Perímetros, áreas y volúmenes

5

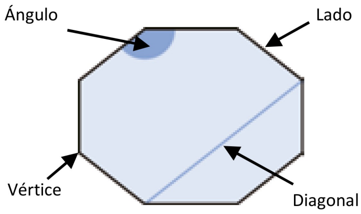
PUNTO DE PARTIDA

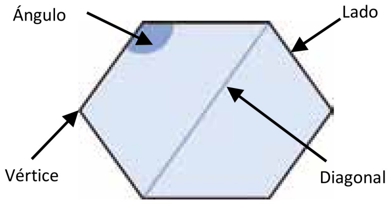
Página 75

Pentágonos en la figura morada, triángulos en la figura roja y cuadrados en la figura amarilla.

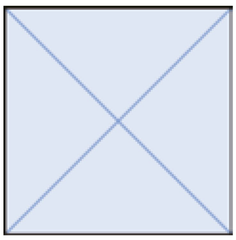
ACTIVIDADES

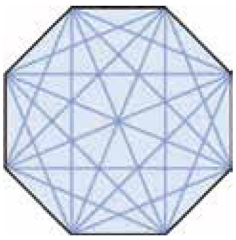
1. Página 76





2. Página 76





3. Página 76

Eneágono: $180^\circ \cdot (n-2) \xrightarrow{n=9} 180^\circ \cdot (9-2) = 1260^\circ$

Heptágono: $180^\circ \cdot (n-2) \xrightarrow{n=7} 180^\circ \cdot (7-2) = 900^\circ$

4. Página 76

Octógono: $180^\circ \cdot (n-2) \xrightarrow{n=8} 180^\circ \cdot (8-2) = 1080^\circ$

Hexágono: $180^\circ \cdot (n-2) \xrightarrow{n=6} 180^\circ \cdot (6-2) = 720^\circ$

5. Página 77

Rojo: irregular. Azul: equilátero. Rosa: irregular.

6. Página 77

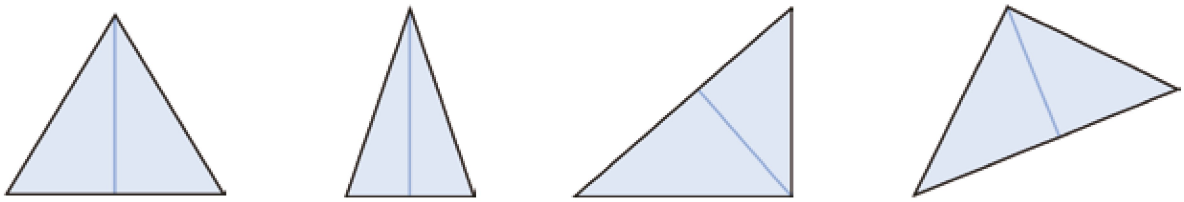
Azul: pentágono. Rojo: pentágono. Naranja: heptágono. Verde: hexágono.

7. Página 78

a) Rectángulo. b) Acutángulo. c) Obtusángulo. d) Acutángulo.

8. Página 78

a) Equilátero. b) Isósceles. c) Escaleno. d) Escaleno.



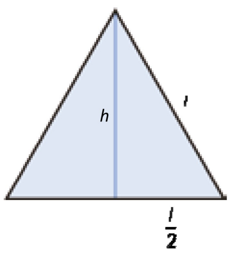
9. Página 79

a) $a^2=b^2+c^2 \xrightarrow{a=8,\,b=5} 8^2=5^2+c^2 \rightarrow c=\sqrt{64-25} \rightarrow c=\sqrt{39}=6{,}24$ cm

b) $a^2=b^2+c^2 \xrightarrow{b=4,\,c=7} a^2=4^2+7^2 \rightarrow a=\sqrt{16+49} \rightarrow c=\sqrt{65}=8{,}06$ cm

c) $a^2=b^2+c^2 \xrightarrow{a=14,\,c=6} 14^2=b^2+6^2 \rightarrow b=\sqrt{196-36} \rightarrow c=\sqrt{160}=4\sqrt{10}=12{,}65$ m

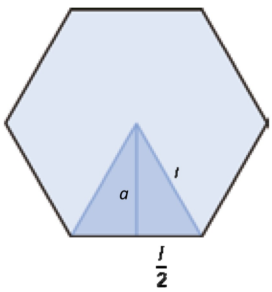
10. Página 79



a) $8^2=h^2+\left(\frac{8}{2}\right)^2 \rightarrow h^2=64-16 \rightarrow h=\sqrt{48}=4\sqrt{3}=6{,}93$ cm

b) $10^2=h^2+\left(\frac{10}{2}\right)^2 \rightarrow h^2=100-25 \rightarrow h=\sqrt{75}=5\sqrt{3}=8{,}66$ cm

11. Página 79



$4^2=a^2+2^2 \rightarrow a^2=16-4 \rightarrow a=\sqrt{12}=2\sqrt{3}=3{,}46$ cm

12. Página 80

Respuesta abierta. Por ejemplo:

Una moneda, un disco de vinilo y una porción de pizza.

13. Página 80

Circunferencia: línea curva cerrada. Círculo: superficie plana delimitada por la circunferencia.

14. Página 80

El abanico es un sector circular, el jardín tiene forma de trapecio circular y la señal de tráfico es un círculo.

15. Página 80

La figura es un semicírculo.

16. Página 81

$P = 7 \cdot 3{,}5 = 24{,}5$ cm

17. Página 81

x = Base del rectángulo $\longrightarrow$ Altura del rectángulo $= y = 2x$

$2 \cdot 2x + 2x = 90 \;\longrightarrow\; 6x = 90 \;\longrightarrow x = 15,\ y = 30$

La base y la altura miden 15 y 30 cm, respectivamente.

18. Página 81

$P = 10 \cdot 3{,}25 = 32{,}5$ cm

19. Página 81

$P = 4{,}65 + 5{,}27 + 1{,}8 + 5{,}6 + 2{,}2 + 3{,}2 + 4{,}7 = 27{,}42$ cm

20. Página 82

$$P = 7 \cdot 2 + \frac{2 \cdot \pi \cdot 7 \cdot 45}{360} = 14 + \frac{7}{4}\pi = 19{,}5 \text{ cm}$$

21. Página 82

$$P = 2\pi(r + R) \xrightarrow{r=3,\, R=8} P = 2\pi(3 + 8) = 22\pi = 69{,}12 \text{ cm}$$

22. Página 82

$36{,}84 = 2r + 18{,}84 \;\longrightarrow\; 2r = 18 \;\longrightarrow\; r = 9$ m

23. Página 82

$$P = \frac{2 \cdot \pi \cdot 0{,}4}{2} + \frac{2 \cdot \pi \cdot 0{,}6}{2} + 2 = 2 + \pi = 5{,}14 \text{ m}$$

24. Página 83

$$A = \frac{b \cdot h}{2} \xrightarrow{b=2{,}5;\, h=4} A = \frac{2{,}5 \cdot 4}{2} = 5 \text{ m}^2$$

25. Página 83

$$A=\frac{n\cdot l\cdot a}{2}\xrightarrow{n=7;\ l=5;\ a=5,2}A=\frac{7\cdot 5\cdot 5,2}{2}=91\text{ cm}^2$$

26. Página 83

$$A=\frac{B+b}{2}\cdot h\xrightarrow{B=9,\ b=5,\ h=4}A=\frac{9+5}{2}\cdot 4=28\text{ m}^2$$

27. Página 83

1,42 m = 142 cm

$$A=\frac{D\cdot d}{2}\xrightarrow{D=142,\ d=62}A=\frac{142\cdot 62}{2}=4402\text{ cm}^2$$

28. Página 84

$$\pi r^2=1256\ \longrightarrow\ r=\sqrt{\frac{1256}{\pi}}=20\text{ cm}$$

29. Página 84

$$A_{\text{Verde}}=A_{\text{Cuadrado}}-A_{\text{Círculo}}=4^2-\pi\cdot 2^2=16-4\pi=3,43\text{ cm}^2$$

$$A_{\text{Verde}}=4\cdot A_{\text{Triángulo}}=4\cdot\frac{2\cdot 1}{2}=4\text{ cm}^2$$

30. Página 84

No se puede, porque la circunferencia y el arco son líneas, no superficies.

31. Página 84

El ángulo del sector circular es recto. Así:

$$A_{\text{Una alfombra}}=\frac{\pi\cdot r^2\cdot n}{360}\xrightarrow{r=1,75;\ n=90}A=\frac{\pi\cdot 1,75^2\cdot 90}{360}=\frac{49}{64}\pi=2,41\text{ m}^2$$

$A_{\text{4 alfombras}}=4\cdot 2,41=9,64\text{ m}^2$, que sería el área de la circunferencia completa.

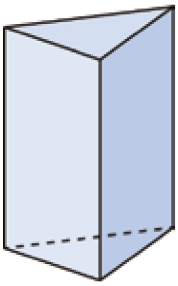
32. Página 84

$$r=65-15=50\text{ m}$$

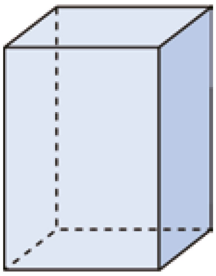
$$A=\pi(R^2-r^2)=\pi(65^2-50^2)=\pi(4225-2500)=5416,26\text{ m}^2$$

33. Página 85

Respuesta abierta. Por ejemplo:



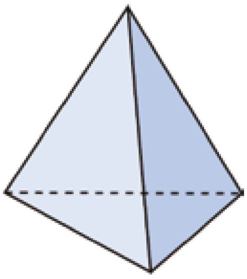
Prisma triangular



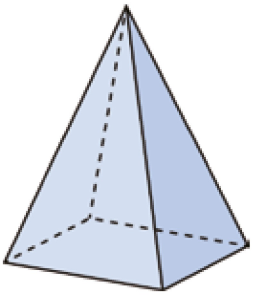
Prisma cuadrangular

34. Página 85

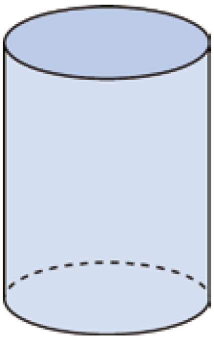
Respuesta abierta. Por ejemplo:



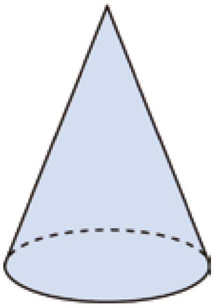
Pirámide triangular



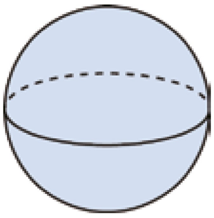
Pirámide cuadrangular



Cilindro

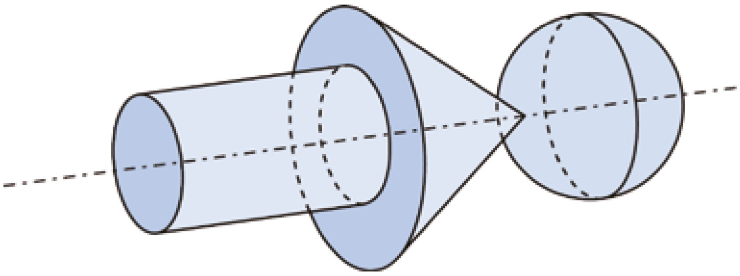


Cono



Esfera

35. Página 85



36. Página 86

$$A = 6 \cdot A_{\text{Rectángulo}} + 2 \cdot A_{\text{Base}} = 6 \cdot 7 \cdot 3 + 2 \cdot \frac{6 \cdot 3 \cdot 2,6}{2} = 172,8 \text{ cm}^2$$

37. Página 86

$$A = 8 \cdot A_{\text{Triángulo}} + 2 \cdot A_{\text{Base}} = 8 \cdot \frac{6 \cdot 15}{2} + \frac{8 \cdot 6 \cdot 7,2}{2} = 532,8 \text{ cm}^2$$

38. Página 86

$$A = 6 \cdot A_{\text{Cuadrado}} = 6 \cdot 10^2 = 600 \text{ cm}^2$$

39. Página 86

$$A = \pi r(g+r) \xrightarrow{A=188;4,\ r=5} 188,4 = 5\pi(g+5) \rightarrow g = \frac{188,4}{5\pi} - 5 \rightarrow g = 7 \text{ cm}$$

40. Página 86

$$A = 2\pi r(h+r) = 2\pi \cdot 12 \cdot (20+12) = 768\pi = 2412,75 \text{ cm}^2$$

41. Página 86

$$A = \pi r(g+r) = 10\pi(2 \cdot 10 + 10) = 942 \text{ cm}^2$$

42. Página 87

$$V = A_{\text{Base}} \cdot h = \frac{5 \cdot 2 \cdot 1,4}{2} \cdot 5 = 35 \text{ m}^3 = 35\,000 \text{ ℓ}$$

43. Página 87

$$V = \frac{1}{3} \cdot A_{\text{Base}} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{7 \cdot 6 \cdot 6,2}{2} \cdot 25 = 1085 \text{ cm}^3 = 1,085 \text{ ℓ}$$

44. Página 87

$$V_{\text{Prisma}} = A_{\text{Base}} \cdot h = 5^2 \cdot 12 = 300 \text{ cm}^3 = 300 \text{ ml}$$

$$V_{\text{Pirámide}} = \frac{1}{3} \cdot A_{\text{Base}} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{10 \cdot 3}{2} \cdot 12 = 60 \text{ cm}^3 = 60 \text{ ml}$$

45. Página 87

$$V_{\text{Pirámide}} = \frac{1}{3} \cdot A_{\text{Base}} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 35^2 \cdot 21,65 = 8840,42 \text{ m}^3 = 8\,840,42 \text{ kl}$$

46. Página 87

80 céntimos = 0,80 €

$V = 12 \cdot 5,6 \cdot 2 = 134,4 \text{ m}^3$

$134,4 \cdot 0,80 = 107,52$ € costará llenar la piscina.

47. Página 88

$V_{\text{Cilindro}} = A_{\text{Base}} \cdot h = \pi \cdot 2^2 \cdot 5 = 20\pi = 62{,}83\ \text{m}^3$

$V_{\text{Cono}} = \frac{1}{3} V_{\text{Cilindro}} = \frac{1}{3} \cdot 62{,}83 = 20{,}94\ \text{m}^3$

48. Página 88

$V = 282\,600\ \ell = 282{,}6\ \text{m}^3$

$V = \pi r^2 h \xrightarrow{V=282{,}6;\ h=10} 282{,}6 = 10\pi r^2 \rightarrow r = \sqrt{\frac{282{,}6}{10\pi}} \rightarrow r = 3\ \text{m}$

49. Página 88

$V_{\text{Cono}} = \frac{1}{3} \cdot A_{\text{Base}} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 3^2 \cdot 12 = 36\pi = 113{,}1\ \text{cm}^3 = 113{,}1\ \text{ml}$

$V_{\text{Bola helado}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{2}{3} \pi \cdot 3^3 = 18\pi = 56{,}55\ \text{cm}^3 = 56{,}55\ \text{ml}$

$V_{\text{Helado}} = 113{,}1 + 56{,}55 = 169{,}65\ \text{ml}$

50. Página 88

$V = \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{4}{3} \pi \cdot 20^3 = \frac{32\,000}{3} \pi = 33\,510{,}4\ \text{cm}^3 = 33{,}51\ \ell$

51. Página 88

El cono ocupa $\frac{1}{3}$ del volumen del cilindro. Por tanto, quedan vacíos $\frac{2}{3}$. Así:

$\frac{2}{3} V_{\text{Cilindro}} = \frac{2}{3} \pi \cdot 15^2 \cdot 25 = 3750\pi = 11781\ \text{cm}^3 = 11{,}781\ \ell$

52. Página 89

$A_{\text{Prisma}} = 2 \cdot 8 \cdot 12 + 2 \cdot 12 \cdot 18 + 1 \cdot 8 \cdot 18 = 768\ \text{cm}^2$

Por el teorema de Pitágoras: $a^2 = 4^2 + 7^2 \rightarrow a = \sqrt{65} = 8{,}06\ \text{cm}$

$A_{\text{Lateral Pirámide}} = 2 \cdot \frac{18 \cdot 8{,}06}{2} + 2 \cdot \frac{8 \cdot 11{,}4}{2} = 233{,}4\ \text{cm}^2$

$A_{\text{Total}} = 768 + 233{,}4 = 1\,001{,}4\ \text{cm}^2$

53. Página 89

El recipiente está formado por dos semiesferas y un cilindro:

$V_{\text{Esfera}} = \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{4}{3} \pi \cdot 5^3 = \frac{500}{3} \pi = 523{,}6\ \text{cm}^3$

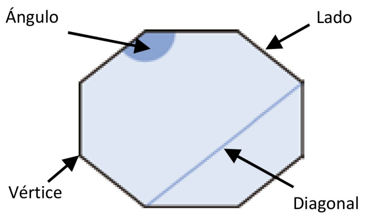
$V_{\text{Cilindro}} = \pi \cdot 5^2 \cdot 10 = 250\pi = 785{,}4\ \text{cm}^3$

$V_{\text{Total}} = 523{,}6 + 785{,}4 = 1309\ \text{cm}^3$

ACTIVIDADES FINALES

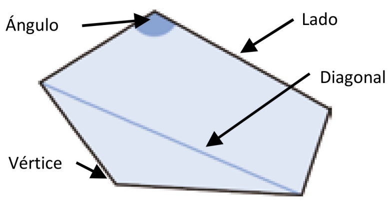
54. Página 90

Respuesta abierta. Por ejemplo:

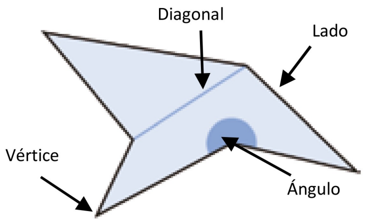


55. Página 90

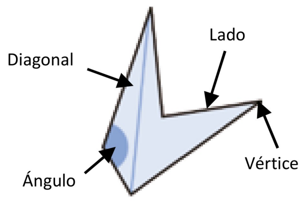
a)



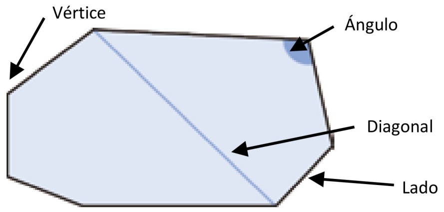
b)



c)



d)



56. Página 90

a) Tantas como lados tenga el polígono menos 3.

b) Desde cada vértice hay $n-3$ diagonales. Si quitamos las que se repiten, tendremos:

$$N_{\text{Diagonales}} = \frac{n\cdot(n-3)}{2}$$

57. Página 90

Suma ángulos interiores pentágono = $180^\circ\cdot(n-2)\xrightarrow{n=5}180^\circ\cdot(5-2)=540^\circ$

Suma ángulos interiores heptágono = $180^\circ\cdot(n-2)\xrightarrow{n=7}180^\circ\cdot(7-2)=900^\circ$

Suma ángulos interiores decágono = $180^\circ\cdot(n-2)\xrightarrow{n=10}180^\circ\cdot(10-2)=1440^\circ$

58. Página 90

Buscamos el número de lados, n:

$$180^\circ\cdot(n-2)=900^\circ \;\longrightarrow\; n=\frac{900^\circ}{180^\circ}+2 \;\longrightarrow\; n=7$$

El polígono es un heptágono.

59. Página 90

a) Es un hexágono no equilátero y no equiángulo. Por tanto, es irregular.

b) Es un hexágono no equilátero y equiángulo. Por tanto, es irregular.

c) Es un cuadrilátero equilátero y no equiángulo. Por tanto, es irregular.

d) Es un hexágono no equilátero y no equiángulo. Por tanto, es irregular.

60. Página 90

a) Es un hexágono regular.

b) Es un cuadrado o cuadrilátero equilátero.

c) Es un cuadrado o cuadrilátero equilátero.

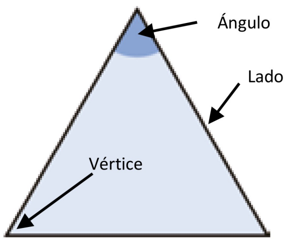
d) Es un triángulo equilátero, ya que un triángulo con los tres lados iguales debe tener los tres ángulos iguales.

e) La suma de los ángulos interiores de un pentágono es $180 \cdot (n-2) = 180 \cdot (5-2) = 540^\circ$, y $72 \cdot 5 = 360^\circ$ $\rightarrow$ No puede formar un pentágono.

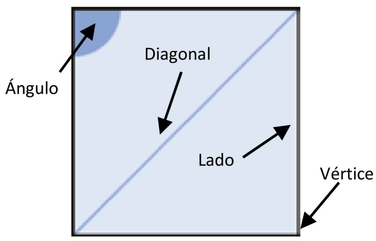
f) La suma de los ángulos interiores de un hexágono es $180 \cdot (n-2) = 180 \cdot (6-2) = 720^\circ$, y $120 \cdot 6 = 720^\circ$ $\rightarrow$ Es un hexágono equiángulo.

61. Página 90

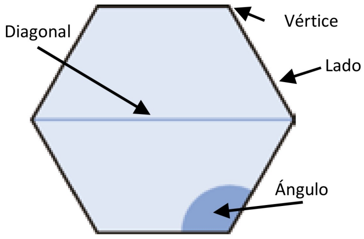
a)



b)



c)



62. Página 90

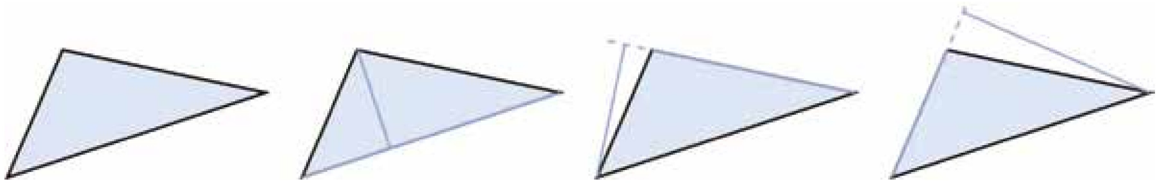
a) Rectángulo. b) Obtusángulo. c) Acutángulo. d) Rectángulo.

63. Página 90

a) Escaleno. b) Equilátero. c) Isósceles. d) Isósceles.

64. Página 90

Respuesta abierta. Por ejemplo:



65. Página 90

a) Imposible. Si es equilátero, todos sus ángulos miden 60° → No tiene ningún ángulo mayor de 90°.

b) Posible. Por ejemplo: un triángulo isósceles con el ángulo desigual de 30° y los otros dos ángulos de 75°.

c) Posible. Por ejemplo: un triángulo de catetos 3 y 4 cm y de hipotenusa 5 cm.

d) Posible. Por ejemplo: cualquier triángulo isósceles que cuyo ángulo desigual mida 90°.

e) Posible. Por ejemplo: un triángulo isósceles con el ángulo desigual de 120° y los otros dos ángulos de 30°.

f) Posible. Por ejemplo: un triángulo de ángulos 80°, 60° y 40°.

66. Página 90

a) $a^2 = b^2 + c^2 \xrightarrow{a=15,\, b=9} 15^2 = 9^2 + c^2 \rightarrow c = \sqrt{225 - 81} = \sqrt{144} = 12$ cm

b) $a^2 = b^2 + c^2 \xrightarrow{a=28,\, c=16} 28^2 = b^2 + 16^2 \rightarrow b = \sqrt{784 - 256} = \sqrt{528} = 4\sqrt{33} = 22{,}98$ cm

c) $a^2 = b^2 + c^2 \xrightarrow{b=80,\, c=50} a^2 = 80^2 + 50^2 \rightarrow a = \sqrt{6400 + 2500} = \sqrt{8900} = 10\sqrt{89} = 94{,}34$ mm

d) $a^2 = b^2 + c^2 \xrightarrow{a=32,\, b=20} 32^2 = 20^2 + c^2 \rightarrow c = \sqrt{1024 - 400} = \sqrt{624} = 4\sqrt{39} = 24{,}98$ cm

67. Página 91

a) $a^2 = b^2 + c^2 \xrightarrow{a=2{,}7;\, b=1{,}8} 2{,}7^2 = 1{,}8^2 + c^2 \rightarrow c = \sqrt{4{,}05} = 2{,}01$ cm

b) $a^2 = b^2 + c^2 \xrightarrow{a=4{,}6;\, c=3{,}2} 4{,}6^2 = b^2 + 3{,}2^2 \rightarrow b = \sqrt{10{,}92} = 3{,}3$ cm

c) $(3+1)^2 = y^2 + 2^2 \rightarrow y^2 = 4^2 - 2^2 \rightarrow y = \sqrt{16-4} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} = 3{,}46$ cm

$2^2 = 1^2 + x^2 \rightarrow x^2 = 4 - 1 \rightarrow x = \sqrt{3} = 1{,}73$ cm

d) $4^2 = 2^2 + y^2 \rightarrow y^2 = 16 - 4 \rightarrow y = \sqrt{16-4} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} = 3{,}46$ cm

$3^2 = 2^2 + x^2 \rightarrow x^2 = 9 - 4 \rightarrow x = \sqrt{5} = 2{,}24$ cm

68. Página 91

Llamamos *h* a la altura buscada. Entonces, por el teorema de Pitágoras:

$90^2 = h^2 + 78^2 \rightarrow h = \sqrt{90^2 - 78^2} = \sqrt{2016} = 12\sqrt{14} = 44{,}9$ m

La altura del edificio es de 44,9 metros.

69. Página 91

Al ser isósceles, la altura divide a la base en dos partes iguales que forman con ella un triángulo rectángulo. Por el teorema de Pitágoras:

$10^2 = h^2 + \left(\frac{8}{2}\right)^2 \rightarrow h = \sqrt{100-16} = \sqrt{84} = 2\sqrt{21} = 9{,}17$ cm

70. Página 91

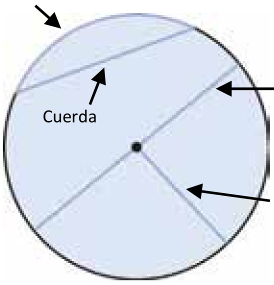
La generatriz es la hipotenusa del triángulo rectángulo que forma con el radio y la altura, *h*. Por el teorema de Pitágoras: $26^2 = 10^2 + h^2 \rightarrow h = \sqrt{676 - 100} = \sqrt{576} = 24$ cm

71. Página 91

Si el triángulo rectángulo es isósceles, el lado desigual debe ser la hipotenusa, y los dos catetos deben medir lo mismo. Por tanto, por el teorema de Pitágoras:

$20^2 = b^2 + b^2 = 2b^2 \rightarrow b = \sqrt{\frac{20^2}{2}} = \frac{20}{\sqrt{2}} = 14{,}14$ cm mide cada cateto.

72. Página 91



73. Página 91

a) Corona circular. b) Circunferencia. c) Sector circular. d) Semicírculo.

74. Página 91

a) $P = 10 + 3{,}5 + 2 + 3{,}6 + 2{,}7 = 21{,}8$ cm

b) $P = 1 + 8{,}5 + 2{,}5 + 1{,}5 + 6{,}5 = 20$ cm

c) $P = 3 + 1 + 0{,}75 + 1{,}5 + 1 + 3 = 10{,}25$ cm

d) $P = 2 \cdot 1{,}5 + 2 \cdot 1{,}2 + 2 \cdot 2{,}5 = 10{,}4$ cm

75. Página 91

a) En un hexágono regular, el lado, l, y el radio son iguales, por lo que los dos radios y el lado forman un triángulo equilátero. La altura de ese triángulo es la apotema, que divide el lado en dos partes iguales formando dos triángulos rectángulos cuya hipotenusa es el radio. Así, por el teorema de Pitágoras:

$$l^2 = \left(\frac{l}{2}\right)^2 + 6^2 \rightarrow \frac{3}{4}l^2 = 36 \rightarrow l = \sqrt{48} = 4\sqrt{3} = 6{,}93 \text{ cm}$$

$$P = 6 \cdot l \xrightarrow{l=6{,}93} P = 6 \cdot 6{,}93 = 41{,}58 \text{ cm}$$

b) $P = 9 \cdot 42 = 378$ mm

c) $P = 12 \cdot 3{,}5 = 42$ cm

d) $P = 5 \cdot 8 = 40$ cm

e) La altura divide a la base en dos partes iguales formando dos triángulos rectángulos cuya hipotenusa es el otro lado, l. Así, por el teorema de Pitágoras:

$$l^2 = \left(\frac{l}{2}\right)^2 + 5^2 \rightarrow 4l^2 - l^2 = 4 \cdot 25 \rightarrow l = \sqrt{\frac{100}{3}} = \frac{10}{\sqrt{3}} = 5{,}77 \text{ cm}$$

$$P = 3 \cdot l = 3 \cdot 5{,}77 = 17{,}31 \text{ cm}$$

76. Página 91

a) $P = 2\pi R + 2\pi r = 2\pi(R + r) \xrightarrow{R=12,5,\ r=8} P = 2\pi(12,5 + 8) = 41\pi = 128,8$ cm

b) $P = 2 \cdot r + \dfrac{2\pi r \cdot n}{360} \xrightarrow{r=15,\ n=68} P = 2 \cdot 15 + \dfrac{2\pi \cdot 15 \cdot 68}{360} = 47,8$ cm

c) $P = 2r + \pi r = (2 + \pi) \cdot r \xrightarrow{r=\frac{25}{2}=12,5} P = (2 + \pi) \cdot 12,5 = 64,27$ cm

77. Página 92

a) $A = \dfrac{n \cdot l \cdot a}{2} = \dfrac{7 \cdot 4 \cdot 4,8}{2} = 67,2\ \text{cm}^2$

b) Primero calculamos la apotema con el teorema de Pitágoras:

$$10^2 = a^2 + \left(\frac{10}{2}\right)^2 \rightarrow a = \sqrt{100 - 25} = \sqrt{75} = 5\sqrt{3} = 8,66\ \text{cm}$$

$$A = \frac{n \cdot l \cdot a}{2} = \frac{6 \cdot 10 \cdot a}{2} \xrightarrow{a=8,66} A = \frac{6 \cdot 10 \cdot 8,66}{2} = 259,8\ \text{cm}^2$$

c) $A = \dfrac{n \cdot l \cdot a}{2} = \dfrac{10 \cdot 2 \cdot 3,1}{2} = 31\ \text{cm}^2$

d) $A = \dfrac{n \cdot l \cdot a}{2} = \dfrac{5 \cdot 3 \cdot 2,1}{2} = 15,75\ \text{cm}^2$

e) $A = b \cdot h = 5 \cdot 8 = 40\ \text{cm}^2$

78. Página 92

a) $A = \dfrac{B + b}{2} \cdot h = \dfrac{7 + 3}{2} \cdot 4 = 20\ \text{cm}^2$

b) $A = \dfrac{D \cdot d}{2} = \dfrac{5 \cdot 9}{2} = 22,5\ \text{cm}^2$

c) $A = b \cdot h = 6 \cdot 2 = 12\ \text{cm}^2$

d) $A = l^2 = 8,5^2 = 72,25\ \text{cm}^2$

79. Página 92

a) $A = \pi r^2 = \pi \cdot 5,5^2 = 95,03\ \text{cm}^2$

b) $A = \pi(R^2 - r^2) = \pi(6^2 - 3^2) = 27\pi = 84,82\ \text{cm}^2$

c) $A = \dfrac{\pi r^2 \cdot n}{360} = \dfrac{\pi 10^2 \cdot 40}{360} = \dfrac{100}{9}\pi = 34,91\ \text{cm}^2$

d) $A = \dfrac{\pi r^2}{2} = \dfrac{\pi\left(\frac{84}{2}\right)^2}{2} = \dfrac{\pi \cdot 42^2}{2} = 882\pi = 2770,89\ \text{mm}^2$

80. Página 92

a) $A = l^2 \rightarrow l = \sqrt{81} = 9$ cm

b) $P = 2 \cdot l + 2 \cdot L \rightarrow 40 = 2l + 2 \cdot 16 \rightarrow l = \dfrac{8}{2} = 4\ \text{cm} \rightarrow A = l \cdot L = 4 \cdot 16 = 64\ \text{cm}^2$

c) Calculamos cuánto mide la otra diagonal aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo que forman las semidiagonales con el lado:

$$13^2 = \left(\frac{d}{2}\right)^2 + \left(\frac{10}{2}\right)^2 \rightarrow \frac{d^2}{4} = 13^2 - 5^2 \rightarrow d = \sqrt{144 \cdot 4} = 24\ \text{cm}$$

$$A = \frac{D \cdot d}{2} = \frac{24 \cdot 10}{2} = 120\ \text{cm}^2$$

d) Calculamos cuánto mide el lado aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo que forma la altura con la semibase y el lado, l, contiguo:

$$l^2 = 20^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 \rightarrow 3l^2 = 4 \cdot 20^2 \rightarrow l = \sqrt{\frac{1600}{3}} = \frac{40}{\sqrt{3}} = 23{,}09 \text{ cm}$$

$$A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{23{,}09 \cdot 20}{2} = 230{,}9 \text{ cm}^2$$

e) Los lados iguales de un triángulo rectángulo isósceles son los catetos, c. Por tanto:

$$A = \frac{c^2}{2} \rightarrow 400 = \frac{c^2}{2} \rightarrow c = \sqrt{2 \cdot 400} = 20 \cdot \sqrt{2} = 28{,}28 \text{ cm miden los catetos.}$$

Calculamos la hipotenusa, a, con el teorema de Pitágoras:

$$a^2 = 2 \cdot c^2 = 2 \cdot (20\sqrt{2})^2 = 1600 \rightarrow a = \sqrt{1600} = 40 \text{ cm mide la hipotenusa.}$$

f) Calculamos el lado, l, del cuadrado con el teorema de Pitágoras:

$$d^2 = l^2 + l^2 \rightarrow l = \sqrt{\frac{d^2}{2}} = \frac{d}{\sqrt{2}} = \frac{32}{\sqrt{2}} \text{ cm} \qquad A = l^2 = \left(\frac{32}{\sqrt{2}}\right)^2 = 512 \text{ cm}^2$$

81. Página 92

a) Prisma octogonal.

b) Pirámide cuadrangular.

c) Pirámide pentagonal.

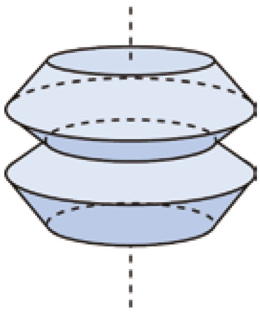
d) Prisma pentagonal.

82. Página 92

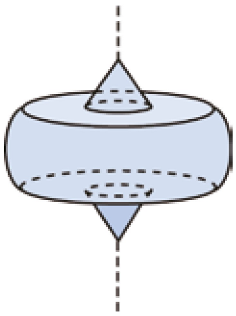
a) Sí. b) No. c) Sí. d) Sí.

83. Página 92

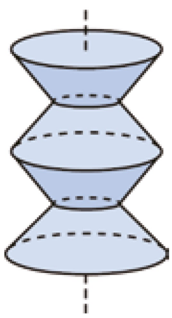
a)



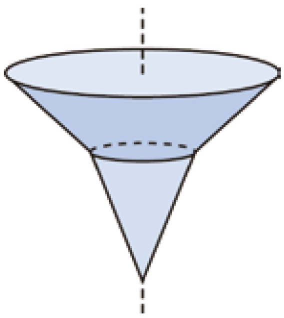
c)



b)



d)



84. Página 92

Usamos el teorema de Pitágoras para calcular el lado, *l*, de los cuadrados que forman las caras del cubo:

$$d^2 = l^2 + l^2 \rightarrow l = \sqrt{\frac{d^2}{2}} = \frac{d}{\sqrt{2}} = \frac{20}{\sqrt{2}} = 14{,}14 \text{ cm}$$

La diagonal del cubo, *D*, es la hipotenusa del triángulo rectángulo cuyos catetos son la diagonal de una cara y el lado de otra cara adyacente. Por tanto, por el teorema de Pitágoras:

$$D^2 = d^2 + l^2 = 20^2 + \left(\frac{20}{\sqrt{2}}\right)^2 = 400 + 200 \rightarrow D = \sqrt{600} = 24{,}49 \text{ cm}$$

85. Página 92

$$A = 2 \cdot A_{\text{Base}} + 4 \cdot A_{\text{Rectángulo}} = 2 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3 \cdot 9 = 126 \text{ cm}^2$$

86. Página 92

Calculamos la altura, *h*, de los triángulos laterales:

$$h^2 = 0{,}75^2 + 2^2 \longrightarrow h = \sqrt{0{,}75^2 + 2^2} = 2{,}14 \text{ m}$$

$$A = A_{\text{Base}} + 5 \cdot A_{\text{Triángulo}} = \frac{5 \cdot 1 \cdot 0{,}75}{2} + 5 \cdot \frac{1 \cdot 2{,}14}{2} = 7{,}23 \text{ m}^2$$

87. Página 92

$$A = \pi r^2 + 2\pi rh = \pi \cdot 1{,}5^2 + 2\pi \cdot 1{,}5 \cdot 2{,}5 = \frac{39}{4}\pi = 30{,}63 \text{ m}^2$$

88. Página 92

El radio mide $\frac{20}{2} = 10$ cm.

Calculamos la medida de la generatriz del cono:

$$g^2 = 12^2 + 10^2 \longrightarrow g = \sqrt{244} = 2\sqrt{61} = 15{,}62 \text{ cm}$$

$$A = \pi r^2 + \pi rg = \pi r(r + g) = \pi \cdot 10 \cdot (10 + 15{,}62) = 804{,}88 \text{ cm}^2$$

89. Página 92

Calculamos la medida de la apotema de la base:

$$4^2 = \left(\frac{4}{2}\right)^2 + a^2 \longrightarrow a = \sqrt{16 - 4} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} = 3{,}46 \text{ m}$$

$$A = 2 \cdot A_{\text{Base}} + 6 \cdot A_{\text{Rectángulo}} = 2 \cdot \frac{6 \cdot 4 \cdot 3{,}46}{2} + 6 \cdot 4 \cdot 5 = 203{,}04 \text{ m}^2$$

90. Página 92

$$V = \pi r^2 h = \pi \cdot 6{,}5^2 \cdot 8 = 338\pi = 1061{,}86 \text{ cm}^3 = 1{,}062\ \ell$$

91. Página 92

Calculamos la medida de la apotema de la base:

$$5^2 = a^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 \rightarrow a = \sqrt{5^2 - 2{,}5^2} = 4{,}33 \text{ cm}$$

$$V = \frac{n \cdot l \cdot a}{2} \cdot h = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4{,}33}{2} \cdot 8 = 519{,}6 \text{ cm}^3 = 519{,}6 \text{ ml}$$

92. Página 93

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{n \cdot l \cdot a}{2} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{5 \cdot 3 \cdot 2{,}1}{2} \cdot 7 = 36{,}75 \text{ cm}^3 = 36{,}75 \text{ ml}$$

93. Página 93

a) $V = \frac{n \cdot l \cdot a}{2} \cdot h = \frac{8 \cdot 2 \cdot 3{,}2}{2} \cdot 10 = 256 \text{ cm}^3 = 256 \text{ ml}$

b) $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{n \cdot l \cdot a}{2} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{6 \cdot 3 \cdot 2{,}6}{2} \cdot 6 = 46{,}8 \text{ cm}^3 = 46{,}8 \text{ ml}$

94. Página 93

a) $V = l^3 = 20^3 = 8\,000 \text{ cm}^3 = 8\ \ell$

b) Calculamos el lado, l, del cuadrado:

$$d^2 = l^2 + l^2 \rightarrow l = \frac{d}{\sqrt{2}} = \frac{20}{\sqrt{2}} = 14{,}14 \text{ cm} \qquad V = l^3 = \left(\frac{20}{\sqrt{2}}\right)^3 = 2828{,}43 \text{ cm}^3$$

c) Calculamos el lado, l, del cuadrado:

$$A = l^2 \rightarrow l = \sqrt{400} = 20 \text{ cm} \qquad V = l^3 = 20^3 = 8\,000 \text{ cm}^3 = 8\ \ell$$

95. Página 93

$$V = A_{\text{Base}} \cdot h \rightarrow h = \frac{V}{A_{\text{Base}}} = \frac{800}{10 \cdot 4} = 20 \text{ cm}$$

96. Página 93

Sean *a*, *b* y *c* las aristas del prisma inicial.

$$V_{\text{Prisma inicial}} = a \cdot b \cdot c \qquad V_{\text{Prisma duplicado}} = (2a) \cdot (2b) \cdot (2c) = 2^3 \cdot abc = 8V_{\text{Prisma inicial}}$$

97. Página 93

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot 54^2 \cdot 82 = 79\,704\pi = 250\,398{,}09 \text{ mm}^3 = 250{,}4 \text{ ml}$$

98. Página 93

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 3^3 = 36\pi = 113{,}1 \text{ mm}^3 = 0{,}11 \text{ ml}$$

99. Página 93

$V = \pi r^2 h = \pi \cdot 15^2 \cdot 24 = 5400\pi = 16964{,}6$ cm³ = **16,96 ℓ**

100. Página 93

$r = 3$ dm $= 30$ cm

Calculamos la altura de la pirámide:

$g^2 = r^2 + h^2 \to h = \sqrt{g^2 - r^2} = \sqrt{2500 - 900} = 40$ cm

$V = \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 h = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 30^2 \cdot 40 = 37\,699{,}2$ cm³ = **37,7 ℓ**

101. Página 93

$V_{\text{Cilindro}} = \pi r^2 h = \pi \cdot 50^2 \cdot 60 = 471240$ cm³

Sea *a* la altura del cono.

$V_{\text{Cono}} = \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 a \to a = \frac{3V_{\text{Cono}}}{\pi r^2} = \frac{3 \cdot 471240}{\pi \cdot 40^2} = 281{,}25$ cm

102. Página 93

$V = \frac{4}{3} \cdot \pi r^3 \to r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 4186{,}6}{4\pi}} = 10$ cm

103. Página 93

Sea *R* el radio de la esfera inicial.

$V_{\text{Esfera inicial}} = \frac{4}{3}\pi R^3$

$V_{\text{Esfera mitad}} = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{R}{2}\right)^3 = \frac{1}{2^3} \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{V_{\text{Esfera inicial}}}{8}$

104. Página 93

Consideramos que el poste que sostiene la pajarera es un cilindro de madera hueco, sin bases:

$A_{\text{Poste}} = 2\pi rh = 2\pi \cdot 2{,}5 \cdot 70 = 350\pi = 1099{,}56$ cm²

Para simplificar se considera que no existe la entrada de la pajarera:

$A_{\text{Habitación}} = 2 \cdot 15^2 + 3 \cdot 15 \cdot 10 = 900$ cm²

Para obtener el área del tejado, necesitamos calcular la longitud del lado del triángulo:

$l^2 = 12^2 + \left(\frac{15}{2}\right)^2 \to l = \sqrt{12^2 + 7{,}5^2} = 14{,}15$ cm

$A_{\text{Tejado}} = 2 \cdot \frac{15 \cdot 12}{2} + 2 \cdot 10 \cdot 14{,}15 = 463$ cm²

Así, la superficie total de madera necesaria para construir la pajarera es:

$A = A_{\text{Poste}} + A_{\text{Habitación}} + A_{\text{Tejado}} = 1099{,}56 + 900 + 463 = 2462{,}56$ cm² = **0,25 m²**

105. Página 93

Simplificamos el submarino considerando que está compuesto por una semiesfera, un cilindro y un cono:

$$V_{\text{Semiesfera}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{2}{3}\pi\cdot 12^3 = 1152\pi = 3619{,}11\ \text{m}^3 = \mathbf{3\,619{,}11\ kl}$$

$$V_{\text{Cilindro}} = \pi r^2 h = \pi\cdot 12^2\cdot 30 = 4320\pi = 13571{,}68\ \text{m}^3 = \mathbf{13\,571{,}68\ kl}$$

$$V_{\text{Cono}} = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi\cdot 12^2\cdot 24 = 1152\pi = 3619{,}11\ \text{m}^3 = \mathbf{3\,619{,}11\ kl}$$

Así, el volumen total aproximado del submarino es:

$$V = V_{\text{Semiesfera}} + V_{\text{Cilindro}} + V_{\text{Cono}} = 3619{,}11 + 13571{,}68 + 3619{,}11 = 20809{,}9\ \text{kl}$$

106. Página 93

a) $V_{\text{Cubo}} = l^3 = 6^3 = 216\ \text{cm}^3$ $\qquad V_{\text{Pirámide}} = \frac{1}{3}\cdot A_{\text{Base}}\cdot h = \frac{1}{3}\cdot 6^2\cdot 3 = 36\ \text{cm}^3$

$$V = V_{\text{Cubo}} - V_{\text{Pirámide}} = 216 - 36 = 180\ \text{cm}^3 = \mathbf{18\ cl}$$

b) La figura es un cubo al que se le ha quitado una pirámide triangular cuyas caras laterales son triángulos rectángulos isósceles de catetos 4 cm.

Calculamos el lado, l, de la base:

$$l^2 = 4^2 + 4^2 = 32 \to l = \sqrt{32} = 5{,}66\ \text{cm}$$

Calculamos la altura, a, de la base:

$$l^2 = a^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 \to a^2 = (\sqrt{32})^2 - \left(\frac{\sqrt{32}}{2}\right)^2 = 24 \to a = \sqrt{24} = 4{,}9\ \text{cm}$$

Sea b la arista lateral de la pirámide. Calculamos la altura, h, de la pirámide:

$$b^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \to h = \sqrt{b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{4^2 - \left(\frac{\sqrt{24}}{2}\right)^2} = \sqrt{10} = 3{,}16\ \text{cm}$$

$V_{\text{Pirámide}} = \frac{1}{3}\cdot A_{\text{Base}}\cdot h = \frac{1}{3}\cdot\frac{5{,}66\cdot 4{,}9}{2}\cdot 3{,}16 = 14{,}61\ \text{cm}^3$ $\qquad V_{\text{Cubo}} = l^3 = 8^3 = 512\ \text{cm}^3$

$$V = V_{\text{Cubo}} - V_{\text{Pirámide}} = 512 - 14{,}61 = 497{,}39\ \text{cm}^3 = \mathbf{497{,}39\ ml}$$

107. Página 93

Cada pirámide es cuadrangular de lado de la base 10 cm. La altura de la base es la mitad del lado del cubo. Por tanto:

$$V = \frac{1}{3}\cdot A_{\text{Base}}\cdot h = \frac{1}{3}\cdot 10^2\cdot\left(\frac{10}{2}\right) = 166{,}67\ \text{cm}^3 = \mathbf{166{,}67\ ml}$$

108. Página 93

Pieza amarilla:

Está formada por un cilindro y un cono.

$V_{\text{Cilindro}} = A_{\text{Base}}\cdot h = \pi r^2\cdot h = \pi\cdot\left(\frac{8}{2}\right)^2\cdot 6 = 301{,}59\ \text{cm}^3$ $\qquad V_{\text{Cono}} = \frac{1}{3}A_{\text{Base}}\cdot h = \frac{1}{3}\cdot\pi\cdot\left(\frac{8}{2}\right)^2\cdot 6 = 100{,}53\ \text{cm}^3$

$V = V_{\text{Cilindro}} + V_{\text{Cono}} = 301{,}59 + 100{,}53 = 402{,}12\ \text{cm}^3 = \mathbf{402{,}12\ ml}$

Pieza violeta:

Está formada por un prisma rectangular y un cilindro.

$V_{\text{Prisma}} = A_{\text{Base}} \cdot h = 60 \cdot 40 \cdot 80 = 192000\ \text{cm}^3$

$V_{\text{Cilindro}} = A_{\text{Base}} \cdot h = \pi r^2 \cdot h = \pi \cdot \left(\frac{120}{2}\right)^2 \cdot 12 = 135717{,}12\ \text{cm}^3$

$V = V_{\text{Prisma}} + V_{\text{Cilindro}} = 192000 + 135717{,}12 = 327717{,}12\ \text{cm}^3 = \mathbf{327{,}717\ \ell}$

SABER HACER

Diseñar una reforma. Página 94

a) La longitud total del seto la obtendremos del perímetro del jardín:

$P = 2{,}8 + 3 + 7{,}1 + 5{,}9 + 9{,}3 + 6{,}3 + 2{,}5 + 4{,}5 + 3{,}4 = 44{,}8\ \text{m}$

b) La longitud total que se cubrirá con baldosas es el perímetro de la piscina. Como en el hexágono el radio es igual al lado:

$P_{\text{Piscina}} = 2 \cdot 7 + \frac{2 \cdot 0{,}75\pi}{2} + 3 \cdot 0{,}75 = 18{,}6\ \text{m}$

c) Para hallar el volumen total hay que obtener la apotema del hexágono:

$0{,}75^2 = a^2 + \left(\frac{0{,}75}{2}\right)^2 \rightarrow a = \sqrt{0{,}75^2 - 0{,}375^2} = 0{,}65\ \text{m}$

$V = V_{\text{Ortoedro}} + \frac{1}{2} \cdot V_{\text{Cilindro}} + \frac{1}{2} \cdot V_{\text{Prisma hexagonal}} = 3 \cdot 7 \cdot 1{,}85 + \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 0{,}75^2 \cdot 1{,}85 + \frac{1}{2} \cdot \frac{6 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}65}{2} \cdot 1{,}85 = 41{,}84\ \text{m}^3 = \mathbf{41\,840\ \ell}$

d) Para hallar la superficie de lona, necesitamos conocer el área de la base de la piscina:

$A = A_{\text{Rectángulo}} + \frac{1}{2} \cdot A_{\text{Círculo}} + \frac{1}{2} \cdot A_{\text{Hexágono}} = 7 \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 0{,}75^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{6 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}65}{2} = 22{,}61\ \text{m}^2$

e) $22{,}61 \cdot 7 = 158{,}27$ € costará la lona.

f) Para calcular la superficie total de cristal necesitamos obtener la apotema, *h*, de la pirámide:

$h^2 = 1{,}7^2 + 1{,}5^2 \rightarrow h = \sqrt{1{,}7^2 + 1{,}5^2} = 2{,}27\ \text{m}$

Suponemos que el invernadero no tiene suelo de cristal y que el vuelo del tejado sí que es de cristal para formar un espacio cerrado.

$A_{\text{Cristal}} = 8 \cdot A_{\text{Rectángulo}} + 8 \cdot A_{\text{Triángulo}} + A_{\text{vuelo}} = 8 \cdot 1{,}2 \cdot 2 + 8 \cdot \frac{1{,}4 \cdot 2{,}27}{2} + \frac{8 \cdot 1{,}4 \cdot 1{,}7}{2} - \frac{8 \cdot 1{,}2 \cdot 1{,}4}{2} = 34{,}712\ \text{m}^2$

g) El volumen del invernadero ocupará:

$V_{\text{Invernadero}} = V_{\text{Prisma}} + V_{\text{Pirámide}} = \frac{8 \cdot 1{,}2 \cdot 1{,}4}{2} \cdot 2 + \frac{1}{3} \cdot \frac{8 \cdot 1{,}4 \cdot 1{,}7}{2} \cdot 1{,}5 = 18{,}2\ \text{m}^3 = \mathbf{18{,}2\ kl}$