x}\Rightarrow x=20000 \text{ cm} = 200 \text{ m}$$

$$\frac{1}{2000}=\frac{15}{x}\Rightarrow x=30000 \text{ cm} = 300 \text{ m}$$

$$\frac{1}{2000}=\frac{40}{x}\Rightarrow x=80000 \text{ cm} = 800 \text{ m}$$

Las dimensiones reales son 200 m × 300 m × 800 m

7 Observa las siguientes fotografías e indica si son semejantes entre sí:

Sí son semejantes, con r = 0,48

SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS

8 Indica si los siguientes pares de triángulos son semejantes y señala el criterio de semejanza de triángulos utilizado:

a. Uno cuyos lados miden 5 cm, 12 cm y 10 cm y otro que tiene lados de 26 cm, 31,2 cm y 13 cm.

Sí son semejantes porque todos los lados del segundo triángulo son proporcionales a los lados del primer triángulo, con razón de semejanza r = 2,6:

$$\frac{31{,}2}{12}=\frac{26}{10}=\frac{13}{5}=2{,}6$$

Criterio 1: dos triángulos son semejantes si sus lados son proporcionales.

b. Uno con ángulos de 62° y 56° y otro con ángulos de 62° y 62°.

Sí son semejantes porque los ángulos de los dos triángulos son iguales, siendo sus amplitudes 62º, 56º, 62º.
Criterio 2: dos triángulos son semejantes si sus ángulos correspondientes son iguales.

c. Uno con un lado de 5 cm y otro de 6 cm que forman un ángulo de 30° y otro con un lado de 16 cm y otro de 19 cm que forman el mismo ángulo.

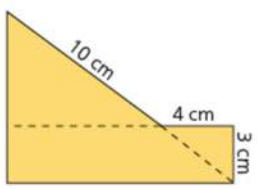
No son semejantes ya que los lados que tienen el ángulo común no son proporcionales:

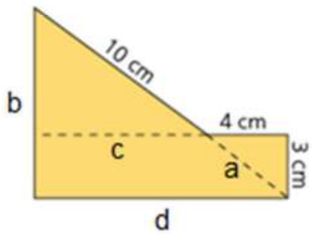
$$\frac{16}{5}\neq\frac{19}{6}$$

Criterio 3: dos triángulos son semejantes si tienen un ángulo igual y los lados que forman dicho ángulo son proporcionales.

9 Halla el perímetro y el área de las siguientes figuras:

a.





$$\frac{3}{b}=\frac{4}{c}=\frac{a}{10}=\frac{c}{d}$$

Se aplica el teorema de Pitágoras para calcular el lado *a:*

$a^2 = 4^2 + 3^2 \Rightarrow a = \sqrt{25} \Rightarrow a = 5$ cm

$\frac{3}{b} = \frac{a}{10} \Rightarrow \frac{3}{b} = \frac{5}{10} \Rightarrow b = 6$ cm

$\frac{3}{b} = \frac{4}{c} \Rightarrow \frac{3}{6} = \frac{4}{c} \Rightarrow c = 8$ cm

$\frac{5}{10} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{5}{10} = \frac{8}{d} \Rightarrow d = 16$ cm

$P = 3 + 16 + (3 + 6) + 10 + 4 = 42$ cm

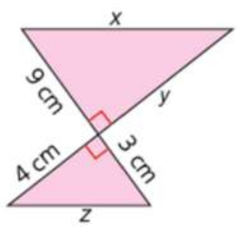
El área total es la suma del área del rectángulo y del triángulo:

$A_{\text{rectángulo}} = b \cdot h \Rightarrow A = 16 \cdot 3 = 48$

$A_{\text{triángulo}} = \frac{b \cdot h}{2} \Rightarrow A_{\text{triángulo}} = \frac{8 \cdot 6}{2} = 24$

$A_{\text{total}} = 48 + 24 = 72$ cm^2

b.



$\frac{9}{3} = \frac{y}{4} = \frac{x}{z}$

$\frac{9}{3} = \frac{y}{4} \Rightarrow y = \frac{36}{3} = 12$ cm

Se aplica el teorema de Pitágoras para hallar la longitud de la hipotenusa, *z:*

$z^2 = 4^2 + 3^2 \Rightarrow z = \sqrt{25} \Rightarrow z = 5$ cm

$\frac{9}{3} = \frac{x}{z} \Rightarrow \frac{9}{3} = \frac{x}{5} \Rightarrow x = \frac{45}{3} = 15$ cm

$P = 15 + 12 + 3 + 5 + 4 + 9 = 48$ cm

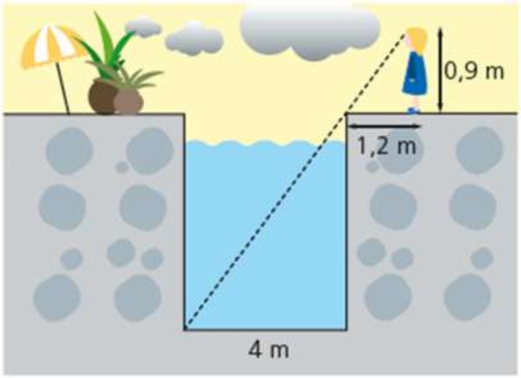
El área total es la suma del área de los dos triángulos:

$A_{\text{triángulo superior}} = \frac{b \cdot h}{2} \Rightarrow A_{\text{triángulo superior}} = \frac{9 \cdot 12}{2} = 54$

$A_{\text{triángulo inferior}} = \frac{b \cdot h}{2} \Rightarrow A_{\text{triángulo inferior}} = \frac{3 \cdot 4}{2} = 6$

$A_{\text{total}} = 54 + 6 = 60$ cm^2

10 Ana se sitúa a 1,2 m del borde de la piscina de sus padres, de modo que su visual desde una altura de 0,9 m une el borde de la piscina con la línea del fondo del lado contrario. Si la piscina tiene 4 m de ancho, ¿cuánto tendrá de profundidad?

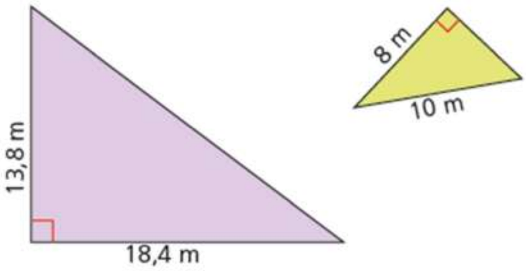


$$\frac{0,9}{x}=\frac{1,2}{4}\Rightarrow x=\frac{3,6}{1,2}=3$$

La profundidad de la piscina es de 3 m.

SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

11 Indica si son semejantes los siguientes triángulos rectángulos:



Se aplica el teorema de Pitágoras para hallar la hipotenusa del triángulo mayor:

$$a^2=13,8^2+18,4^2\Rightarrow a=\sqrt{190,44+338,56}=\sqrt{529}\Rightarrow a=23$$

Se aplica el teorema de Pitágoras para hallar el cateto menor del triángulo pequeño:

$$10^2=8^2+c^2\Rightarrow c=\sqrt{10^2-8^2}=\sqrt{36}\Rightarrow c=6$$

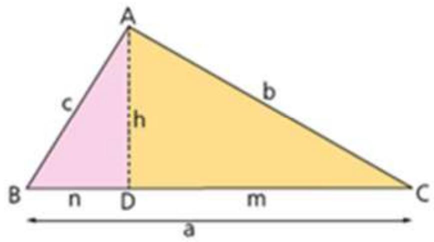
Se aplica la relación de semejanza:

$$\frac{13,8}{6}=\frac{18,4}{8}=\frac{23}{10}$$

Sí son semejantes, ya que sus lados son proporcionales.

SOLUCIONES PÁG. 153

12 Fíjate en el triángulo rectángulo y halla los datos que faltan en los siguientes casos:



a. Los catetos miden c = 15 cm y b = 20 cm.

Se aplica el teorema de Pitágoras para hallar la hipotenusa, *a:*

$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a = \sqrt{b^2 + c^2} \Rightarrow a = \sqrt{15^2 + 20^2} = 25 \Rightarrow a = 25$ cm

Se aplica el teorema del cateto para hallar el valor de *m:*

$b^2 = a \cdot m \Rightarrow m = \dfrac{b^2}{a} \Rightarrow m = \dfrac{20^2}{25} = 16 \Rightarrow m = 16$ cm

Se averigua el valor de *n:*

$n = a - m \Rightarrow n = 25 - 16 = 9 \Rightarrow n = 9$ cm

Se aplica el teorema de la altura para hallar la altura, *h:*

$h^2 = m \cdot n \Rightarrow h = \sqrt{16 \cdot 9} = 12 \Rightarrow h = 12$ cm

b. La hipotenusa mide a = 30 cm, y la proyección de uno de sus catetos, m = 10,8 cm.

Se averigua el valor de *n:*

$n = a - m \Rightarrow n = 30 - 10{,}8 = 19{,}2 \Rightarrow n = 19{,}2$ cm

Se aplica el teorema de la altura para hallar la altura, *h:*

$h^2 = m \cdot n \Rightarrow h = \sqrt{10{,}8 \cdot 19{,}2} = \sqrt{207{,}36} = 14{,}4 \Rightarrow h = 14{,}4$ cm

Se aplica el teorema del cateto para hallar los valores de *b* y *c:*

$b^2 = a \cdot m \Rightarrow b = \sqrt{a \cdot m} \Rightarrow b = \sqrt{30 \cdot 10{,}8} = 18 \Rightarrow b = 18$ cm

$c^2 = a \cdot n \Rightarrow c = \sqrt{a \cdot n} \Rightarrow c = \sqrt{30 \cdot 19{,}2} = 24 \Rightarrow c = 24$ cm

c. Un cateto mide c = 10,5 cm, y la proyección de dicho cateto sobre la hipotenusa, n = 6,3 cm.

Se aplica el teorema del cateto para hallar la hipotenusa, *a:*

$c^2 = a \cdot n \Rightarrow a = \dfrac{c^2}{n} \Rightarrow a = \dfrac{10{,}5^2}{6{,}3} = 17{,}5 \Rightarrow a = 17{,}5$ cm

Se averigua el valor de *m:*

$m = a - n \Rightarrow m = 17{,}5 - 6{,}3 = 11{,}2 \Rightarrow m = 11{,}2$ cm

Se aplica el teorema del cateto para hallar *b:*

$b^2 = a \cdot m \Rightarrow b = \sqrt{a \cdot m} \Rightarrow b = \sqrt{17{,}5 \cdot 11{,}2} = 14 \Rightarrow b = 14$ cm

Se aplica el teorema de la altura para hallar la altura, *h:*

$h^2 = m \cdot n \Rightarrow h = \sqrt{11{,}2 \cdot 6{,}3} = \sqrt{70{,}56} = 8{,}4 \Rightarrow h = 8{,}4$ cm

d. La altura mide h = 5,04 cm, y una de las proyecciones de los catetos, 3,78 cm.

Consideramos que n = 3,78 cm.
Se aplica el teorema de la altura para hallar la otra proyección, *m:*

$$h^2 = m \cdot n \Rightarrow m = \frac{h^2}{n} \Rightarrow m = \frac{5{,}04^2}{3{,}78} = 6{,}72 \Rightarrow m = 6{,}72 \text{ cm}$$

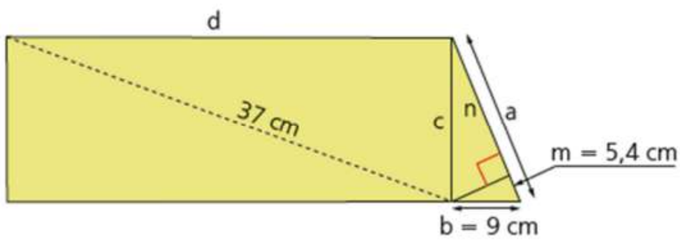
La hipotenusa, *a,* mide:
$a = m + n \Rightarrow a = 6{,}72 + 3{,}78 = 10{,}5 \Rightarrow a = 10{,}5$ cm
Se aplica el teorema del cateto para hallar los valores de *b* y *c:*

$$b^2 = a \cdot m \Rightarrow b = \sqrt{a \cdot m} \Rightarrow b = \sqrt{10{,}5 \cdot 6{,}72} = \sqrt{70{,}56} = 8{,}4 \Rightarrow b = 8{,}4 \text{ cm}$$

$$c^2 = a \cdot n \Rightarrow c = \sqrt{a \cdot n} \Rightarrow c = \sqrt{10{,}5 \cdot 3{,}78} = \sqrt{39{,}69} = 6{,}3 \Rightarrow c = 6{,}3 \text{ cm}$$

RELACIÓN ENTRE PERÍIMETROS, ÁREAS Y VOLÚMENES DE CUERPOS SEMEJANTES

13 La siguiente figura es semejante a otra que tiene un área de 474 dm^2:



a. ¿Cuál es la razón de semejanza?

Se halla el área de esta figura. Para ello, se averiguan los valores de *a* y *c* en el triángulo.
Se aplica el teorema del cateto para hallar *a:*

$$b^2 = a \cdot m \Rightarrow a = \frac{b^2}{m} \Rightarrow a = \frac{9^2}{5{,}4} = 15 \Rightarrow a = 15 \text{ cm}$$

Se aplica el teorema de Pitágoras para averiguar el valor del cateto *c:*

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2} \Rightarrow c = \sqrt{15^2 - 9^2} = 12 \Rightarrow c = 12 \text{ cm}$$

Se averigua el valor de *d* aplicando el teorema de Pitágoras:

$$\text{hipotenusa}^2 = d^2 + c^2 \Rightarrow d = \sqrt{\text{hipotenusa}^2 - c^2} \Rightarrow d = \sqrt{37^2 - 12^2} = 35$$

d = 35 cm

El área de la figura es la suma del área del rectángulo:

$$A'_{total} = A_{rectángulo} + A_{triángulo} \Rightarrow A'_{total} = d \cdot c + \frac{b \cdot c}{2} \Rightarrow A'_{total} = 35 \cdot 12 + \frac{9 \cdot 12}{2} = 474$$

$$A'_{total} = 474 \text{ cm}^2 = 4{,}74 \text{ dm}^2$$

La razón de semejanza entre las áreas de figuras semejantes es el cuadrado de la razón de semejanza:

$$\frac{A'}{A} = r^2 \Rightarrow \frac{4{,}74}{474} = r^2 \Rightarrow \frac{1}{100} = r^2 \Rightarrow r = \frac{1}{10}$$

b. ¿Cuál sería el perímetro de ambas figuras?

P' = d + a + b + d + c ⇒ *P'* = 35 + 15 + 9 + 35 + 12 = 106 ⇒ *P'* = 106 cm
La razón de semejanza entre los perímetros coincide con la razón de semejanza:

$$\frac{P'}{P} = r \Rightarrow P = \frac{P'}{r} \Rightarrow P = \frac{106}{\frac{1}{10}} = 1\,060 \Rightarrow P = 1\,060 \text{ cm}$$

14 Un prisma hexagonal cuya base tiene un área de 60 cm^2 es semejante a otro prisma hexagonal con un volumen de *V* = 1 320 cm^3.

a. Si la razón de semejanza es r = 2, ¿cuál es el área de la base del segundo prisma?

La razón de semejanza entre las áreas de figuras semejantes es el cuadrado de la razón de semejanza:

$$\frac{A'}{A} = r^2 \Rightarrow A = \frac{A'}{r^2} \Rightarrow A = \frac{60}{2^2} = 15 \Rightarrow A = 15 \text{ cm}^2$$

b. ¿Cuál es la altura del segundo prisma?

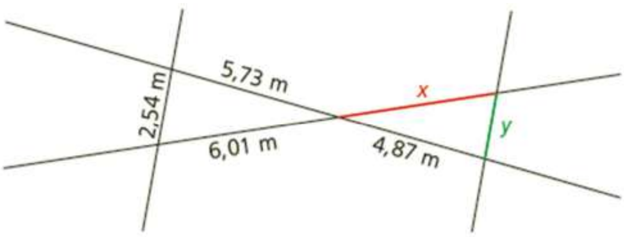
$$V_{\text{prisma}} = A_{\text{base}} \cdot h \Rightarrow h = \frac{V_{\text{prisma}}}{A_{\text{base}}} \Rightarrow h = \frac{1320}{15} = 88 \Rightarrow h = 88 \text{ cm}$$

c. Halla el volumen del primer prisma.

$$\frac{V'}{V} = r^3 \Rightarrow V' = V \cdot r^3 \Rightarrow V' = 1\,320 \cdot 2^3 = 10\,560 \Rightarrow V' = 10\,560 \text{ cm}^3$$

EVALUACIÓN

1 Las medidas que faltan en la siguiente figura son:



a. *x* = 7,07 cm; *y* = 2,16 cm
b. *x* = 5,11 cm; *y* = 11 cm
c. *x* = 7,07 cm; *y* = 11 cm
d. *x* = 5,11 cm; *y* = 2,16 cm

$$\frac{x}{6{,}01} = \frac{4{,}87}{5{,}73} = \frac{y}{2{,}54}$$

$$\frac{x}{6{,}01} = \frac{4{,}87}{5{,}73} \Rightarrow x = 5{,}11 \text{ m}$$

$$\frac{4{,}87}{5{,}73} = \frac{y}{2{,}54} \Rightarrow y = 2{,}16 \text{ m}$$

2 Un triángulo con lados de 8 cm, 15 cm y 17 cm es semejante a otro triángulo que es la mitad de un rectángulo de 22,5 cm de largo. La razón de semejanza es:

a. r = 2 b. r = 0,67 **c. r = 1,5** **d. r = 2,5**

En el triángulo, el lado de 15 cm sería semejante al largo de dicho rectángulo, por lo que:

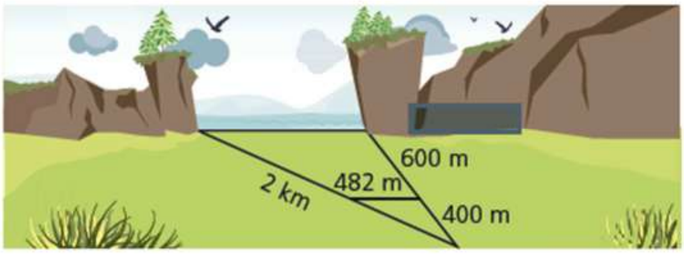
$$\frac{l'}{l} = r \Rightarrow r = \frac{15}{22,5} = 0,67$$

3 Si un árbol de 4,5 m de altura proyecta una sombra de 6 m, la longitud de la sombra que arroja a la misma hora otro árbol que mide 18 m es:

a. 13,5 m b. 24 m **c. 1 m** **d. 10 m**

$$\frac{4,5}{6} = \frac{18}{x} \Rightarrow x = 24 \text{ m}$$

4 Se quiere medir la distancia entre dos acantilados. Considerando las siguientes medidas, dicha distancia es:



a. 96,4 m **b. 124 m** c. 1,205 km **d. 2,3 km**

$$\frac{400}{482} = \frac{1000}{x} \Rightarrow x = 1205 \text{ m} = 1,205 \text{ km}$$

5 Las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo son de 7,2 cm y 12,8 cm, respectivamente. La longitud de la altura sobre la hipotenusa es:

a. 9,6 cm **b. 4,8 cm** **c. 92,16 cm** **d. 46,08 cm**

$$\text{h}^2 = \text{m} \cdot \text{n} \Rightarrow \text{h} = \sqrt{12,8 \cdot 7,2} = \sqrt{92,16} = 9,6 \Rightarrow \text{h} = 9,6 \text{ cm}$$

6 Dos romboides semejantes tienen una razón r = 2,5. Si el primero tiene una base de 4,6 cm y una altura de 3,5 cm, el área del segundo romboide es:

a. 40,25 cm² **b. 6,44 cm²** **c. 50,312 5 cm²** d. 100,625 cm²

$$A = b \cdot h \Rightarrow A = 4,6 \cdot 3,5 = 16,1 \Rightarrow A = 16,1 \text{ cm}^2$$

La razón de semejanza es 2,5, por lo que el área del segundo romboide es:

$$\frac{A'}{A} = r^2 \Rightarrow A' = r^2 \cdot A \Rightarrow A' = 2,5^2 \cdot 16,1 = 100,625 \Rightarrow A' = 100,625 \text{ cm}^2$$