MATEMÁTICAS ORIENTADAS A LAS ENSEÑANZAS ACADÉMICAS
4.º ESO

somoslink

SOLUCIONES AL LIBRO DEL ALUMNO

Unidad 9. Geometría analítica

Unidad 9. Geometría analítica

SOLUCIONES PÁG. 193

1 Escribe las coordenadas de los vectores propuestos, cuyo primer punto es el origen, y cuyo segundo punto es el extremo. Represéntalos gráficamente y halla su módulo y su argumento.

a. A (2 , 3) y B (4 , 5)

$\overrightarrow{AB} = (4-2\,,5-3) = (2\,,2)$

$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{2^2+2^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$\alpha = \text{arctg}\,\dfrac{2}{2} = \text{arctg}\,1 = 45^\circ$

b. C (6 , 5) y D (5 , 3)

$\overrightarrow{CD} = (5-6\,,3-5) = (-1\,,-2)$

$\left|\overrightarrow{CD}\right| = \sqrt{(-1)^2+(-2)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$

$\alpha = \text{arctg}\,\dfrac{2}{1} = \text{arctg}\,2 = 63{,}43^\circ \Rightarrow \alpha = 180^\circ + 63{,}43^\circ = 243{,}43^\circ$

c. E (1 , 1) y F (–2 , 3)

$\overrightarrow{EF} = (-2-1, 3-1) = (-3\,,2)$

$\left|\overrightarrow{EF}\right| = \sqrt{(-3)^2+2^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$

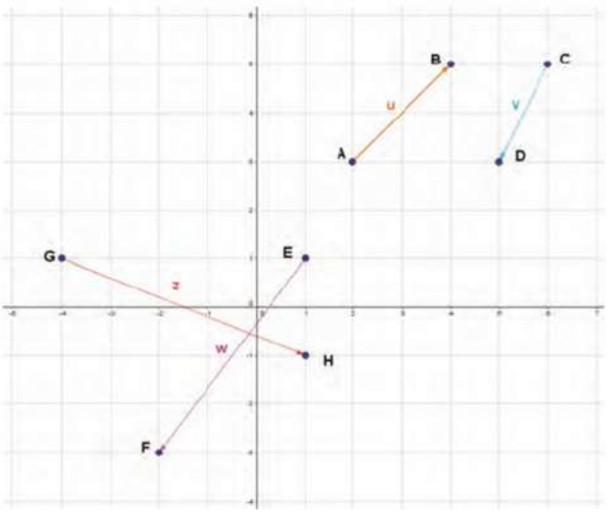
$\alpha = \text{arctg}\,\dfrac{2}{3} = 33{,}69^\circ \Rightarrow \alpha = 180^\circ - 33{,}69^\circ = 146{,}31^\circ$

d. G (–4 , 1) y H (1 , –1)

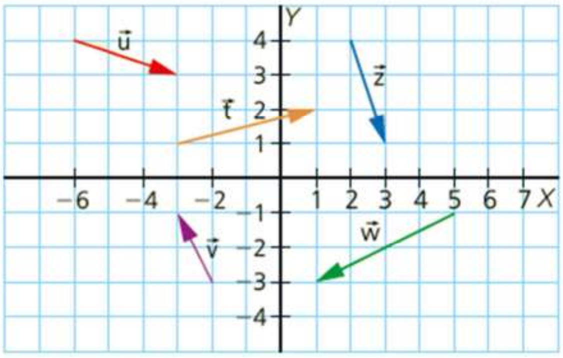
$\overrightarrow{GH} = (1-(-4)\,,-1-1) = (5\,,-2)$

$\left|\overrightarrow{GH}\right| = \sqrt{5^2+(-2)^2} = \sqrt{25+4} = \sqrt{29}$

$\alpha = \text{arctg}\,\dfrac{2}{5} = 21{,}8^\circ \Rightarrow \alpha = 360^\circ - 21{,}8^\circ = 338{,}2^\circ$



2 **Indica las componentes y los puntos origen y extremo de los vectores que se representan a continuación. Halla también su módulo y su argumento.**



Vector	Origen	Extremo
$\vec{t}=(4\ ,1)$	(– 3 , 1)	(1 , 2)
$\vec{u}=(3\ ,-1)$	(– 6 , 4)	(– 3 , 3)
$\vec{v}=(-1,2)$	(– 2 , – 3)	(– 3 , – 1)
$\vec{w}=(-4\ ,-2)$	(5 , – 1)	(1 , – 3)
$\vec{z}=(1,-3)$	(2 , 4)	(3 , 1)

Para calcular los argumentos, tendremos en cuenta los signos de las componentes de los vectores.

Vector	Módulo	Argumento
$\vec{t}=(4\ ,1)$	$\sqrt{17}=4{,}12$	arctg $\frac{1}{4}=14{,}04^{o}$
$\vec{u}=(3\ ,-1)$	$\sqrt{10}=3{,}16$	arctg $\frac{-1}{3}=360^{o}-18{,}43^{o}=341{,}57^{o}$
$\vec{v}=(-1,2)$	$\sqrt{5}=2{,}24$	arctg $\frac{2}{-1}=180^{o}-63{,}43^{o}=116{,}57^{o}$
$\vec{w}=(-4\ ,-2)$	$\sqrt{20}=4{,}47$	arctg $\frac{-2}{-4}=180^{o}+26{,}57^{o}=206{,}57^{o}$
$\vec{z}=(1,-3)$	$\sqrt{10}=3{,}16$	arctg $\frac{-3}{1}=360^{o}-71{,}57^{o}=288{,}43^{o}$

3 **Contesta a las siguientes preguntas:**

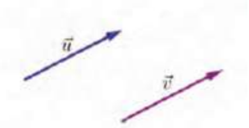
a. **¿Cómo tiene que ser el argumento de dos vectores para que sean equipolentes?**
El argumento debe ser el mismo.

b. **¿Y para que tengan la misma dirección, pero sentido contrario? ¿Cómo se llamarían ambos vectores?**
Para que dos vectores tengan la misma dirección, pero sentido contrario, su argumento tiene que diferir en 180°, llamándose dichos vectores, vectores opuestos.

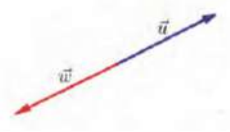
c. **¿Y para que tengan la misma dirección? ¿Cómo serían sus coordenadas?**
Para que dos vectores tengan la misma dirección su argumento tiene que diferir en 0°, llamándose dichos vectores, vectores paralelos. Sus coordenadas serían proporcionales.

4 Dibuja un vector no nulo, $\vec{u}$, y, a continuación:

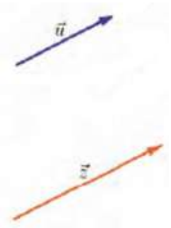
a. **Un vector, $\vec{v}$, que sea equipolente al vector $\vec{u}$.**



b. **Un vector, $\vec{w}$, opuesto a $\vec{u}$.**

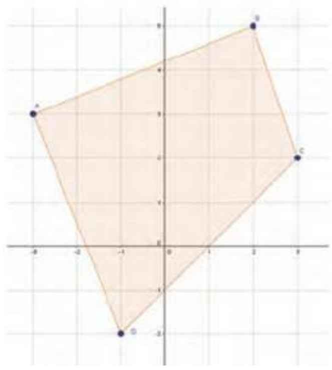


c. **Un vector, $\vec{z}$, que tenga la misma dirección y sentido, pero distinto módulo.**



d. **Un vector, $\vec{t}$, que esté ligado a $\vec{u}$.**

5 Un cuadrilátero está formado por los puntos A (–3 , 3), B (2 , 5), C (3 , 2) y D (–1 , –2). Dibuja dicho cuadrilátero y halla las dimensiones de sus lados.



Para hallar las dimensiones de sus lados, calculamos los módulos de los vectores que los forman:

$$\overrightarrow{AB} = (5\,,2) \Rightarrow \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{5^2 + 2^2} = \sqrt{25+4} = \sqrt{29} \approx 5{,}39$$

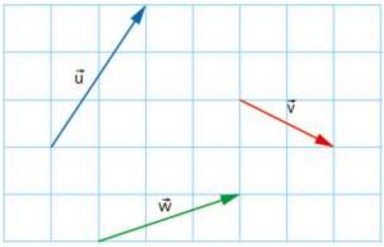
$$\overrightarrow{BC} = (1\,,-3) \Rightarrow \left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{1^2 + (-3)^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10} \approx 3{,}16$$

$$\overrightarrow{CD} = (-4\,,-4) \Rightarrow \left|\overrightarrow{CD}\right| = \sqrt{(-4)^2 + (-4)^2} = \sqrt{32} \approx 5{,}66$$

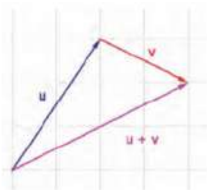
$$\overrightarrow{DA} = (-2\,,5) \Rightarrow \left|\overrightarrow{DA}\right| = \sqrt{(-2)^2 + 5^2} = \sqrt{4+25} = \sqrt{29} \approx 5{,}39$$

SOLUCIONES PÁG. 195

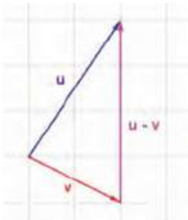
6 Realiza gráficamente las operaciones pedidas con los siguientes vectores:



a. $\vec{u} + \vec{v}$

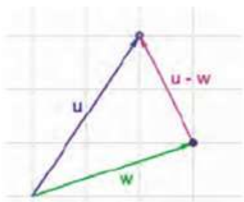


b. $\vec{u} - \vec{v}$

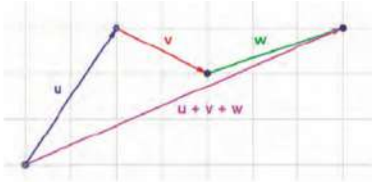


c. $\vec{v} + \vec{w}$

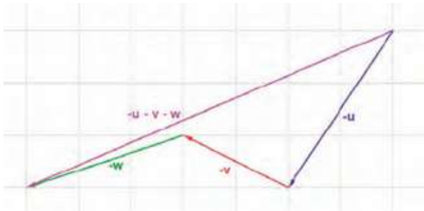
d. $\vec{u} - \vec{w}$



e. $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$



f. $-\vec{u} - \vec{v} - \vec{w}$



7 **Dados los puntos A (–4 , 8), B (10 , 12), C (–3 , –2) y D (12 , 8), efectúa las siguientes operaciones:**

a. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=(14\ ,4)+(-13\ ,-14)=(1\ ,-10)$

b. $\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{AC}=(2\ ,-4)-(1\ ,-10)=(1\ ,\ 6)$

c. $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{CD}$

$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{CD}=(14\ ,4)-(2\ ,-4)-(15\ ,10)=(-3\ ,-2)$

d. $\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{BC}=(-2\ ,4)+(-1,10)-(-13\ ,-14)=(10\ ,28)$

8 **Efectúa las operaciones indicadas con los siguientes vectores:**

$\vec{u}$ **= (8 , –12),** $\vec{v}$ **= (–9 , –2),** $\vec{w}$ **= (7 , 3),** $\vec{t}$ **= (11 , –20)**

a. $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$

$\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}=(8\ ,-12)+(-9\ ,-2)+(7\ ,3)=(6\ ,-11)$

b. $\vec{v} + \vec{w} - \vec{t}$

$\vec{v}+\vec{w}-\vec{t}=(-9\ ,-2)+(7\ ,3)-(11,-20)=(-13\ ,21)$

c. $(\vec{u} + \vec{v}) - (\vec{w} + \vec{t})$

$(\vec{u}+\vec{v})-(\vec{w}+\vec{t})=\left[(8\ ,-12)+(-9\ ,-2)\right]-\left[(7\ ,3)+(11,-20)\right]=$

$=(-1,-14)-(18\ ,-17)=(-19\ ,3)$

d. $\vec{u} - \vec{v} + \vec{w} - \vec{t}$

$\vec{u}-\vec{v}+\vec{w}-\vec{t}=(8\ ,-12)-(-9\ ,-2)+(7\ ,3)-(11,-20)=(13\ ,13)$

e. $-(\vec{w}+\vec{t})+\vec{u}$

$$-\left(\vec{w}+\vec{t}\right)+\vec{u}=-\left[(7,3)+(11,-20)\right]+(8,-12)=-(18,-17)+(8,-12)=(-10,5)$$

f. $\vec{u}-(\vec{v}+\vec{w}+\vec{t})$

$$\vec{u}-\left(\vec{v}+\vec{w}+\vec{t}\right)=(8,-12)-\left[(-9,-2)+(7,3)+(11,-20)\right]=$$

$$=(8,-12)-(9,-19)=(-1,7)$$

g. $\vec{t}-\vec{u}-\vec{w}+(\vec{t}-\vec{v})$

$$\vec{t}-\vec{u}-\vec{w}+\left(\vec{t}-\vec{v}\right)=(11,-20)-(8,-12)-(7,3)+\left[(11,-20)-(-9,-2)\right]=$$

$$=(-4,-11)+(20,-18)=(16,-29)$$

h. $(\vec{u}-\vec{t})-(\vec{v}-\vec{w})$

$$\left(\vec{u}-\vec{t}\right)-\left(\vec{v}-\vec{w}\right)=\left[(8,-12)-(11,-20)\right]-\left[(-9,-2)-(7,3)\right]=$$

$$=(-3,8)-(-16,-5)=(13,13)$$

9 Considerando los vectores $\vec{u}=(3,-2)$ y $\vec{v}=(4,7)$, realiza la siguiente operación: $\vec{u}-\vec{v}$, mientras tu compañero efectúa esta otra: $\vec{v}-\vec{u}$. ¿Qué conclusiones obtenéis?

$$\vec{u}-\vec{v}=(3,-2)-(4,7)=(-1,-9)$$

$$\vec{v}-\vec{u}=(4,7)-(3,-2)=(1,9)$$

La resta de vectores no es conmutativa y se cumple que $\vec{u}-\vec{v}=-(\vec{v}-\vec{u})$, es decir, el vector resultante de la resta $\vec{u}-\vec{v}$ es igual al opuesto del vector resultante de la resta $\vec{v}-\vec{u}$.

10 Dados los vectores $\vec{u}=(-1,7)$ y $\vec{v}=(3,4)$, halla los vectores que se indican para que se verifiquen las condiciones pedidas:

a. $\vec{w}$ **tal que** $\vec{u}+\vec{v}=\vec{w}$

$$\vec{u}+\vec{v}=(-1,7)+(3,4)=(2,11)\Rightarrow\vec{w}=(2,11)$$

b. $\vec{z}$ **tal que** $\vec{u}-\vec{v}=\vec{z}$

$$\vec{u}-\vec{v}=(-1,7)-(3,4)=(-4,3)\Rightarrow\vec{z}=(-4,3)$$

c. $\vec{s}$ **tal que** $-\vec{u}-\vec{v}=\vec{s}$

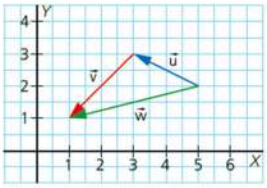
$$-\vec{u}-\vec{v}=-(-1,7)-(3,4)=(-2,-11)\Rightarrow\vec{s}=(-2,-11)$$

d. $\vec{t}$ **tal que** $-\vec{u}+\vec{v}=\vec{t}$

$$-\vec{u}+\vec{v}=-(-1,7)+(3,4)=(4,-3)\Rightarrow\vec{t}=(4,-3)$$

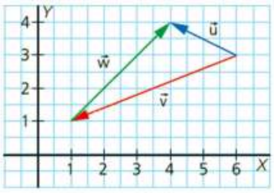
11 En la siguiente figura están representadas diferentes operaciones con vectores. Si el vector resultante es el de color verde, indica qué tipo de operaciones son y realízalas analíticamente.

a.



$\vec{w} = \vec{u} + \vec{v} = (-2, 1) + (-2, -2) = (-4, -1)$

b.



$\vec{w} = \vec{u} - \vec{v} = (-2, 1) - (-5, -2) = (3,\ 3)$

SOLUCIONES PÁG. 197

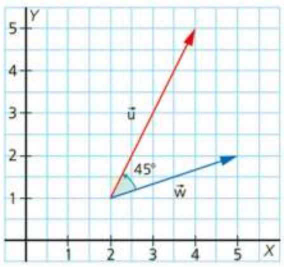
12 Halla 5 · ū , –2 · ū y 10 · ū sabiendo que ū = (–2 , 3).

$5 \cdot \vec{u} = 5 \cdot (-2, 3) = (-10, 15)$

$-2 \cdot \vec{u} = -2 \cdot (-2, 3) = (4, -6)$

$10 \cdot \vec{u} = 10 \cdot (-2, 3) = (-20, 30)$

13 Considerando los vectores de la figura:



a. Calcula ū · w⃗ utilizando el ángulo que forman ambos vectores.

Las componentes de los vectores son: $\vec{u} = (2, 4)$ y $\vec{w} = (3, 1)$

$$\vec{u} \cdot \vec{w} = |\vec{u}| \cdot |\vec{w}| \cdot \cos\theta = \sqrt{2^2 + 4^2} \cdot \sqrt{3^2 + 1^2} \cdot \cos 45^{\circ} = \sqrt{20} \cdot \sqrt{10} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{400}}{2} = 10$$

b. Que tu compañero calcule el mismo producto escalar utilizando las coordenadas de ambos vectores.

$\vec{u} \cdot \vec{w} = (2, 4) \cdot (3, 1) = 2 \cdot 3 + 4 \cdot 1 = 6 + 4 = 10$

Comprobad que el resultado coincide.

El resultado es el mismo.

14 Considerando los vectores $\vec{u}$ = (10 , 4), $\vec{v}$ = (–3 , –1), $\vec{w}$ = (6 , –2), $\vec{z}$ = (12 , –6) y $\vec{t}$ = (2 , –1) y efectúa las operaciones siguientes:

a. $\vec{u}$ – 2 · $\vec{v}$ + 3 · $\vec{w}$

$\vec{u}-2\cdot\vec{v}+3\cdot\vec{w}=(10,4)-2\cdot(-3,-1)+3\cdot(6,-2)=(34,0)$

b. $\vec{u}$ – $\vec{w}$ + 10 · $\vec{z}$

$\vec{u}-\vec{w}+10\cdot\vec{z}=(10,4)-(6,-2)+10\cdot(12,-6)=(124,-54)$

c. $\vec{u}$ · $\vec{v}$

$\vec{u}\cdot\vec{v}=(10,4)\cdot(-3,-1)=-30-4=-34$

d. $\vec{u}$ · $\vec{w}$

$\vec{u}\cdot\vec{w}=(10,4)\cdot(6,-2)=60-8=52$

e. $\vec{v}$ · $\vec{w}$

$\vec{v}\cdot\vec{w}=(-3,-1)\cdot(6,-2)=-18+2=-16$

f. $\vec{z}$ · $\vec{u}$

$\vec{z}\cdot\vec{u}=(12,-6)\cdot(10,4)=120-24=96$

g. –5 · $\vec{u}$ + 6 · $\vec{v}$ – 3 · $\vec{z}$

$-5\cdot\vec{u}+6\cdot\vec{v}-3\cdot\vec{z}=-5\cdot(10,4)+6\cdot(-3,-1)-3\cdot(12,-6)=(-104,-8)$

h. $\vec{z}$ · $\vec{t}$

$\vec{z}\cdot\vec{t}=(12,-6)\cdot(2,-1)=24+6=30$

i. 7 · $\vec{u}$ – 5 · $\vec{t}$ – 3 · $\vec{w}$

$7\cdot\vec{u}-5\cdot\vec{t}-3\cdot\vec{w}=7\cdot(10,4)-5\cdot(2,-1)-3\cdot(6,-2)=(42,39)$

15 De entre los siguientes vectores, indica cuáles son perpendiculares:

a. $\vec{u}$ = (6 , –3), $\vec{v}$ = (–7 , 10)

$\vec{u}\cdot\vec{v}=(6,-3)\cdot(-7,10)=-42-30=-72$

No son perpendiculares porque el producto escalar de vectores no es 0.

b. $\vec{u}$ = (5 , 3), $\vec{v}$ = (–9 , 15)

$\vec{u}\cdot\vec{v}=(5,3)\cdot(-9,15)=-45+45=0$

Sí son perpendiculares porque el producto escalar de vectores es 0.

c. $\vec{u}$ = (–2 , –12), $\vec{v}$ = (6 , 1)

$\vec{u}\cdot\vec{v}=(-2,-12)\cdot(6,1)=-12-12=-24$

No son perpendiculares porque el producto escalar de vectores no es 0.

d. $\vec{u}$ = (12 , 9), $\vec{v}$ = (–3 , 4)

$\vec{u}\cdot\vec{v}=(12,9)\cdot(-3,4)=-36+36=0$

Sí son perpendiculares porque el producto escalar de vectores es 0.

e. $\vec{u}$ **= (5 , 7),** $\vec{v}$ **= (–14 , 10)**

$\vec{u}\cdot\vec{v}=(5,7)\cdot(-14,10)=-70+70=0$

Sí son perpendiculares porque el producto escalar de vectores es 0.

f. $\vec{u}$ **= (6 , 9),** $\vec{v}$ **= (12 , –8)**

$\vec{u}\cdot\vec{v}=(6,9)\cdot(12,-8)=72-72=0$

Sí son perpendiculares porque el producto escalar de vectores es 0.

16 Actividad resuelta.

17 Halla el ángulo que forman los siguientes vectores:

a. $\vec{u}$ **= (12 , –15),** $\vec{v}$ **= (–10 , 9)**

$\vec{u}\cdot\vec{v}=(12,-15)\cdot(-10,9)=-120-135=-255$

$\vec{u}\cdot\vec{v}=\sqrt{12^2+(-15)^2}\cdot\sqrt{(-10)^2+9^2}\cdot\cos\theta=\sqrt{66\,789}\cdot\cos\theta$

$-255=\sqrt{66789}\cdot\cos\theta\Rightarrow\theta=\arccos\dfrac{-255}{\sqrt{66789}}=170,65^{\circ}$

b. $\vec{u}$ **= (–2 , –3),** $\vec{v}$ **= (5 , 9)**

$\vec{u}\cdot\vec{v}=(-2,-3)\cdot(5,9)=-10-27=-37$

$\vec{u}\cdot\vec{v}=\sqrt{(-2)^2+(-3)^2}\cdot\sqrt{5^2+9^2}\cdot\cos\theta=\sqrt{1378}\cdot\cos\theta$

$-37=\sqrt{1378}\cdot\cos\theta\Rightarrow\theta=\arccos\dfrac{-37}{\sqrt{1378}}=175,36^{\circ}$

c. $\vec{u}$ **= (–15 , 30),** $\vec{v}$ **= (–8 , –4)**

$\vec{u}\cdot\vec{v}=(-15,30)\cdot(-8,-4)=120-120=0$

Como el producto escalar es 0, los vectores son perpendiculares, por lo que forman un ángulo de 90º.

d. $\vec{u}$ **= (18 , 30),** $\vec{v}$ **= (12 , 2)**

$\vec{u}\cdot\vec{v}=(18,30)\cdot(12,2)=216+60=276$

$\vec{u}\cdot\vec{v}=\sqrt{18^2+30^2}\cdot\sqrt{12^2+2^2}\cdot\cos\theta=\sqrt{181152}\cdot\cos\theta$

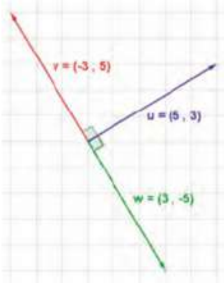
$276=\sqrt{181152}\cdot\cos\theta\Rightarrow\theta=\arccos\dfrac{276}{\sqrt{181152}}=49,57^{\circ}$

18 Encuentra un vector perpendicular a los vectores dados. Representa ambos vectores y comprueba gráficamente que son perpendiculares.

Dado un vector $\vec{u}=(u_1\,,\,u_2)$, el vector $\vec{v}=(-u_2\,,\,u_1)$ y el vector $\vec{w}=(u_2\,,-u_1)$ son perpendiculares a $\vec{u}$. Con lo que los vectores perpendiculares a los dados son:

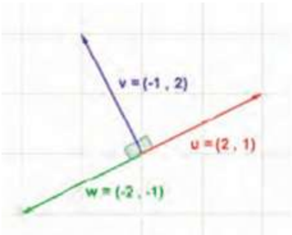
a. $\vec{u} = (5 , 3)$

$\vec{v} = (-3 , 5)$ y $\vec{w} = (3 , -5)$



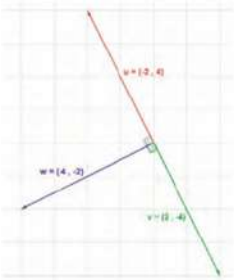
b. $\vec{v} = (-1 , 2)$

$\vec{u} = (2 , 1)$ y $\vec{w} = (-2 , -1)$



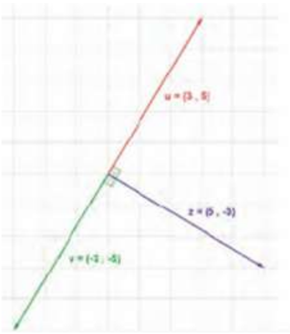
c. $\vec{w} = (-4 , -2)$

$\vec{u} = (-2 , 4)$ y $\vec{v} = (2 , -4)$



d. $\vec{z} = (5 , -3)$

$\vec{u} = (3 , 5)$ y $\vec{v} = (-3 , -5)$



19 **En las siguientes páginas de Internet se proponen diversas actividades con vectores. Accede a dichas páginas y realiza las actividades indicadas.**

http://conteni2.educarex.es/mats/12090/contenido/

http://conteni2.educarex.es/mats/12091/contenido/

Respuesta abierta.

SOLUCIONES PÁG. 199

20 Halla las coordenadas desconocidas de los siguientes vectores para que sean linealmente dependientes:

a. $\vec{u} = (-10\ ,\ a)$, $\vec{v} = (15\ ,\ 9)$

$$\frac{-10}{15} = \frac{a}{9} \Rightarrow a = -6$$

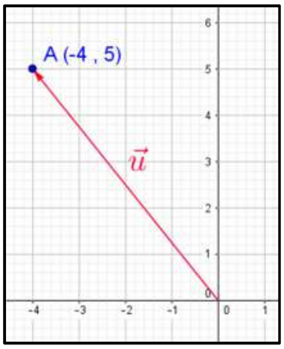
b. $\vec{u} = (b\ ,\ -36)$, $\vec{v} = (9\ ,\ 12)$

$$\frac{b}{9} = \frac{-36}{12} \Rightarrow b = -27$$

21 Actividad resuelta.

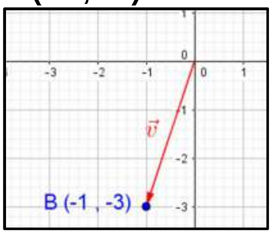
22 Representa los siguientes puntos en el plano cartesiano e indica sus vectores de posición:

a. A (–4 , 5)



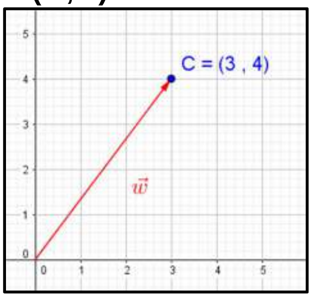
$\vec{u} = (-4, 5)$

b. B (–1 , –3)



$\vec{v} = (-1, -3)$

c. C (3 , 4)



$\vec{w} = (3, 4)$

23 Escribe el vector $\vec{w}$ = (12 , 19) como combinación lineal de los vectores $\vec{u}$ = (4 , –3) y $\vec{v}$ = (12 , 5).

$$\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v} \Rightarrow (12,19) = a(4,-3) + b(12,5) \Rightarrow \begin{cases} 12 = 4a + 12b \\ 19 = -3a + 5b \end{cases}$$

Se resuelve el sistema de ecuaciones y se obtiene que a = –3 y b = 2. Con lo que: $\vec{w} = -3\vec{u} + 2\vec{v}$.

24 Actividad resuelta.

25 Indica cuáles de los siguientes vectores pueden formar una base en el plano:

Para que dos vectores formen base, tienen que ser linealmente independiente, es decir, no pueden ser ni nulos no paralelos.

a. $\vec{u}$ = (15 , 7), $\vec{v}$ = (4 , 3)

$\frac{15}{4} \neq \frac{7}{3} \Rightarrow$ Sí pueden formar base.

b. $\vec{u}$ = (10 , 17), $\vec{v}$ = (1 , 2)

$\frac{10}{1} \neq \frac{17}{2} \Rightarrow$ Sí pueden formar base.

SOLUCIONES PÁG 201

26 Halla la ecuación vectorial y las ecuaciones paramétricas de la recta *r,* que pasa por los puntos P (–6 , 2) y Q (5 , 8), y de la recta *s,* cuyo vector director es $\vec{u}$ = (2 , –7) y que pasa por el punto R (3 , –8).

- Ecuaciones de la recta *r.*
  El vector director es $\vec{u}$ = (5 – (–6) , 8 – 2) = (11 , 6). La ecuación vectorial de la recta es:
  (*x* , *y*) = (–6 , 2) + k · (11 , 6), k ∈ ℝ
  Las ecuaciones paramétricas son:
  $\begin{cases} x = -6 + 11k \\ y = 2 + 6k \end{cases}$, k ∈ ℝ
- Ecuaciones de la recta *s.*
  La ecuación vectorial de la recta es:
  (*x* , *y*) = (3 , –8) + k · (2 , –7), k ∈ ℝ
  Las ecuaciones paramétricas son:
  $\begin{cases} x = 3 + 2k \\ y = -8 - 7k \end{cases}$, k ∈ ℝ

27 Halla la ecuación de la recta *r,* que es paralela a la recta *t:* 4*x* + *y* = 0 y que pasa por el punto P (–3 , 5), y de la recta *s,* que es perpendicular a la recta *u:* 5*x* – 3*y* – 6 = 0 y que pasa por el punto Q (4 , –2).

- Ecuación de la recta *r.*
  Al ser paralela a la recta *t,* su vector director es el mismo. Se sustituye el punto:
  4 (–3) + 5 + C = 0 ⇒ C = 7
  r: 4x + y + 7 = 0

- Ecuación de la recta *s.*
  Al ser perpendicular a la recta *u,* su vector director es (5 , –3). Se sustituye el punto:
  $$\frac{x-4}{5}=\frac{y+2}{-3}\Rightarrow -3\cdot(x-4)=5\cdot(y+2)\Rightarrow -3x+12=5y+10\Rightarrow 3x+5y-2=0$$

SOLUCIONES PÁG. 203

28 Indica cuál es la posición relativa de las siguientes rectas y señala el punto de corte en el caso de rectas secantes:

a. $\left.\begin{array}{l}\boldsymbol{r: 2x-y+4=0}\\ \boldsymbol{s: 5x-y-3=0}\end{array}\right\}$

Como $\frac{2}{5}\neq\frac{-1}{-1}$, las rectas son secantes.

Se resuelve el sistema:

$$\left.\begin{array}{l}2x-y+4=0\\5x-y-3=0\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}y=2x+4\\y=5x-3\end{array}\right.\Rightarrow 2x+4=5x-3\Rightarrow x=\frac{7}{3}$$

Se sustituye el valor de x obtenido en la recta *r:*

$$2\cdot\frac{7}{3}-y+4=0\Rightarrow y=\frac{26}{3}$$

El punto de corte es P $\left(\frac{7}{3},\frac{26}{3}\right)$.

b. $\left.\begin{array}{l}\boldsymbol{r: 3x+7y+4=0}\\ \boldsymbol{s: 6x+14y+8=0}\end{array}\right\}$

Como $\frac{3}{6}=\frac{7}{14}=\frac{4}{8}$, las rectas son coincidentes.

c. $\left.\begin{array}{l}\boldsymbol{r: 12x-10y+4=0}\\ \boldsymbol{s: -6x-5y+2=0}\end{array}\right\}$

Como $\frac{12}{-6}\neq\frac{-10}{-5}$, las rectas son secantes.

Se resuelve el sistema:

$$\left.\begin{array}{l}12x-10y+4=0\\-6x-5y+2=0\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}y=\dfrac{12x+4}{10}\\y=\dfrac{-6x+2}{5}\end{array}\right.\Rightarrow\frac{12x+4}{10}=\frac{-6x+2}{5}\Rightarrow x=0$$

Se sustituye el valor de x obtenido en la recta *r:*

$$12\cdot 0-10y+4=0\Rightarrow y=\frac{2}{5}$$

El punto de corte es P $\left(0,\frac{2}{5}\right)$.

d. $\left.\begin{array}{l} \boldsymbol{r}: \mathbf{3}\boldsymbol{x}+\mathbf{5}\boldsymbol{y}+\mathbf{4}=\mathbf{0} \\ \boldsymbol{s}: -\mathbf{6}\boldsymbol{x}-\mathbf{10}\boldsymbol{y}+\mathbf{8}=\mathbf{0} \end{array}\right\}$

Como $\frac{3}{-6}=\frac{5}{-10}\neq\frac{4}{8}$, las rectas son paralelas.

29 Estudia las posiciones relativas de las rectas propuestas. En el caso de que sean secantes, halla el punto de intersección de las rectas.

a. $\left.\begin{array}{l} \boldsymbol{y}=\mathbf{2}\boldsymbol{x}+\mathbf{3} \\ \boldsymbol{y}=\mathbf{2}\boldsymbol{x}+\mathbf{5} \end{array}\right\}$

Las rectas son paralelas porque tienen la misma pendiente y distinta ordenada en el origen.

b. $\left.\begin{array}{l} \boldsymbol{y}=\mathbf{7}\boldsymbol{x}+\mathbf{3} \\ \boldsymbol{y}=-\mathbf{4}\boldsymbol{x}+\mathbf{2} \end{array}\right\}$

Las rectas son secantes porque tienen distinta pendiente, 7 y –4, respectivamente. Se halla el punto de corte:

$$\left.\begin{array}{l} y=7x+3 \\ y=-4x+2 \end{array}\right\} 7x+3=-4x+2 \Rightarrow x=\frac{-1}{11}$$

Se sustituye el valor de *x* obtenido en la primera recta:

$$y=7\cdot\left(-\frac{1}{11}\right)+3 \Rightarrow y=\frac{26}{11}$$

El punto de corte es P $\left(-\frac{1}{11},\frac{26}{11}\right)$.

30 Determina el punto de intersección de las siguientes rectas: *r: y* – 5 = 2 · (*x* – 9) y *s: y* + 9 = –3 · (*x* – 2)

Se despeja la variable *y* en las dos ecuaciones y se igualan:

$$\left.\begin{array}{l} y-5=2\cdot(x-9) \\ y+9=-3\cdot(x-2) \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} y=2x-13 \\ y=-3x-3 \end{array}\right. \Rightarrow 2x-13=-3x-3 \Rightarrow x=2$$

Se sustituye el valor de *x* obtenido en la recta *r:*

$y = 2 \cdot 2 - 13 \Rightarrow y = -4$

El punto de corte es P (2 , –4).

31 Expresa cuál es la posición relativa de estas rectas en el plano e indica el punto de intersección en el caso de que las rectas sean secantes:

a. $\boldsymbol{r}: \frac{\boldsymbol{x}-\mathbf{2}}{\mathbf{5}}=\frac{\boldsymbol{y}-\mathbf{1}}{\mathbf{2}}; \boldsymbol{s}: \left\{\begin{array}{l} \boldsymbol{x}=\mathbf{3}+\mathbf{4}\boldsymbol{k} \\ \boldsymbol{y}=\mathbf{4}-\boldsymbol{k} \end{array}\right., \boldsymbol{k}\in\mathbb{R}$

Se expresan ambas ecuaciones en la forma implícita:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{x-2}{5}=\frac{y-1}{2} \Rightarrow 2x-5y+1=0 \\ s: \left\{\begin{array}{l} x=3+4k \\ y=4-k \end{array}\right., k\in\mathbb{R} \Rightarrow -x-4y+19=0 \end{array}\right\}$$

Como $\frac{2}{-1}\neq\frac{-5}{-4}$, las restas son secantes.

Se resuelve el sistema:

$$\left.\begin{array}{l}2x-5y+1=0\\-x-4y+19=0\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}y=\dfrac{2x+1}{5}\\y=\dfrac{-x+19}{4}\end{array}\right.\Rightarrow\frac{2x+1}{5}=\frac{-x+19}{4}\Rightarrow x=7$$

Se sustituye el valor de x obtenido en la recta *r:*

$2\cdot 7-5y+1=0\Rightarrow y=3$

El punto de corte es P (7 , 3).

b. $\boldsymbol{r:\dfrac{x-3}{8}=\dfrac{y+5}{-6};s:3x+4y-2=0}$

Se expresa la ecuación de la recta *r* en forma implícita:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{x-3}{8}=\dfrac{y+5}{-6}\Rightarrow 6x+8y+22=0\\3x+4y-2=0\end{array}\right\}$$

Como $\dfrac{6}{3}=\dfrac{8}{4}\neq\dfrac{22}{2}$, las rectas son paralelas.

c. $\boldsymbol{r:\dfrac{x+3}{4}=\dfrac{y-2}{5};s:5x-4y+23=0}$

Se expresa la ecuación de la recta *r* en forma implícita:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{x+3}{4}=\dfrac{y-2}{5}\Rightarrow 5x-4y+23=0\\5x-4y+23=0\end{array}\right\}$$

Como $\dfrac{5}{5}=\dfrac{-4}{-4}=\dfrac{23}{23}$, las rectas son coincidentes.

32 ¿Cuánto tiene que valer *m* para que las rectas *r:* *y* = m*x* y *s:* $\boldsymbol{\dfrac{x-5}{2}=\dfrac{y+2}{3}}$ sean paralelas?

Para que sean paralelas deben tener la misma pendiente pero no tener ningún punto en común.

La pendiente de la recta *s* es $\dfrac{3}{2}$, por tanto m = $\dfrac{3}{2}$.

33 Halla el valor de *C* para que las rectas *r:* 3*x* – 2*y* + C = 0 y *s:* $\boldsymbol{\dfrac{x-5}{2}=\dfrac{y+2}{3}}$ sean coincidentes?

Para que sean coincidentes deben tener la misma pendiente y un punto en común. Se sustituye el punto de la recta *s*, P (5 , –2), en la recta *r:*

$3\cdot 5-2\cdot(-2)+C=0\Rightarrow C=-19$

SOLUCIONES PÁG. 205

34 Calcula las coordenadas del punto medio de los segmentos formados por los siguientes puntos:

a. A (3 , 7), B (9 , 5)

$$(x_m, y_m) = \left(\frac{3+9}{2}, \frac{7+5}{2}\right) = (6, 6)$$

Las coordenadas del punto medio son M (6 , 6).

b. A (1 , 9), B (–3 , –2)

$$(x_m, y_m) = \left(\frac{1+(-3)}{2}, \frac{9+(-2)}{2}\right) = \left(-1, \frac{7}{2}\right)$$

Las coordenadas del punto medio son M $\left(-1, \frac{7}{2}\right)$.

c. A (–5 , 8), B (7 , –7)

$$(x_m, y_m) = \left(\frac{(-5)+7}{2}, \frac{8+(-7)}{2}\right) = \left(1, \frac{1}{2}\right)$$

Las coordenadas del punto medio son M $\left(1, \frac{1}{2}\right)$.

d. A (2 , –3), B (–1 , –6)

$$(x_m, y_m) = \left(\frac{2+(-1)}{2}, \frac{-3+(-6)}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{-9}{2}\right)$$

Las coordenadas del punto medio son M $\left(\frac{1}{2}, \frac{-9}{2}\right)$.

35. Actividad resuelta.

36. Halla las coordenadas del punto simétrico del punto A respecto del punto P en los siguientes casos:

a. A (2 , 1), P (–2 , 0)

Las coordenadas del punto P son iguales a la semisuma de las coordenadas de los puntos A y A':

$$\left.\begin{array}{l} -2 = \dfrac{2+x_1}{2} \\ 0 = \dfrac{1+y_1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -4 = 2+x_1 \\ 0 = 1+y_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1 = -6 \\ y_1 = -1 \end{array}\right\}$$

Las coordenadas del punto simétrico son A' (–6 , –1).

b. **A (0 , –7), P (1 , 1)**

Las coordenadas del punto P son iguales a la semisuma de las coordenadas de los puntos A y A':

$$\left.\begin{array}{l} 1=\dfrac{0+x_1}{2} \\ 1=\dfrac{-7+y_1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2=0+x_1 \\ 2=-7+y_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1=2 \\ y_1=9 \end{array}\right\}$$

Las coordenadas del punto simétrico son A' (2 , 9).

c. **A (– 4 , 9), P (2 , –2)**

Las coordenadas del punto P son iguales a la semisuma de las coordenadas de los puntos A y A':

$$\left.\begin{array}{l} 2=\dfrac{-4+x_1}{2} \\ -2=\dfrac{9+y_1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 4=-4+x_1 \\ -4=9+y_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1=8 \\ y_1=-13 \end{array}\right\}$$

Las coordenadas del punto simétrico son A' (8 , –13).

d. **A (–3 , –3), P (6 , 2)**

Las coordenadas del punto P son iguales a la semisuma de las coordenadas de los puntos A y A':

$$\left.\begin{array}{l} 6=\dfrac{-3+x_1}{2} \\ 2=\dfrac{-3+y_1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 12=-3+x_1 \\ 4=-3+y_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1=15 \\ y_1=7 \end{array}\right\}$$

Las coordenadas del punto simétrico son A' (15 , 7).

37 **Indica si los siguientes puntos están alineados:**

a. **A (2 , 5), B (3 , 10), C (5 , 20)**

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AB}=(3-2\ ,\ 10-5)=(1\ ,\ 5) \\ \overrightarrow{BC}=(5-3, 20-10)=(2\ ,10) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{2}=\frac{5}{10} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{BC}$$

Como los vectores son paralelos, por ser sus coordenadas proporcionales, los puntos A, B y C, están alineados.

b. **A (–3 , 4), B (12, –15), C (6 , –3)**

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AB}=(12-(-3)\ ,\ (-15)-4)=(15\ ,\ -19) \\ \overrightarrow{BC}=(6-12\ ,\ -3-(-15))=(-6\ ,12) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{15}{-6} \neq \frac{-19}{12}$$

Como los vectores no son paralelos, por no ser sus coordenadas proporcionales, los puntos A, B y C, no están alineados.

38 **Halla el valor de x_1, para que los puntos A (–8 , 3), B (x_1 , 2) y C (4 , 9) estén alineados.**

$$\frac{x_1-(-8)}{2-3}=\frac{4-x_1}{9-2} \Rightarrow \frac{x_1+8}{-1}=\frac{4-x_1}{7} \Rightarrow x_1=-10$$

39 ¿Qué relación tiene que haber entre x_1 e y_1 para que los puntos A (x_1 , y_1), B (0 , 5) y C (3 , 2) estén alineados?

$$\frac{0-x_1}{5-y_1}=\frac{3-0}{2-5}\Rightarrow\frac{-x_1}{5-y_1}=\frac{3}{-3}\Rightarrow\frac{-x_1}{5-y_1}=-1\Rightarrow x_1=5-y_1$$

40 Un cuadrilátero es un paralelogramo si cumple que sus diagonales se cortan en su punto medio. Utilizando esta propiedad, determina si el cuadrilátero determinado por sus vértices, A (2 , 3), B (7 , 3), C (9 , 1) y D (4 , 1), es un paralelogramo.

Se halla el punto medio de la diagonal formada por los puntos A y C:

$$(x_m, y_m)=\left(\frac{2+9}{2},\frac{3+1}{2}\right)=\left(\frac{11}{2}\,,\,2\right)$$

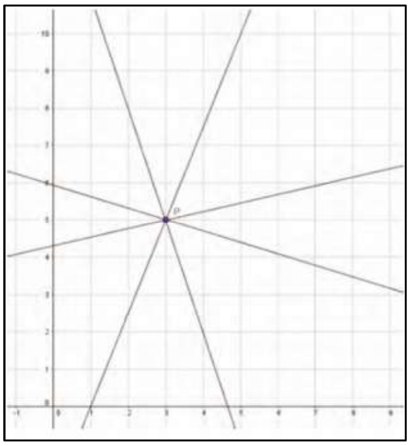
Se halla el punto medio de la diagonal formada por los puntos B y D:

$$(x_m, y_m)=\left(\frac{7+4}{2},\frac{3+1}{2}\right)=\left(\frac{11}{2}\,,\,2\right)$$

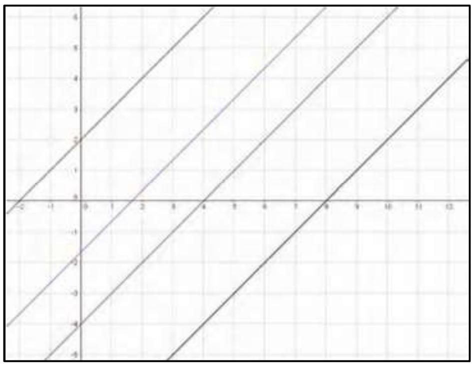
Como los puntos medios coinciden, sí se trata de un paralelogramo.

41 Dibuja en tu cuaderno las siguientes situaciones:

a. Un haz de rectas que pasan por el punto P (3 , 5).



b. Un haz de rectas paralelas a la recta *r:* 3*x* – 2*y* – 5 = 0.



42 Los puntos P (–2 , 1) y Q (3 , –2) son dos puntos opuestos de un rectángulo. ¿Cuánto mide su diagonal? ¿Cuáles son las coordenadas de su centro?

La longitud de la diagonal es el módulo del vector formado por los dos puntos.

$\overrightarrow{PQ} = (3-(-2),(-2)-1) = (5,-3)$

$\left|\overrightarrow{PQ}\right| = \sqrt{5^2+(-3)^2} = \sqrt{34}$

La diagonal mide $\sqrt{34}$.

Las coordenadas de su centro son las coordenadas del punto medio de los puntos P y Q.

$(x_m, y_m) = \left(\dfrac{-2+3}{2}, \dfrac{1+(-2)}{2}\right) = \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{-1}{2}\right)$

Las coordenadas del punto medio es P $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{-1}{2}\right)$.

43 Si unimos los puntos A (2 , 6), B (5 , 4) y C (11 , 0), ¿podemos obtener un triángulo? ¿Por qué?

Se comprueba si los tres puntos están alineados:

$\dfrac{5-2}{4-6} = \dfrac{11-5}{0-4} \Rightarrow \dfrac{3}{-2} = \dfrac{6}{-4}$

Los puntos A, B y C están alineados. Por ello, no se puede formar un triángulo si unimos los tres puntos.

SOLUCIONES PÁG. 207

44 Establece la distancia entre los siguientes puntos:

a. P (2 , –1), Q (7 , –3)

$d(P, Q) = \left|\overrightarrow{PQ}\right| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} = \sqrt{(7-2)^2+(-3-(-1))^2} = \sqrt{25+4} = \sqrt{29}$

b. P (17 , 3), Q (–8 , –6)

$d(P, Q) = \left|\overrightarrow{PQ}\right| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} = \sqrt{(-8-17)^2+(-6-3)^2} = \sqrt{706}$

c. P (–20 , 18), Q (11 , 15)

$d(P, Q) = \left|\overrightarrow{PQ}\right| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} = \sqrt{(11-(-20))^2+(15-18)^2} = \sqrt{970}$

d. P (9 , –6), Q (12 , 14)

$d(P, Q) = \left|\overrightarrow{PQ}\right| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} = \sqrt{(12-9)^2+(14-(-6))^2} = \sqrt{409}$

45 Calcula la distancia existente entre un punto y una recta en los siguientes casos:

a. P (–5 , 1), *r*: 3*x* + 2*y* – 12 = 0

$d(P, r) = \dfrac{|Ax_1+By_1+C|}{\sqrt{A^2+B^2}} = \dfrac{|3\cdot(-5)+2\cdot 1-12|}{\sqrt{3^2+2^2}} = \dfrac{25}{\sqrt{13}} = \dfrac{25\sqrt{13}}{13}$

b. P (–25 , –30), *r:* 15*x* – 12*y* – 55 = 0

$$d(P, r) = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|15 \cdot (-25) + (-12) \cdot (-30) - 55|}{\sqrt{15^2 + (-12)^2}} = \frac{70}{3\sqrt{41}} = \frac{70\sqrt{41}}{123}$$

c. P (50 , 20), *r:* 8*x* + 9*y* – 18 = 0

$$d(P, r) = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|8 \cdot 50 + 9 \cdot 20 - 18|}{\sqrt{8^2 + 9^2}} = \frac{562}{\sqrt{145}} = \frac{562\sqrt{145}}{145}$$

d. P (33, –17), *r:* –12*x* – 19*y* + 78 = 0

$$d(P, r) = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|(-12) \cdot 33 + (-19) \cdot (-17) + 78|}{\sqrt{(-12)^2 + (-19)^2}} = \frac{5}{\sqrt{505}} = \frac{\sqrt{505}}{101}$$

46 Un cuadrilátero está formado por los puntos A (–4 , 3), B (1 , 6), C (2 , –1) y D (–1 , 0). Halla el perímetro de dicho cuadrilátero.

Se halla la distancia entre los puntos A-B, B-C, C-D y D-A.

$$d(A, B) = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(1 - (-4))^2 + (6 - 3)^2} = \sqrt{25 + 9} = \sqrt{34} = 5{,}83$$

$$d(B, C) = |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(2 - 1)^2 + ((-1) - 6)^2} = \sqrt{1 + 49} = \sqrt{50} = 7{,}07$$

$$d(C, D) = |\overrightarrow{CD}| = \sqrt{((-1) - 2)^2 + (0 - (-1))^2} = \sqrt{9 + 1} = \sqrt{10} = 3{,}16$$

$$d(D, A) = |\overrightarrow{DA}| = \sqrt{((-1) - (-4))^2 + (0 - (-4))^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

El perímetro es la suma de todas las distancias:

P = 5,83 + 7,07 + 3,16 + 5 = 21,06 u

47 Calcula el perímetro del cuadrilátero formado por los puntos A (–1 , 2), B (2 , 5), C (6 , 1) y D (2, –1).

Se halla la distancia entre los puntos A-B, B-C, C-D y D-A.

$$d(A, B) = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(2 - (-1))^2 + (5 - 2)^2} = \sqrt{9 + 9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$d(B, C) = |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(6 - 2)^2 + (1 - 5)^2} = \sqrt{16 + 16} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

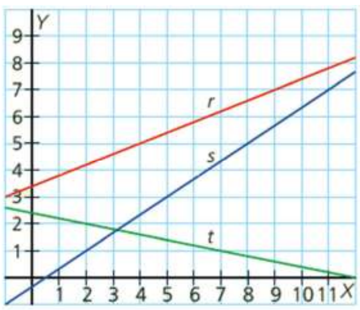
$$d(C, D) = |\overrightarrow{CD}| = \sqrt{(2 - 6)^2 + ((-1) - 1)^2} = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$$d(D, A) = |\overrightarrow{DA}| = \sqrt{(-1 - 2)^2 + (2 - (-1))^2} = \sqrt{9 + 9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

El perímetro es la suma de todas las distancias:

$P = 3\sqrt{2} + 4\sqrt{2} + 2\sqrt{5} + 3\sqrt{2} = 10\sqrt{2} + 2\sqrt{5}$ u

48 Halla la ecuación de las siguientes rectas y calcula su distancia al punto P (–8 , 5):



- Ecuación de la recta *r.*
  Dos puntos de la recta *r* son, por ejemplo, P (9 , 7) y Q (4 , 5).
  Se halla el vector director formado por esos dos puntos:
  $\overrightarrow{PQ} = (4-9, 5-7) = (-5, -2)$
  Con el punto P y el vector se forma la ecuación de la recta *r.* Se calcula el valor de C sustituyendo en la ecuación en forma general:
  $-2 \cdot 9 + 5 \cdot 7 + C = 0 \Rightarrow C = -17$
  La ecuación de la recta *r* es: $-2x + 5y - 17 = 0$
  La distancia de *r* a P es:
  $$d\,(P\,,\,r) = \frac{|(-2)\cdot(-8) + 5\cdot 5 - 17|}{\sqrt{(-2)^2 + 5^2}} = \frac{24}{\sqrt{29}} = \frac{24\sqrt{29}}{29}$$
- Ecuación de la recta *s.*
  Dos puntos de la recta *s* son, por ejemplo, P (8 , 5) y Q (5 , 3).
  Se halla el vector director formado por esos dos puntos:
  $\overrightarrow{PQ} = (5-8, 3-5) = (-3, -2)$
  Con el punto P y el vector se forma la ecuación de la recta *s.* Se calcula el valor de C sustituyendo en la ecuación en forma general:
  $-2 \cdot 8 + 3 \cdot 5 + C = 0 \Rightarrow C = 1$
  La ecuación de la recta *s* es: $-2x + 3y + 1 = 0$
  La distancia de *s* a P es:
  $$d\,(P\,,\,s) = \frac{|(-2)\cdot(-8) + 3\cdot 5 + 1|}{\sqrt{(-2)^2 + 3^2}} = \frac{32}{\sqrt{13}} = \frac{32\sqrt{13}}{13}$$
- Ecuación de la recta *t.*
  Dos puntos de la recta *t* son, por ejemplo, P (2 , 2) y Q (7 , 1).
  Se halla el vector director formado por esos dos puntos:
  $\overrightarrow{PQ} = (7-2, 1-2) = (5, -1)$
  Con el punto P y el vector se forma la ecuación de la recta *t.* Se calcula el valor de C sustituyendo en la ecuación en forma general:
  $-1 \cdot 2 + (-5) \cdot 2 + C = 0 \Rightarrow C = 12$
  La ecuación de la recta *t* es: $-x - 5y + 12 = 0$
  La distancia de *t* a P es:
  $$d\,(P\,,\,t) = \frac{|(-1)\cdot(-8) + (-5)\cdot 5 + 12|}{\sqrt{(-1)^2 + (-5)^2}} = \frac{5}{\sqrt{26}} = \frac{5\sqrt{26}}{26}$$

49 Determina la distancia existente entre las siguientes rectas paralelas:

a. ***r:* 8*x* + 5*y* – 12 = 0 y *s:* 8*x* + 5*y* + 10 = 0**

$$d\,(r\,,s) = \frac{|C' - C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|10 - (-12)|}{\sqrt{8^2 + 5^2}} = \frac{22}{\sqrt{89}} = \frac{22\sqrt{89}}{89}$$

b. ***r:* –*x* – *y* + 9 = 0 y *s:* –*x* – *y* – 2 = 0**

$$d\,(r\,,s) = \frac{|C' - C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|-2 - 9)|}{\sqrt{(-1)^2 + (-1)^2}} = \frac{11}{\sqrt{2}} = \frac{11\sqrt{2}}{2}$$

c. ***r:* 7*x* – 3*y* + 20 = 0 y *s:* 7*x* – 3*y* – 4 = 0**

$$d\,(r\,,s)=\frac{|C'-C|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{|-4-20)|}{\sqrt{7^2+(-3)^2}}=\frac{24}{\sqrt{58}}=\frac{12\sqrt{58}}{29}$$

d. ***r:* –6*x* + 3*y* – 8 = 0 y *s:* –6*x* + 3*y* + 11 = 0**

$$d\,(r\,,s)=\frac{|C'-C|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{|11-(-8)|}{\sqrt{(-6)^2+3^2}}=\frac{19}{\sqrt{45}}=\frac{19\sqrt{5}}{15}$$

e. ***r:* 2*x* – *y* – 1 = 0 y *s:* 2*x* – *y* + 1 = 0**

$$d\,(r\,,s)=\frac{|C'-C|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{|1-(-1)|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

SOLUIONES PÁG. 209

1 Indica qué es un vector y cuáles son sus elementos.

Un **vector fijo** $\vec{u}$ = (u_1 , u_2) de origen A (x_1 , y_1) y extremo B (x_2 , y_2), es el segmento orientado $\overline{AB}$ y se representa por $\overrightarrow{AB}$.

El **módulo** de un vector es la longitud del segmento

$$\overline{AB}=|\vec{u}|=\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{u_1^2+u_2^2}$$

La **dirección** de un vector viene determinada por la posición de la recta que contiene a dicho vector. De este modo, todos los vectores que son paralelos tienen la misma dirección.

El **sentido** de un vector viene determinado por la orientación de dicho vector, de modo que si tenemos un vector $\overrightarrow{AB}$, el sentido es la orientación del origen A al extremo B.

El **argumento** de un vector es el ángulo que forma con la horizontal y se calcula con la arcotangente de sus coordenadas:

$$\alpha=\text{arctg}\,\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\text{arctg}\,\frac{u_2}{u_1}$$

2 Expón cómo saber si dos vectores son paralelos. ¿Y si son o no perpendiculares? ¿Cómo se puede establecer qué ángulo forman dos vectores?

Dos vectores son paralelos cuando sus coordenadas son proporcionales.

Dos vectores son perpendiculares cuando su producto escalar es 0, ya que cos 90° = 1.

El ángulo que forman dos vectores se puede calcular con su producto escalar.

3 ¿Qué diferencia existe entre vectores linealmente dependientes y linealmente independientes?

Dos o más vectores son linealmente dependientes si existe una combinación lineal de ellos que es igual al vector cero sin que sean cero todos los coeficientes de la combinación lineal.

Dos o más vectores son linealmente independientes si ninguno de ellos puede expresarse como una combinación lineal del resto de vectores, es decir, si no son dependientes.

4 **¿Qué elementos se necesitan para definir una recta?**
Para definir una recta se necesitan:
• Dos puntos.
• Un punto y su vector director.

5 **¿Qué es una base del espacio vectorial?**
Una base del espacio vectorial es la formada por dos vectores linealmente independientes.

6 **Indica las expresiones de las diferentes ecuaciones en que se puede expresar una recta a partir de uno de sus puntos, P (x_1 , y_1), y de su vector director, $\vec{u} = (u_1 , u_2)$.**

Vectorial	$(x, y) = (x_1, y_1) + k \cdot (v_1, v_2)$, $k \in$ □
Paramétricas	$\begin{cases} x = x_1 + k \cdot v_1 \\ y = y_1 + k \cdot v_2 \end{cases}$, $k \in$ □
Continua	$\frac{x - x_1}{v_1} = \frac{y - y_1}{v_2}$
General	$Ax + By + C = 0$ con $A = v_2, B = -v_1, C = v_1 \cdot y_1 - v_2 \cdot x_1$
Explícita	$y = mx + n$
Punto-pendiente	$y - y_1 = m(x - x_1)$

7 **¿Qué posiciones relativas puede haber entre dos rectas?**
Son paralelas cuando no tienen ningún punto en común, coincidentes cuando son comunes todos sus puntos y secantes cuando se cortan en un punto.

8 **Escribe las expresiones necesarias para calcular la distancia existente entre dos puntos, entre un punto y una recta y entre dos rectas paralelas.**
Distancia entre dos puntos: d (P , Q) = $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

Distancia entre un punto y una recta: d (P , *r*) = $\frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

Distancia entre dos rectas paralelas: d (*r* , *s*) = $\frac{|C' - C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

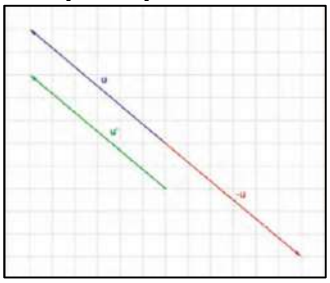
9 **Prepara una presentación para tus compañeros sobre los vectores, las rectas y las relaciones métricas. Puedes hacer un documento PowerPoint, usar Glogster…**
Respuesta abierta.

SOLUCIONES PÁG. 210 - REPASO FINAL

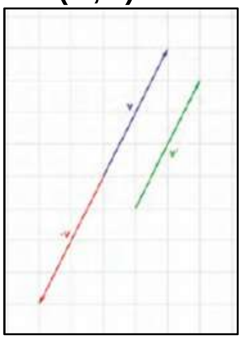
VECTORES EN EL PLANO

1 Representa los siguientes vectores y dibuja su vector opuesto y un vector equipolente:

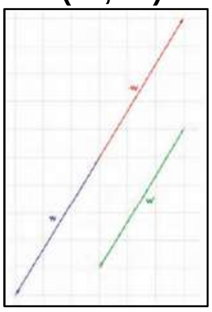
a. $\vec{u} = (-6\ ,\ 5)$



b. $\vec{v} = (2\ ,\ 4)$



c. $\vec{w} = (-3,\ -5)$



2 Dados los puntos A (–5 , 12), B (15 , 20), C (19 , –3), D (–4 , –18) y E (23 , 29), halla las coordenadas de los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{ED}$, $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{AC}$ y calcula sus respectivos módulos y argumentos. Representa dichos vectores con GeoGebra.

- $\overrightarrow{AB} = (15-(-5)\ ,\ 20-12) = (20\ ,\ 8)$

  $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{20^2+8^2} = \sqrt{400+64} = 4\sqrt{29}$

  $\alpha = \text{arctg}\dfrac{8}{20} = 21{,}8^{\circ}$

- $\overrightarrow{CD} = ((-4)-19\,,(-18)-(-3)) = \left(-23\,,-15\right)$

  $\left|\overrightarrow{CD}\right| = \sqrt{(-23)^2+(-15)^2} = \sqrt{529+225} = \sqrt{754}$

  $\alpha = \operatorname{arctg}\dfrac{-15}{-23} = 213{,}11^{\circ}$

- $\overrightarrow{ED} = ((-4)-23\,,(-18)-29) = \left(-27\,,-47\right)$

  $\left|\overrightarrow{ED}\right| = \sqrt{(-27)^2+(-47)^2} = \sqrt{729+2\,209} = \sqrt{2\,938}$

  $\alpha = \operatorname{arctg}\dfrac{-47}{-27} = 240{,}12^{\circ}$

- $\overrightarrow{AE} = (23-(-5)\,,29-12) = \left(28\,,17\right)$

  $\left|\overrightarrow{AE}\right| = \sqrt{28^2+17^2} = \sqrt{784+289} = \sqrt{1073}$

  $\alpha = \operatorname{arctg}\dfrac{17}{28} = 31{,}26^{\circ}$

- $\overrightarrow{DB} = (15-(-4)\,,20-(-18)) = \left(19\,,38\right)$

  $\left|\overrightarrow{DB}\right| = \sqrt{19^2+38^2} = \sqrt{361+1444} = 19\sqrt{5}$

  $\alpha = \operatorname{arctg}\dfrac{38}{19} = 63{,}43^{\circ}$

- $\overrightarrow{BC} = (19-15\,,(-3)-20) = \left(4\,,-23\right)$

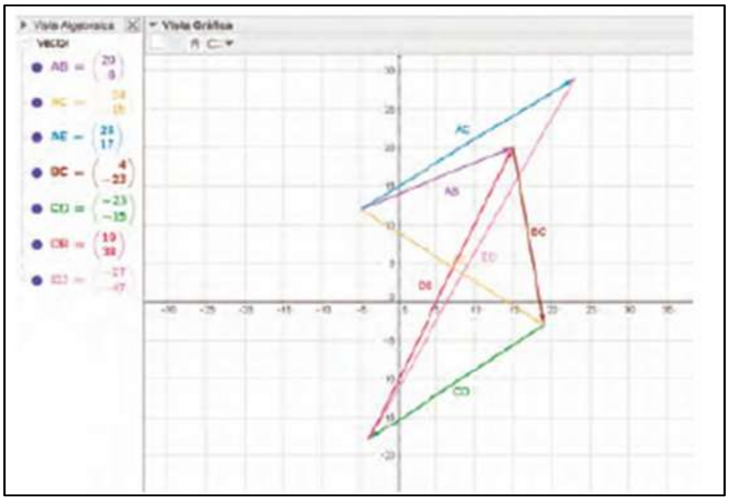
  $\left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{4^2+(-23)^2} = \sqrt{16+529} = \sqrt{545}$

  $\alpha = \operatorname{arctg}\dfrac{-23}{4} = 279{,}87^{\circ}$

- $\overrightarrow{AC} = (19-(-5)\,,(-3)-12) = \left(24\,,-15\right)$

  $\left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{24^2+(-15)^2} = \sqrt{576+225} = 3\sqrt{89}$

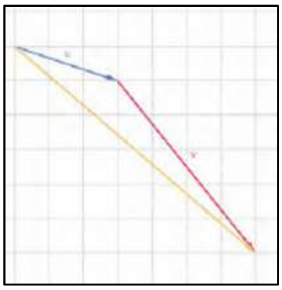
  $\alpha = \operatorname{arctg}\dfrac{-15}{24} = 327{,}99^{\circ}$



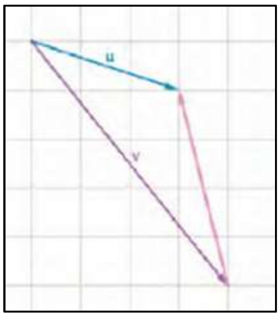
OPERACIONES CON VECTORES

3 A partir de los vectores $\vec{u}$ = (3 , –1) y $\vec{v}$ = (4 , –5), realiza gráficamente las siguientes operaciones:

a. $\vec{u} + \vec{v}$



b. $\vec{u} - \vec{v}$



c. $\vec{v} - \vec{u}$

4 Efectúa las operaciones indicadas con los siguientes vectores $\vec{u}$ = (–3 , 8), $\vec{v}$ = (7 , 2), $\vec{w}$ = (–4 , –6) y $\vec{t}$ = (1 , –10):

a. $3\vec{u} - 2\vec{v} + 5\vec{w} - 6\vec{t}$

$$3\vec{u} - 2\vec{v} + 5\vec{w} - 6\vec{t} = (-9, 24) - (14, 4) + (-20, -30) - (6, -60) = (-49, 50)$$

b. $2(\vec{v} + \vec{w}) - (\vec{u} - \vec{t})$

$$2(\vec{v} + \vec{w}) - (\vec{u} - \vec{t}) = 2\cdot(3, -4) - (-4, 18) = (6, -8) - (-4, 18) = (10, -26)$$

c. $-4(\vec{u} - \vec{w} - \vec{t}) + 3\vec{v}$

$$-4(\vec{u} - \vec{w} - \vec{t}) + 3\vec{v} = -4\cdot(0, 24) + (21, 6) = (0, -96) + (21, 6) = (21, -90)$$

d. $(\vec{u} - \vec{v}) - (\vec{v} - \vec{w}) - (\vec{t} - \vec{u})$

$(\vec{u}-\vec{v})-(\vec{v}-\vec{w})-(\vec{t}-\vec{u})=(-10,6)-(11,8)-(4,-18)=(-25,16)$

5 Calcula el producto escalar de los siguientes vectores:

a. $\vec{u} = (-15, 20)$, $\vec{v} = (2, -4)$

$\vec{u}\cdot\vec{v} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 = -15\cdot 2 + 20\cdot(-4) = -110$

b. $\vec{u} = (-17, 22)$, $\vec{v} = (1, -9)$

$\vec{u}\cdot\vec{v} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 = -17\cdot 1 + 22\cdot(-9) = -215$

6 De entre los siguientes vectores, indica cuáles son perpendiculares y cuáles son paralelos. Determina el ángulo que forman los que no pertenezcan a ninguno de los dos tipos:

a. $\vec{u} = (4, 2)$, $\vec{v} = (6, 3)$

Los vectores son paralelos porque sus componentes son proporcionales: $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

b. $\vec{u} = (1, 3)$, $\vec{v} = (-2, 5)$

No son paralelos ni perpendiculares, por lo que hallamos el ángulo que forman:

$\cos\theta = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|} = \frac{-2+15}{\sqrt{1^2+3^2}\cdot\sqrt{(-2)^2+5^2}} = \frac{13}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{29}} = \frac{13}{\sqrt{290}} \Rightarrow \theta = 40º14'11''$

c. $\vec{u} = (10, -6)$, $\vec{v} = (-35, 21)$

Los vectores son paralelos porque sus componentes son proporcionales:

$\frac{10}{-35}=\frac{-6}{21}=-\frac{2}{7}$

d. $\vec{u} = (-3, 2)$, $\vec{v} = (-10, 15)$

No son paralelos ni perpendiculares, por lo que hallamos el ángulo que forman:

$\cos\theta = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|} = \frac{30+30}{\sqrt{(-3)^2+2^2}\cdot\sqrt{(-10)^2+15^2}} = \frac{60}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{325}} = \frac{60}{65} \Rightarrow \theta = 22º37'12''$

VECTORES DEPENDIENTES E INDEPENDIENTES. BASE DEL ESPACIO VECTORIAL. SISTEMA DE REFERENCIA

7 Halla el valor de *a* y *b* para que los siguientes vectores sean linealmente dependientes:

a. $\vec{u} = (13, -18)$ y $\vec{v} = (-39, a)$

$\frac{13}{-39}=\frac{-18}{a} \Rightarrow a = \frac{-39\cdot(-18)}{13} = 54 \Rightarrow a = 54$

b. $\vec{u} = (b, 451)$ y $\vec{v} = (12, 11)$

$\frac{b}{12}=\frac{451}{11} \Rightarrow b = \frac{451\cdot 12}{11} = 492 \Rightarrow b = 492$

8 Escribe el vector $\vec{w}$ = (–24 , 17) como combinación lineal de los vectores $\vec{u}$ = (–2 , 8) y $\vec{v}$ = (9 , 3).

$$\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v} \Rightarrow (-24,17) = a(-2,8) + b(9,3) \Rightarrow \begin{cases} -24 = -2a + 9b \\ 17 = 8a + 3b \end{cases}$$

Se resuelve el sistema de ecuaciones y se obtiene que a = $\frac{-79}{39}$ y b = $\frac{75}{26}$. Con lo que $\vec{w} = \frac{-79}{39}\vec{u} + \frac{75}{26}\vec{v}$.

9 ¿Pueden los vectores $\vec{u}$ = (12 , –5) y $\vec{v}$ = (3 , –1) formar una base en el plano? ¿Y los vectores $\vec{u}$ = (4 , 6) y $\vec{v}$ = (6 , 9)?

Los vectores $\vec{u}$ = (12 , –5) y $\vec{v}$ = (3 , –1) sí pueden formar una base, al ser linealmente independientes ya que sus componentes no son proporcionales: $\frac{12}{3} \neq \frac{-5}{-1}$

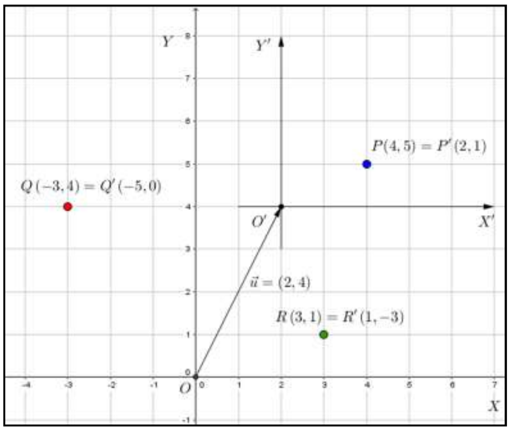
Los vectores $\vec{u}$ = (4 , 6) y $\vec{v}$ = (6 , 9) no pueden formar una base, al ser linealmente dependientes ya que sus componentes son proporcionales: $\frac{4}{6} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$

10 Halla las coordenadas del vector $\vec{u}$ = (4 , –10) respecto de la base B = {(–2 , 1), (–6 , –1)}.

$$(4,-10) = a(-2,1) + b(-6,-1) \Rightarrow \begin{cases} -2a - 6b = 4 \\ a - b = -10 \end{cases}$$

Se resuelve el sistema de ecuaciones y se obtiene que a = –8 y b = 2. Con lo que $\vec{u}' = (-8,2)$.

11 Considera un sistema de referencia y realiza una traslación para obtener un nuevo sistema de referencia, de modo que el punto P (4 , 5) se transforme en el punto P' (2 , 1). Contesta después a las siguientes preguntas:



a. ¿Cuál es el vector de traslación?

$\vec{u} = (2,4)$

b. ¿Cuáles son las coordenadas del origen en el nuevo sistema de referencia respecto al sistema de referencia inicial?

(2 , 4)

c. **Indica las coordenadas en el nuevo sistema de referencia de los puntos Q (–3 , 4) y R (3 , 1).**
Q’ (-5 , 0) y R’ (1 , –3)

ECUACIONES DE LA RECTA

12 Escribe los distintos tipos de ecuaciones de la recta para la recta *r* que pasa por los puntos P (–3 , 2) y Q (8 , 4), y para la recta *s* que pasa por el punto R (–1 , –4) y cuyo vector director es $\vec{u}$ = (9 , 5).

Recta	*r*
Vector director	$\vec{u}=(11,2)$
Ecuación vectorial	$(x,y)=(-3,2)+k\cdot(11,2),\ k\in\mathbb{R}$
Ecuaciones paramétricas	$\begin{cases} x=-3+11k \\ y=2+2k \end{cases},\ k\in\mathbb{R}$
Ecuación continua	$\frac{x+3}{11}=\frac{y-2}{2}$
Ecuación general	$2x-11y+28=0$
Ecuación punto-pendiente	$y-2=\frac{2}{11}(x+3)$
Ecuación explícita	$y=\frac{2}{11}x+\frac{28}{11}$

Recta	*s*
Vector director	$\vec{u}=(9,5)$
Ecuación vectorial	$(x,y)=(-1,-4)+k\cdot(9,5),\ k\in\mathbb{R}$
Ecuaciones paramétricas	$\begin{cases} x=-1+9k \\ y=-4+5k \end{cases},\ k\in\mathbb{R}$
Ecuación continua	$\frac{x+1}{9}=\frac{y+4}{5}$
Ecuación general	$5x-9y-31=0$
Ecuación punto-pendiente	$y+4=\frac{5}{9}(x+1)$
Ecuación explícita	$y=\frac{5}{9}x-\frac{31}{9}$

13 Indica la ecuación general de la recta de los ejes coordenados y de las bisectrices de los cuadrantes.

Eje de abscisas	$y = 0$
Eje de ordenadas	$x = 0$
Bisectriz del primer cuadrante	$x - y = 0$
Bisectriz del segundo cuadrante	$x + y = 0$

14 Escribe las siguientes rectas en el resto de las distintas formas en que se puede expresar:

a. $r:\begin{cases} x = 2 + 7k \\ y = -5 - 8k \end{cases}, k \in \mathbb{R}$

Recta *r*	$r:\begin{cases} x = 2 + 7k \\ y = -5 - 8k \end{cases}, k \in \mathbb{R}$
Ecuación vectorial	$(x, y) = (2, -5) + k(7, -8), k \in \mathbb{R}$
Ecuación continua	$\frac{x-2}{7} = \frac{y+5}{-8}$
Ecuación general	$8x + 7y + 19 = 0$
Pendiente	$m = -\frac{8}{7}$
Ecuación punto-pendiente	$y + 5 = -\frac{8}{7}(x - 2)$
Ecuación explícita	$y = -\frac{8}{7}x - \frac{19}{7}$

b. $s: \frac{x-5}{3} = \frac{y+6}{2}$

Recta *s*	$\frac{x-5}{3} = \frac{y+6}{2}$
Ecuación vectorial	$(x, y) = (5, -6) + k(3, 2), k \in \mathbb{R}$
Ecuaciones paramétricas	$\begin{cases} x = 5 + 3k \\ y = -6 + 2k \end{cases}, k \in \mathbb{R}$
Ecuación general	$2x - 3y - 28 = 0$
Ecuación punto-pendiente	$y + 6 = \frac{2}{3}(x + 5)$
Ecuación explícita	$y = \frac{2}{3}x - \frac{8}{3}$

c. ***t*: *y* – 9 = 2 · (*x* + 8)**

Recta *t*	$y - 9 = 2(x + 8)$
Ecuación explícita	$y = 2x + 25$
Ecuación general	$2x - y + 25 = 0$
Ecuación vectorial	$(x, y) = (-8, 9) + k(1, 2), k \in \mathbb{R}$
Ecuaciones paramétricas	$\begin{cases} x = -8 + k \\ y = 9 + 2k \end{cases}, k \in \mathbb{R}$
Ecuación continua	$x + 8 = \frac{y-9}{2}$

SOLUCIONES PÁG. 211

15 Halla la ecuación de la recta que es paralela a la recta *r:* –*x* – 3*y* – 8 = 0 y pasa por el punto P (12 , 7).
Como la recta es paralela a la dada, sus vectores directores tienen que ser proporcionales. Con lo que la nueva recta será de la forma –*x* – 3*y* + C = 0.
Como dicha recta pasa por el punto P (12 , 7), sustituimos sus coordenadas en la recta para hallar el valor de C.
$-12 - 3 \cdot 7 + C = 0 \Rightarrow C = 33$
Y la recta pedida es entonces: –*x* – 3*y* + 33 = 0.

16 Halla la ecuación de la recta que es perpendicular a la recta *r:* 9*x* + 8*y* + 3 = 0 y pasa por el punto P (–3 , –2).
Como las rectas son perpendiculares, hallando el vector director de la recta dada, $\vec{u} = (u_1, u_2)$, calculamos el de la recta pedida mediante la expresión $\vec{v} = (-u_2, u_1)$.
Entonces $\vec{u} = (-8, 9)$, con lo que $\vec{v} = (-9, -8)$. De este modo la expresión de la recta pedida es de la forma 8*x* – 9*y* + C = 0. Sustituyendo el punto dado, obtenemos el valor de C.
$8 \cdot (-3) - 9 \cdot (-2) + C = 0 \Rightarrow C = 6$
Y la recta pedida es entonces: 8*x* – 9*y* + 6 = 0.

POSICIONES RELATIVAS DE DOS RECTAS

17 Expresa la posición relativa de las siguientes rectas en el plano, indicando el punto de intersección en el caso de que las rectas sean secantes:

a. $\boldsymbol{r: \frac{x+4}{-2} = \frac{y-8}{-5}}$ **y** $\boldsymbol{s: \begin{cases} x = 8 - 5k \\ y = 3 + 10k \end{cases}, k \in \mathbb{R}}$

Como $\frac{-2}{-5} \neq \frac{-5}{10}$, las rectas son secantes.

Se resuelve el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} -5x + 2y - 36 = 0 \\ 2x + y - 19 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{5x+36}{2} \\ y = -2x + 19 \end{cases} \Rightarrow \frac{5x+36}{2} = -2x + 19 \Rightarrow x = \frac{2}{9}$$

Se sustituye el valor de *x* obtenido en la recta *r:*

$$-5 \cdot \frac{2}{9} + 2y - 36 = 0 \Rightarrow y = \frac{167}{9}$$

El punto de corte es P $\left(\frac{2}{9}, \frac{167}{9}\right)$.

b. $\boldsymbol{r: \frac{x-4}{-6} = \frac{y-7}{10}}$ **y *s:* 5*x* + 3*y* – 2 = 0**

La ecuación *r* en forma general es: 10*x* + 6*y* – 82 = 0.

Como $\frac{10}{6} = \frac{5}{3} \neq \frac{-82}{-2}$, las rectas son paralelas.

c. $r: \begin{cases} x = 6 - \text{k} \\ y = 12 + 5\text{k} \end{cases}$ y $s: \begin{cases} x = 8 - \text{k}' \\ y = 12 - 5\text{k}' \end{cases}, \text{k} \in \mathbb{R}$

El vector director de la recta *r* es (–1 , 5) y el de la recta *s* es (–1 , –5). Como no son proporcionales, las rectas son secantes.
Se halla el punto de intersección. Se igualan las coordenadas y se calcula k y k'.

$$\left.\begin{array}{l} 6 - \text{k} = 8 - \text{k}' \\ 12 + 5\text{k} = 12 - 5\text{k}' \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -\text{k} + \text{k}' = 2 \\ 5\text{k} + 5\text{k}' = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -5\text{k} + 5\text{k}' = 10 \\ 5\text{k} + 5\text{k}' = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \text{k}' = 1 \\ \text{k} = -1 \end{array}\right\}$$

Se sustituye k o k' en su recta correspondiente, y se obtiene el punto de intersección P (7 , 7).

18 Halla el punto de intersección de estas rectas.

a. $\left.\begin{array}{l} r: 5x - 2y + 14 = 0 \\ s: y = \dfrac{5}{2}x + 7 \end{array}\right\}$

$$\left.\begin{array}{l} 5x - 2y + 14 = 0 \\ y = \dfrac{5}{2}x + 7 \end{array}\right\} \Rightarrow 5x - 2\left(\frac{5}{2}x + 7\right) + 14 = 0 \Rightarrow 5x - 5x - 14 + 14 = 0 \Rightarrow 0 = 0$$

Con lo que las soluciones son infinitas, las rectas son coincidentes, de modo que todos los puntos coinciden.

b. $\left.\begin{array}{l} r: 5x + 9y - 8 = 0 \\ s: -x - 4y + 5 = 0 \end{array}\right\}$

$$\left.\begin{array}{l} 5x + 9y - 8 = 0 \\ -x - 4y + 5 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 5x + 9y - 8 = 0 \\ -5x - 20y + 25 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow y = \frac{17}{11} \Rightarrow x = -\frac{13}{11}$$

Con lo que el punto de intersección es P $\left(-\dfrac{13}{11}, \dfrac{17}{11}\right)$

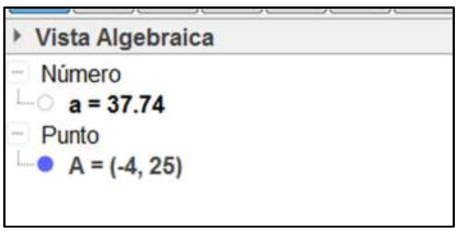
RELACIONES MÉTRICAS

19 Calcula las coordenadas del punto medio de los segmentos formados por los puntos indicados a continuación. Halla también la distancia entre dichos puntos y comprueba los resultados con GeoGebra.

a. A (12 , 15), B (–20, 35)

$$(x_m, y_m) = \left(\frac{12 + (-20)}{2}, \frac{15 + 35}{2}\right) = (-4, 25)$$

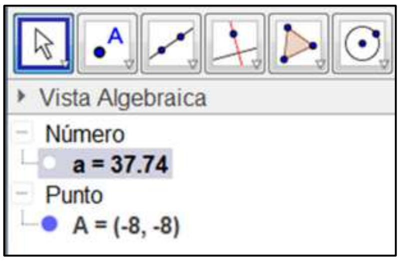
$$\text{d (A , B)} = \left|\overrightarrow{\text{AB}}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(-20 - 12)^2 + (35 - 15)^2} = 37{,}74$$



b. A (–18 , –24), B (2 , 8)

$$\left(x_m , y_m\right) = \left(\frac{(-18)+2}{2}, \frac{(-24)+8}{2}\right) = (-8, -8)$$

$$d\,(A , B) = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(2-(-18))^2 + (8-(-24))^2} = 37{,}74$$



20 Halla las coordenadas del punto simétrico del punto A (–3 , 7) respecto del punto P (4 , –5).

Las coordenadas del punto P son iguales a la semisuma de las coordenadas de los puntos A y A':

$$\left.\begin{array}{l} 4 = \dfrac{-3 + x_1}{2} \\ -5 = \dfrac{7 + y_1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 8 = -3 + x_1 \\ -10 = 7 + y_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_1 = 11 \\ y_1 = -17 \end{array}\right\}$$

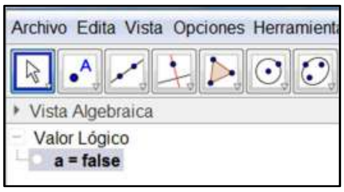
Las coordenadas del punto simétrico son A' (11 , –17).

21 Indica si los puntos propuestos están alineados y comprueba el resultado con GeoGebra.

a. A (6 , –5), B (–3 , 9), C (–1 , –4)

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (-3-6 , 9-(-5)) = (-9 , 14) \\ \overrightarrow{BC} = (-1-(-3), -4-9) = (2 , -13) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{-9}{2} \neq \frac{14}{-13}$$

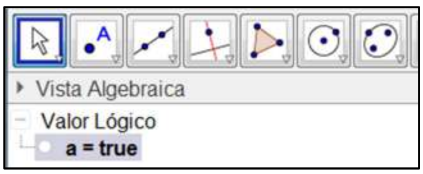
Como los vectores no son paralelos, los puntos A, B y C, no están alineados.



b. A (–2 , 4), B (4 , 6), C (10 , 8)

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (4-(-2) , 6-4) = (6 , 2) \\ \overrightarrow{BC} = (10-4, 8-6) = (6 , 2) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{6}{2} = \frac{6}{2} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{BC}$$

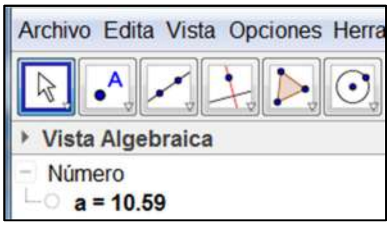
Como los vectores son paralelos, por ser sus coordenadas proporcionales, los puntos A, B y C, están alineados.



22 Halla la distancia entre los siguientes elementos y verifica luego el resultado con GeoGebra:

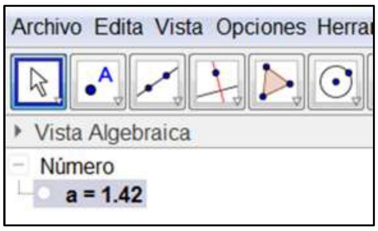
a. P (3 , –12) y *r: –x* + 5*y* + 9 = 0

$$d\ (P\ ,\ r)=\frac{|Ax_1+By_1+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{|-1\cdot 3+5\cdot(-12)+9|}{\sqrt{(-1)^2+5^2}}=\frac{54}{\sqrt{26}}=\frac{27\sqrt{26}}{13}=10{,}59$$



b. *r:* 6*x* – 2*y* + 5 = 0 y *s:* 6*x* – 2*y* – 4 = 0

$$d\ (r\ ,s)=\frac{|C'-C|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{|-4-5|}{\sqrt{6^2+(-2)^2}}=\frac{9}{\sqrt{40}}=\frac{9\sqrt{10}}{20}=1{,}42$$



EVALUACIÓN

1 Sean los puntos A (6 , –10) y B (4 , 6) las coordenadas del vector $\overrightarrow{AB}$ son:

a. (10 , – 4) **b. (2 , –16)** **c. (– 4 , 10)** d. (–2 , 16)

$$\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,y_2-y_1)=(4-6,6-(-10))=(-2,16)$$

2 El punto medio del segmento formado por los puntos de la actividad anterior es:

a. (5 , –2) **b. (1 , –8)** **c. (–2 , 5)** **d. (–1 , 8)**

$$(x_m,y_m)=\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)\left(\frac{6+4}{2},\frac{-10+6}{2}\right)=(5,-2)$$

3 Dados $\vec{u}$ = (1 , –1), $\vec{v}$ = (3 , –5) y $\vec{w}$ = (2 , –9), el resultado de la operación 4 · ($\vec{u}$ – 3 · $\vec{v}$) + 9 · $\vec{w}$ – $\vec{u}$ es:

a. (15 , –18) **b. (20 , –18)** c. (–15 , –24) **d. (–24 , 18)**

4 · ($\vec{u}$ – 3 · $\vec{v}$) + 9 · $\vec{w}$ – $\vec{u}$ = 4 · [(1 , –1) – 3 · (3 , –5)] + 9 · (2 , –9) – (1 , 1) =
= 4 · (–8 , 14) + (18 , –81) – (1 , –1) = (–15 , –24)

4 **El producto escalar de los vectores $\vec{u}$ = (10 , –12) y $\vec{v}$ = (24 , 15) es:**

a. 438 b. 60 **c. 41** **d. 100**

$\vec{u}\cdot\vec{v} = u_1\cdot v_1 + u_2\cdot v_2 = 10\cdot 24 + (-12)\cdot 15 = 60$

5 **Las coordenadas del vector $\vec{u}$ = (13 , 33) en la base B = {(–1 , 9), (–8 , –3)} son:**

a. (5 , –3) **b. (2 , –1)** **c. (–3 , 1)** d. (3 , –2)

$(13\,,33) = a(-1,9) + b(-8\,,-3) \Rightarrow \begin{cases} -a-8b=13 \\ 9a-3b=33 \end{cases}$

Se resuelve el sistema de ecuaciones y se obtiene que a = 3 y b = –2. Con lo que $\vec{u}' = (3\,,-2)$.

6 **El vector director y el vector normal de la recta *r:* 3*x* – 4*y* + 10 = 0, son respectivamente:**

a. $\vec{u}$ = (–3 , –4) y $\vec{n}$ = (3 , 4)
b. $\vec{u}$ = (3 , –4) y $\vec{n}$ = (3 , 4)
c. $\vec{u}$ = (4 , 3) y $\vec{n}$ = (3 , –4)
d. $\vec{u}$ = (–3 , –4) y $\vec{n}$ = (–3 , 4)

El vector director de la recta dada, $\vec{u} = (u_1, u_2)$, $\vec{u} = (B\,,-A)$, por lo que $\vec{u} = (-4,-3) = (4,3)$. El vector perpendicular es $\vec{n} = (A\,,B)$, por lo que $\vec{n} = (3\,,-4)$.

7 **El punto de intersección de las siguientes rectas es:**

$$\boldsymbol{r}: \begin{cases} \boldsymbol{x = 16 - 3k} \\ \boldsymbol{y = 2 - 6k} \end{cases}, \boldsymbol{k} \in \mathbb{R} \qquad \boldsymbol{s}: \begin{cases} \boldsymbol{x = 3 - 4k'} \\ \boldsymbol{y = 1 + 12k'} \end{cases}, \boldsymbol{k} \in \mathbb{R}$$

a. (–5 , 8) **b. (4 , –3)** **c. (–2 , 6)** d. (8 , –14)

$$\left.\begin{aligned} 16-3k &= 3-4k' \\ 2-6k &= 1+12k' \end{aligned}\right\} \Rightarrow k = \frac{8}{3}$$

Se sustituye k en la primera ecuación:

$$x = 16 - 3\cdot\frac{8}{3} = 8$$

$$y = 2 - 6\cdot\frac{8}{3} = -14$$

8 **La distancia entre el punto P (9 , 2) y la recta *r:* –3*x* + 2*y* – 7 = 0 es:**

a. 8,32 **b. 3,25** **c. –8,32** **d. 9,53**

$$d\,(P\,,r) = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2+B^2}} = \frac{|-3\cdot 9 + 2\cdot 2 - 7|}{\sqrt{(-3)^2+2^2}} = \frac{30}{\sqrt{13}} = 8{,}32$$