Combinatoria

13

CLAVES PARA EMPEZAR

1. Página 260

a) Sucesos simples:

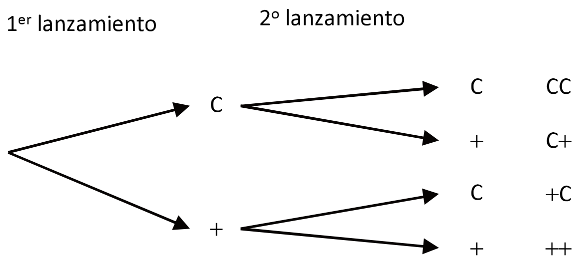
- Lanzar un dado rojo.
- Lanzar un dado azul.

b) Sucesos simples:

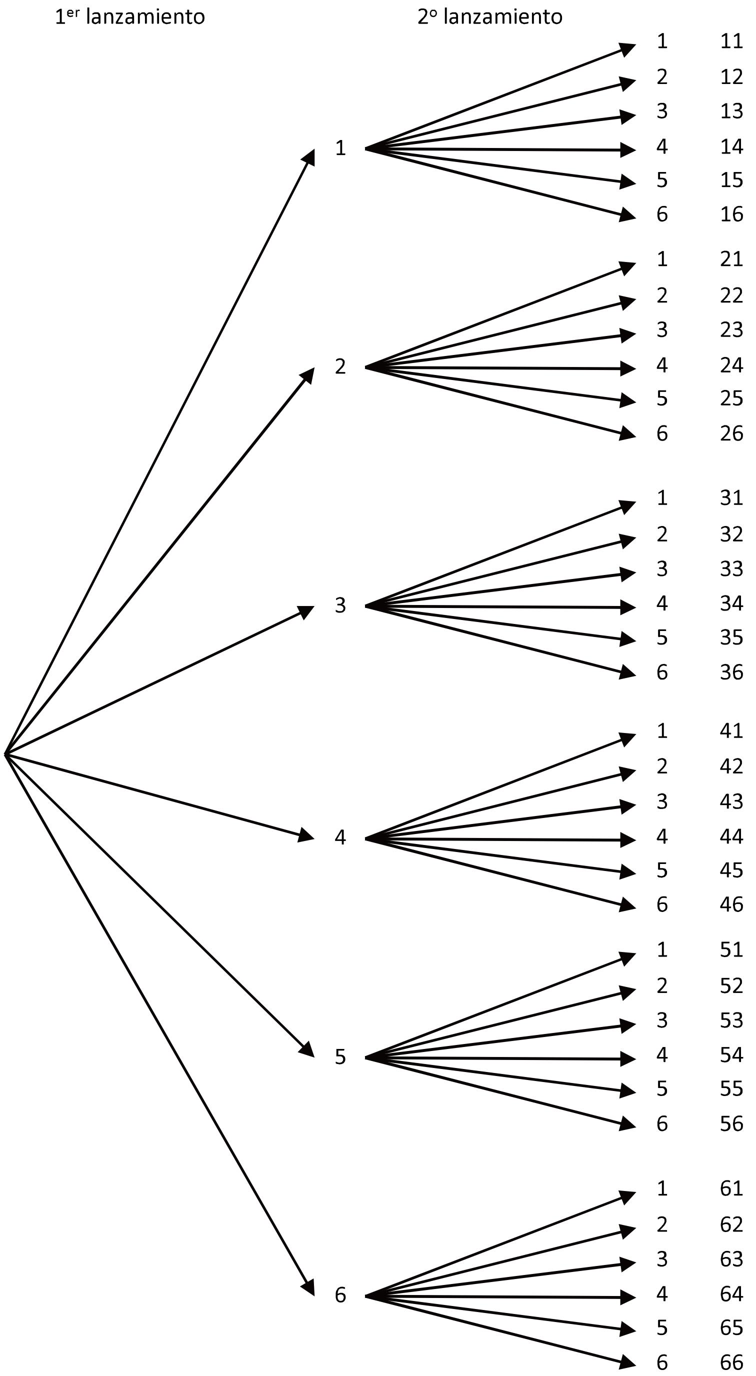
- Elegir 1 bola entre 3 y anotar el color.
- Elegir 1 bola entre las 2 que quedan y anotar el color de esta y de la que queda.

2. Página 260

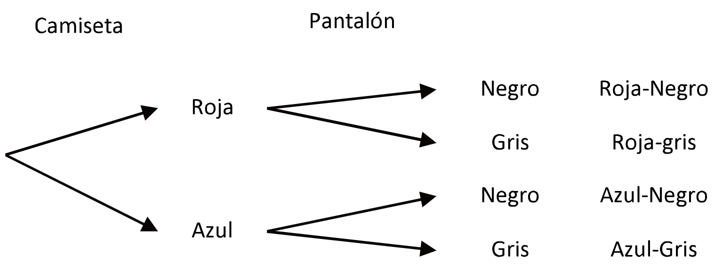
a)



b)


1er lanzamiento
2º lanzamiento
1
2
3
4
5
6
1 11
2 12
3 13
4 14
5 15
6 16
1 21
2 22
3 23
4 24
5 25
6 26
1 31
2 32
3 33
4 34
5 35
6 36
1 41
2 42
3 43
4 44
5 45
6 46
1 51
2 52
3 53
4 54
5 55
6 56
1 61
2 62
3 63
4 64
5 65
6 66

c)


Camiseta
Pantalón
Roja
Azul
Negro Roja-Negro
Gris Roja-gris
Negro Azul-Negro
Gris Azul-Gris

VIDA COTIDIANA

EL LIBRO DIGITAL. Página 261

Cada libro, si lo consideramos indistinguibles, lo podemos introducir en cada una de las tres carpetas.

Si hubiera 1 solo libro habría 3 posibilidades.

Si hubiera 2 libros habría 6 posibilidades.

Si hubiera 3 libros habría 10 posibilidades.

Si hubiera 4 libros habría 15 posibilidades.

Si hubiera 5 libros habría 21 posibilidades.

Si hubiera 6 solo libro habría 28 posibilidades.

Si hubiera 7 libros habría 36 posibilidades.

Si hubiera 8 libros habría 45 posibilidades.

Si hubiera 9 libros habría 55 posibilidades.

Como hay 10 libros habrá 66 posibilidades de repartirlos en las 3 carpetas.

RESUELVE EL RETO

RETO 1. Página 265

$$\binom{m}{n}=\binom{m}{m-n}\rightarrow\binom{m}{1}=\binom{m}{m-1}\rightarrow\binom{m}{1}+\binom{m}{m-1}=2\cdot\binom{m}{1}=2\cdot\frac{m!}{1!(m-1)!}=2m$$

RETO 2. Página 267

Si todas las bolas fuesen distintas serían $P_6=6!$ extracciones.

Tenemos que eliminar las extracciones que son iguales, pero varían las bolas del mismo color. Por ejemplo, la extracción B1B2B3R1R2N es igual que la extracción B1B3B2R2R1N, ya que las dos serían la extracción «sacar primero las bolas blancas, después las rojas y después la negra», pero se han sacado las bolas de forma distinta.

Para ello, dividimos el total de extracciones entre las formas de escoger los conjuntos de bolas de cada color:

$\frac{P_6}{3!2!1!}=\frac{6!}{3!2!1!}=60$ formas hay de extraer las bolas.

ACTIVIDADES

1. Página 262

Es posible formar $6\cdot6\cdot6=216$ números.

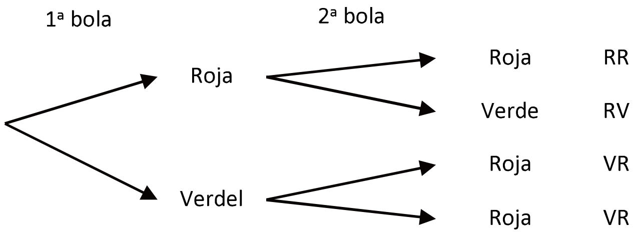
2. Página 262

El primer partido se escoge entre 12, el segundo entre 11, el tercero entre 10, …, es decir el número de posibilidades es el producto: 12 · 11 · 10 · 9 · …· 3 · 2 = 479 001 600

3. Página 262

Se pueden formar $2\cdot4\cdot3=24$ menús.

4. Página 262



Hay 3 posibilidades distintas.

5. Página 263

Las distintas combinaciones que se pueden dar son AA, AB, BA, BB, BC, CA y AC → Hay 7 posibilidades.

6. Página 263

Sea R = «Roja», Z = «Azul» y A = «Amarilla». Tenemos las siguientes posibilidades:

RAZ RZA ZRA ZAR ARZ AZR

Hay 6 formas de ordenarlas.

7. Página 263

Sea R = «Roja», A = «Azul» y N = «Amarilla». Tenemos las siguientes posibilidades:

RR RA RN AR AA AN NR NA

Hay 8 combinaciones posibles.

8. Página 263

Sea R = «Roja», A = «Azul», C = «Cara» y + = «Cruz». Tenemos las siguientes posibilidades:

CR CA +R +A

Hay 4 posibilidades.

9. Página 263

a) Se cumple si sale dos veces (6-6) → Hay 1 posibilidad.

b) Se cumple si sale 6-4 y 4-6 → Hay 2 posibilidades.

c) Estas son las posibilidades de que la suma sea 7:

2-5 4-3 6-1 3-4 5-2

Hay 5 posibilidades.

10. Página 264

a) $\binom{7}{3} = \frac{7!}{3!(7-3)!} = \frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot \cancel{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}}{3\cdot 2\cdot 1\cdot \cancel{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}} = \frac{210}{6} = 35$

b) $\binom{5}{4} = \frac{5!}{4!(5-4)!} = \frac{5\cdot \cancel{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}}{\cancel{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}\cdot 1} = \frac{5}{1} = 5$

c) $\binom{8}{5} = \frac{8!}{5!(8-5)!} = \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot \cancel{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}}{\cancel{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = \frac{336}{6} = 56$

d) $\binom{3}{1} = \frac{3!}{1!(3-1)!} = \frac{3\cdot \cancel{2\cdot 1}}{1\cdot \cancel{2\cdot 1}} = \frac{3}{1} = 3$

e) $\binom{10}{0} = \frac{10!}{0!(10-0)!} = \frac{\cancel{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}}{1\cdot \cancel{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}} = 1$

f) $\binom{6}{4} = \frac{6!}{4!(6-4)!} = \frac{6\cdot 5\cdot \cancel{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}}{\cancel{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}\cdot 2\cdot 1} = \frac{30}{2} = 15$

11. Página 264

a) $\binom{7}{3}+\binom{7}{4} = \frac{7!}{3!(7-3)!} + \frac{7!}{4!(7-4)!} = \frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot \cancel{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}}{3\cdot 2\cdot 1\cdot \cancel{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}} + \frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot \cancel{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}}{\cancel{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = \frac{210}{6} + \frac{210}{6} = 35 + 35 = 70$

b) $\binom{3}{2}+\binom{5}{3} = \frac{3!}{2!(3-2)!} + \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{3\cdot \cancel{2\cdot 1}}{\cancel{2\cdot 1}\cdot 1} + \frac{5\cdot 4\cdot \cancel{3\cdot 2\cdot 1}}{\cancel{3\cdot 2\cdot 1}\cdot 2\cdot 1} = \frac{3}{1} + \frac{20}{2} = 13$

12. Página 264

a) $\frac{\binom{12}{3}}{3!} = \frac{\frac{12!}{3!(12-3)!}}{3!} = \frac{12!}{3!3!9!} = \frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot \cancel{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}}{3\cdot 2\cdot 1\cdot 3\cdot 2\cdot 1\cdot \cancel{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}} = \frac{1320}{36} = \frac{110}{3}$

b) $\frac{\binom{4}{2}}{\binom{7}{5}\cdot 5!} = \frac{\frac{4!}{2!(4-2)!}}{\frac{7!}{5!(7-5)!}\cdot 5!} = \frac{4!}{2!7!} = \frac{\cancel{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}}{2\cdot 1\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot \cancel{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}} = \frac{1}{420}$

13. Página 265

a) $\binom{7}{6}+\binom{6}{6}+\binom{6}{0} = 7+1+1 = 9$

b) $\binom{7}{3}-\binom{6}{2}-\binom{6}{3} = \binom{7}{3}-\binom{7}{3} = 0$

c) $\binom{5}{5}+\binom{5}{1}-2\cdot\binom{5}{4} = 1+5-2\cdot 5 = -4$

d) $\binom{7}{6}-\binom{6}{6}-2\cdot\binom{5}{1} = 7-1-2\cdot 5 = -4$

14. Página 265

a) $\binom{11}{6}+\binom{11}{7}-5\cdot\binom{12}{11} = \binom{12}{7}-5\cdot 12 = 792-60 = 732$

b) $\binom{12}{7}+\binom{12}{5} = \binom{12}{7}+\binom{12}{7} = 792+792 = 1584$

15. Página 265

Si $n=1 \rightarrow \binom{1}{0}-\binom{1}{1} = 1-1 = 0$

Si $n=2 \rightarrow \binom{2}{0}-\binom{2}{1}+\binom{2}{2} = 1-2+1 = 0$

Si $n=3 \rightarrow \binom{3}{0}-\binom{3}{1}+\binom{3}{2}-\binom{3}{3} = 1-3+3-1 = 0$

Si $n=4 \rightarrow \binom{4}{0}-\binom{4}{1}+\binom{4}{2}-\binom{4}{3}+\binom{4}{4} = 1-4+6-4+1 = 0$

16. Página 266

a) $V_{4,2}=\frac{4!}{(4-2)!}=\frac{4\cdot 3\cdot \cancel{2\cdot 1}}{\cancel{2\cdot 1}}=12$

b) $VR_{6,3}=6^3=216$

c) $V_{20,3}=\frac{20!}{(20-3)!}=\frac{20\cdot 19\cdot 18\cdot \cancel{17!}}{\cancel{17!}}=6840$

d) $VR_{2,5}=2^5=32$

e) $VR_{7,3}=7^3=343$

17. Página 266

a) Tenemos que escoger 2 equipos tomados de un conjunto de 18.

- Importa el orden; no es lo mismo que un equipo juegue como local que como visitante.
- No se pueden repetir los elementos; un equipo no puede jugar contra él mismo.

$V_{18,2}=\frac{18!}{(18-2)!}=\frac{18\cdot 17\cdot \cancel{16!}}{\cancel{16!}}=306$ partidos se tienen que jugar.

b) $\frac{306}{10}=30{,}6\rightarrow$ Habrá 31 jornadas en la liga.

18. Página 266

Tenemos que escoger 3 elementos de un conjunto de 5 elementos.

- Importa el orden; no es lo mismo que una cifra ocupe el lugar de las unidades, las decenas o las centenas.
- Se pueden repetir elementos; un número puede estar formado por cifras iguales.

$VR_{5,3}=5^3=125$ números distintos se pueden formar.

19. Página 266

Tenemos que escoger 3 elementos de un conjunto de 10 elementos.

- Importa el orden; no es lo mismo que una letra ocupe un lugar u otro.
- No se pueden repetir elementos; tenemos 10 letras diferentes para escoger.

$V_{10,3}=\frac{10!}{(10-3)!}=10\cdot 9\cdot 8=720$ palabras distintas se pueden formar.

Hay 5 opciones para que empiece por vocal. Después nos quedan 2 letras por escoger de entre 9 diferentes que siguen las mismas pautas que antes.

$5\cdot V_{9,2}=5\cdot\frac{9!}{(9-2)!}=5\cdot 9\cdot 8=360$ palabras empiezan por vocal.

20. Página 267

a) $P_2=2!=2\cdot 1=2$

b) $P_5=5!=5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=120$

c) $P_7=7!=7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=5\,040$

d) $P_8=8!=8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=40320$

21. Página 267

Tenemos que contar las posibles listas de 8 candidatos que se podrían formar.

- Importa el orden; no es lo mismo que un candidato aparezca primero o segundo en la lista.
- No se pueden repetir elementos; un candidato no puede aparecer dos veces en la lista.

$P_8 = 8! = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 40320$

22. Página 267

Tenemos que ver el número de banderas que podemos formar.

- Influye el orden de los colores.
- No se pueden repetir.

Número de banderas de 2 colores en horizontal: $V_{3,2} = \frac{3!}{(3-2)!} = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

Número de banderas de 2 colores en vertical: $V_{3,2} = \frac{3!}{(3-2)!} = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

Número de banderas de 3 colores en horizontal: $P_3 = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

Número de banderas de 3 colores en vertical: $P_3 = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

Número total de banderas posibles: $6 + 6 + 6 + 6 = 24$

23. Página 268

a) $C_{7,4} = \binom{7}{4} = \frac{7!}{4!(7-4)!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \cancel{4!}}{\cancel{4!} \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{210}{6} = 35$

b) $C_{8,3} = \binom{8}{3} = \frac{8!}{3!(8-3)!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot \cancel{5!}}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \cancel{5!}} = \frac{336}{6} = 56$

c) $C_{5,1} = \binom{5}{1} = 5$

d) $C_{10,7} = \binom{10}{7} = \frac{10!}{7!(10-7)!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot \cancel{7!}}{\cancel{7!} \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{720}{6} = 120$

24. Página 268

Tenemos que escoger 2 sabores de un conjunto de 6 sabores distintos.

- No importa el orden; da igual que sabor escojamos antes y cual después.
- No se pueden repetir elementos; queremos comprar un helado de dos sabores distintos

$C_{6,2} = \binom{6}{2} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4!}{2!(6-2)!} = \frac{30}{2} = 15$

25. Página 268

Tenemos que escoger 1, 2, 3 o 4 colores para mezclar.

- No importa el orden; da igual que el color echemos antes o después a la mezcla.
- No podemos repetir elementos.

Mezclas de un color: $C_{4,1}=\binom{4}{1}=4$

Mezclas de dos colores: $C_{4,2}=\binom{4}{2}=\frac{4\cdot 3\cdot 2!}{2!(4-2)!}=\frac{12}{2}=6$

Mezclas de tres colores: $C_{4,3}=\binom{4}{3}=4$

Mezclas de cuatro colores: $C_{4,4}=\binom{4}{4}=1$

Mezclas posibles: $4+6+4+1=15$

26. Página 268

$$C_{x+5,\,x+1}=C_{x+5,\,2x}\rightarrow\binom{x+5}{x+1}=\binom{x+5}{2x}\rightarrow\begin{cases}x+5-x-1=2x\rightarrow x=2\rightarrow C_{7,3}=C_{7,4}\\ x+1=2x\rightarrow x=1\rightarrow C_{6,2}=C_{6,2}\end{cases}$$

27. Página 269

El alumno tiene que escoger 4 preguntas de un total de 5.

- No importa el orden; da igual el orden en que haga las preguntas.
- No se pueden repetir elementos; no puede hacer la misma pregunta 2 veces.

$C_{5,4}=\binom{5}{4}=5$ $\rightarrow$ El alumno puede hacer 5 exámenes distintos.

28. Página 269

Tenemos que distribuir 2 alumnos entre 4 cuatro clases distintas.

- Importa el orden; importa qué hermano va en cada clase.
- No se pueden repetir elementos; un hermano no puede ir a dos clases distintas.

$V_{4,2}=\frac{4!}{(4-2)!}=\frac{4\cdot 3\cdot \cancel{2!}}{\cancel{2!}}=12$ $\rightarrow$ Hay 12 formas posibles de asignar a los hermanos en las 4 clases.

29. Página 269

Hay tantas pulseras distintas como ordenaciones de las diferentes bolas.

$P_{10}=10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=3628800$

Hay 3 628 800 formas diferentes de colocar las bolas.

30. Página 269

$P_3=3\cdot 2\cdot 1=6$ $\rightarrow$ El estudiante tiene 6 formas distintas de organizarse.

31. Página 269

Tenemos que coger 7 camisetas de un conjunto de 10.

- Importa el orden; no es lo mismo ponerse una camiseta un día que otro.
- No se pueden repetir elementos; Cristina se pone una camiseta diferente cada día.

$V_{10,7} = \frac{10!}{(10-7)!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot \cancel{3!}}{\cancel{3!}} = 604800$ formas distintas de ponerse las camisetas.

Para escoger pantalones, tenemos que elegir un pantalón para cada día:

- Importa el orden; importa el día que se pone cada pantalón.
- Se pueden repetir elementos; se pone el mismo pantalón varios días.

$VR_{3,7} = 3^7 = 2187$ formas distintas de ponerse los pantalones.

La elección del pantalón es independiente de la elección de la camiseta. Por la regla del producto, podemos obtener el número de conjuntos distintos:

$604\,800 \cdot 2187 = 1\,322\,697\,600$ conjuntos de ropa distintos se pueden formar.

32. Página 269

Tenemos que escoger un o dos tipos de aceitunas de un conjunto de 5.

- No importa el orden; da igual qué aceituna echemos antes o después.
- No se pueden repetir elementos; nos interesa ver los aceites con distintos tipos de aceitunas.

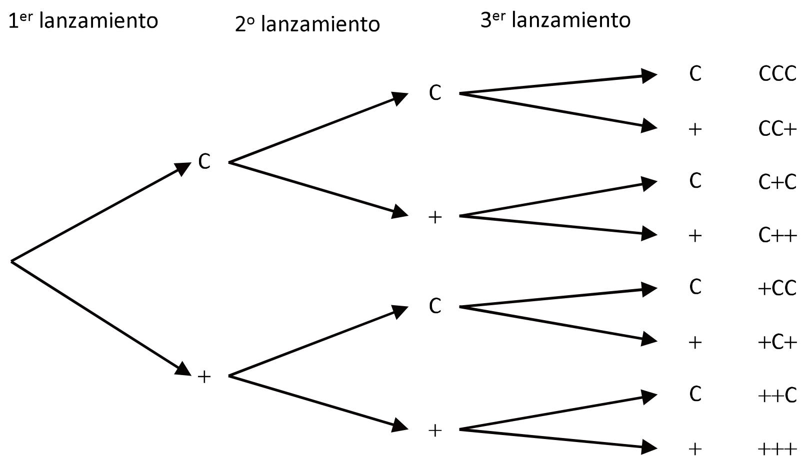
Aceites de un tipo de aceituna: $C_{5,1} = \binom{5}{1} = 5$

Aceites de dos tipos de aceituna: $C_{5,2} = \binom{5}{2} = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot \cancel{3!}}{2 \cdot 1 \cdot \cancel{3!}} = 10$

Pueden hacer 5 + 10 = 15 tipos diferentes de aceite.

ACTIVIDADES FINALES

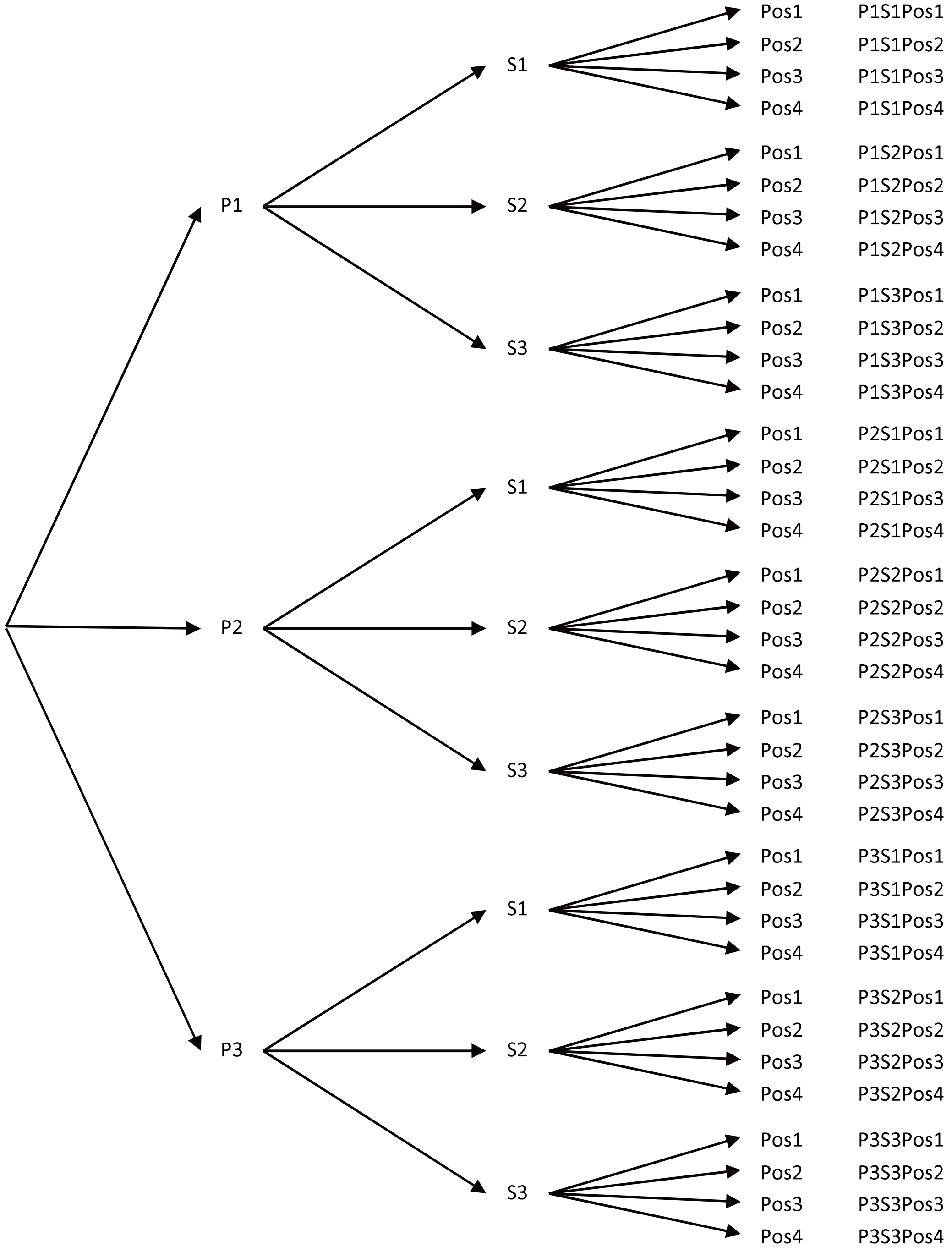
33. Página 270



Hay 8 resultados posibles.

34. Página 270

Sea P = «Primero», S = «Segundo» y Pos = «Postre». Tenemos las siguientes posibilidades:



Hay $3 \cdot 3 \cdot 4 = 36$ menús diferentes.

35. Página 270

Sea A = «Azul», N = «Negra» y Na = «Naranja». Tenemos las siguientes posibilidades:

AA AN ANa NA NN NNa NaA NaN NaNa

Hay 9 posibilidades.

36. Página 270

Sea T = «Tipo de árbol». Tenemos las siguientes posibilidades:

T1T1T1 T1T1T2 T1T2T1 T1T2T2 T2T1T1 T2T1T2 T2T2T1 T2T2T2

Hay 8 posibilidades.

37. Página 270

Para que comiencen por una cifra par, estas son las posibilidades:

211	212	213	214	221	222	223	224
231	232	233	234	241	242	243	244
411	412	413	414	421	422	423	424
431	432	433	434	441	442	443	444

Hay 32 números que empiecen por cifra par.

Para que comiencen y terminen por una cifra impar, estas son las posibilidades:

111	113	121	123	131	133	141	146
311	313	321	323	331	333	341	346

Hay 16 números que empiezan y terminan en cifra impar.

38. Página 270

Los números que podríamos formar son:

11	12	13	14	15	16	21	22	23	24	25	26
31	32	33	34	35	36	41	42	43	44	45	46
51	52	53	54	55	56	61	62	63	64	65	66

El número más grande es 66.

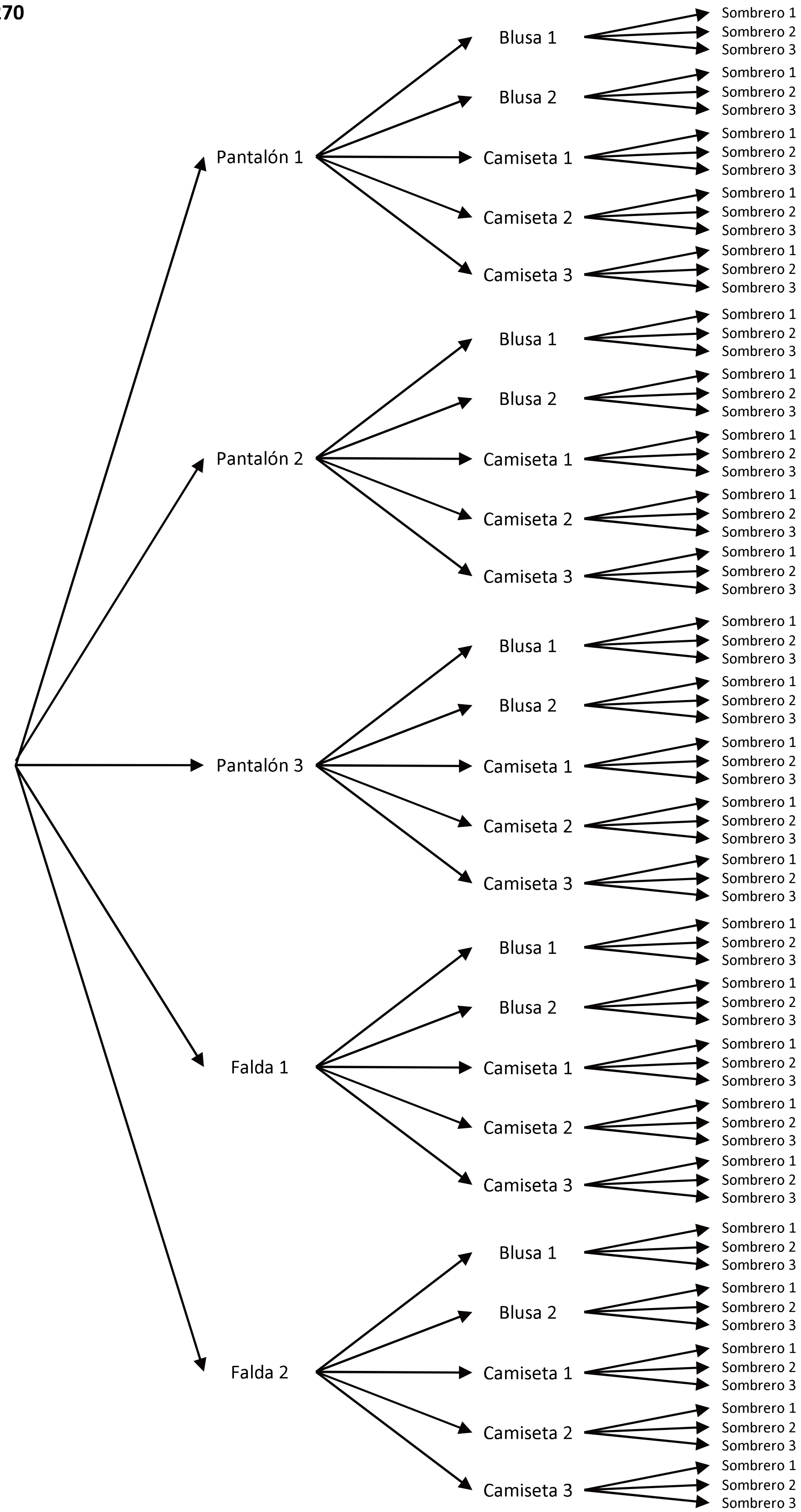
Empiezan por 3 seis números.

39. Página 270

Sea L = «Limón», F = «Fresa», M = «Menta» y N = «Naranja». Tenemos las siguientes posibilidades:

1L 1F 2L 2F 3M 3N 4M 4N 5M 5N 6M 6N

40. **Página 270**



Pueden crearse 75 combinaciones distintas.

41. Página 270

a) $\binom{17}{15}=\dfrac{17!}{15!(17-15)!}=\dfrac{17\cdot16\cdot15!}{15!\cdot2\cdot1}=136$

b) $\binom{14}{11}=\dfrac{14!}{11!(14-11)!}=\dfrac{14\cdot13\cdot12\cdot11!}{11!\cdot3\cdot2\cdot1}=364$

c) $\binom{8}{4}=\dfrac{8!}{4!(8-4)!}=\dfrac{8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4!}{4\cdot3\cdot2\cdot1\cdot4!}=\dfrac{1680}{24}=70$

d) $\binom{9}{3}=\dfrac{9!}{3!(9-3)!}=\dfrac{9\cdot8\cdot7\cdot6!}{3\cdot2\cdot1\cdot6!}=\dfrac{504}{6}=84$

e) $\binom{13}{11}=\dfrac{13!}{11!(13-11)!}=\dfrac{13\cdot12\cdot11!}{11!\cdot2\cdot1}=78$

f) $\binom{22}{21}=\dfrac{22!}{21!(22-21)!}=\dfrac{22\cdot21!}{21!\cdot1}=22$

42. Página 270

a) $\binom{16}{14}=\dfrac{16!}{14!(16-14)!}=\dfrac{16\cdot15\cdot14!}{14!\cdot2\cdot1}=120$

b) $\binom{70}{3}+\binom{70}{4}=\binom{71}{4}=\dfrac{71\cdot70\cdot69\cdot68\cdot67!}{4!\cdot67!}=971\,635$

43. Página 270

a) $\binom{17}{16}-\binom{8}{1}-\binom{9}{1}+\binom{15}{0}=17-8-9+1=1$

b) $3\binom{3}{2}-2\binom{4}{2}+\binom{10}{9}-\binom{2}{2}=3\cdot3-2\cdot\dfrac{4!}{2!2!}+10-1=18-2\cdot\dfrac{4\cdot3\cdot2!}{2\cdot1\cdot2!}=18-12=6$

c) $\binom{15}{0}-\binom{7}{1}-\binom{5}{2}+\binom{11}{10}=1-7-\dfrac{5!}{2!3!}+11=5-\dfrac{5\cdot4\cdot3!}{2\cdot1\cdot3!}=5-10=-5$

d) $\binom{7}{5}-5\binom{8}{0}-\binom{7}{1}+2\binom{5}{2}=\dfrac{7!}{5!2!}-5-7+2\cdot\dfrac{5!}{2!3!}=\dfrac{7\cdot6\cdot5!}{5!\cdot2\cdot1}-12+2\cdot\dfrac{5\cdot4\cdot3!}{2\cdot1\cdot3!}=21-12+20=29$

44. Página 270

a) $\binom{7}{6}-\binom{8}{0}-\binom{5}{1}=7-1-5=1$

b) $\binom{4}{3}-\binom{12}{2}+\binom{12}{10}=4-\binom{12}{10}+\binom{12}{10}=4$

c) $2\binom{6}{5}-4\binom{7}{5}+\binom{7}{1}+2\binom{6}{4}=2\binom{7}{5}-4\binom{7}{5}+7=-2\binom{7}{5}+7=-2\cdot\dfrac{7!}{5!2!}+7=-2\cdot\dfrac{7\cdot6\cdot5!}{5!\cdot2\cdot1}+7=-42+7=-35$

d) $\binom{8}{3}-\binom{7}{4}-\binom{7}{5}-2\binom{8}{5}=\binom{8}{5}-\binom{8}{5}-2\binom{8}{5}=-2\binom{8}{5}=-2\cdot\dfrac{8!}{5!3!}=-2\cdot\dfrac{8\cdot7\cdot6\cdot5!}{5!\cdot3\cdot2\cdot1}=-112$

45. Página 270

a) $\binom{9}{5}+\binom{9}{6}=\binom{10}{6}=210$

b) $\binom{10}{4}+\binom{10}{0}=\binom{10}{6}+1=211$

46. Página 270

a) Si $n=1 \rightarrow \binom{1}{0}=1$

Si $n=2 \rightarrow \binom{2}{1}=\frac{2!}{1!1!}=2$

Si $n=3 \rightarrow \binom{3}{2}=\frac{3!}{2!1!}=3$

Si $n=4 \rightarrow \binom{4}{3}=\frac{4!}{3!1!}=4$

b) Si $n=2 \rightarrow \binom{2}{0}=1=\frac{1}{2}(2^2-2)$

Si $n=3 \rightarrow \binom{3}{1}=\frac{3!}{1!2!}=3=\frac{1}{2}(3^2-3)$

Si $n=4 \rightarrow \binom{4}{2}=\frac{4!}{2!2!}=6=\frac{1}{2}(4^2-4)$

Si $n=5 \rightarrow \binom{5}{3}=\frac{5!}{3!2!}=10=\frac{1}{2}(5^2-5)$

47. Página 271

a) $V_{6,3}=\frac{6!}{3!}=6\cdot5\cdot4=120$

b) $V_{10,2}=\frac{10!}{8!}=10\cdot9=90$

c) $V_{19,4}=\frac{19!}{15!}=19\cdot18\cdot17\cdot16=93024$

d) $VR_{4,3}=4^3=64$

e) $VR_{20,5}=20^5=3200000$

f) $VR_{17,4}=17^4=83521$

48. Página 271

a) $V_{4,2}=\frac{4!}{2!}=4\cdot3=12$

b) $VR_{3,1}=3^1=3$

c) $V_{8,3}=\frac{8!}{5!}=8\cdot7\cdot6=336$

d) $VR_{5,3}=5^3=125$

e) $VR_{7,2}=7^2=49$

f) $V_{10,5}=\frac{10!}{5!}=10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6=30240$

g) $VR_{6,4}=6^4=1296$

h) $V_{10,9}=\frac{10!}{1!}=10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2=3628800$

49. Página 271

a) $V_{m,2}=\frac{m!}{(m-2)!}=m\cdot(m-1)=12\rightarrow m^2-m-12=0\rightarrow m=\frac{1\pm\sqrt{1+4\cdot12}}{2}\rightarrow\begin{cases}m_1=4\\m_2=3\end{cases}$

b) $VR_{3,m}=3^m=81\rightarrow 3^m=3^4\rightarrow m=4$

c) $V_{m,4}=\frac{m!}{(m-4)!}=m\cdot(m-1)\cdot(m-2)\cdot(m-3)=360\rightarrow\left\{\begin{array}{l}m=4\rightarrow 4\cdot3\cdot2\cdot1=24\neq360\\m=5\rightarrow5\cdot4\cdot3\cdot2=120\neq360\\m=6\rightarrow6\cdot5\cdot4\cdot3=360\end{array}\right\}\rightarrow m=6$

d) $VR_{m,5}=m^5=32\rightarrow m^5=2^5\rightarrow m=2$

50. Página 271

Para elegir los números tenemos que escoger 4 elementos de entre 10 cifras posibles. Para elegir las letras tenemos que escoger 3 elementos de entre 21 letras posibles.

- Importa el orden; la matrícula 1222ABB es distinta de 2122BAB.
- Se pueden repetir elementos; una misma cifra o letra puede aparecer varias veces en la misma matrícula.

Posibles números: $VR_{10,4} = 10^4 = 10000$

Posibles letras: $VR_{21,3} = 21^3 = 9261$

La elección de los números y de las letras es independiente. Por tanto, el número de matrículas diferentes se deduce por la regla del producto.

Se pueden hacer $10\,000 \cdot 9\,261 = 92\,610\,000$ matrículas diferentes.

51. Página 271

Tenemos que escoger 6 números de 50 posibles.

- No importa el orden; es un conjunto de 6 números.
- No se pueden repetir elementos; una vez escogido un número no lo podemos volver a elegir.

$C_{50,6} = \binom{50}{6} = 15890700 \rightarrow$ Hay 15 890 700 posibles conjuntos de 6 números distintos.

52. Página 271

Tenemos que escoger entre 3 opciones para cada fila.

- Importa el orden; no es lo mismo determinar el resultado del primer partido que del último.
- Se pueden repetir elementos; se puede determinar que dos partidos van a tener el mismo resultado.

$VR_{3,14} = 3^{14} = 4782969$ posibilidades para rellenar una columna de la quiniela.

53. Página 271

Tenemos que escoger 15 butacas de un conjunto de 19.

- Importa el orden; depende de qué espectador se sienta en cada butaca.
- No se pueden repetir elementos; dos espectadores no se pueden sentar en la misma butaca.

$V_{19,15} = \frac{19!}{4!} = 5068545850368000$ formas de sentarse en la fila del cine los 15 espectadores.

54. Página 271

Tenemos que escoger 4 elementos de un conjunto de 5.

- Importa el orden; AMIG y MIGA son palabras distintas.
- No se pueden repetir elementos; tenemos 5 letras diferentes para formar palabras.

$V_{5,4} = \frac{5!}{1!} = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$ palabras se podrían formar.

55. Página 271

Tenemos que escoger 4 elementos de un conjunto de 7.

- Importa el orden; dos banderas con los mismos colores pueden ser diferentes.
- No se pueden repetir elementos; tenemos 7 colores disponibles para elegir 4.

$V_{7,4} = \frac{7!}{3!} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$ $\rightarrow$ Se podrían formar 840 banderas.

56. Página 271

Tenemos que escoger entre 2 elementos 3 veces.

- Importa el orden de las rondas.
- Se pueden repetir elementos; dos rondas pueden ser iguales.

$VR_{2,3} = 2^3 = 8$ $\rightarrow$ Pueden darse 8 combinaciones diferentes en 3 rondas.

57. Página 271

Para ganar, en cada ronda yo puedo sacar cualquiera de los 3 elementos y mi rival tiene que sacar el elemento que pierda contra el que yo saque. Por tanto, tenemos que escoger entre 3 elementos 4 veces.

- Importa el orden de las rondas.
- Se pueden repetir elementos; dos rondas pueden ser iguales.

$VR_{3,4} = 3^4 = 81$ $\rightarrow$ Pueden darse 81 combinaciones diferentes de ganar en 4 rondas.

58. Página 271

a) $P_4 = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

b) $P_7 = 7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040$

c) $P_8 = 8! = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 40320$

d) $P_2 = 2! = 2 \cdot 1 = 2$

59. Página 271

a) $P_6 = 6! = 720$

b) $P_{11} = 11! = 39916800$

c) $P_{19} = 19! = 121645100408832000$

d) $P_8 = 8! = 40320$

e) $P_{20} = 20! = 2432902008176640000$

f) $P_{17} = 17! = 355687428096000$

g) $P_{10} = 10! = 3628800$

h) $P_{15} = 15! = 1307674368000$

60. Página 271

a) $P_m = 6 \rightarrow m! = 6 \rightarrow 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 \rightarrow m = 3$

b) $P_m = 120 \rightarrow m! = 120 \rightarrow 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120 \rightarrow m = 5$

c) $P_m = 720 \rightarrow m! = 720 \rightarrow 6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720 \rightarrow m = 6$

d) $P_m = 5040 \rightarrow m! = 5040 \rightarrow 7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040$

61. Página 271

Podemos formar palabras de 1, 2, 3 o 4 letras:

De 4 letras: $P_4 = 4! = 24$

De 2 letras: $V_{4,2} = \frac{4!}{(4-2)!} = 12$

De 3 letras: $V_{4,3} = \frac{4!}{(4-3)!} = 24$

De 1 letra: $V_{4,1} = \frac{4!}{(4-1)!} = 4$

En total podemos formar $24 + 24 + 12 + 4 = 64$ palabras.

62. Página 271

a) Los posibles números son las distintas ordenaciones de los números 1, 2, 3 y 4.

$P_4 = 4! = 24$

b) Acaban en cifra impar si acaban en 1 o en 3. Y tenemos que ordenar las otras 3 cifras.

$2 \cdot P_3 = 2 \cdot 3! = 12$

c) Empiezan por 3, tenemos que contar las posibles ordenaciones de las otras 3 cifras.

$P_3 = 3! = 6$

63. Página 271

a) $C_{6,4} = \binom{6}{4} = \frac{6!}{4!2!} = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15$

b) $C_{10,2} = \binom{10}{2} = \frac{10!}{2!8!} = \frac{10 \cdot 9}{2} = 45$

c) $C_{19,4} = \binom{19}{4} = \frac{19!}{4!15!} = \frac{19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 3876$

d) $C_{4,3} = \binom{4}{3} = 4$

e) $C_{20,5} = \binom{20}{5} = \frac{20!}{5!15!} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 15504$

64. Página 271

a) $C_{4,2} = \binom{4}{2} = \frac{4!}{2!2!} = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6$

b) $C_{3,1} = \binom{3}{1} = 3$

c) $C_{8,3} = \binom{8}{3} = \frac{8!}{3!5!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 56$

d) $C_{5,3} = \binom{5}{3} = \frac{5!}{3!2!} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$

e) $C_{7,2} = \binom{7}{2} = \frac{7!}{2!5!} = \frac{7 \cdot 6}{2} = 21$

f) $C_{10,5} = \binom{10}{5} = \frac{10!}{5!5!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 252$

g) $C_{6,4} = \binom{6}{4} = \frac{6!}{4!2!} = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15$

h) $C_{10,9} = \binom{10}{9} = 10$

65. Página 271

a) $C_{27,m} = C_{27,2m} \rightarrow \binom{27}{m} = \binom{27}{2m} \rightarrow \begin{cases} m = 2m \rightarrow m = 0 \\ m = 27 - 2m \rightarrow m = 9 \end{cases}$

b) $C_{101,1} = C_{101,m^2} \rightarrow \binom{101}{1} = \binom{101}{m^2} \rightarrow \begin{cases} 1 = m^2 \rightarrow m = \pm 1 \\ 1 = 101 - m^2 \rightarrow m = \pm 10 \end{cases}$

c) $C_{5,\,m+1}=10\rightarrow\binom{5}{m+1}=10$

Si $m=-1$ o $m=4\longrightarrow\binom{5}{0}=\binom{5}{5}=1\neq 10$

Si $m=0$ o $m=3\longrightarrow\binom{5}{1}=\binom{5}{4}=5\neq 10$

Si $m=2$ o $m=2\longrightarrow\binom{5}{2}=\binom{5}{3}=\frac{5!}{2!3!}=10\rightarrow\begin{cases}m=2\\ m=3\end{cases}$

d) $C_{10,\,2m}=1\rightarrow\binom{10}{2m}=1\rightarrow\begin{cases}2m=0\rightarrow m=0\\ 2m=10\rightarrow m=5\end{cases}$

66. Página 271

La suma de los lados y de las diagonales de un hexágono regular viene dada por las posibles elecciones de dos de los vértices del hexágono.

- No importa el orden; el mismo lado o diagonal une un vértice con otro, y este último con el primero.
- No se pueden repetir elementos; un vértice no se une con el mismo mediante un lado o diagonal.

$C_{6,\,2}=\binom{6}{2}=\frac{6!}{2!4!}=\frac{6\cdot 5}{2}=15$ $\longrightarrow$ Un hexágono regular tiene 15 lados y diagonales.

Un eneágono regular tiene 9 vértices.

$C_{9,\,2}=\binom{9}{2}=\frac{9!}{2!7!}=\frac{9\cdot 8}{2}=36$ $\longrightarrow$ Un eneágono tiene 36 lados y diagonales.

Un polígono con *n* vértices tiene $C_{n,\,2}=\binom{n}{2}$ lados y diagonales.

67. Página 272

Tenemos que ver las distintas posiciones que cada jugador puede ocupar en la fila.

- Importa el orden; no es lo mismo que un jugador tire el primero o el segundo.
- No se pueden repetir elementos; un jugador no tira dos veces.

$P_5=5!=120$ $\longrightarrow$ Se pueden poner de 120 formas posibles.

68. Página 272

Tenemos que escoger 4 elementos de un conjunto de 7.

- Importa el orden; no es lo mismo la palabra DECI que EDCI.
- No se pueden repetir elementos; tenemos 7 letras distintas para escoger.

$V_{7,\,4}=\frac{7!}{3!}=7\cdot 6\cdot 5\cdot 4=840$ $\longrightarrow$ Se pueden formar 840 palabras de 4 letras.

Para ver la posición que ocupa LEMA por orden alfabético, tenemos que contar las palabras que empiezan por M y las palabras que empiezan por LM, todas las demás estarán antes que LEMA.

Palabras que empiezan por M: $V_{6,\,3}=\frac{6!}{3!}=6\cdot 5\cdot 4=120$ Palabras que empiezan por LM: $V_{5,\,3}=\frac{5!}{3!}=5\cdot 4=20$

En orden alfabético, LEMA ocupa la posición 840 – 120 – 20 = 600.

69. Página 272

Tenemos que escoger 5 elementos de un conjunto de 25.

- No importa el orden; da igual en qué lugar elijamos a cada alumno.
- No se pueden repetir elementos; los grupos están formados por 5 alumnos distintos.

$C_{25,5} = \binom{25}{5} = \frac{25!}{5!20!} = \frac{25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 53130$ posibilidades para hacer el primer grupo de 5.

$C_{20,5} = \binom{20}{5} = \frac{20!}{5!15!} = 15504$ posibilidades para hacer el segundo grupo de 5.

$C_{15,5} = \binom{15}{5} = \frac{15!}{5!10!} = 3003$ posibilidades para hacer el tercer grupo de 5.

$C_{10,5} = \binom{10}{5} = \frac{10!}{5!5!} = 252$ posibilidades para hacer el cuarto grupo de 5.

El número total de posibilidades es el producto de las anteriores:

53 130 · 15 504 · 3 003 · 252 = 623 360 743 125 120

70. Página 272

a) Tenemos que elegir 5 elementos en un conjunto de 5 juguetes.

- Importa el orden; importa quién coge cada juguete.
- Se pueden repetir elementos; dos niños pueden jugar con el mismo juguete.

$VR_{5,5} = 5^5 = 3125 \longrightarrow$ Se pueden repartir de 3 125 formas.

b) Tenemos que escoger 3 juguetes entre 7 niños.

$VR_{3,7} = 3^7 = 2187 \longrightarrow$ Se pueden repartir de 2 187 formas.

71. Página 272

Tenemos que escoger 4 elementos de un conjunto de 7.

- Importa el orden; no es lo mismo 2 034 que 3 240.
- No se pueden repetir elementos; tenemos 7 cifras distintas para escoger.

$V_{7,4} = \frac{7!}{3!} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$

Tenemos que restarle a esta cantidad los números que empiezan por 0. Para saber cuántos hay, debemos escoger 3 elementos de un conjunto de 6.

$V_{6,3} = \frac{6!}{3!} = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120 \longrightarrow$ Se pueden formar 840 – 120 = 720 números de 4 cifras.

Para ver los números de 5 cifras tenemos que elegir 5 elementos de un conjunto de 7.

$V_{7,5} = \frac{7!}{2!} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 2520$

Tenemos que restarle a esta cantidad los números que empiezan por 0. Para saber cuántos hay, debemos escoger 4 elementos de un conjunto de 6.

$V_{6,4} = \frac{6!}{2!} = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360 \longrightarrow$ Se pueden formar 2 520 – 360 = 2 160 números de 5 cifras.

72. Página 272

Tenemos que escoger 4 elementos de un conjunto de 20.

- No importa el orden; da igual en qué lugar elijamos a cada bombero.
- No se pueden repetir elementos; las cuadrillas están formadas por 4 bomberos distintos.

$C_{20,4} = \binom{20}{4} = \frac{20!}{4!16!} = \frac{20\cdot 19\cdot 18\cdot 17}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 4845$ cuadrillas diferentes se pueden hacer.

73. Página 272

Tenemos que escoger 6 elementos de un conjunto de 12.

- No importa el orden; da igual en qué lugar elijamos a cada remero.
- No se pueden repetir elementos; las tripulaciones están formadas por 6 remeros distintos.

$C_{12,6} = \binom{12}{6} = \frac{12!}{6!6!} = \frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 924$ tripulaciones diferentes se pueden hacer.

74. Página 272

Tenemos que ver los conjuntos de 2 directivos de un conjunto de 10 personas.

- No importa el orden; los directivos se saludan mutuamente, no importa quién saluda a quién.
- No se pueden repetir elementos; un directivo no se saluda a sí mismo.

$C_{10,2} = \binom{10}{2} = \frac{10!}{2!8!} = \frac{10\cdot 9}{2} = 45$ apretones de manos diferentes.

75. Página 272

Tenemos que escoger 4 elementos de un conjunto de 20.

- No importa el orden; da igual en qué lugar elijamos a cada invitado.
- No se pueden repetir elementos; los grupos están formados por 4 personas distintas.

$C_{20,4} = \binom{20}{4} = \frac{20!}{4!16!} = \frac{20\cdot 19\cdot 18\cdot 17}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 4845 \rightarrow$ Se pueden hacer 4 845 grupos diferentes.

76. Página 272

Tenemos que escoger 9 elementos de un conjunto de 200.

- Importa el orden; importa qué puesto ocupa cada persona.
- No se pueden repetir elementos; cada persona ocupa un puesto de trabajo.

$V_{200,9} = \frac{200!}{191!} = 426545572966216704000$ formas diferentes de completar los puestos de trabajo.

77. Página 272

Primero veamos las posibles colocaciones de los dígitos. Tenemos que ver las posibles ordenaciones de los elementos 1, 2, 3, 4 ,5, 7.

- Importa el orden; no es lo mismo 123 457, que 132 457.
- No se pueden repetir elementos; una misma cifra no aparece 2 veces.

$P_7 = 7! = 5040$

Ahora, tenemos que decidir donde situamos los símbolos «·». Hay que escoger 2 posiciones entre 5 posibles.

- No importa el orden; da igual el lugar que escojamos primero para poner el producto.
- No podemos repetir elementos; cada símbolo va en una posición diferente.

$$C_{5,2} = \binom{5}{2} = \frac{5!}{2!3!} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$$

La elección del orden de los números y la posición de los productos es independiente. Utilizamos la regla del producto: se pueden obtener 5 040 · 10 = 50 400 productos distintos.

78. Página 272

a) Tenemos que escoger 2 ingredientes entre 4 posibles.

- No importa el orden; da igual el lugar en que escojamos cada ingrediente.
- No podemos repetir elementos; cada ingrediente aparece una vez.

$C_{4,2} = \binom{4}{2} = \frac{4!}{2!2!} = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6 \rightarrow$ Se pueden elaborar 6 platos diferentes con dos ingredientes.

b) Tenemos que escoger 3 ingredientes de un conjunto de 4.

$C_{4,3} = \binom{4}{3} = 4$ platos diferentes se pueden hacer con 3 ingredientes.

79. Página 272

Tenemos que ver los conjuntos de 2 pueblos de un conjunto de 9 pueblos.

- No importa el orden; da igual en qué orden elijamos los pueblos que se quieren unir.
- No se pueden repetir elementos; un pueblo no se une con sí mismo.

$C_{9,2} = \binom{9}{2} = \frac{9!}{2!7!} = \frac{9 \cdot 8}{2} = 36$ caminos diferentes.

80. Página 272

Tenemos que escoger 4 elementos de un conjunto de 10 cifras.

- Importa el orden; importa qué puesto ocupa cada cifra.
- Se pueden repetir elementos; se puede repetir cada cifra.

$VR_{10,4} = 10^4 = 10000$ códigos PIN diferentes.

82. Página 272

a) Tenemos que escoger 5 elementos de un conjunto de 4 números.

- Importa el orden; importa qué puesto ocupa cada cifra.
- Se pueden repetir elementos; en dos lanzamientos distintos puede salir la misma cifra.

$VR_{4,5} = 4^5 = 1024 \rightarrow$ Se pueden formar 1 024 números.

b) Para dar números pares la última cifra tiene que ser par, por tanto, hay dos opciones para la última cifra. Tenemos que escoger 4 elementos de 4 posibilidades para las primeras 4 tiradas.

$2 \cdot VR_{4,4} = 2 \cdot 4^4 = 512 \rightarrow$ Se pueden formar 512 números pares.

c) Tenemos que escoger 3 elementos de un conjunto de 4.

$VR_{4,3} = 4^3 = 64 \rightarrow$ Se pueden formar 64 números que empiecen por 43.

d) Tenemos que escoger 3 elementos de un conjunto de 4.

$VR_{4,3} = 4^3 = 64 \rightarrow$ Se pueden formar 64 números que empiecen por 3 y acaben en 1.

83. Página 273

a) Tenemos que escoger 4 elementos de un conjunto de 5 letras.

- Importa el orden; no es lo mismo la palabra ENTR que NETR.
- No se pueden repetir letras.

$V_{5,4} = \frac{5!}{1!} = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120 \rightarrow$ Hay 120 palabras distintas de 4 letras sin repetir letras.

b) Tenemos que escoger 4 elementos de un conjunto de 5 letras.

- Importa el orden; no es lo mismo la palabra ENTR que NETR.
- Se pueden repetir letras.

$VR_{5,4} = 5^4 = 625 \rightarrow$ Hay 625 palabras distintas de 4 letras repitiendo letras.

c) Tenemos que escoger 6 elementos de un conjunto de 5 letras.

- Importa el orden; no es lo mismo la palabra ENTERO que NETERO.
- Se pueden repetir letras: sin repetir no podríamos hacer palabras de 6 letras.

$VR_{5,6} = 5^6 = 15625 \rightarrow$ Hay 15 625 palabras distintas de 6 letras.

d) Tenemos que contar todas las palabras que empiezan por T, menos las que empiezan por TEE, las que empiezan por TEN y por TEO.

Para escoger las que empiezan por T tenemos que escoger 3 elementos de entre 5, pudiendo repetir letras.

$VR_{5,3} = 5^3 = 125$

Para escoger las que empiezan por TEE, TEN y TEO tenemos que escoger 1 elemento de entre 5 posibles, pudiendo repetir letras.

$3 \cdot VR_{5,1} = 3 \cdot 5 = 15$

En orden alfabético, hay $125 - 15 = 110$ palabras después de la palabra TERE.

La palabra TERE ocupa el lugar $625 - 110 = 505$.

84. Página 273

Tenemos que contar las posibles listas de siete candidatos que se podrían formar.

- Importa el orden; no es lo mismo que un candidato aparezca primero o segundo en la lista.
- No se pueden repetir elementos; un candidato no puede aparecer dos veces en la lista.

$P_7 = 7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040 \longrightarrow$ La lista se puede organizar de 5 040 formas.

Tenemos que escoger 3 elementos de un conjunto de 7.

- No importa el orden; una vez elegido el concejal da igual la posición que ocupase en la lista.
- No se pueden repetir elementos; un candidato no puede aparecer dos veces en la lista.

$C_{7,3} = \binom{7}{3} = \frac{7!}{4!3!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 35$ son las formas en las que se pueden cubrir los puestos.

85. Página 273

Tenemos que contar las posibles ordenaciones de los 7 libros que se podrían formar.

- Importa el orden; importa la posición de cada libro en la estantería.
- No se pueden repetir elementos; un libro no se coloca dos veces en la estantería.

$P_7 = 7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040$ son las formas diferentes en las que se pueden organizar los libros.

Tenemos que escoger 4 elementos de un conjunto de 7.

- No importa el orden; da igual el orden en el que escojamos los libros para regalar.
- No se pueden repetir elementos; un libro no se puede regalar dos veces.

$C_{7,4} = \binom{7}{4} = \frac{7!}{4!3!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 35$ lotes de libros diferentes pueden hacerse.

86. Página 273

Para el primer carácter hay que escoger entre 27 letras mayúsculas.

Para los dos siguientes caracteres tenemos que escoger 2 elementos entre 10 cifras.

- Importa el orden; importa la posición en que va cada cifra.
- Se pueden repetir elementos; la misma cifra puede aparecer dos veces.

$VR_{10,2} = 10^2 = 100$

Para los cinco últimos caracteres tenemos que escoger 5 elementos entre 27 posibles.

- Importa el orden; importa la posición en que va cada letra.
- Se pueden repetir elementos; la misma letra puede aparecer dos veces.

$VR_{27,5} = 27^5 = 14\,348\,907$

La elección de cada carácter es independiente de los otros, por tanto, el número de contraseñas viene dado por la regla del producto: $27 \cdot 100 \cdot 14\,348\,907 = 38\,742\,048\,900$ contraseñas.

87. Página 273

Tenemos que contar las posibles ordenaciones de los 5 amigos que se podrían formar.

- Importa el orden; importa la posición de cada amigo en el banco.
- No se pueden repetir elementos; un chico no se puede sentar en dos sitios.

$P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ son las formas como se pueden sentar los 5 amigos.

88. Página 273

Tenemos que escoger 7 elementos de entre 5 posibles.

- Importa el orden; importa a qué asignatura le corresponde cada nota.
- Se pueden repetir elementos; dos asignaturas diferentes pueden tener la misma nota.

$VR_{5,7} = 5^7 = 78125$ boletines distintos podría haber.

89. Página 273

Tenemos que escoger 7 elementos de entre 50 posibles.

- No importa el orden; da igual que día de la semana veamos cada serie.
- No se pueden repetir elementos; vemos series de 7 canales diferentes.

$C_{50,7} = \binom{50}{7} = \frac{50!}{7!43!} = 99884400$ combinaciones de series diferentes podemos ver.

90. Página 273

Tenemos que escoger 2 elementos de entre 30 posibles.

- Importa el orden; es distinta la posición de delegado y la de subdelegado.
- No se pueden repetir elementos; una misma persona no puede ser delegado y subdelegado a la vez.

$V_{30,2} = \frac{30!}{28!} = 30 \cdot 29 = 870$ combinaciones de los cargos distintos podría haber.

91. Página 273

Tenemos que repartir 4 reyes entre 4 jugadores.

- Importa el orden; importa qué jugador recibe cada rey.
- Se pueden repetir elementos; un mismo jugador puede recibir dos o más reyes.

$VR_{4,4} = 4^4 = 256$ son las formas como podrían quedar repartidos los 4 reyes.

92. Página 273

Tenemos que escoger 2 equipos tomados de un conjunto de 20.

- Importa el orden; no es lo mismo que un equipo juegue como local que como visitante.
- No se pueden repetir los elementos: un equipo no puede jugar contra sí mismo.

$V_{20,2} = \frac{20!}{18!} = 20 \cdot 19 = 380$ partidos se tienen que jugar.

93. Página 273

Tenemos que ordenar 5 amigos en el coche.

- Importa el orden; importa el asiento que ocupa cada amigo.
- No se pueden repetir los elementos: un amigo no se puede sentar en dos sitios.

Para el asiento del conductor sólo tenemos 2 opciones. Tenemos que repartir a los cuatro restantes en los asientos que quedan.

$2 \cdot P_4 = 2 \cdot 4! = 48$ son las diferentes formas en las que se pueden sentar.

94. Página 273

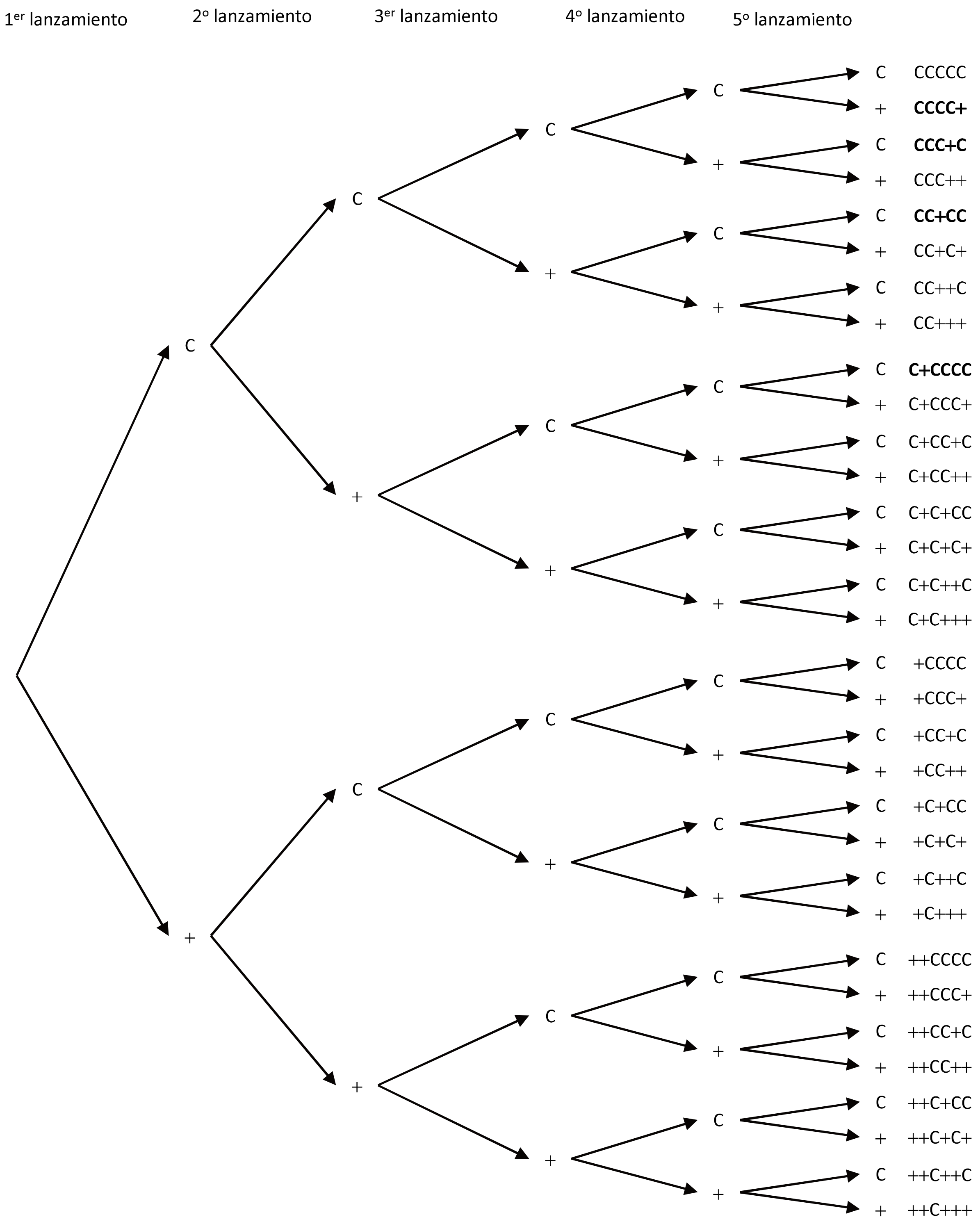
Tenemos que escoger 3 elementos de un conjunto de 6.

- No importa el orden; no importa qué sándwich come antes y cuál después.
- Se pueden repetir los elementos: puede comer dos sándwiches iguales.

$VR_{6,3} = 6^3 = 216$ son las formas diferentes en las que se puede comer los 3 sándwiches.

DEBES SABER HACER

1. Página 273



Podemos obtener 4 caras de 5 formas.

2. Página 273

a) $\binom{4}{1}=\frac{4!}{1!3!}=4$

b) $\binom{7}{2}=\frac{7!}{2!5!}=\frac{7\cdot 6}{2}=21$

c) $\binom{10}{3}=\frac{10!}{3!7!}=\frac{10\cdot 9\cdot 8}{3\cdot 2\cdot 1}=120$

d) $\binom{6}{2}=\frac{6!}{2!4!}=\frac{6\cdot 5}{2}=15$

e) $\binom{8}{5}=\frac{8!}{5!3!}=\frac{8\cdot 7\cdot 6}{3\cdot 2\cdot 1}=56$

f) $\binom{11}{4}=\frac{11!}{4!7!}=\frac{11\cdot 10\cdot 9\cdot 8}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=330$

3. Página 273

Tenemos que reordenar las letras de la palabra CALCULADORA para formar palabras.

Si todas las letras fuesen distintas serían $P_{10}=10!$ palabras.

Teniendo en cuenta que la letra A aparece tres veces y las letras L y C aparecen dos veces estamos contando como palabras distintas las que tienen las tres A en la misma posición y las que tienen las dos L y C en las mismas posiciones. Por eso, tenemos que dividir la cantidad total entre la cantidad dada por las posibles ordenaciones de las tres A en los mismos sitios y las de las L y C, es decir, el número total de palabras es:

$\frac{P_{10}}{3!2!2!}=\frac{10!}{3!2!2!}=151200$ $\longrightarrow$ Se pueden formar 151 200 palabras.

4. Página 273

Tenemos que ordenar 6 personas en las sillas.

- Importa el orden; importa la silla que ocupa cada persona.
- No se pueden repetir los elementos: una persona no se puede sentar en dos sitios.

$P_6=6!=720$ $\longrightarrow$ Se pueden sentar de 720 formas.

5. Página 273

Tenemos que escoger 5 elementos de un conjunto de 30.

- No importa el orden; da igual en qué lugar elijamos a cada alumno.
- No se pueden repetir elementos; los grupos están formados por 5 alumnos distintos.

$C_{30,5}=\binom{30}{5}=\frac{30!}{5!25!}=\frac{30\cdot 29\cdot 28\cdot 27\cdot 26}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=9828$

Se pueden hacer 9 828 grupos diferentes.

6. Página 273

a) Tenemos que escoger 2 equipos tomados de un conjunto de 10.

- Importa el orden; no es lo mismo que un equipo juegue como local que como visitante.
- No se pueden repetir los elementos: un equipo no puede jugar contra sí mismo.

$$V_{10,2} = \frac{10!}{8!} = 10 \cdot 9 = 90$$

Se tienen que jugar 90 partidos.

b) Tenemos que escoger 2 equipos tomados de un conjunto de 10.

- No importa el orden; no influye si un equipo juega como local o como visitante.
- No se pueden repetir los elementos: un equipo no puede jugar contra sí mismo.

$$C_{10,2} = \binom{10}{8} = \frac{10!}{8!2!} = \frac{10 \cdot 9}{2} = 45\,.$$

Se tienen que jugar 45 partidos.

COMPETENCIA MATEMÁTICA. En la vida cotidiana

95. Página 274

Para la primera parte tenemos que escoger entre 12 meses posibles.

Para la última parte, la letra viene determinada por la primera parte. Para los números tenemos que escoger entre 0, 1, 2 y 3, es decir, entre 4 posibilidades.

Por último, tenemos que elegir si mete primero el número o la letra: otras dos posibilidades.

Todas estas elecciones son independientes las unas de las otras, por tanto, el número total de contraseñas viene dado, mediante la regla del producto, por $12 \cdot 4 \cdot 2 = 96$.

Mónica es capaz de meter 4 claves por minuto, por tanto, como mucho tardará $\frac{96}{4} = 24 \text{ min} = 0{,}4 \text{ horas}$.

FORMAS DE PENSAR. Razonamiento matemático.

96. Página 274

Consideramos el punto *E* dado por la intersección de las diagonales del cuadrilátero.

Los triángulos que se pueden dar en el cuadrilátero vienen determinados por la elección de 3 vértices entre *A*, *B*, *C*, *D* y *E*.

- No importa el orden; da igual qué vértice elijamos antes y cuál después.
- No se pueden repetir elementos; cada triángulo tiene 3 vértices diferentes.

$$C_{5,3} = \binom{5}{3} = \frac{5!}{3!2!} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$$

Tenemos que descontar las dos diagonales determinadas por los puntos *BED* y *AEC*. Por tanto, el número de triángulos que se pueden formar es de $10 - 2 = 8$.

97. Página 274

La suma de los lados y de las diagonales de un pentágono viene dada por las posibles elecciones de 2 de sus vértices.

- No importa el orden; el mismo lado o diagonal une un vértice con otro, y este último con el primero.
- No se pueden repetir elementos; un vértice no se une con el mismo mediante un lado o diagonal.

$$C_{5,2} = \binom{5}{2} = \frac{5!}{2!3!} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$$

Un pentágono tiene 10 lados y diagonales. Como tiene 5 lados, tiene 10 – 5 = 5 diagonales.

98. Página 274

El número de rectas viene dado por las posibles elecciones de dos de los seis puntos.

- No importa el orden; dos puntos determinan una recta, independientemente del orden en que los elijamos.
- No se pueden repetir elementos; un punto no determina una recta.

$$C_{6,2} = \binom{6}{2} = \frac{6!}{2!4!} = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15$$

Determinan 15 rectas.

99. Página 274

Puede haber sumas con 2, 3, 4 o 5 sumandos.

Si tenemos en cuenta el orden de los sumandos, las diferentes opciones son:

1+1+1+1+1	1+1+1+2	1+1+2+1	1+1+3	1+2+1+1	1+2+2	1+3+1	1+4
2+1+1+1	2+1+2	2+2+1	2+3				
3+1+1	3+2						
4+1							

Se podrían hacer 15 sumas distintas.

Si tenemos en cuenta el orden de los sumandos, se podrían hacer 5 sumas distintas.

100. Página 274

En los números capicúas, las tres primeras cifras son iguales a las tres últimas, por tanto, son de la forma *abccba*, con $a \neq 0$.

Tenemos que escoger 3 elementos de entre un conjunto de 10 cifras.

- Importa el orden; no es el mismo número 123321 que 321123.
- Se pueden repetir elementos; el número 111111 es capicúa.

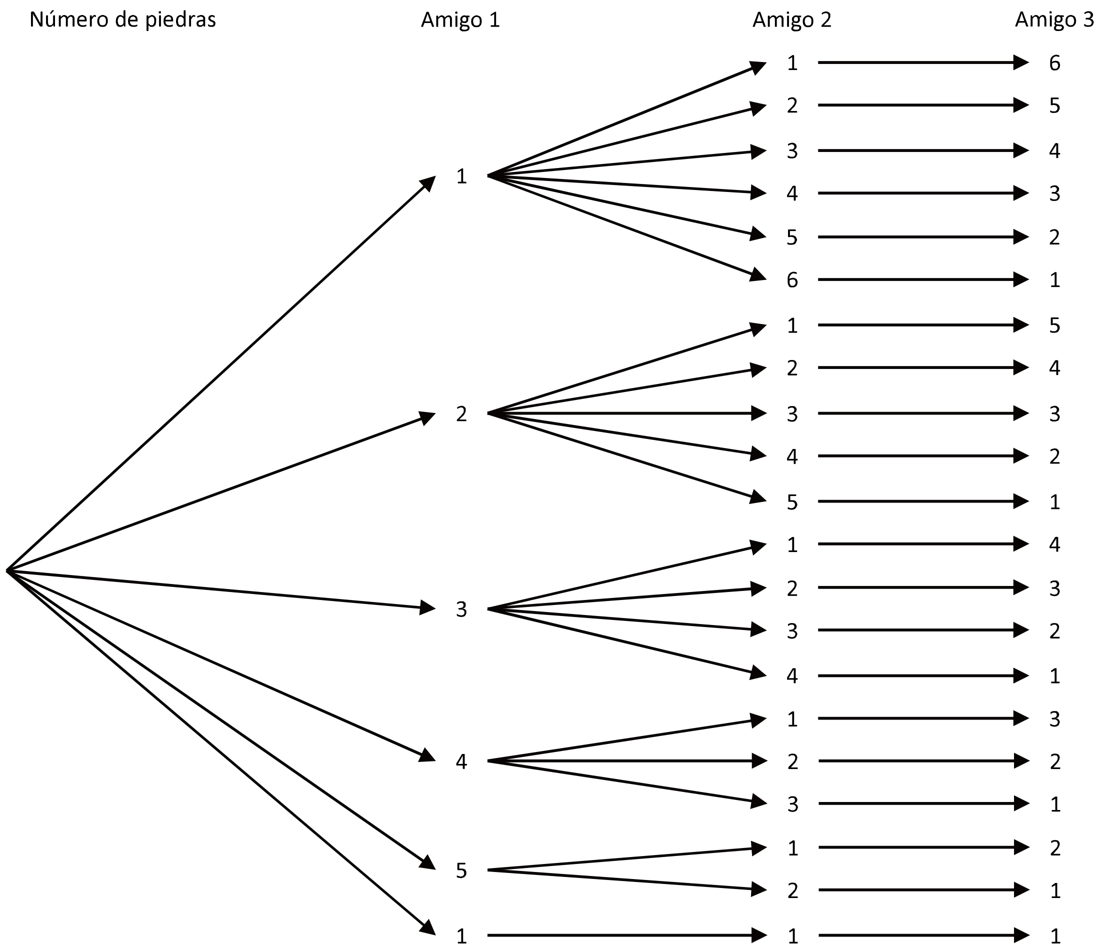
$$VR_{10,3} = 10^3 = 1000$$

Tenemos que descontar las posibles elecciones en las que el 0 aparezca como primer número. Para ver los números que empiezan por 0, tenemos que escoger 2 cifras entre 10 posibles.

$VR_{10,2} = 10^2 = 100 \rightarrow$ Hay 1 000 – 100 = 900 números capicúa de 6 cifras.

101. Página 274

Tenemos que repartir 8 piedras entre 3 personas. Cada amigo recibe entre 1 y 6 piedras. Hacemos un diagrama de árbol para ver las posibles opciones.



Pueden repartirlas de 21 formas distintas.

102. Página 274

El comité estará formado por 3 estudiantes y 3 profesores o 4 estudiantes y 2 profesores.

Tanto para la elección de los estudiantes como para la de los profesores:

- No importa el orden; da igual el orden en que escojamos los miembros del tribunal.
- No se pueden repetir elementos; el tribunal está formado por 6 personas distintas.

El número de tribunales formado por 3 estudiantes y 3 profesores viene dado por:

$$C_{8,3} \cdot C_{6,3} = \binom{8}{3} \cdot \binom{6}{3} = \frac{8!}{3!5!} \cdot \frac{6!}{3!3!} = 56 \cdot 20 = 1120$$

El número de tribunales formado por 4 estudiantes y 2 profesores viene dado por:

$$C_{8,4} \cdot C_{6,2} = \binom{8}{4} \cdot \binom{6}{2} = \frac{8!}{4!4!} \cdot \frac{6!}{2!4!} = 70 \cdot 15 = 1050$$

Podemos elegir el tribunal de $1\,120 + 1\,050 = 1\,170$ formas diferentes.

103. Página 274

El número de palabras que se pueden formar son las posibles ordenaciones de las 5 letras.

$P_5 = 5! = 120$ palabras

La palabra NADIE es la primera palabra que empieza por N. Las palabras que empiezan por N vienen dadas por las posibles ordenaciones de las 4 letras que quedan.

$P_4 = 4! = 24$ palabras

Por tanto, hay 23 palabras después de NADIE. Así, la palabra NADIE ocupa la posición $120 - 23 = 97$ en orden alfabético.

104. Página 274

Contamos el conjunto de letras AEIOU como un solo elemento que debe ir unido. Así, tenemos que contar las posibles ordenaciones de los elementos AEIOU, P, R, M, T, C y N.

$P_7 = 7! = 5040$

Aparecen las 5 vocales juntas y ordenadas en 5 040 palabras.

PRUEBAS PISA

105. Página 275

Dibujamos un diagrama de árbol para ver las distintas posibilidades para los partidos de 2ª y 3ª ronda.

2ª ronda		3ª Ronda	
MESA 1: Tomás-Luis MESA 1: Ricardo-David	MESA 2: Ricardo-David MESA 2: Tomás-Luis	MESA 1: Tomás-David	MESA 2: Ricardo-Luis
		MESA 1: Ricardo-Luis	MESA 2: Tomás-David
MESA 1: Tomás-David MESA 1: Ricardo-Luis	MESA 2: Ricardo-Luis MESA 2: Tomás-David	MESA 1: Tomás-Luis	MESA 2: Ricardo-David
		MESA 1: Ricardo-David	MESA 2: Tomás-Luis

Podemos rellenar la tabla de 8 formas distintas con los datos dados en el diagrama.

106. Página 275

Tenemos que escoger 150 notas entre 7 posibles.

- Importa el orden; importa la posición que ocupa cada nota dentro de la melodía.
- Se pueden repetir elementos; una misma melodía contiene repetida la misma nota más de una vez.

Se pueden hacer $VR_{7,150} = 7^{150}$ melodías diferentes pueden hacerse con 150 notas.