Semejanza. Aplicaciones

6

PUNTO DE PARTIDA

La altura del original es $4{,}5 \cdot 25 = 112{,}5$ metros.

ACTIVIDADES

1. Página 96

$$\frac{x}{3} = \frac{3{,}5}{4} \rightarrow x = \frac{3 \cdot 3{,}5}{4} = 2{,}625 \text{ cm}$$

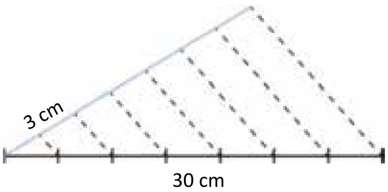
2. Página 96

$$\overline{OB'} = \overline{OA'} + \overline{A'B'} = 28 + 22 = 50 \text{ m}$$

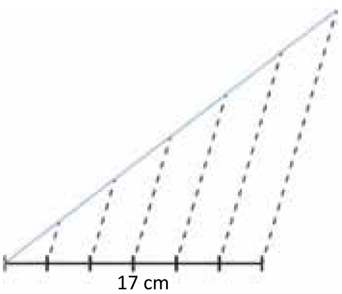
$$\frac{40}{50} = \frac{\overline{AB}}{22} \rightarrow \overline{AB} = \frac{40 \cdot 22}{50} = 17{,}6 \text{ m}$$

3. Página 97

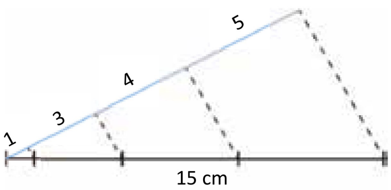
Como el trozo de regla tiene marcas que equidistan unas de otras y además mide 21 cm y las marcas están cada 3 cm, habrá 7 marcas, y puede usarlo para aplicar el teorema de Tales. Para ello, pone el trozo de 21 cm en uno de los extremos del listón que quiere cortar formando con él un ángulo cualquiera y une la séptima marca con el otro extremo. A partir de ahí, traza paralelas por cada una de las muescas de 3 cm.



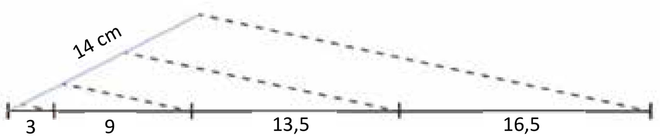
4. Página 97



5. Página 97



6. Página 97



$\overline{OD'} = 3 + 9 + 13{,}5 + 16{,}5 = 42$ cm

$\frac{14}{42} = \frac{\overline{OA}}{3} \rightarrow \overline{OA} = 1$ cm $\qquad \frac{14}{42} = \frac{\overline{AB}}{9} \rightarrow \overline{AB} = 3$ cm

$\frac{14}{42} = \frac{\overline{BC}}{13{,}5} \rightarrow \overline{BC} = 4{,}5$ cm $\qquad \frac{14}{42} = \frac{\overline{CD}}{16{,}5} \rightarrow \overline{CD} = 5{,}5$ cm

7. Página 98

Son semejantes porque se pueden colocar en posición de Tales, es decir, sus lados son proporcionales, y sus ángulos, iguales.

8. Página 98

$\frac{8}{a} = \frac{5}{3{,}5} \rightarrow a = 5{,}6$ cm

$\frac{7}{b} = \frac{5}{3{,}5} \rightarrow b = 4{,}9$ cm

9. Página 99

a) $\widehat{A} = 30°,\ \widehat{B} = 70°,\ \widehat{C} = 180° - 70° - 30° = 80°$

$\widehat{A} = 80°,\ \widehat{B} = 70°,\ \widehat{C} = 180° - 80° - 70° = 30°$

Como ambos triángulos tienen dos ángulos iguales (de hecho tienen los tres), el segundo criterio asegura que son semejantes.

b) $\frac{10}{12{,}5} = \frac{12}{15} = \frac{16}{20} = 0{,}8$

Como todos los lados son proporcionales, por el tercer criterio se puede afirmar que son triángulos semejantes.

c) $\frac{6}{7{,}5} \neq \frac{8}{11{,}25}$

Aunque comparten un ángulo, los lados que lo forman no son proporcionales. Por tanto, no se cumple ningún criterio y no son semejantes.

10. Página 99

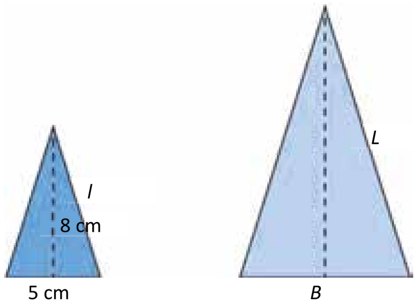
En el triángulo mayor, tenemos: a = hipotenusa $\qquad b$ y c = catetos

$\frac{b}{4} = 1{,}6 \rightarrow b = 4 \cdot 1{,}6 = 6{,}4$ cm

$\frac{c}{7} = 1{,}6 \rightarrow c = 7 \cdot 1{,}6 = 11{,}2$ cm

Por el teorema de Pitágoras: $a^2 = b^2 + c^2 \xrightarrow{b=6{,}4;\,c=11{,}2} a^2 = 6{,}4^2 + 11{,}2^2 \rightarrow a = 12{,}9$ cm.

11. Página 99



$l^2 = 8^2 + 2{,}5^2 \longrightarrow l = 8{,}38$ cm

Ahora, obtenemos la medida de los lados del triángulo semejante: $B = 1{,}8 \cdot 5 = 9$ y $L = 1{,}8 \cdot 8{,}38 = 15{,}084$

Entonces, el perímetro del triángulo mayor es:

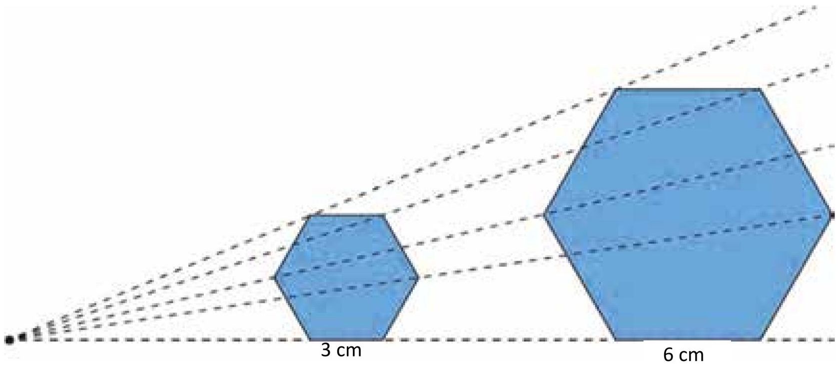
$P = 2 \cdot L + B = 2 \cdot 15{,}084 + 9 = 39{,}168$

12. Página 100

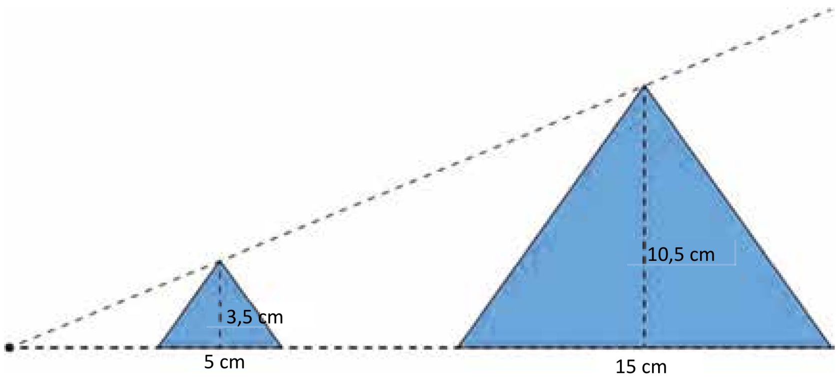
a) Son proporcionales de razón 2,5.

b) No son proporcionales, los dos lados que forman el ángulo cóncavo no parecen formar el mismo ángulo, si comprobamos su relación de proporcionalidad tenemos que $\frac{3}{1} \neq \frac{4}{1{,}3}$, por lo tanto no serán semejantes.

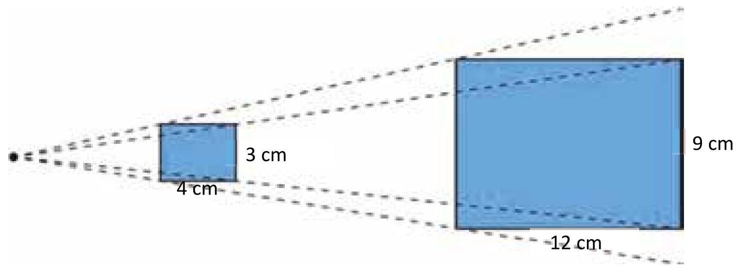
13. Página 100



14. Página 100



15. Página 100



16. Página 101

$$\frac{P_H}{P_{H'}} = \frac{7 \cdot 3}{7 \cdot 0{,}5} = 6$$

17. Página 101

$$\frac{A_P}{A_{P'}} = \frac{\frac{5 \cdot 5 \cdot 3{,}75}{2}}{\frac{5 \cdot 2 \cdot 1{,}5}{2}} = 6{,}25$$

18. Página 101

$$\frac{P_R}{P_{R'}} = \frac{2 \cdot 15 + 2 \cdot 12}{2 \cdot 5 + 2 \cdot 4} = 3$$

$$\frac{A_R}{A_{R'}} = \frac{12 \cdot 15}{4 \cdot 5} = 9 = 3^2$$

19. Página 101

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{l^2}{2{,}5^2} = 16 \rightarrow l = \sqrt{16 \cdot 2{,}5^2} = \sqrt{100} = 10 \text{ cm}$$

$$\frac{P_1}{P_2} = \sqrt{16} = 4$$

20. Página 101

$$r = \sqrt{9} = 3$$

La proporción a la que se encuentran las longitudes de los catetos es $\frac{3}{1}$.

Es la misma que la formada por las hipotenusas.

21. Página 102

$$\frac{2 \cdot \pi \cdot 10{,}5}{2 \cdot \pi \cdot 3{,}5} = 3$$

Por la parte exterior se recorre una distancia que triplica a la recorrida por la parte exterior.

22. Página 102

$$r = \frac{P_1}{P_2} = 2 \rightarrow \frac{A_1}{A_2} = 2^2 \rightarrow A_2 = \frac{A_1}{4} = \frac{120}{4} = 30 \text{ cm}^2$$

23. Página 103

$4 \cdot 300\,000 = 1\,200\,000$ cm $= 12$ km

24. Página 103

$$\frac{350}{17{,}5} = 20$$

$$\frac{780}{39} = 20$$

La escala es 1:20.

25. Página 103

5 km = 500 000 cm

La escala es 1:500 000.

ACTIVIDADES FINALES

26. Página 104

a) $\dfrac{2}{1{,}75} = \dfrac{4{,}5}{x} \rightarrow x = \dfrac{1{,}75 \cdot 4{,}5}{2} = 3{,}94$ cm

b) $\dfrac{2}{3{,}5} = \dfrac{x}{4{,}2} \rightarrow x = \dfrac{2 \cdot 4{,}2}{3{,}5} = 2{,}4$ cm

c) $\dfrac{3{,}2}{4{,}5} = \dfrac{x}{1{,}5} \rightarrow x = \dfrac{3{,}2 \cdot 1{,}5}{4{,}5} = 1{,}07$ cm

d) $\dfrac{4}{5} = \dfrac{3}{x} \rightarrow x = \dfrac{5 \cdot 3}{4} = 3{,}75$ cm

27. Página 104

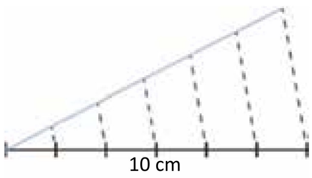
$$\frac{69{,}56}{68{,}12} = \frac{39{,}66}{x} \rightarrow x = \frac{68{,}12 \cdot 39{,}66}{69{,}56} = 38{,}84 \text{ cm}$$

28. Página 104

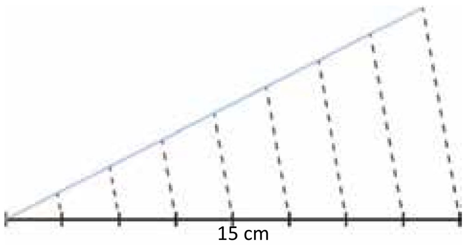
$$\frac{x}{50} = \frac{75}{67} \rightarrow x = \frac{50 \cdot 75}{67} = 55{,}97 \text{ m}$$

29. Página 104

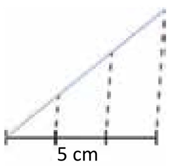
a)



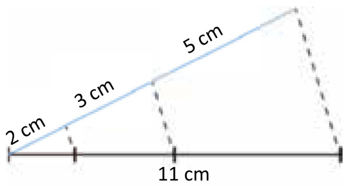
b)



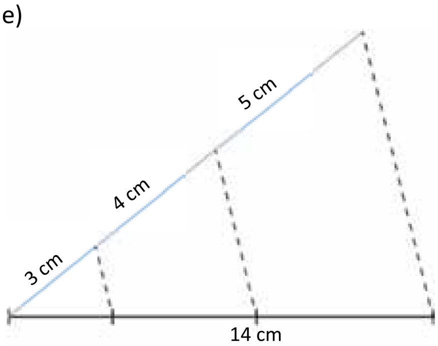
c)



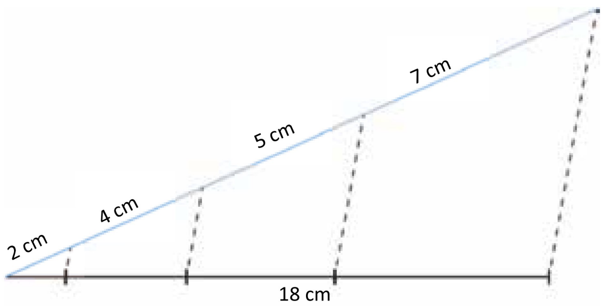
d)



e)



f)



30. Página 104

Son semejantes porque al superponerlos se observa que están en posición de Tales: un ángulo es igual y los lados no coincidentes son paralelos.

a) $\frac{3{,}5}{4{,}5}=\frac{2}{x} \rightarrow x=\frac{4{,}5\cdot 2}{3{,}5}=2{,}57$ cm

b) $\frac{x}{5}=\frac{4+1{,}25}{4} \rightarrow x=\frac{5\cdot 5{,}25}{4}=6{,}56$ cm

c) $\frac{20}{12}=\frac{x+4}{x} \rightarrow 20x=12x+48 \rightarrow 8x=48 \rightarrow x=6$ cm

$\frac{20}{12}=\frac{y+5}{5} \rightarrow 100=12y+60 \rightarrow 12y=40 \rightarrow y=3{,}33$ cm

31. Página 104

a) $\frac{7,2}{4} = \frac{9}{5} = \frac{4,5}{2,5} = 1,8$

Son semejantes porque los tres lados son proporcionales (tercer criterio). La razón es 1,8.

b) $\frac{3}{2} = \frac{4,5}{3} \neq \frac{5}{3,5}$ No son semejantes porque los tres lados no son proporcionales.

c) $\frac{4,6}{3,5} \neq \frac{5}{4}$ No son semejantes porque sus lados no son proporcionales.

d) $\frac{2,1}{1,5} = \frac{4,2}{3} = \frac{5,6}{4} = 1,4$

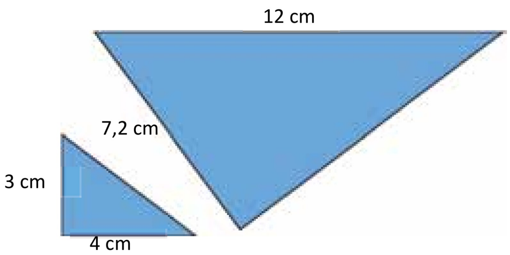
Son semejantes porque los tres lados son proporcionales (tercer criterio). La razón es 1,4.

32. Página 104

Por ser un triángulo rectángulo, la hipotenusa del triángulo de catetos 3 y 4 cm tiene que medir:
$h^2 = 3^2 + 4^2 \rightarrow h = 5$

Ahora calculamos la constante de proporcionalidad: $\frac{12}{5} = 2,4$

El cateto proporcional a 7,2 será el de $\frac{7,2}{2,4} = 3$ cm. Por lo tanto el cateto que queda del triángulo más grande mide $4 \cdot 2,4 = 9,6$ cm, que además cumple el teorema de Pitágoras ya que $12^2 = 9,6^2 + 7,2^2$.



33. Página 105

a) $\frac{2,1}{3,5} = \frac{3,6}{6} = 0,6$

Son semejantes por compartir el ángulo de 90° y por ser proporcionales los lados que lo forman.

La razón de semejanza es 0,6.

b) Calculamos el lado desconocido en cada triángulo rectángulo:

$5^2 = 3^2 + l^2 \rightarrow l = 4$ cm

$9^2 = 5,4^2 + L^2 \rightarrow L = 7,2$ cm

Vemos si los lados que forman el ángulo de 90° son proporcionales: $\frac{5,4}{3} = \frac{7,2}{4} = 1,8$

Por tanto, el primer criterio asegura que son semejantes.

La razón de semejanza es 1,8.

c) Calculamos el lado desconocido en cada triángulo rectángulo:

$4{,}5^2 = 3{,}3^2 + L^2 \rightarrow L = 3{,}06$ cm

$3^2 = 0{,}9^2 + l^2 \rightarrow l = 2{,}86$ cm

Vemos si los lados que forman el ángulo de 90º son proporcionales: $\frac{3{,}3}{0{,}9} \neq \frac{3{,}06}{2{,}86}$

Por tanto, no son semejantes.

d) $\frac{2}{0{,}8} = \frac{6}{2{,}4} = 2{,}5$

Son semejantes por compartir el ángulo de 90º y por ser proporcionales los lados que lo forman.

La razón de semejanza es 2,5.

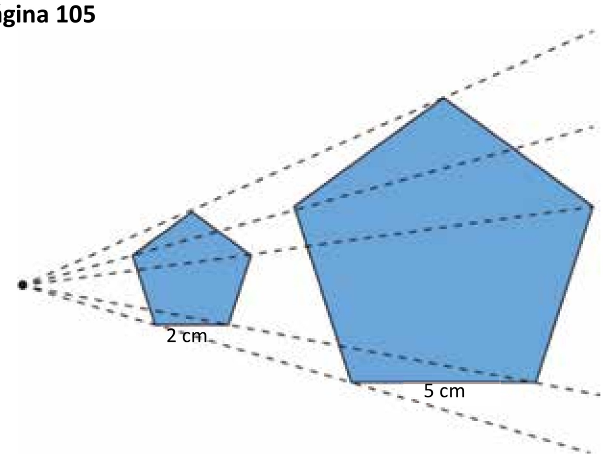
34. Página 105

a) $\frac{4{,}8}{2{,}88} \neq \frac{5{,}1}{3{,}6}$ $\rightarrow$ No son semejantes.

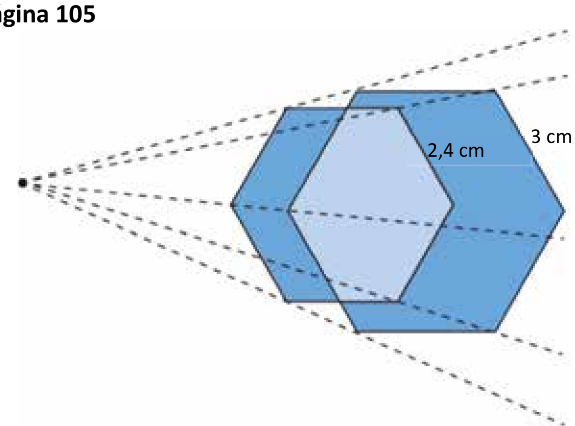
b) $\frac{3{,}4}{1{,}7} \neq \frac{3{,}4}{1{,}8}$ $\rightarrow$ No son semejantes.

c) $\frac{48}{33{,}4} \neq \frac{20}{16}$ $\rightarrow$ No son semejantes.

35. Página 105

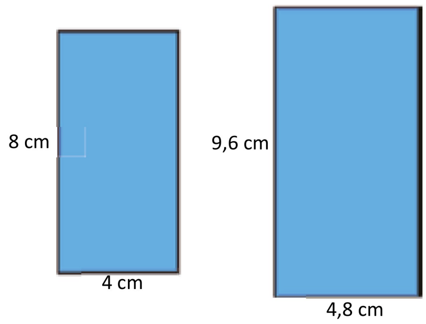


36. Página 105

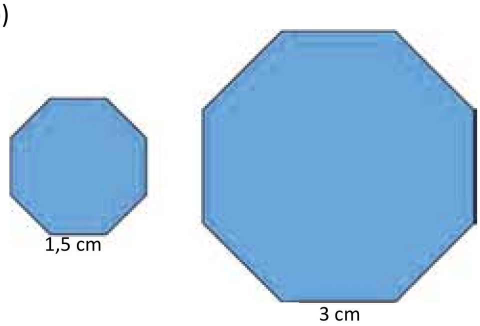


37. Página 105

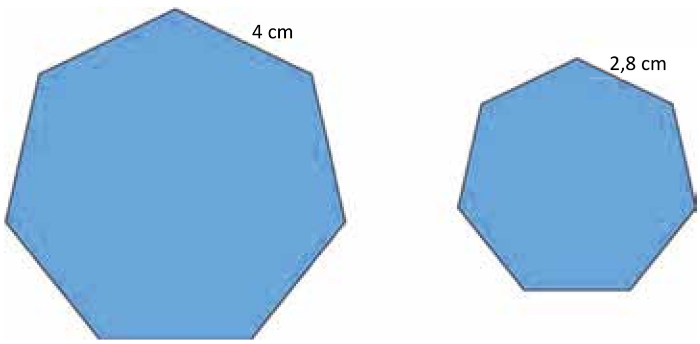
a)



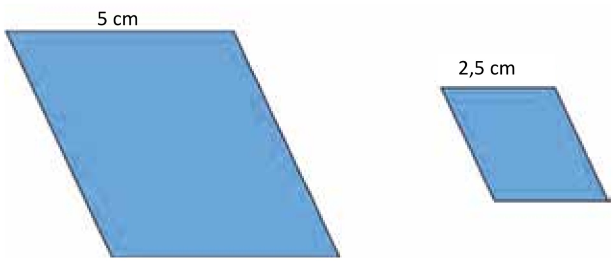
b)



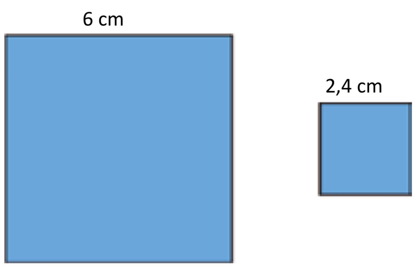
c)



d)



e)



38. Página 105

a) $\frac{7}{2,8}=\frac{1,5}{0,6}=2,5$ ⟶ Son semejantes. Su razón de semejanza es 2,5.

b) $\frac{16}{12}=\frac{18}{13,5}=\frac{30}{22,5}\neq\frac{20}{14}$ ⟶ No son semejantes.

c) $\frac{10}{6}=\frac{8,5}{5,1}=\frac{1,25}{0,75}=\frac{4}{2,4}=1,67$ ⟶ Son semejantes. Su razón de semejanza es 1,67.

39. Página 105

a) Cierto, pues todos los lados serán proporcionales al ser los 4 lados iguales.

b) Falso. Se puede tener un triángulo equilátero, que es isósceles, y un triángulo rectángulo isósceles. Los ángulos de ambos no son iguales, por lo que no serán proporcionales.

c) Cierto, pues todos los lados serán proporcionales al ser los 3 lados iguales.

d) Cierto, pues todos los lados serán proporcionales al ser los 5 lados iguales.

40. Página 106

El perímetro del cuadrilátero dado es 3 + 2 + 4 + 1 = 10 cm.

El perímetro del nuevo cuadrilátero será 10 · 1,6 = 16 cm.

41. Página 106

$\frac{P_2}{P_1}=\frac{54}{30}=1,8 \longrightarrow r=1,8$

$\frac{A_2}{A_1}=1,8^2 \longrightarrow \frac{A_2}{26}=1,8^2 \longrightarrow A_2=1,8^2\cdot 26=84,24\text{ cm}^2$

42. Página 106

$\frac{A_1}{A_2}=\frac{A_1}{\frac{1}{9}A_1}=9 \longrightarrow r=\sqrt{9}=3$

$\frac{6}{a}=3 \longrightarrow a=\frac{6}{3}=2\text{ cm}$

$\frac{12}{b}=3 \longrightarrow b=\frac{12}{3}=4\text{ cm}$

$\frac{15}{c}=3 \longrightarrow c=\frac{15}{3}=5\text{ cm}$

43. Página 106

$P_1=4+5+8+9+3+7=36\text{ cm}$

$\frac{P_2}{P_1}=\frac{63}{36}=1,75 \longrightarrow r=1,75$

Los lados del polígono semejante son:

1,75 · 4; 1,75 · 5; 1,75 · 8; 1,75 · 9; 1,75 · 3; 1,75 · 7 cm

Es decir:

7; 8,75; 14; 15,75; 5,25 y 12,25 cm

44. Página 106

Aplicamos el teorema de Pitágoras para calcular el lado del triángulo: $9^2 + 3^2 = l^2 \longrightarrow l = 9{,}49$ cm

El perímetro del triángulo es $2 \cdot 9{,}49 + 6 = 24{,}98$ cm. El perímetro del nuevo triángulo es $24{,}98 \cdot 2{,}1 = 52{,}458$ cm.

La razón entre áreas es $2{,}1^2 = 4{,}41$ cm.

El área del triángulo inicial es $\frac{6 \cdot 9}{2} = 27$ cm^2, luego el área del nuevo triángulo es $27 \cdot 4{,}41 = 119{,}07$ cm^2.

45. Página 106

La razón entre los perímetros es la misma razón que entre los lados, de modo que el lado del hexágono grande es: $2{,}5 \cdot 3{,}2 = 8$ cm.

46. Página 106

La razón entre las distancias es la raíz cuadrada de la razón entre las áreas, es decir $\frac{5}{4}$.

Por lo que la altura del más pequeño es $24 \cdot \frac{4}{5} = 19{,}2$ cm.

47. Página 106

$$\frac{64}{20} = \frac{100}{x} \longrightarrow x = 31{,}25$$

Si usa todo el ancho de la cartulina, la longitud debe ser 31,25 cm.

47. Página 106

$$\frac{64}{20} = \frac{100}{x} \longrightarrow x = 31{,}25$$

Si usa todo el ancho de la cartulina, la longitud debe ser 31,25 cm.

48. Página 106

a) $h^2 + 3^2 = 5^2 \longrightarrow h = 4$ m

La altura de la antena es 4 m.

b) $\frac{3}{4} = \frac{4}{d} \longrightarrow d = 5{,}33$ m

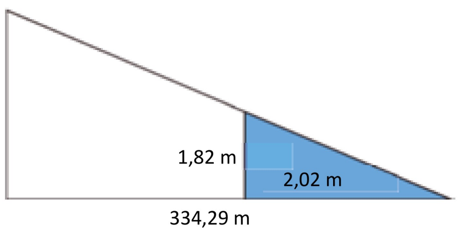
La distancia pedida es 5,33 m.

49. Página 106

Colocamos los triángulos formados por la torre Eiffel y su sombra, y el turista y su sombra en posición de Tales (el ángulo de incidencia del Sol es el mismo).

$$\frac{334{,}29}{2{,}02} = \frac{x}{1{,}82} \longrightarrow x = 301{,}19$$

La torre Eiffel mide 301,19 m.



50. Página 106

El perímetro de estos cristales de 4 mm = 0,4 cm de lado es 0,4 · 4 = 1,6 cm.

Ha aumentado el tamaño 24 : 1,6 = 15 veces.

51. Página 106

El área del mapa en el ordenador es 27 · 19 = 513 cm^2 = 0,0513 m^2.

La relación entre las áreas es $\frac{2,8}{0,0513} = 54,58$. Como la proporción entre áreas es el cuadrado de la proporción de las distancias, la proporción entre los lados de la pantalla y el ordenador será $\sqrt{54,58} = 7,39$, por lo que los lados de la pantalla serán 27 · 7,39 = 199,53 cm y 19 · 7,39 = 140,41 cm.

52. Página 106

El área de la parte exterior es $\pi \cdot 12^2 = 452,16$ cm^2.

El área de la parte interior será $\frac{9}{16} \cdot 452,16 = 254,34$ cm^2.

53. Página 106

$\frac{1,5}{6} = \frac{x}{1} \longrightarrow x = 0,25$.

Se disminuye a razón de $\frac{1}{4}$.

54. Página 106

Las dimensiones de la réplica del armario serán 180 : 12 = 15 cm, 110 : 12 = 9,167 cm, 60 : 12 = 5 cm.

Las dimensiones de la réplica de la cómoda serán 120 : 12 = 10 cm, 80 : 12 = 6,67 cm, 45 : 12 = 3,75 cm.

55. Página 107

La altura del arco auténtico es 10 · 500 = 5 000 cm = 50 m.

56. Página 107

La réplica mide 46 : 4 = 11,5 m.

57. Página 107

a) 1:100 000

b) 160 km = 1 600 000 dm. La escala es 1:2 000 000 ya que $\frac{1600000}{0,8} = 2000000$.

58. Página 107

Están separadas 45 000 000 : 1 500 000 = 30 cm en el mapa.

59. Página 107

a) 1 380 : 11,5 = 120. La escala es 120:1.

b) La botella del cartel mide 22 cm, por lo que en la realidad mediría 22 : 120 = 0,18 cm.

60. Página 107

$\frac{6,2}{37\,200\,000} = \frac{1}{x} \rightarrow x = 6\,000\,000$

La escala es 1: 6 000 000.

61. Página 107

a) 50 km = 5 000 000 cm en la realidad son 5 000 000 : 250 000 = 20 cm en el mapa.

b) Si reducimos un 20 %, distan 20 · 0,8 = 16 cm

c) Si aumentamos un 20 % distan 20 · 1,2 = 24 cm

d) Para la fotocopia reducida la escala es $\frac{16}{5\,000\,000} = \frac{1}{x} \rightarrow x = 312\,500$; 1:312 500.

Para la fotocopia ampliada la escala es $\frac{24}{5\,000\,000} = \frac{1}{x} \rightarrow x = 208\,333$; 1:208 333.

62. Página 107

La distancia real es 6 · 500 000 = 3 000 000 cm = 30 km.

En una escala de 1:60 000 la distancia en el mapa es 3 000 000 : 60 000 = 50 cm.

63. Página 107

La estantería con dos puertas mide 1,5 cm, por lo que en la realidad será 1,5 · 20 = 30 cm.

La furgoneta mide 1,6 cm, por lo que en la realidad medirá 1,6 · 10 = 16 cm, es una furgoneta de juguete.

La casa mide 1,6 cm, por lo que en la realidad medirá 1,6 · 25 = 40 cm, es una maqueta.

64. Página 107

La longitud real es 4,2 m = 420 cm, por lo que a escala 1:200 la longitud será 420 : 200 = 2,1 cm y a escala 1:400 será 420 : 400 = 1,05 cm.

65. Página 107

Al usar esa escala, las dimensiones del huerto de 75 m = 7 500 cm y 34 m = 3 400 cm quedarán 7 500 : 150 = 50 cm y 3 400 : 150 = 22,67 cm.

Las dimensiones de un DIN A4 son 21 × 29,7 cm, por lo que no será posible dibujar el huerto a esa escala en un DIN A4.

SABER HACER

Página 108

a) 18,5 m = 1 850 cm, que en un espacio de 38 cm quedaría 1 850 : 38 = 48,68, y 9 m = 900 cm, que en un espacio de 20 cm quedaría 900 : 20 = 45. Por lo tanto, podríamos usar una escala de 1:49 para que quepa tanto a lo ancho como a lo largo.

b) Las medidas con escala serán 1 850 : 49 = 37,76 cm y 900 : 49 = 18,37 cm.

c) 600 : 49 = 12,24 cm y 350 : 49 = 7,14 cm

d) La razón de las distancias es 1/49 = 0,02, por lo que la razón de las áreas será $0{,}02^2 = 0{,}0004$. Así la superficie del baño será $60\,000\ cm^2 \cdot 0{,}0004 = 24\ cm^2$.

e) Calculamos el área en la maqueta. Es el área de un rectángulo de $3{,}6 \times 4{,}5$ y un cuadrado de $1{,}8 \times 1{,}8$. El área total es $16{,}2 + 3{,}24 = 19{,}44\ cm^2$. Esta área en la medida real es $19{,}44 : 0{,}0004 = 48\,600\ cm^2 = 4{,}86\ m^2$.