4 Inecuaciones y sistemas

PIENSA Y CONTESTA

¿Qué montaña rusa alcanza mayor altura? ¿Y mayor velocidad?

La montaña rusa que alcanza mayor altura es la *Kingda Ka*, que mide 139 m. La montaña rusa que alcanza mayor velocidad es la *Formula Rossa*, que alcanza una velocidad de 240 km/h.

¿Qué más variables crees que se deben tener en cuenta?

Además de la altura de las caídas verticales y la velocidad máxima, se deben tener en cuenta otras variables como la aceleración máxima, radios de curvas…

¿Qué es una montaña rusa invertida?

Una montaña rusa invertida es aquella montaña rusa en la que los vagones o coches van colgados sobre los raíles y los pies de los ocupantes cuelgan al vacío.

ANALIZA Y SACA CONCLUSIONES

¿Qué velocidades puede alcanzar la *Steel Dragon 2000*? ¿Cómo lo expresarías?

La *Steel Dragon 2000* lleva una velocidad media de $v = \dfrac{2479\text{ m}}{4 \cdot 60\text{ s}} = 10{,}33\text{ m/s}$

Estima cuánto tiempo puede transcurrir como máximo en cada zona de la *Kingda Ka*. Analizad las respuestas en grupo y estableced una única conclusión.

Respuesta libre.

Piensa en alguna montaña rusa que conozcas, ¿sabes qué velocidad máxima alcanza? ¿Y qué altura?

Respuesta libre.

Actividades propuestas

1. Plantea como ecuaciones o inecuaciones.

a) Tres cafés cuestan más de 4 euros.

b) Cuatro vasos de agua son menos de un litro.

c) Un bollo cuesta 1,20 euros y por tres cafés y un bollo he pagado 5,70 euros.

d) El perímetro de un triángulo equilátero es mayor de 10 centímetros.

e) La medida del lado de un triángulo si los otros dos lados mide 5 cm y 7 cm.

a) Llamando x al precio de un café, $3x > 4$.

b) Llamando x a la capacidad, en litros, de un vaso de agua, $4x < 1$.

c) Llamando x al precio de un café, $1{,}20 + 3x = 5{,}70$.

d) Llamando x a la medida, en centímetros, del lado del triángulo, $3x > 10$.

e) Llamando x a la medida del lado del triángulo:

- $7 < x + 5 \Rightarrow 2 < x$
- $x < 5 + 7 \Rightarrow x < 12$
- $5 < x + 7 \Rightarrow$ Siempre se cumple.

El lado del triángulo debe medir más de 2 cm y menos de 12 cm.

Es decir, $2 < x < 12$.

2. Partiendo siempre de la desigualdad $6x - 12 < 18$, copia en tu cuaderno y completa la siguiente tabla.

Resta 6	**$6x - 18 < 12$**
●●●	**$12x - 24$ ● 36**
●●●	**$3x - 6$ ● 9**
●●●	**$-2x + 4$ ● -6**
●●●	**$4x - 22$ ● $8 - 2x$**

Resta 6	$6x - 18 < 12$
Multiplica por 2	$12x - 24 < 36$
Divide entre 2	$3x - 6 < 9$
Divide entre –3	$-2x + 4 > -6$
Resta $2x + 10$	$4x - 22 < 8 - 2x$

3. Resuelve las inecuaciones siguientes.

a) $3(x - 5) - 5 > 5(x + 1) - 1$

b) $x - 2(x + 3) > -5 + 19x$

c) $\frac{5x-2}{2} - 3(x-1) \geq -\frac{x+6}{10}$

d) $\frac{3x-1}{2} - \frac{2x+3}{3} \leq \frac{x+5}{6}$

a) $3(x - 5) - 5 > 5(x + 1) - 1 \Rightarrow 3x - 15 - 5 > 5x + 5 - 1 \Rightarrow -15 - 5 + 1 - 5 > 5x - 3x \Rightarrow -24 > 2x \Rightarrow -12 > x \Rightarrow$

$\Rightarrow x \in (-\infty, -12)$

b) $x - 2(x + 3) > -5 + 19x \Rightarrow x - 2x - 6 > -5 + 19x \Rightarrow -6 + 5 > 2x - x + 19x \Rightarrow -1 > 20x \Rightarrow$

$\Rightarrow x < \frac{-1}{20} \Rightarrow x \in \left(-\infty, \frac{-1}{20}\right)$

c) $\frac{5x-2}{2} - 3(x-1) \geq -\frac{x+6}{10} \Rightarrow 25x - 10 - 30x + 30 \geq -x - 6 \Rightarrow -10 + 30 + 6 \geq -x - 25x + 30x \Rightarrow 26 \geq 4x \Rightarrow$

$\Rightarrow x \leq \frac{26}{4} = \frac{13}{2} \Rightarrow x \in \left(-\infty, \frac{13}{2}\right]$

d) $\frac{3x-1}{2} - \frac{2x+3}{3} \leq \frac{x+5}{6} \Rightarrow 9x - 3 - 4x - 6 \leq x + 5 \Rightarrow 9x - 4x - x \leq 5 + 3 + 6 \Rightarrow 4x \leq 14 \Rightarrow x \leq \frac{14}{4} = \frac{7}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow x \in \left(-\infty, \frac{7}{2}\right]$

4. Actividad resuelta.

5. Resuelve $\frac{2x-3}{5} - \frac{x+1}{4} \geq \frac{x-1}{10}$ sabiendo que 15 es la solución de la ecuación asociada.

El valor de x para el que $\frac{2x-3}{5} - \frac{x+1}{4} \geq \frac{x-1}{10}$ vale cero indica dónde esta expresión cambia de signo.

La solución $x = 15$ divide a la recta real en dos intervalos: $(-\infty, 15)$ y $(15, +\infty)$.

Basta ver qué signo tiene la inecuación $\frac{2x-3}{5} - \frac{x+1}{4} \geq \frac{x-1}{10}$ para un valor del intervalo, para saber su signo en toda la semirrecta.

Si $x = 0 \Rightarrow \frac{2\cdot 0-3}{5} - \frac{0+1}{4} = \frac{-17}{20} \leq \frac{0-1}{10} = \frac{-1}{10} \Rightarrow \frac{2x-3}{5} - \frac{x+1}{4} \geq \frac{x-1}{10}$ en $[15, +\infty)$.

Por tanto, el intervalo de soluciones es $[15, +\infty)$.

6. Determina las soluciones de estas inecuaciones de segundo grado.

a) $2x^2 < 6$ **c)** $x^2 + 1 < 2x$ **e)** $2x^2 + 5x > 8 - x$

b) $1 - x^2 \le -3$ **d)** $3x^2 - 2x \ge 2x^2 + 15$ **f)** $(3x - 1)(-5x + 2) \ge 0$

a) $2x^2 < 6 \Rightarrow x^2 - 3 < 0 \Rightarrow \left(x - \sqrt{3}\right)\left(x + \sqrt{3}\right) < 0$

$-\infty$ $-\sqrt{3}$ $\sqrt{3}$ $+\infty$

	$x = -2$	$x = 0$	$x = 2$
$x - \sqrt{3}$	–	–	+
$x + \sqrt{3}$	–	+	+
$\left(x - \sqrt{3}\right)\left(x + \sqrt{3}\right)$	+	–	+

Solución: $x \in \left(-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right)$

b) $1 - x^2 \le -3 \Rightarrow x^2 - 4 \ge 0 \Rightarrow (x + 2)(x - 2) \ge 0$

$-\infty$ -2 2 $+\infty$

	$x = -2$	$x = 0$	$x = 2$
$x - 2$	–	–	+
$x + 2$	–	+	+
$(x + 2)(x - 2)$	+	–	+

Solución: $x \in (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$

c) $x^2 + 1 < 2x \Rightarrow x^2 - 2x + 1 < 0$

$(x - 1)^2 < 0$, pero $(x - 1)^2 > 0$ para todo x

$x^2 + 1 < 2x$ no tiene solución.

d) $3x^2 - 2x \ge 2x^2 + 15 \Rightarrow (x + 3)(x - 5) \ge 0$

$-\infty$ -3 5 $+\infty$

	$x = -4$	$x = 0$	$x = 6$
$x - 5$	–	–	+
$x + 3$	–	+	+
$(x + 3)(x - 5)$	+	–	+

Solución: $x \in (-\infty, -3] \cup [5, +\infty)$

e) $2x^2 + 5x > 8 - x \Rightarrow 2(x + 4)(x - 1) > 0$

$-\infty$ -4 1 $+\infty$

	$x = -4$	$x = 0$	$x = 6$
$x - 1$	–	–	+
$x + 4$	–	+	+
$2(x + 4)(x - 1)$	+	–	+

Solución: $x \in (-\infty, -4) \cup (1, +\infty)$

f) $(3x - 1)(-5x + 2) \ge 0$

$-\infty$ $1/3$ $2/5$ $+\infty$

	$x = 0$	$x = 0{,}34$	$x = 1$
$3x - 1$	–	+	+
$-5x + 2$	+	+	–
$(3x - 1)(-5x + 2)$	–	+	–

Solución: $x \in \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{5}\right]$

7. Halla las soluciones de estas inecuaciones.

a) $x^3 + 4x^2 \ge 6 - x$ **c)** $x^4 - 5x^2 + 6 \le 0$ **e)** $x^4 - 3x^3 \le 10x^2$ **g)** $15x^2 + 8 \ge x^4 - 8$

b) $2x^3 - 4x^2 > 5x(1 + x)$ **d)** $x^4 + 4 < 3x^2$ **f)** $x^4 + 6x^3 + 11x^2 < -6x$ **h)** $-2(x - 2)(x + 3)^2 < 0$

a) $x^3 + 4x^2 + x - 6 \ge 0 \Rightarrow (x - 1)(x + 2)(x + 3) \ge 0$

$-\infty$ -3 -2 1 $+\infty$

	$x = -4$	$x = -2{,}5$	$x = 0$	$x = 2$
$x - 1$	–	–	–	+
$x + 2$	–	–	+	+
$x + 3$	–	+	+	+
$x^3 + 4x^2 + x - 6$	–	+	–	+

Solución: $x \in [-3, -2] \cup [1, +\infty)$

b) $2x^3 - 4x^2 > 5x(1 + x) \Rightarrow 2x(x - 5)(x + 0{,}5) > 0$

$-\infty$ $-1/2$ 0 5 $+\infty$

	$x = -1$	$x = -0{,}4$	$x = 1$	$x = 6$
$x - 5$	–	–	–	+
x	–	–	+	+
$x + 0{,}5$	–	+	+	+
$2x(x - 5)(x + 0{,}5)$	–	+	–	+

Solución: $x \in \left(\frac{-1}{2}, 0\right) \cup (5, +\infty)$

c) $x^4 - 5x^2 + 6 \le 0 \Rightarrow \left(x-\sqrt{3}\right)\left(x+\sqrt{3}\right)\left(x-\sqrt{2}\right)\left(x+\sqrt{2}\right) \le 0$

$-\infty \quad -\sqrt{3} \quad -\sqrt{2} \quad \sqrt{3} \quad +\infty$

	$x = -2$	$x = -1,5$	$x = 0$	$x = 1,5$	$x = 2$
$x-\sqrt{3}$	–	–	–	–	+
$x-\sqrt{2}$	–	–	–	+	+
$x+\sqrt{2}$	–	–	+	+	+
$x+\sqrt{3}$	–	+	+	+	+
$\left(x-\sqrt{3}\right)\left(x+\sqrt{3}\right)\left(x-\sqrt{2}\right)\left(x+\sqrt{2}\right)$	+	–	+	–	+

Solución: $x \in \left[-\sqrt{3}, -\sqrt{2}\right] \cup \left[\sqrt{2}, \sqrt{3}\right]$

d) $x^4 + 4 < 3x^2 \Rightarrow x^4 - 3x^2 + 4 < 0$

$x^4 - 3x^2 + 4 > 0$ para todo $x \Rightarrow x^4 + 4 < 3x^2$ no tiene solución.

e) $x^4 - 3x^3 \le 10x^2 \Rightarrow x^2(x^2 - 3x - 10) \le 0 \Rightarrow x^2 - 3x - 10 \le 0 \Rightarrow (x-5)(x+2) \le 0$

$-\infty \quad -2 \quad 5 \quad +\infty$

	$x = -3$	$x = 0$	$x = 6$
$x - 5$	–	–	+
$x + 2$	–	+	+
$(x + 2)(x - 5)$	+	–	+

Solución: $x \in [-2, 5]$

f) $x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 6x < 0 \Rightarrow x(x+1)(x+2)(x+3) < 0$

$-\infty \quad -3 \quad -2 \quad -1 \quad 0 \quad +\infty$

	$x = -4$	$x = -2,5$	$x = -1,5$	$x = -0,5$	$x = 1$
x	–	–	–	–	+
$x + 1$	–	–	–	+	+
$x + 2$	–	–	+	+	+
$x + 3$	–	+	+	+	+
$x(x - 1)(x + 2)(x + 3)$	+	–	+	–	+

Solución: $x \in (-3, -2) \cup (-1, 0)$

g) $15x^2 + 8 \ge x^4 - 8 \Rightarrow x^4 - 15x^2 - 16 \le 0 \Rightarrow (x+4)(x-4)(x^2+1) \le 0 \Rightarrow (x+4)(x-4) \le 0$

$-\infty \quad -4 \quad 4 \quad +\infty$

	$x = -5$	$x = 0$	$x = 5$
$x - 4$	–	–	+
$x + 4$	–	+	+
$(x + 4)(x - 4)$	+	–	+

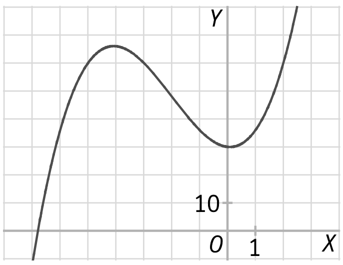
Solución: $x \in [-4, 4]$

h) $-2(x-2)(x+3)^2 < 0 \Rightarrow (x-2)(x+3)^2 > 0 \Rightarrow x - 2 > 0 \Rightarrow x > 2 \Rightarrow$ Solución: $x \in (2, +\infty)$

8. Utiliza la gráfica del polinomio $P(x) = x^3 + 6x^2 - x + 30$ para resolver las inecuaciones.

a) $x^3 + 6x^2 - x + 30 > 30$

b) $x^3 + 6x^2 - x + 30 \le 50$



a) $x \in (-6,8; +\infty)$

b) $x \in (-\infty; -5,5] \cup [-2,15; 1,68]$

9. Actividad resuelta.

10. Resuelve estas inecuaciones racionales.

a) $\frac{x-4}{x+5}>0$

b) $\frac{x^2}{x+1}\geq 0$

c) $\frac{x+3}{x+2}<6$

d) $\frac{x^2-9}{x^2-4x+4}\leq 0$

e) $\frac{x-2}{x^3-4x}\leq 0$

f) $\frac{x-2}{x+2}<\frac{3-2x}{2x-1}$

a) $\frac{x-4}{x+5}>0$

$-\infty \quad -5 \quad 4 \quad +\infty$

	$x=-6$	$x=0$	$x=6$
$x-4$	–	–	+
$x+5$	–	+	+
$\frac{x-4}{x+5}$	+	–	+

Solución: $x \in (-\infty, -5) \cup (4, +\infty)$

b) $\frac{x^2}{x+1}\geq 0$

Como $x^2 \geq 0$ para cualquier valor de x, entonces únicamente debe cumplirse que $x+1>0 \Rightarrow x>-1$.

Solución: $x \in (-1, +\infty)$

c) $\frac{x+3}{x+2}<6 \Rightarrow \frac{x+3}{x+2}-6<0 \Rightarrow \frac{x+3-6x-12}{x+2}<0 \Rightarrow \frac{-5x-9}{x+2}<0 \Rightarrow \frac{5x+9}{x+2}>0$

$-\infty \quad -2 \quad -9/5 \quad +\infty$

	$x=-3$	$x=-1,9$	$x=0$
$5x+9$	–	–	+
$x+2$	–	+	+
$\frac{5x+9}{x+2}$	+	–	+

Solución: $x \in (-\infty, -2) \cup \left(\frac{-9}{5}, +\infty\right)$

d) $\frac{x^2-9}{x^2-4x+4}\leq 0 \Rightarrow \frac{(x-3)(x+3)}{(x-2)^2}\leq 0 \Rightarrow \begin{cases}(x-3)(x+3)\leq 0\\ x\neq 2\end{cases}$

$-\infty \quad -3 \quad 3 \quad +\infty$

	$x=-4$	$x=0$	$x=4$
$x-3$	–	–	+
$x+3$	–	+	+
$(x+3)(x-3)$	+	–	+

Solución: $x \in [-3, 2) \cup (2, +3]$

e) $\frac{x-2}{x^3-4x}\leq 0 \Rightarrow \frac{x-2}{x(x^2-4)}\leq 0 \Rightarrow \frac{x-2}{x(x-2)(x+2)}\leq 0 \Rightarrow \begin{cases}x(x+2)<0\\ x\neq 2\end{cases}$

$-\infty \quad -2 \quad 0 \quad +\infty$

	$x=-3$	$x=-1$	$x=1$
$x+2$	–	+	+
x	–	–	+
$x(x+2)$	+	–	+

Solución: $x \in (-2, 0)$

f) $\dfrac{x-2}{x+2}<\dfrac{3-2x}{2x-1}\Rightarrow\dfrac{x-2}{x+2}-\dfrac{3-2x}{2x-1}<0\Rightarrow\dfrac{4x^2-4x-4}{(x+2)(2x-1)}<0$

	$-\infty$ … -2: $x=-3$	-2 … $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$: $x=-1$	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ … $\frac{1}{2}$: $x=0$	$\frac{1}{2}$ … $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$: $x=1$	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ … $+\infty$: $x=2$
$x-\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	–	–	–	–	+
$2x-1$	–	–	–	+	+
$x+2$	–	+	+	+	+
$x-\frac{1-\sqrt{5}}{2}$	–	–	+	+	+
$\frac{4x^2-4x-4}{(x+2)(2x-1)}$	+	–	+	–	+

Solución: $x\in\left(-2,\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\cup\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$

11. A medida que se aleja de la Tierra, el peso, *P*, de un astronauta de 736 Newton (*N*) varía según la siguiente fórmula $P(h)=736\left(\dfrac{6400}{6400+h}\right)^2$, donde *h* es la distancia a la Tierra, en kilómetros. ¿Cuánto se ha alejado de la Tierra si su peso es inferior a 30 *N*?

$P(h)=736\left(\dfrac{6400}{6400+h}\right)^2<30\Rightarrow\dfrac{6400^2}{(6400+h)^2}<\dfrac{30}{736}\Rightarrow\dfrac{6400^2}{(6400+h)^2}-\dfrac{30}{736}<0\Rightarrow\dfrac{736\cdot6400^2-30(6400+h)^2}{736(6400+h)^2}<0$

Como $h>0$, entonces: $736\cdot6400^2-30(6400+h)^2<0\Rightarrow 31\ 6999{,}93<6400+h\Rightarrow 25\ 299{,}93<h$

Se ha alejado más de 25 299,93 km de la Tierra.

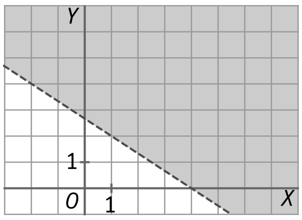
12. Actividad interactiva.

13. Actividad resuelta.

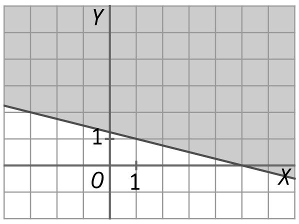
14. Resuelve gráficamente estas inecuaciones y calcula tres soluciones de cada una.

a) $2x+3y>8$ **b)** $5x-6y\le 0$ **c)** $x+4y\ge 5$ **d)** $-2x+7y<14$

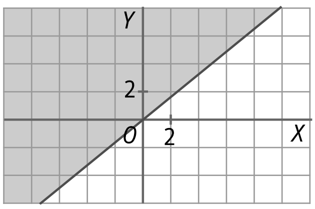
a) Soluciones: (4, 1), (0, 4) y (1, 3)



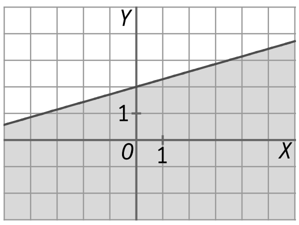
c) Soluciones: (4, 1), (0, 2) y (1, 1)



b) Soluciones: (0, 0), (2, 2) y (1, 2)



d) Soluciones: (4, 0), (0, 1) y (1, 1)

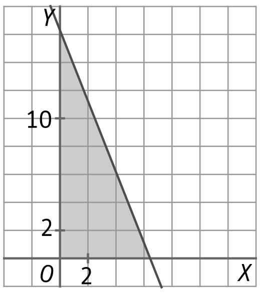


15. El número de empleados, *x*, de una fábrica de fertilizantes y las toneladas del producto que se fabrican, *y*, se relacionan por la inecuación $30x + 12y \leq 200$.

a) Resuelve gráficamente la inecuación.

b) ¿Es aceptable la solución en la que $y = 16$?

a)



b) $y = 16 \Rightarrow 30x + 12 \cdot 16 < 200 \Rightarrow x < \dfrac{8}{30} = \dfrac{4}{15} < 1$

Esta solución no puede ser aceptable, porque x es el número de empleados de una fábrica y, por tanto, $x > 1$.

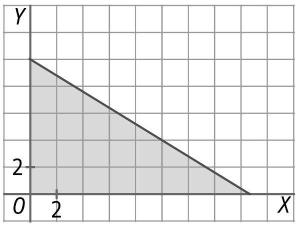
16. Juan tiene 50 € con los que va a comprar bolígrafos y cuadernos. Cada bolígrafo cuesta 3 €, y cada cuaderno, 5 €.

a) ¿Cuántos bolígrafos y cuadernos puede comprar?

b) Si desea comprar más cuadernos que bolígrafos, ¿cómo puede hacerlo? ¿Y si el número de bolígrafos debe ser par?

a) Llamamos x al número de bolígrafos e y al de cuadernos.

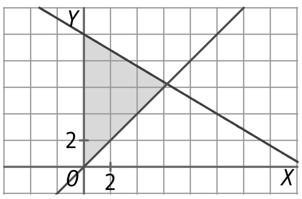
$$\begin{cases} 3x + 5y \leq 50 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$



La solución del problema son los puntos del semiplano coloreado cuyas coordenadas son números naturales. Por ejemplo, el punto (2 bolígrafos y 6 cuadernos).

b) Llamamos x al número de bolígrafos e y al número de cuadernos.

$$\begin{cases} 3x + 5y \leq 50 \\ y > x \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$



La solución del problema son los puntos del semiplano coloreado cuyas coordenadas son números naturales. Por ejemplo, el punto (2, 4) que representa 2 bolígrafos y 4 cuadernos.

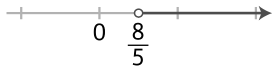
Si el número de bolígrafos debe ser par, la solución del problema son los puntos del semiplano coloreado cuyas coordenadas son números naturales y cuya primera coordenada es un número par.

Por ejemplo, 2 bolígrafos y 3 cuadernos.

17. Copia en tu cuaderno y une cada sistema con su solución.

A. $\begin{cases} x+3\geq 0 \\ 2x+1>5 \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} 3x+4<1 \\ x\geq -2 \end{cases}$ **C.** $\begin{cases} -4x+3\leq -1 \\ 5x-2>6 \end{cases}$

I. $-2 \leq x < -1$ **II.** $(2, +\infty)$ **III.**



A. $x + 3 \geq 0 \Rightarrow x \geq -3 \Rightarrow x \in [-3, +\infty)$ y $2x + 1 > 5 \Rightarrow 2x > 4 \Rightarrow x > 2 \Rightarrow x \in (2, +\infty) \Rightarrow$ Solución: $x \in (2, +\infty)$

B. $3x + 4 < 1 \Rightarrow 3x < -3 \Rightarrow x < -1 \Rightarrow x \in (-\infty, -1)$ y $x \geq -2 \Rightarrow x \in [-2, +\infty) \Rightarrow$ Solución: $x \in [-2, -1) \Rightarrow -2 \leq x < -1$

C. $-4x + 3 \leq -1 \Rightarrow x \geq 1 \Rightarrow x \in [1, +\infty)$ y $5x - 2 > 6 \Rightarrow x > \frac{8}{5} \Rightarrow x \in \left(\frac{8}{5}, +\infty\right) \Rightarrow$ Solución $\left(\frac{8}{5}, +\infty\right)$

18. Resuelve los siguientes sistemas.

a) $\begin{cases} x+1>10 \\ x-2\leq 5 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 3x-8>4x-15 \\ -x+5(x+1)\leq 8 \end{cases}$ **e)** $\begin{cases} 3x^2-5x-2\geq 0 \\ 4x+5>-3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 8x-4>7 \\ x-2\leq 18 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} 3-(2x-1)\leq x \\ 4x-3(x-5)\leq 1-x \end{cases}$ **f)** $\begin{cases} (x+1)(x+5)<5 \\ 4x-2\geq 3(x-1)+1 \end{cases}$

a) $x + 1 > 10 \Rightarrow x > 9 \Rightarrow x \in (9, +\infty)$ y $x - 2 \leq 5 \Rightarrow x \leq 7 \Rightarrow x \in (-\infty, 7]$

No tiene solución.

b) $8x - 4 > 7 \Rightarrow 8x > 11 \Rightarrow x > \frac{11}{8} \Rightarrow x \in \left(\frac{11}{8}, +\infty\right)$ y $x - 2 \leq 18 \Rightarrow x \leq 20 \Rightarrow x \in (-\infty, 20]$

Solución: $x \in \left(\frac{11}{8}, +\infty\right) \cap (-\infty, 20] = \left(\frac{11}{8}, 20\right]$

c) $3x - 8 > 4x - 15 \Rightarrow x < 7 \Rightarrow x \in (-\infty, 7)$ y $-x + 5(x + 1) \leq 8 \Rightarrow 4x \leq 3 \Rightarrow x \leq \frac{3}{4} \Rightarrow x \in \left(-\infty, \frac{3}{4}\right]$

Solución: $x \in (-\infty, 7) \cap \left(-\infty, \frac{3}{4}\right] = \left(-\infty, \frac{3}{4}\right]$

d) $3 - (2x - 1) \leq x \Rightarrow 3x \geq 4 \Rightarrow x \geq \frac{4}{3} \Rightarrow x \in \left[\frac{4}{3}, +\infty\right)$ y $4x - 3(x - 5) \leq 1 - x \Rightarrow 2x \leq -14 \Rightarrow x \leq -7 \Rightarrow x \in (-\infty, -7]$

Solución: $x \in \left[\frac{4}{3}, +\infty\right) \cap (-\infty, -7]$. Sin solución

e) $4x + 5 > -3 \Rightarrow x > -2 \Rightarrow x \in [-2, +\infty) \Rightarrow 3x^2 - 5x - 2 \geq 0 \Rightarrow (x - 2)(3x + 1) \geq 0 \Rightarrow x \in \left(-\infty, \frac{-1}{3}\right] \cup [2, +\infty)$

Solución: $x \in \left[-2, \frac{-1}{3}\right] \cup [2, +\infty)$

$-\infty$ $-1/3$ 2 $+\infty$

	$x = -7$	$x = -1$	$x = 1$
$x - 2$	–	–	+
$3x + 1$	–	+	+
$(x - 2)(3x + 1)$	+	–	+

f) $4x - 2 \geq 3(x - 1) + 1 \Rightarrow x \geq 0 \Rightarrow x \in [0, +\infty)$ y $(x + 1)(x + 5) < 5 \Rightarrow x(x + 6) < 0 \Rightarrow x \in (-6, 0)$

No tiene solución.

$-\infty$ -6 0 $+\infty$

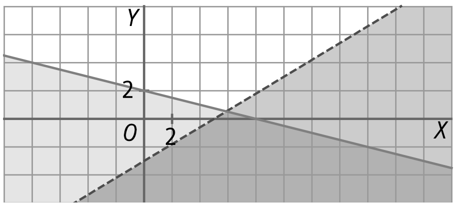
	$x = -7$	$x = -1$	$x = 1$
x	–	–	+
$x + 6$	–	+	+
$x(x - 6)$	+	–	+

19. Resuelve los siguientes sistemas e indica, si existen, soluciones con $x = 3$.

a) $\begin{cases} 3x - 5y > 15 \\ x + 4y \leq 8 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 6x + 5y < 30 \\ x - y \geq 0 \end{cases}$

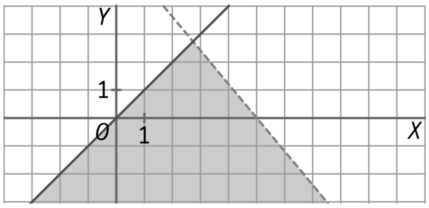
a)



Sí que existen soluciones con $x = 3$.

Por ejemplo, si $x = 3 \Rightarrow y = -4$

b)



Sí que existen soluciones con $x = 3$.

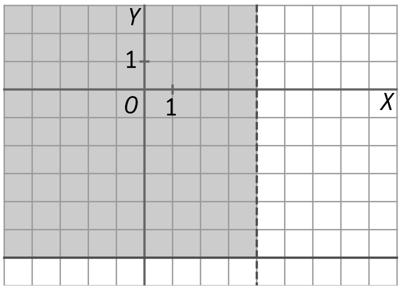
Por ejemplo, si $x = 3 \Rightarrow y = 1$

20. Halla la solución de estos sistemas.

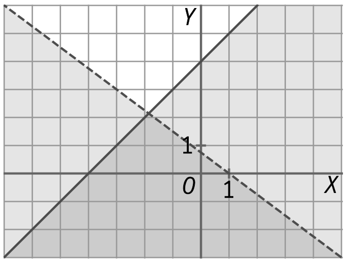
a) $\begin{cases} y \geq -6 \\ x < 4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2(x + 2y) < 3 - x \\ y - x \leq 4 \end{cases}$

a)



b)



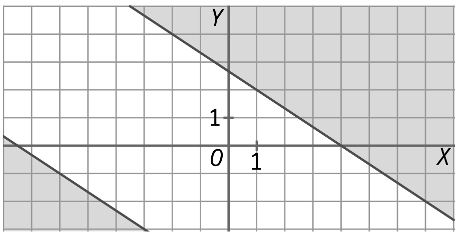
21. Actividad resuelta.

22. Halla la solución de estos sistemas.

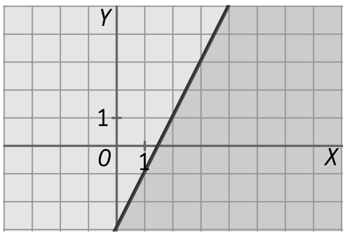
a) $\begin{cases} 2(x + 3) \geq 2 - 3(y - 4) \\ 2x + 3y \leq -15 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x - y \leq 3 \\ x \geq \dfrac{y + 3}{2} \end{cases}$

a)



b)



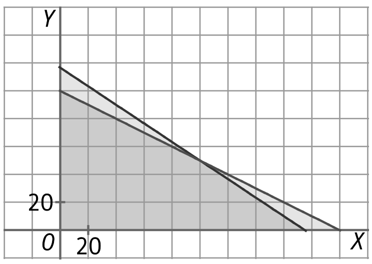
23. Actividad resuelta.

24. Un supermercado lanza una oferta con dos lotes: lote *A*, con dos latas de tomate y un paquete de pasta, y lote *B*, con tres latas de tomate y dos paquetes de pasta. Si dispone de 350 latas de tomate y 200 paquetes de pasta, ¿cuántos lotes de cada tipo puede hacer?

Llamando x al número de lotes tipo A e y al número de lotes tipo B:

$$\begin{cases} 2x + 3y \leq 350 \\ x + 2y \leq 200 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

La solución del problema son los puntos del semiplano coloreado cuyas coordenadas son números naturales.



25. Relaciona en tu cuaderno cada desigualdad con su equivalente y con la operación en los dos miembros que pasa de una a otra.

Desigualdad *A*	Operación	Desigualdad *B*
–4 < 7	**Dividir entre –2**	**–4 < 5**
12 > –6	**Sumar –5**	**–6 < 3**
$\frac{-4}{3} < \frac{10}{6}$	**Multiplicar por 3**	**–9 < 2**

- –4 < 7, sumar –5 ⇒ –9 < 2
- 12 > –6, dividir entre –2 ⇒ –6 < 3
- $\frac{-4}{3} < \frac{10}{6}$ multiplicar por 3 ⇒ –4 < 5

26. Transforma en desigualdades estas frases.

a) Elena necesita correr por debajo de 16 s para clasificarse en una prueba.

b) En algunas atracciones del parque temático exigen una altura superior a 1,20 m.

c) He pasado el kilómetro 125 de la A-2, pero aún no he llegado al 145.

d) El juego está recomendado para niños entre 6 y 10 años.

e) Los automóviles, cuando circulan por una autopista, deben llevar una velocidad de al menos 60 km/h y no más de 120 km/h.

a) Llamando x al tiempo en segundos, $x < 16$

b) Llamando x a la altura en metros, $x > 1{,}20$

c) Llamando x al punto kilométrico, $125 < x < 145$

d) Llamando x a la edad, $6 < x < 10$

e) Llamando x a la velocidad, $60 \le x \le 120$

27. Partiendo siempre de la desigualdad 4 – 5*x* > *x*, copia en tu cuaderno y completa como en el ejemplo.

Suma 5*x*	**4 > 6*x***
●●●	**1 – 5*x* ● *x* – 3**
●●●	**10*x* – 8 ● –2*x***
●●●	**0 ● 6*x* – 4**
●●●	**–6*x* ● –4**

Suma 5*x*	4 > 6*x*
Restar 3	$1 - 5x > x - 3$
Multiplicar por –2	$10x - 8 < -2x$
Sumar 5*x* – 4	$0 > 6x - 4$
Sumar –*x* – 4	$-6x > -4$

28. Comprueba en cada caso si los valores dados pertenecen a la solución de las inecuaciones.

a) $x = -1$ **si** $x^3 + x^2 + x - 6 \le 0$ **b)** $x = 3$ **si** $3x^2 - 2x + 1 \le (x + 1)^2$ **c)** $x = 0$ **si** $\frac{3x-6}{2} < \frac{9x+1}{6}$

a) $x = -1$ sí que pertenece a la solución de $x^3 + x^2 + x - 6 \le 0$, porque $(-1)^3 + (-1)^2 + (-1) - 6 = -7 \le 0$.

b) $x = 3$ no pertenece a la solución de $3x^2 - 2x + 1 \le (x + 1)^2$, porque $3 \cdot 3^2 - 2 \cdot 3 + 1 = 22 > (3 + 1)^2 = 16$.

c) $x = 0$ sí que pertenece a la solución de $\frac{3x-6}{2} < \frac{9x+1}{6}$, porque $\frac{3\cdot 0-6}{2} = -3 < \frac{9\cdot 0+1}{6} = \frac{1}{6}$.

29. Decide si son ciertas o falsas estas afirmaciones.

a) Una inecuación, o no tiene solución, o tiene una, o tiene infinitas.

b) La solución de $x + 5 \le 3$ es una semirrecta.

c) Una inecuación del tipo $x + a > b$, con a y b números reales, a veces no tiene solución.

a) Falsa. Por ejemplo, la inecuación $(x - 1)^2 \cdot (x - 2)^2 \le 0$ tiene dos soluciones: $x = 1$ y $x = 2$.

b) Verdadera. Si $x + 5 \le 3 \Rightarrow x \le -2$. Por tanto, la inecuación tiene como solución la semirrecta $(-\infty, -2]$.

c) Falsa. Si $x + a > b \Rightarrow x > b - a$. Por tanto, la inecuación tiene como solución la semirrecta $(b - a, +\infty)$.

30. ¿Son equivalentes estas inecuaciones?

a) $-2x \le 14$ **y** $x \le 7$ **b)** $\frac{x}{2} > -5$ **y** $x > 10$

a) No son equivalentes porque no tienen la misma solución.

- $-2x \le 14 \Rightarrow x \ge -2 \Rightarrow$ Solución $x \in [-2, +\infty)$
- $x \le 7 \Rightarrow$ Solución $x \in (-\infty, 7]$

b) No son equivalentes porque no tienen la misma solución.

- $\frac{x}{2} > -5 \Rightarrow x > -10 \Rightarrow$ Solución $x \in (-10, +\infty)$
- $x > 10 \Rightarrow$ Solución $x \in (10, +\infty)$

31. Si multiplicas por *x* ambos miembros, ¿qué puedes decir de la inecuación $2x^2 - 3x < 18$?

Si $x > 0$, entonces $2x^3 - 3x^2 < 18x$

Si $x < 0$, entonces $2x^3 - 3x^2 > 18x$

32. Si $a < b$ y $c \le d$, copia y completa con los símbolos <, >, ≤ y ≥ en los casos en que sea posible. Si no lo es, explica por qué.

a) $b - 10 \bullet a - 10$ **c)** $a - d \bullet b - c$ **e)** $-a + 3 \bullet 3 - b$

b) $a + c \bullet b + d$ **d)** $2c + 3 \bullet 2d + 5$ **f)** $a \cdot c \bullet b \cdot d$

a) $b - 10 > a - 10$

b) $a + c < b + d$

c) $a - d < b - c$

d) $2c + 3 < 2d + 5$

e) $-a + 3 > 3 - b$

f) Si $a = -3$, $b = 1$, $c = -5$ y $d = 2$, entonces $a \cdot c > b \cdot d$

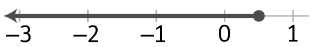
Si $a = c = 1$ y $b = d = 2$, entonces $a \cdot c < b \cdot d$

33. Resuelve las siguientes inecuaciones y representa sus soluciones en una recta.

a) $7x - 2(1 - 3x) \le 2x + 3$ **c)** $5 > \frac{3x+1}{2}$

b) $\frac{x}{3} - \frac{x+1}{2} \ge \frac{5}{6} - x$ **d)** $4x - 1 \ge \frac{8x-5}{2}$

a) $7x - 2(1 - 3x) \le 2x + 3 \Rightarrow 7x - 2 + 6x \le 2x + 3 \Rightarrow x \le \frac{5}{11} \Rightarrow x \in \left(-\infty, \frac{5}{11}\right]$



b) $\frac{x}{3} - \frac{x+1}{2} \ge \frac{5}{6} - x \Rightarrow 2x - 3x - 3 \ge 5 - 6x \Rightarrow 5x \ge 8 \Rightarrow x \ge \frac{8}{5} \Rightarrow x \in \left[\frac{8}{5}, +\infty\right)$

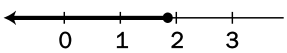
c) $5 > \frac{3x+1}{2} \Rightarrow 10 > 3x + 1 \Rightarrow x < 3 \Rightarrow x \in (-\infty, 3)$

d) $4x - 1 \ge \frac{8x-5}{2} \Rightarrow 8x - 2 \ge 8x - 5 \Rightarrow 0 \ge -3 \Rightarrow x \in \mathbb{R}$

34. Halla la solución de las siguientes inecuaciones y representa sus soluciones en una recta.

a) $\frac{2(5x+1)}{3} \le -4(x-3) + \frac{5}{2}$ **b)** $2\left(\frac{x-1}{3}\right) - \frac{2(x-1)+7}{6} < 3(x+2)$

a) $\frac{2(5x+1)}{3} \le -4(x-3) + \frac{5}{2} \Rightarrow 20x + 4 \le -24x + 72 + 15 \Rightarrow x \le \frac{83}{44} \Rightarrow x \in \left(-\infty, \frac{83}{44}\right]$



b) $2\left(\frac{x-1}{3}\right) - \frac{2(x-1)+7}{6} < 3(x+2) \Rightarrow -45 < 16x \Rightarrow x > \frac{-45}{16} \Rightarrow x \in \left(\frac{-45}{16}, +\infty\right)$

35. Resuelve estas inecuaciones.

a) $(5x-2)^2 \le 0$

b) $(2x+4)^3 > 0$

a) $(5x-2)^2 \le 0 \Rightarrow 5x-2=0 \Rightarrow x = \dfrac{2}{5}$

b) $(2x+4)^3 > 0 \Rightarrow 2x+4>0 \Rightarrow x > -2 \Rightarrow$ Solución $(-2, +\infty)$

36. Resuelve las inecuaciones siguientes.

a) $x^2 - 2x - 4 \le 0$

b) $-10x^2 + 17x - 3 \le 0$

c) $-7(4x+1)(-x+2) < 0$

d) $(2x^2 + 9x - 5)(x+1) > 0$

a) $x^2 - 2x - 4 \le 0 \Rightarrow \left(x-1+\sqrt{5}\right)\left(x-1-\sqrt{5}\right) \le 0$

	$-\infty$ — $1-\sqrt{5}$	$1-\sqrt{5}$ — $1+\sqrt{5}$	$1+\sqrt{5}$ — $+\infty$
	$x=-2$	$x=0$	$x=4$
$x-1-\sqrt{5}$	–	–	+
$x-1+\sqrt{5}$	–	+	+
x^2-2x-4	+	–	+

Solución: $x \in \left[1-\sqrt{5}, 1+\sqrt{5}\right]$

b) $-10x^2 + 17x - 3 \le 0 \Rightarrow -(2x-3)(5x-1) \le 0 \Rightarrow (2x-3)(5x-1) \ge 0$

	$-\infty$ — $1/5$	$1/5$ — $3/2$	$3/2$ — $+\infty$
	$x=0$	$x=1$	$x=2$
$2x-3$	–	–	+
$5x-1$	–	+	+
$(2x-3)(5x-1)$	+	–	+

Solución: $x \in \left(-\infty, \dfrac{1}{5}\right] \cup \left[\dfrac{3}{2}, +\infty\right)$

c) $-7(4x+1)(-x+2) < 0 \Rightarrow (4x+1)(-x+2) > 0$

	$-\infty$ — $-1/4$	$-1/4$ — 2	2 — $+\infty$
	$x=-1$	$x=0$	$x=3$
$4x+1$	–	+	+
$-x+2$	+	+	–
$(4x+1)(-x+2)$	–	+	–

Solución: $x \in \left(\dfrac{-1}{4}, 2\right)$

d) $(2x^2 + 9x - 5)(x+1) > 0 \Rightarrow (x+5)(2x-1)(x+1) > 0$

	$-\infty$ — -5	-5 — -1	-1 — $1/2$	$1/2$ — $+\infty$
	$x=-6$	$x=-4$	$x=0$	$x=1$
$2x-1$	–	–	–	+
$x+1$	–	–	+	+
$x+5$	–	+	+	+
$(x+5)(2x-1)(x+1)$	–	+	–	+

Solución: $x \in (-5, -1) \cup \left(\dfrac{1}{2}, +\infty\right)$

37. Halla la solución de las siguientes inecuaciones racionales.

a) $\dfrac{x+5}{x+2} \le 0$ **b)** $\dfrac{3-x}{x+2} < 0$ **c)** $\dfrac{x+4}{x-3} \le 0$ **d)** $\dfrac{x^2-1}{x} \le 0$ **e)** $\dfrac{x+3}{x^2} > 0$ **f)** $\dfrac{(x-2)(x+5)}{4x-6} \ge 0$

a) $\dfrac{x+5}{x+2} \le 0$

$-\infty \quad -5 \quad -2 \quad +\infty$

	$x = -6$	$x = -3$	$x = 0$
$x + 2$	–	–	+
$x + 5$	–	+	+
$\dfrac{x+5}{x+2}$	+	–	+

Solución: $x \in [-5, -2)$

b) $\dfrac{3-x}{x+2} < 0$

$-\infty \quad -2 \quad 3 \quad +\infty$

	$x = -3$	$x = 0$	$x = 4$
$x + 2$	–	+	+
$3 - x$	+	+	–
$\dfrac{3-x}{x+2}$	–	+	–

Solución: $x \in (-\infty, -2) \cup (3, +\infty)$

c) $\dfrac{x+4}{x-3} \le 0$

$-\infty \quad -4 \quad 3 \quad +\infty$

	$x = -5$	$x = 0$	$x = 4$
$x - 3$	–	–	+
$x + 4$	–	+	+
$\dfrac{x+5}{x+2}$	+	–	+

Solución: $x \in [-4, 3)$

d) $\dfrac{x^2-1}{x} \le 0 \Rightarrow \dfrac{(x-1)(x+1)}{x} \le 0$

$-\infty \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad +\infty$

	$x = -2$	$x = -0{,}5$	$x = 0{,}5$	$x = 2$
$x - 1$	–	–	–	+
x	–	–	+	+
$x + 1$	–	+	+	+
$\dfrac{x^2-1}{x}$	–	+	–	+

Solución: $x \in (-\infty, -1] \cup (0, 1]$

e) $\dfrac{x+3}{x^2} > 0 \Rightarrow x+3>0$ y $x \ne 0 \Rightarrow x > -3$ y $x \ne 0 \Rightarrow$ Solución: $x \in (-3, 0) \cup (0, +\infty)$

f) $\dfrac{(x-2)(x+5)}{4x-6} \ge 0$

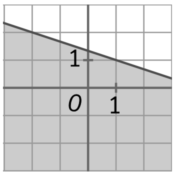
$-\infty \quad -5 \quad 3/2 \quad 2 \quad +\infty$

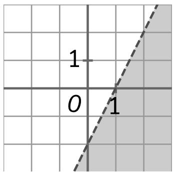
	$x = -6$	$x = 0$	$x = 1{,}75$	$x = 3$
$x - 2$	–	–	–	+
$4x - 6$	–	–	+	+
$x + 5$	–	+	+	+
$\dfrac{(x-2)(x+5)}{4x-6}$	–	+	–	+

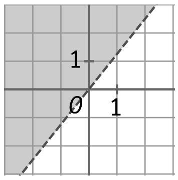
Solución: $x \in \left[-5, \dfrac{3}{2}\right) \cup [2, +\infty)$

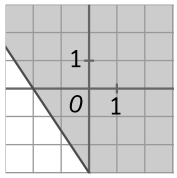
38. Resuelve las siguientes inecuaciones con dos incógnitas.

a) $x + 3y \leq 4$ **b)** $x - \frac{y}{2} > 1$ **c)** $5x - 4y < 0$ **d)** $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} \geq -1$

a)


b)


c)


d)


39. Halla la solución de las siguientes inecuaciones polinómicas.

a) $2x^4 + 5x^3 + 5x > x^2 + 3$

b) $x^4 + 3x^3 - 7x < 3x^2 - 6$

c) $x^4 \leq 4x^2$

d) $-2(x-2)(x+3)^2 < 0$

a) $2x^4 + 5x^3 + 5x > x^2 + 3$

$(x + 3)(2x - 1)(2x^2 + 2) > 0 \Rightarrow (x + 3)(2x - 1) > 0$

$-\infty$ -3 $1/2$ $+\infty$

	$x = -4$	$x = 0$	$x = 1$
$2x - 1$	–	–	+
$x + 3$	–	+	+
$(2x - 1)(x + 3)$	+	–	+

Solución: $x \in (-\infty, -3) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$

b) $x^4 + 3x^3 - 7x < 3x^2 - 6$

$(x + 3)(x + 2)(x - 1)^2 < 0 \Rightarrow (x + 3)(x + 2) < 0$

$-\infty$ -3 -2 $+\infty$

	$x = -4$	$x = -2{,}5$	$x = 0$
$x + 2$	–	–	+
$x + 3$	–	+	+
$(x + 2)(x + 3)$	+	–	+

Solución: $x \in (-3, -2)$

c) $x^4 \leq 4x^2$

$x^2(x^2 - 4) \leq 0 \Rightarrow x^2 - 4 \leq 0 \Rightarrow (x - 2)(x + 2) \leq 0$

$-\infty$ -2 2 $+\infty$

	$x = -4$	$x = 0$	$x = 3$
$x - 2$	–	–	+
$x + 3$	–	+	+
$(x - 2)(x + 2)$	+	–	+

Solución: $x \in [-2, 2]$

d) $-2(x - 2)(x + 3)^2 < 0$

$-2(x - 2) < 0 \Rightarrow x - 2 > 0 \Rightarrow x > 2 \Rightarrow$ Solución: $(2, +\infty)$

40. Comprueba que, aunque las siguientes ecuaciones tienen las mismas soluciones, no ocurre lo mismo con las inecuaciones asociadas. ¿Por qué ocurre esto?

a) $\frac{2x-6}{x+5} = 0$ **y** $2x - 6 = 0$; $\frac{2x-6}{x+5} < 0$ **y** $2x - 6 < 0$ **b)** $\frac{3x-5}{2x+1} = 1$ **y** $3x - 5 = 2x + 1$; $\frac{3x-5}{2x+1} \geq 1$ **y** $3x - 5 \geq 2x + 1$

a) $\frac{2x-6}{x+5} = 0 \Rightarrow 2x - 6 = 0 \Rightarrow x = 3$ $2x - 6 = 0 \Rightarrow 2x = 6 \Rightarrow x = 3$

$\frac{2x-6}{x+5} < 0 \Rightarrow$ Solución: $x \in (-5, 3)$ $2x - 6 < 0 \Rightarrow 2x < 6 \Rightarrow x < 3 \Rightarrow$ Solución $(-\infty, 3)$

b) $\frac{3x-5}{2x+1} = 1 \Rightarrow 3x - 5 = 2x + 1 \Rightarrow x = 6$ $3x - 5 = 2x + 1 \Rightarrow x = 6$

$\frac{x-6}{2x+1} \geq 0 \Rightarrow$ Solución: $x \in \left(-\infty, \frac{-1}{2}\right) \cup [6, +\infty)$ $3x - 5 \geq 2x + 1 \Rightarrow x \geq 6 \Rightarrow$ Solución $[6, +\infty)$

Esto ocurre porque para resolver una ecuación racional se tienen en cuenta solo las raíces del numerador, pero para resolver una inecuación racional se tienen en cuenta las raíces del numerador y las del denominador.

41. Actividad resuelta.

42. Escribe como una única fracción algebraica y resuelve las inecuaciones.

a) $\dfrac{x}{x-2} \geq \dfrac{1}{5}$ c) $\dfrac{1+x}{2x+7} - \dfrac{1}{x-1} \geq 0$ e) $\dfrac{x+1}{x} < \dfrac{x-2}{x+3}$ g) $\dfrac{x^2+2x+3}{x^2-x+1} < \dfrac{2}{3}$

b) $\dfrac{x}{x+2} \geq \dfrac{1}{x}$ d) $\dfrac{x-2}{x} < \dfrac{x+4}{x+1}$ f) $\dfrac{2x-1}{x+1} - 1 > \dfrac{x-2}{3-x}$ h) $\dfrac{-x^2-4}{x^2-x-6} \leq \dfrac{5}{6}$

a) $\dfrac{x}{x-2} \geq \dfrac{1}{5} \Rightarrow \dfrac{x}{x-2} - \dfrac{1}{5} \geq 0 \Rightarrow \dfrac{5x-x+2}{5(x-2)} \geq 0 \Rightarrow \dfrac{4x+2}{5(x-2)} \geq 0 \Rightarrow \dfrac{2(2x+1)}{5(x-2)} \geq 0 \Rightarrow \dfrac{2x+1}{x-2} \geq 0$

$-\infty$ $-1/2$ 2 $+\infty$

	$x = -1$	$x = 0$	$x = 3$
$x - 2$	–	–	+
$2x + 1$	–	+	+
$\dfrac{2x+1}{x-2}$	+	–	+

Solución: $x \in \left(-\infty, \dfrac{-1}{2}\right] \cup (2, +\infty)$

b) $\dfrac{x}{x+2} \geq \dfrac{1}{x} \Rightarrow \dfrac{x}{x+2} - \dfrac{1}{x} \geq 0 \Rightarrow \dfrac{x^2-x-2}{x(x+2)} \geq 0 \Rightarrow \dfrac{(x-2)(x+1)}{x(x+2)} \geq 0$

$-\infty$ -2 -1 0 2 $+\infty$

	$x = -4$	$x = -1{,}5$	$x = -0{,}5$	$x = 1$	$x = 3$
$x - 2$	–	–	–	–	+
x	–	–	–	+	+
$x + 1$	–	–	+	+	+
$x + 2$	–	+	+	+	+
$\dfrac{(x-2)(x+1)}{x(x+2)}$	+	–	+	–	+

Solución: $x \in (-\infty, -2) \cup [-1, 0) \cup [2, +\infty)$

c) $\dfrac{1+x}{2x+7} - \dfrac{1}{x-1} \geq 0 \Rightarrow \dfrac{(1+x)(x-1)-(2x+7)}{(2x+7)(x-1)} \geq 0 \Rightarrow \dfrac{x^2-1-2x-7}{(2x+7)(x-1)} \geq 0 \Rightarrow \dfrac{x^2-2x-8}{(2x+7)(x-1)} \geq 0 \Rightarrow \dfrac{(x-4)(x+2)}{(2x+7)(x-1)} \geq 0$

$-\infty$ $-7/2$ -2 1 4 $+\infty$

	$x = -4$	$x = -3$	$x = -0{,}5$	$x = 2$	$x = 5$
$x - 4$	–	–	–	–	+
$x - 1$	–	–	–	+	+
$x + 2$	–	–	+	+	+
$2x + 7$	–	+	+	+	+
$\dfrac{(x-4)(x+2)}{(2x+7)(x-1)}$	+	–	+	–	+

Solución: $\left(-\infty, \dfrac{-7}{2}\right) \cup [-2, 1) \cup [4, +\infty)$

d) $\dfrac{x-2}{x} < \dfrac{x+4}{x+1} \Rightarrow \dfrac{x-2}{x} - \dfrac{x+4}{x+1} < 0 \Rightarrow \dfrac{(x-2)(x+1)-x(x+4)}{x(x+1)} < 0 \Rightarrow \dfrac{-5x-2}{x(x+1)} < 0 \Rightarrow \dfrac{5x+2}{x(x+1)} > 0$

$-\infty$ -1 $-2/5$ 0 $+\infty$

	$x = -2$	$x = -0{,}5$	$x = -0{,}2$	$x = 1$
x	–	–	–	+
$5x + 2$	–	–	+	+
$x + 1$	–	+	+	+
$\dfrac{5x+2}{x(x+1)}$	–	+	–	+

Solución: $x \in \left(-1, \dfrac{-2}{5}\right) \cup (0, +\infty)$

e) $\frac{x+1}{x} < \frac{x-2}{x+3} \Rightarrow \frac{x+1}{x} - \frac{x-2}{x+3} < 0 \Rightarrow \frac{(x+1)(x+3)-x(x-2)}{x(x+3)} < 0 \Rightarrow \frac{6x+3}{x(x+3)} < 0 \Rightarrow \frac{3(2x+1)}{x(x+3)} < 0 \Rightarrow \frac{2x+1}{x(x+3)} < 0$

$-\infty \quad -3 \quad -1/2 \quad 0 \quad +\infty$

	$x = -4$	$x = -2$	$x = -0{,}3$	$x = 1$
x	–	–	–	+
$2x + 1$	–	–	+	+
$x + 3$	–	+	+	+
$\frac{2x+1}{x(x+1)}$	–	+	–	+

Solución: $x \in (-\infty, -3) \cup \left(\frac{-1}{2}, 0\right)$

f) $\frac{2x-1}{x+1} - 1 > \frac{x-2}{3-x} \Rightarrow \frac{2x-1}{x+1} - 1 - \frac{x-2}{3-x} > 0 \Rightarrow \frac{2x^2-6x+4}{(x+1)(x-3)} > 0 \Rightarrow \frac{2(x-1)(x-2)}{(x+1)(x-3)} > 0 \Rightarrow \frac{(x-1)(x-2)}{(x+1)(x-3)} > 0$

$-\infty \quad -1 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad +\infty$

	$x = -2$	$x = 0$	$x = 1{,}5$	$x = 2{,}5$	$x = 4$
$x - 3$	–	–	–	–	+
$x - 2$	–	–	–	+	+
$x - 1$	–	–	+	+	+
$x + 1$	–	+	+	+	+
$\frac{(x-1)(x-2)}{(x+1)(x-3)}$	+	–	+	–	+

Solución: $x \in (-\infty,-1) \cup (1, 2) \cup (3, +\infty)$

g) $\frac{x^2+2x+3}{x^2-x+1} \le \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{x^2+2x+3}{x^2-x+1} - \frac{2}{3} \le 0 \Rightarrow \frac{x^2+8x+7}{x^2-x+1} \le 0 \Rightarrow x^2+8x+7 \le 0 \Rightarrow (x+7)(x+1) \le 0$

$-\infty \quad -7 \quad -1 \quad +\infty$

	$x = -8$	$x = -2$	$x = 0$
$x + 1$	–	–	+
$x + 7$	–	+	+
$x^2 + 8x + 7$	+	–	+

Solución: $x \in [-7, -1]$

h) $\frac{-x^2-4}{x^2-x-6} \le \frac{5}{6} \Rightarrow \frac{-x^2-4}{x^2-x-6} - \frac{5}{6} \le 0 \Rightarrow \frac{-11x^2+5x+6}{6(x^2-x-6)} \le 0 \Rightarrow \frac{-(x-1)(11x+6)}{6(x-3)(x+2)} \le 0 \Rightarrow \frac{(x-1)(11x+6)}{(x-3)(x+2)} \ge 0$

$-\infty \quad -2 \quad -6/11 \quad 1 \quad 3 \quad +\infty$

	$x = -3$	$x = -1$	$x = 0$	$x = 2$	$x = 4$
$x - 3$	–	–	–	–	+
$x - 1$	–	–	–	+	+
$11x + 6$	–	–	+	+	+
$x + 2$	–	+	+	+	+
$\frac{(x-1)(11x+6)}{(x-3)(x+2)}$	+	–	+	–	+

Solución: $x \in (-\infty, -2) \cup \left[\frac{-6}{11}, 1\right] \cup (3, +\infty)$

43. La inecuación $-\frac{3}{x+4} < -5$ da lugar a dos inecuaciones, según que el denominador sea mayor o menor que 0. Encuentra todas sus soluciones.

Si $x + 4 > 0$, es decir, si $x > -4$, tenemos que $-3 < -5(x + 4) \Rightarrow -\frac{17}{5} > x$, y la solución es $\left(-4, -\frac{17}{5}\right)$.

Si $x + 4 < 0$, es decir, si $x < -4$, tenemos que $-3 > -5(x + 4) \Rightarrow -\frac{17}{5} < x$, con lo que no obtenemos soluciones, ya que las dos condiciones son incompatibles.

44. Actividad resuelta.

45. Resuelve las siguientes inecuaciones transformándolas previamente en inecuaciones polinómicas.

a) $\sqrt{x^2-6x+9} \geq -2$ **b)** $2 \cdot 4^{-x} - 7 \cdot 2^{-x} - 4 \leq 0$

a) Se supone que estamos tomando la raíz positiva, por tanto $\sqrt{x^2-6x+9} = \sqrt{(x-3)^2} \geq 0$.

Luego la solución de la inecuación es $x \in \mathbb{R}$

b) Haciendo el cambio de variable $2^{-x} = t$ se obtiene la inecuación $2t^2 - 7t - 4 \leq 0$.

$2t^2 - 7t - 4 \leq 0 \Rightarrow (2t + 1)(t - 4) \leq 0$

$-\infty$ $-1/2$ 4 $+\infty$

	$t = -1$	$t = 0$	$t = 5$
$t - 4$	–	–	+
$2t + 1$	–	+	+
$(2t + 1)(t - 4)$	+	–	+

Solución: $t \in \left[\frac{-1}{2}, 4\right]$

Por tanto, $-\frac{1}{2} \leq 2^{-x} \leq 4$ .Pero como $2^{-x} > 0$, entonces $0 < 2^{-x} \leq 4 \Rightarrow 0 < 2^{-x} \leq 2^2 \Rightarrow -x \leq 2 \Rightarrow x \geq -2$.

La solución es $x \in [-2, +\infty)$.

46. Calcula los valores de *m* para que se cumpla la condición indicada en cada caso.

a) Que $mx^2 - mx + 1 \leq 0$ tenga una sola solución. **b) Que $x^4 + 4mx - 8m$ sea menor o igual que 0.**

a) Para que la inecuación tenga una sola solución, el polinomio $mx^2 - mx + 1$ debe tener una única raíz (doble). Es decir, $m^2 - 4m = 0 \Rightarrow m = 0$ o $m = 4$.

Si $m = 0$, la inecuación queda $1 \leq 0$, que no es posible.

Si $m = 4$, la inecuación resulta $4x^2 - 4x + 1 \leq 0 \Rightarrow (2x - 1)^2 \leq 0$, cuya única solución es $x = \frac{1}{2}$.

b) Hay que calcular el valor de m para que $x^4 + 4mx - 8m \leq 0$ para cualquier valor de x.

Para $x = 2$, se obtiene $2^4 + 8m - 8m = 16 > 0$.

Por tanto, no hay ningún valor de m que verifique $x^4 + 4mx - 8m \leq 0$ para cualquier valor de x.

47. Encuentra, si existen, las soluciones de estos sistemas de inecuaciones con una incógnita.

a) $\begin{cases} 2x-3 > 5x-6 \\ x+2 \leq 2(x+11) \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} \frac{x}{2} \leq x+3 \\ 1-x > 4(x-1) \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 5(1-3x) > 8+3x \\ 3x-1 \geq 1-(x+2) \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} x \geq 15-2x \\ 10+2x \geq 6x-10 \end{cases}$

a) $2x - 3 > 5x - 6 \Rightarrow 3 > 3x \Rightarrow x < 1 \Rightarrow x \in (-\infty, 1)$ y $x + 2 \leq 2(x + 11) \Rightarrow x + 2 \leq 2x + 22 \Rightarrow -20 \leq x \Rightarrow x \in [-20, +\infty)$

Solución: $x \in (-\infty, 1) \cap [-20, +\infty) = [-20, 1)$

b) $\frac{x}{2} \leq x+3 \Rightarrow x \leq 2x + 6 \Rightarrow -6 \leq x \Rightarrow x \in [-6, +\infty)$ y $1 - x > 4(x - 1) \Rightarrow 1 - x > 4x - 4 \Rightarrow 1 > x \Rightarrow x \in (-\infty, 1)$

Solución: $x \in [-6, +\infty) \cap (-\infty, 1) = [-6, 1)$

c) $5(1 - 3x) > 8 + 3x \Rightarrow 5 - 15x > 8 + 3x \Rightarrow x < \frac{-1}{6} \Rightarrow x \in \left(-\infty, \frac{-1}{6}\right)$ y $3x - 1 \geq 1 - (x + 2) \Rightarrow x \geq 0 \Rightarrow x \in [0, +\infty)$

Solución: $x \in \left(-\infty, \frac{-1}{6}\right) \cap [0, +\infty)$. Sin solución

d) $x \geq 15 - 2x \Rightarrow 3x \geq 15 \Rightarrow x \geq 5 \Rightarrow x \in [5, +\infty)$ y $10 + 2x \geq 6x - 10 \Rightarrow 20 \geq 4x \Rightarrow 5 \geq x \Rightarrow x \in (-\infty, 5]$

Solución: $x \in [5, +\infty) \cap (-\infty, 5] \Rightarrow x = 5$

48. **Dado el sistema** $\begin{cases} y < -3x + 3 \\ y \leq -x + 6 \end{cases}$ **y los puntos:**

***A*(3, 2)** ***B*(5, 3)** ***C*(–2; 8,5)** ***D*(4, 2)** ***E*(0, 0)** ***F*(–1,5; 7,5)**

a) Indica cuáles son solución del sistema.

b) ¿Cuáles satisfacen solo la primera inecuación?

c) ¿Cuáles satisfacen solo la segunda?

d) ¿Cuáles no son solución de ninguna?

a) El punto *E* es solución del sistema porque satisface las dos ecuaciones.

b) El punto *C* satisface únicamente la primera ecuación porque 8,5 ≤ –3 · (–2) + 3 = 9 y 8,5 > 2 + 6 = 8.

c) Los puntos *A*, *D* y *F* satisfacen únicamente la segunda ecuación, porque:

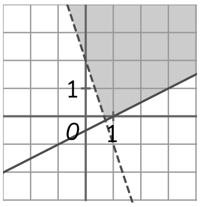
A: 2 > –3 · 4 + 3 y 2 ≤ –4 + 6 *D*: 2 > –3 · 4 + 2 y 2 ≤ –4 + 6 *F*: 7,5 > –3 · (–1,5) + 2 y 7,5 ≤ 1,5 + 6

d) El punto *B* no satisface ninguna ecuación porque 3 > –3 ·5 + 3 = –12 y 3 > –5 + 6 = 1.

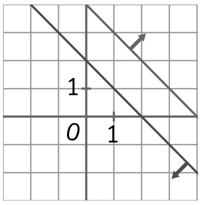
49. **Resuelve gráficamente estos sistemas.**

a) $\begin{cases} x - 2y \leq 1 \\ 3x + y > 2 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x + y \geq 4 \\ x + y < 2 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} y \leq 3 \\ x + y > 4 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} x \geq -21 \\ y < 1 \end{cases}$

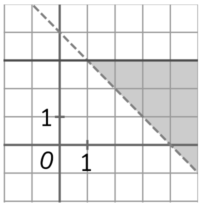
a)



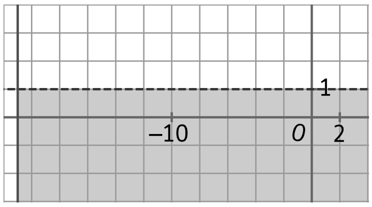
b)



c)



d)



50. **Resuelve los siguientes sistemas.**

a) $\begin{cases} x^2 - 5x + 6 \leq 0 \\ x > -3 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2(x-1)(x-3) > 0 \\ 4x - 2 \geq 3x + 1 \end{cases}$

a) $x > -3 \Rightarrow x \in (-3, +\infty)$ y $x^2 - 5x + 6 \leq 0 \Rightarrow (x-2)(x-3) \leq 0 \Rightarrow x \in [2, 3]$

Solución: $x \in (-3, +\infty) \cap [2, 3] = [2, 3]$

$-\infty$ 2 3 $+\infty$

	$x = 0$	$x = 2,5$	$x = 4$
$x - 3$	–	–	+
$x - 2$	–	+	+
$(x - 2)(x - 3)$	+	–	+

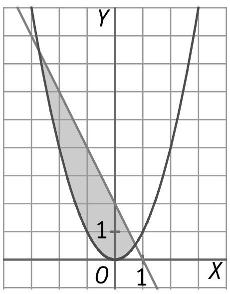
a) $4x - 2 \geq 3x + 1 \Rightarrow x \geq 3 \Rightarrow x \in [3, +\infty)$ y $2 \cdot (x-1)(x-3) > 0 \Rightarrow (x-1)(x-3) > 0 \Rightarrow x \in (-\infty, 1] \cup [3, +\infty)$

Solución: $x \in [3, +\infty)$

$-\infty$ 1 3 $+\infty$

	$x = 0$	$x = 2$	$x = 4$
$x - 3$	–	–	+
$x - 1$	–	+	+
$(x - 1)(x - 3)$	+	–	+

51. **Sombrea sobre unos ejes de coordenadas el recinto encerrado entre la parábola $y = x^2$ y la recta $y = -2x + 2$ y escribe el sistema de inecuaciones cuya solución sea dicho recinto.**



El sistema de inecuaciones es: $\begin{cases} y \geq x^2 \\ y \leq -2x + 2 \end{cases}$

52. Resuelve el siguiente sistema gráficamente dibujando las gráficas de las funciones que surgen de cada inecuación.

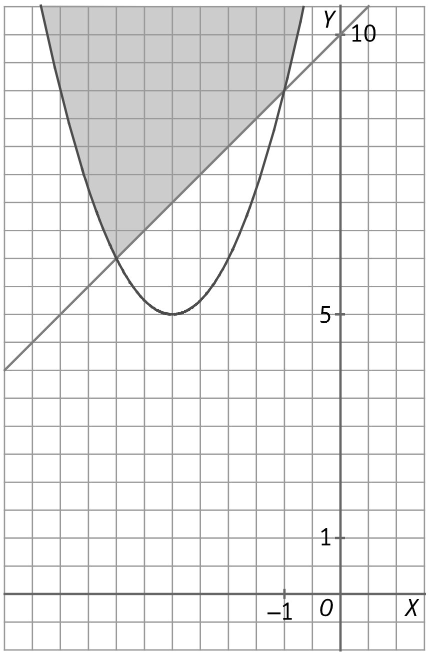
$$\begin{cases}\mathbf{2x+10 \le 2y-10} \\ \mathbf{4y-6 \ge x^2+6x+3y+8}\end{cases}$$

$$\begin{cases}2x+10 \le 2y-10 \\ 4y-6 \ge x^2+6x+3y+8\end{cases}$$

$$\begin{cases}-2y \le -10-10-2x \\ 4y-3y \ge x^2+6x+8+6\end{cases}$$

$$\begin{cases}-2y \le -20-2x \\ y \ge x^2+6x+14\end{cases}$$

$$\begin{cases}y \ge 10+x \\ y \ge x^2+6x+14\end{cases}$$



53. Para el sistema $\begin{cases}3x \le a \\ bx > -8\end{cases}$, halla qué deben cumplir *a* y *b* para que su solución sea:

a) (–4, –2]

b) (–∞, 2)

Caso 1: $b > 0$

$3x \le a \Rightarrow x \le \frac{a}{3} \Rightarrow x \in \left(-\infty, \frac{a}{3}\right]$ y $bx > -8 \Rightarrow x > \frac{-8}{b} \Rightarrow x \in \left(\frac{-8}{b}, +\infty\right)$

- Si $\frac{a}{3} < \frac{-8}{b} \Rightarrow$ Sin solución
- Si $\frac{a}{3} \ge \frac{-8}{b} \Rightarrow$ Solución: $\left(\frac{-8}{b}, \frac{a}{3}\right]$

a) $(-4, -2] = \left(\frac{-8}{b}, \frac{a}{3}\right] \Rightarrow b = 2$ y $a = -6$

b) $\left(\frac{-8}{b}, \frac{a}{3}\right] = (-\infty, 2) \Rightarrow$ Sin solución

Caso 2: $b < 0$

$3x \le a \Rightarrow x \le \frac{a}{3} \Rightarrow x \in \left(-\infty, \frac{a}{3}\right]$ y $bx > -8 \Rightarrow x < \frac{-8}{b} \Rightarrow x \in \left(-\infty, \frac{-8}{b}\right)$

- Si $\frac{a}{3} < \frac{-8}{b} \Rightarrow$ Solución: $\left(-\infty, \frac{a}{3}\right]$
- Si $\frac{a}{3} \ge \frac{-8}{b} \Rightarrow$ Solución: $\left(-\infty, \frac{-8}{b}\right)$

a) $\frac{a}{3} < \frac{-8}{b} \Rightarrow \left(-\infty, \frac{a}{3}\right] = (-4, -2] \Rightarrow$ Sin solución

$\frac{a}{3} \ge \frac{-8}{b} \Rightarrow \left(-\infty, \frac{-8}{b}\right) = (-4, -2] \Rightarrow$ Sin solución

b) $\frac{a}{3} < \frac{-8}{b} \Rightarrow \left(-\infty, \frac{a}{3}\right] = (-\infty, 2] \Rightarrow$ Sin solución

$\frac{a}{3} \ge \frac{-8}{b} \Rightarrow \left(-\infty, \frac{-8}{b}\right) = (-\infty, 2) \Rightarrow b = -4 \Rightarrow a \ge 6$

Conclusión:

a) $b = 2$ y $a = -6$

b) $b = -4 \Rightarrow a \ge 6$

54. ¿Qué condiciones debe cumplir el tercer lado de un triángulo si los otros dos lados miden 2 y 5 cm, respectivamente?

El lado del triángulo debe medir más de 3 cm y menos de 7 cm.

- $5 < x + 2 \Rightarrow 3 < x$
- $x < 2 + 5 \Rightarrow x < 7$
- $2 < x + 5 \Rightarrow$ Siempre se cumple.

55. Completa con <, >, ≤ y ≥ para que las semirrectas dadas sean las soluciones de las inecuaciones.

a) $\dfrac{2x-1}{3}-x \bullet 3x-2 \qquad \left[\dfrac{1}{2},+\infty\right)$ **b)** $\dfrac{x-4}{2} \bullet \dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{6}(x+1) \qquad (-\infty,-13)$

a) Si $x = 1 \Rightarrow \dfrac{2\cdot 1-1}{3}-1=\dfrac{-2}{3} < 3\cdot 1-2=1$. Por tanto, $\dfrac{2x-1}{3}-x \le 3x-2$.

b) Si $x = -16 \Rightarrow \dfrac{-16-4}{2}=-10 > \dfrac{-16}{2}+\dfrac{1}{6}(-16+1)=\dfrac{-21}{2}$. Por tanto, $\dfrac{x-4}{2} > \dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{6}(x+1)$

56. ¿En cuántas regiones divide al plano la recta $y = 3x - 5$? Descríbelas utilizando inecuaciones.

La recta $y = 3x - 5$ divide al plano en dos regiones: $y \ge 3x - 5$ e $y \le 3x - 5$.

57. Actividad resuelta.

58. Halla en cada caso una inecuación polinómica cuya solución se corresponda con la dada.

a) **[–3, +∞)** **c)** **(2, +∞)** **e)** **(–∞, 2)** **g)** **(–∞,–2] U [1, +∞)**

b) **Sin solución** **d)** **(–3, 5)** **f)** $x = 3$ **h)** **(–4, 0) U (3, 5)**

a) $x \ge -3$ **c)** $x > 2$ **e)** $x < 2$ **g)** $(x + 2)(x - 1) \ge 0$

b) $x^2 < 0$ **d)** $(x + 3)(x - 5) < 0$ **f)** $(x - 3)^2 \le 0$ **h)** $x(x + 4)(x - 3)(x - 5) < 0$

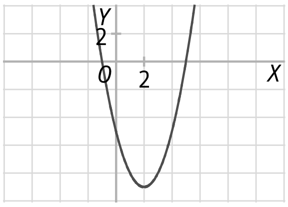
59. A partir de la gráfica de la función $f(x) = (x - 5)(x + 1)$, resuelve las inecuaciones.

a) $f(x) > 0$ **c)** $f(x) \ge 0$

b) $f(x) < 0$ **d)** $f(x) \le 0$

a) (–∞, –1) U (5, +∞) **c)** (–∞, –1] U [5, +∞)

b) (–1, 5) **d)** [–1, 5]



60. Escribe, en cada caso, un sistema de inecuaciones que tenga como solución:

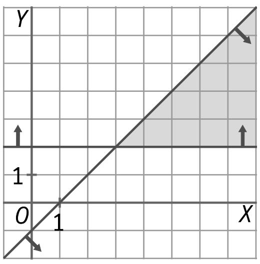
a) **El cuadrado de lado 2 centrado en el origen** **c)** **El tercer cuadrante del plano**

b) **El intervalo (–3, 7]** **d)** **La semirrecta [5, +∞)**

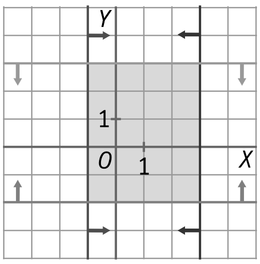
a) $\begin{cases} -1 \le x \\ x \le 1 \\ -1 \le y \\ y \le 1 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} -3 < x \\ x \le 7 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x \le 0 \\ y \le 0 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} x \ge 5 \\ x > 0 \end{cases}$

61. Investiga qué sistemas de inecuaciones tienen como solución estas regiones del plano.

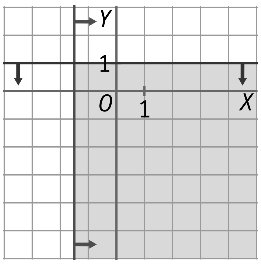
a)



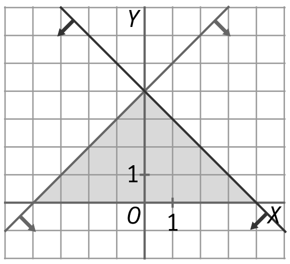
b)



c)



d)



a) $\begin{cases} y > 2 \\ y < x-1 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} -1 \le x \le 3 \\ -2 \le y \le 3 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x \ge -1{,}5 \\ y \le 1 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} y \le x+4 \\ y \le -x+4 \end{cases}$

62. Observa la conversación y responde.

Sea x la nota del tercer examen.

$$\frac{6,2+8,1+x}{3} \geq 7,5 \Rightarrow 6,2+8,1+x \geq 22,5 \Rightarrow x \geq 22,5-6,2-8,1 \Rightarrow x \geq 8,2$$

Tiene que sacar una nota igual o superior a 8,2 para obtener como mínimo un 7,5 de media.

63. Un carpintero va a colocar un rodapié en una habitación rectangular de 6 metros de ancho y con un perímetro menor de 30 metros. ¿Cuánto puede valer el largo del cuarto?

Sea x la longitud del cuarto.

$2(x + 6) < 30 \Rightarrow 2x + 12 < 30 \Rightarrow 2x < 18 \Rightarrow x < 9$

La longitud del cuarto estará entre 0 y 9 metros.

64. Tengo un rebaño de cabras. Si añado siete cabras, tengo menos que el triple de la cantidad inicial, pero si solamente añado cinco cabras, tengo más que el doble de la cantidad inicial. ¿Cuántas cabras hay en mi rebaño inicial?

Sea x el número de cabras del rebaño inicial.

$$\left\{\begin{array}{l} x+7<3x \Rightarrow 7<2x \Rightarrow \frac{7}{2}<x \Rightarrow x \in \left(\frac{7}{2}, +\infty\right) \\ x+5>2x \Rightarrow 5>x \Rightarrow x \in (0, 5) \end{array}\right. \Rightarrow \text{ Solución: } x \in \left(\frac{7}{2}, +\infty\right) \cap (0, 5) = \left(\frac{7}{2}, 5\right)$$

Como x es un número natural, entonces hay 4 cabras en el rebaño inicial.

65. La tirada de una revista mensual tiene unos costes de edición de 30 000 € y 1,50 € de gastos de distribución por cada revista publicada. Si cada ejemplar se vende a 3,50 € y se obtienen unos ingresos de 12 000 € por publicidad, ¿cuántas revistas se deben vender para empezar a obtener beneficios?

Sea x el número de revistas que se deben vender para empezar a obtener beneficios.

$30\,000 + 1,5x < 12\,000 + 3,50x \Rightarrow 30\,000 - 12\,000 < 3,50x - 1,50x \Rightarrow 18\,000 < 2x \Rightarrow 9000 < x$

A partir de 9000 revistas vendidas se empiezan a obtener beneficios.

66. Un ascensor soporta una tonelada. Luis quiere subir cajas y sacos. Las cajas pesan 35 kg más que los sacos. Tras cargar cinco de cada uno, mete otra caja y salta la alarma, así que la cambia por un saco y no hay problemas. ¿Entre qué valores está el peso del saco?

Si x es el peso del saco, entonces $x + 35$ es el peso de una caja.

$$\left\{\begin{array}{l} 5x+6(x+35)>1000 \Rightarrow 5x+6x+210>1000 \Rightarrow 11x>790 \Rightarrow x>\frac{790}{11} \Rightarrow x \in \left(\frac{790}{11}, +\infty\right) \\ 6x+5(x+35)<1000 \Rightarrow 6x+5x+175>1000 \Rightarrow 11x<825 \Rightarrow x<75 \Rightarrow x \in (0, 75) \end{array}\right. \Rightarrow x \in \left(\frac{790}{11}, 75\right)$$

El peso del saco está entre $\frac{790}{11} \approx 71,82$ kg y 75 kg.

67. Para confeccionar dos tipos de pantalones se dispone de 40 unidades de algodón cardado y de 100 de algodón peinado. El contenido en cada tipo de algodón de los dos modelos se indica en la siguiente tabla.

	Unidades de algodón cardado	Unidades de algodón peinado
Tipo I (extra)	1	5
Tipo II (medio)	3	3

a) ¿Es posible confeccionar 15 pantalones del tipo I y 10 del tipo II?

b) Representa la zona que incluye las distintas posibilidades de confeccionar *x* pantalones de tipo I e *y* de tipo II.

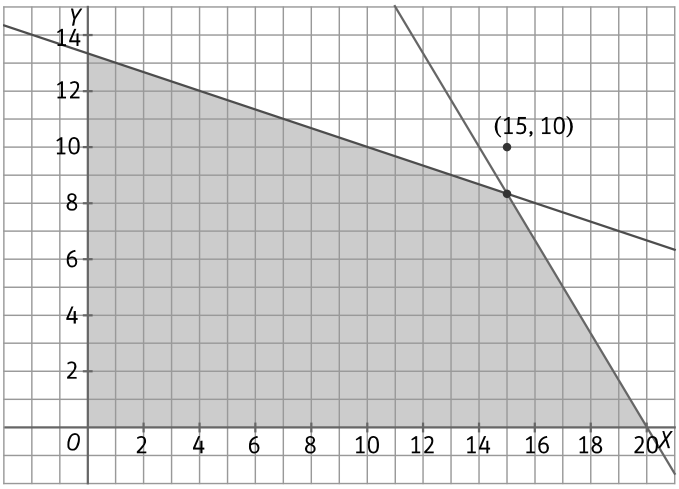
a) 15 pantalones de tipo I y 10 de tipo II precisan 15 + 3 · 10 = 45 unidades de algodón cardado.

Como se cuenta con 40 unidades de cardado, no se podrá confeccionar 15 pantalones del tipo I y 10 del tipo II.

b) El sistema que se plantea es el siguiente:

$$\begin{cases} x + 3y \le 40 \\ 5x + 3y \le 100 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$$

Las soluciones son los puntos de coordenadas naturales que se encuentran en la intersección de las regiones.



68. En una tienda de comercio justo venden cafés de Ecuador y de Colombia. El que procede de Ecuador cuesta 1,30 € por paquete, y el de Colombia, 1,65 €. Averigua el número de paquetes de cada tipo que puedo adquirir con 25 € si quiero comprar el doble de paquetes de Colombia que de Ecuador.

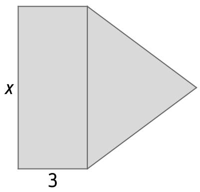
Si x es el número de paquetes de café de Ecuador, entonces $2x$ es el número de paquetes de café de Colombia.

$1{,}30x + 1{,}65 \cdot 2x \le 25 \Rightarrow 1{,}30x + 3{,}30x \le 25 \Rightarrow 4{,}6x \le 25 \Rightarrow x \le 5{,}4$

Se pueden adquirir, como máximo, 5 paquetes de café de Ecuador y 10 de Colombia.

69. Indica para qué valores de *x* el área del triángulo equilátero es mayor que la del rectángulo.

Aplicando el teorema de Pitágoras, la altura del triángulo es:



$$h = \sqrt{x^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \sqrt{x^2 - \frac{x^2}{4}} = \sqrt{\frac{3x^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}x}{2}.$$

$$A_{\text{triángulo}} = \frac{x \cdot \frac{\sqrt{3}x}{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}x^2}{4} \text{ y } A_{\text{rectángulo}} = 3x.$$

$$\frac{\sqrt{3}x^2}{4} > 3x \Rightarrow \sqrt{3}x > 12 \Rightarrow x > \frac{12}{\sqrt{3}} = \frac{12\sqrt{3}}{3} = 4\sqrt{3}$$

Si $x > 4\sqrt{3}$, entonces el área del triángulo equilátero es mayor que la del rectángulo.

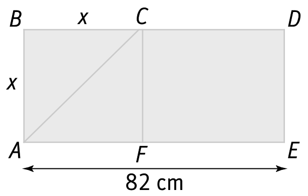
70. Si el área de un cuadrado es menor o igual que 64 cm², calcula los posibles valores de su diagonal.

Sea x la medida del lado del cuadrado.

$x^2 \le 64$ y $x > 0 \Rightarrow 0 < x \le 8$

Como la diagonal del cuadrado mide $d = \sqrt{x^2 + x^2} = \sqrt{2x^2} = \sqrt{2}x$, entonces $0 < d \le 8\sqrt{2}$.

71. Calcula para qué valores de *x* el área del triángulo *ABC* es menor que la del trapecio *ACDE*.



El área del triángulo *ABC* es $\frac{x \cdot x}{2} = \frac{x^2}{2}$ y, la del trapecio *ACDE*, $82x - \frac{x^2}{2}$.

$$\frac{x^2}{2} < 82x - \frac{x^2}{2} \Rightarrow x^2 < 164x - x^2 \Rightarrow 2x^2 - 164x < 0 \Rightarrow 2x(x-82) < 0$$

Como $x > 0$, entonces la inecuación resulta $x - 82 < 0$. Por tanto, $x < 82$.

Para que el área del triángulo *ABC* sea menor que la del trapecio *ACDE*, la medida *x* debe ser menor de 82 cm.

72. Un test tiene 25 preguntas. Se obtienen 5 puntos por cada respuesta correcta, 2 puntos por cada respuesta en blanco y 0 puntos por cada respuesta incorrecta. Si María tiene 3 respuestas incorrectas y algunas en blanco, ¿cuál es el mínimo de aciertos que necesita para obtener al menos 90 puntos?

A. 15 **B. 16** **C. 17** **D. 18**

Si *x* el número de aciertos, entonces el número de respuestas en blanco es $25 - x - 3$.

$$5x + 2 \cdot (25 - x - 3) \geq 90 \Rightarrow 5x + 50 - 2x - 6 \geq 90 \Rightarrow 3x \geq 46 \Rightarrow x \geq \frac{46}{3} \approx 15{,}33$$

María necesita, al menos, 16 respuestas correctas.

La respuesta correcta es la B.

73. Indica cuál es el conjunto de todas las soluciones de la inecuación $|x - 1| + |x + 2| < 5$.

A. (–3, 2) **B. (–1, 2)** **C.** $\left(-\frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right)$ **D. (–2, 1)**

- $x < -2 \Rightarrow 1 - x - x - 2 < 5 \Rightarrow -2x < 6 \Rightarrow x > -3 \Rightarrow$ Solución: $(-3, -2)$
- $-2 \leq x \leq 1 \Rightarrow 1 - x + x + 2 < 5 \Rightarrow 3 < 5 \Rightarrow$ Solución: $[-2, 1]$
- $x > 1 \Rightarrow x - 1 + x + 2 < 5 \Rightarrow x < 2 \Rightarrow$ Solución: $(1, 2)$

El conjunto de todas las soluciones de la inecuación es (–3, –2) U [–2, 1] U (1, 2). Es decir, el intervalo (–3, 2).

La respuesta correcta es la A.

74. ¿Cuál es la única afirmación correcta?

A. Si $x < 1$, entonces $x^2 < x$

B. Si $x^2 > x$, entonces $x < 0$

C. Si $x^2 > x$, entonces $x > 0$

D. Si $x < 0$, entonces $x^2 > x$

A. Falso, por ejemplo para $x = -2$

B. Falso, por ejemplo para $x = 3$

C. Falso, por ejemplo para $x = -1$

D. Correcta, pues al ser $x < 0$ y $x^2 > 0$, entonces $x^2 > x$.

75. Un número positivo *x* satisface la desigualdad $\sqrt{x} > 2x$ si y solo si:

A. $x > \frac{1}{4}$ **B.** $x > 2$ **C.** $x < \frac{1}{4}$ **D.** $x < 4$

Como $x > 0$ y $\sqrt{x} < 2x$, entonces: $x < (2x)^2 \Rightarrow x < 4x^2 \Rightarrow x - 4x^2 < 0 \Rightarrow x(1 - 4x) < 0 \Rightarrow 1 - 4x < 0 \Rightarrow x > \frac{1}{4}$

La respuesta correcta es la A.

76. Los números x tales que $\frac{x^2-4}{x^2-1} > 0$ son:

A. $\{x \mid x > 2 \text{ o } x < -2 \text{ o } -1 < x < 1\}$ B. $\{x \mid x > 2 \text{ o } x < -2\}$ C. $\{x \mid x > 1 \text{ o } x < -2\}$ D. $\{x \mid x \neq 1 \text{ y } x \neq -1\}$

$$\frac{x^2-4}{x^2-1} = \frac{(x-2)(x+2)}{(x-1)(x+1)} > 0$$

$-\infty$ -2 -1 1 2 $+\infty$

	$x = -3$	$x = -1{,}5$	$x = 0$	$x = 1{,}5$	$x = 3$
$x - 2$	–	–	–	–	+
$x - 1$	–	–	–	+	+
$x + 1$	–	–	+	+	+
$x + 2$	–	+	+	+	+
$\frac{(x-2)(x+2)}{(x-1)(x+1)}$	+	–	+	–	+

Solución: $x \in (-\infty, -2) \cup (-1, 1) \cup (2, +\infty) = \{x \mid x > 2 \text{ o } x < -2 \text{ o } -1 < x < 1\}$

La respuesta correcta es la A.

Encuentra el error

77. Joaquín ha resuelto la inecuación $\frac{x-1}{2x+3} \leq \frac{1}{3}$ de esta manera: $3(x - 1) \leq 2x + 3 \Rightarrow 3x - 2x \leq 3 + 3 \Rightarrow x \leq 6$

Sin embargo, al sustituir $x = -10$ no se cumple la inecuación: $\frac{-10-1}{2\cdot(-10)+3} = \frac{11}{17} > \frac{1}{3}$.

¿Dónde está el error?

Joaquín resuelve la inecuación como si fuera una ecuación racional y, al tratarse de una inecuación racional, no se pueden eliminar los denominadores.

PONTE A PRUEBA

Una dieta matemática

Actividad resuelta.

Geografía con inecuaciones.

Para determinar un punto sobre la superficie terrestre se utilizan las coordenadas geográficas: latitud y longitud. Pero para delimitar una región o un país con un sistema de coordenadas geográficas, las fronteras corresponden a una curva de ecuaciones bastante complicadas. No obstante, se puede aproximar esa curva por una línea poligonal cuyos segmentos rectilíneos corresponden a ecuaciones de primer grado. La definición de una región convexa puede hacerse mediante un sistema de inecuaciones geográficas.

Se toma un sistema de coordenadas geográficas con dos ejes: el meridiano de Greenwich (*X*) y el Ecuador (*Y*). Se designa la latitud mediante la variable *x* y la longitud mediante la *y*. Así, un punto de la superficie terrestre de coordenadas (+23º, –15º) corresponde a un lugar de latitud 23º N y una longitud de 15º O.

1. La península ibérica se asemeja a una forma pentagonal.

a) Dos de las rectas que determinan los lados del pentágono tienen por ecuaciones $4x - y = 150$; $8x + y + 339 = 0$ en el sistema de coordenadas geográficas. Identifica cuáles son y halla la ecuación de las otras.

$4x - y = 150$ es la línea que une la punta de Tarifa con el cabo de Gata.

$8x + y + 339 = 0$ es la línea que une el cabo de Ortegal con el cabo de Creus.

AE: $y + 9 = 0$ es la línea que une el cabo de San Vicente con el cabo de Ortegal.

BC: $10x - 11y = 392$ es la línea que une el cabo de Creus con el cabo de Gata.

DE: $7x + 2y = 241$ es la línea que une el cabo de San Vicente con la punta de Tarifa.

b) Determina mediante inecuaciones la porción de la superficie terrestre representada por la península ibérica.

$4x - y \geq 150$; $8x + y + 339 \leq 0$; $y + 9 \geq 0$; $10x - 11y \geq 392$; $7x + 2y \geq 241$

AUTOEVALUACIÓN

1. Indica cuál de los siguientes intervalos es la solución de la inecuación $-4x + 1 \leq -3$.

a) $[1, +\infty)$ **b)** $[-1, +\infty)$ **c)** $(-\infty, 1]$ **d)** $(-\infty, -1]$

$-4x + 1 \leq -3 \Rightarrow -4x \leq -4 \Rightarrow x \geq 1 \Rightarrow x \in [1, +\infty) \Rightarrow$ Respuesta a).

2. ¿Cuáles de las siguientes inecuaciones son equivalentes a $x - 2 \leq 10$?

a) $x - 7 \leq 5$ **b)** $x + 1 \leq 7$ **c)** $2 - x \geq -10$ **d)** $3x - 6 \leq -30$

En los casos afirmativos, indica la transformación que permite pasar de una a otra ecuación.

a) Equivalente, sumando –5.

b) No es equivalente.

c) Equivalente, multiplicando por –1.

d) No es equivalente.

3. Resuelve las siguientes inecuaciones.

a) $-2x^2 + 2x + 12 \leq 0$ **b)** $3x^3 + x^2 - 3x - 1 \geq 0$ **c)** $x^4 - 4 > 0$ **d)** $\dfrac{x^2 - x}{x + 5} < 0$

a) $-2x^2 + 2x + 12 \leq 0 \Rightarrow -2(x^2 - x - 6) \leq 0 \Rightarrow x^2 - x - 6 \geq 0 \Rightarrow (x + 2)(x - 3) \geq 0$

$-\infty$ -2 3 $+\infty$

	$x = -3$	$x = 0$	$x = 4$
$x - 3$	–	–	+
$x + 2$	–	+	+
$(x + 2)(x - 3)$	+	–	+

Solución: $x \in (-\infty, -2] \cup [3, +\infty)$

b) $3x^3 + x^2 - 3x - 1 \geq 0 \Rightarrow (x - 1)(x + 1)(3x + 1) \geq 0$

$-\infty$ -1 $-1/3$ 1 $+\infty$

	$x = -2$	$x = -0{,}5$	$x = 0$	$x = 2$
$x - 1$	–	–	–	+
$3x + 1$	–	–	+	+
$x + 1$	–	+	+	+
$(x - 1)(x + 1)(3x + 1)$	–	+	–	+

Solución: $x \in \left[-1, \dfrac{-1}{3}\right] \cup [1, +\infty)$

c) $x^4 - 4 > 0 \Rightarrow (x^2 + 2)(x^2 - 2) > 0 \Rightarrow (x^2 + 2)\left(x - \sqrt{2}\right)\left(x + \sqrt{2}\right) > 0 \Rightarrow \left(x - \sqrt{2}\right)\left(x + \sqrt{2}\right) > 0$

$-\infty$ $-\sqrt{2}$ $\sqrt{2}$ $+\infty$

	$x = -2$	$x = 0$	$x = 2$
$x - \sqrt{2}$	–	–	+
$x + \sqrt{2}$	–	+	+
$\left(x - \sqrt{2}\right)\left(x + \sqrt{2}\right)$	+	–	+

Solución: $x \in \left(-\infty, -\sqrt{2}\right) \cup \left(\sqrt{2}, +\infty\right)$

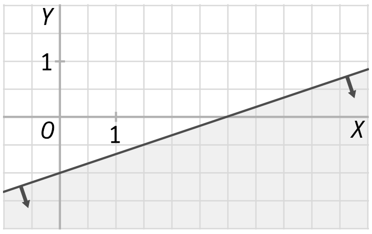
d) $\dfrac{x^2 - x}{x + 5} < 0 \Rightarrow \dfrac{x(x - 1)}{x + 5} < 0$

$-\infty$ -5 0 1 $+\infty$

	$x = -6$	$x = -1$	$x = 0{,}5$	$x = 2$
$x - 1$	–	–	–	+
x	–	–	+	+
$x + 5$	–	+	+	+
$\dfrac{x(x - 1)}{x + 5}$	–	+	–	+

Solución: $x \in (-\infty, -5) \cup (0, 1)$

4. **Escribe la inecuación cuya solución es el siguiente semiplano.**



$y < \frac{1}{3}x - 1$

5. **Resuelve estos sistemas de inecuaciones.**

a) $\begin{cases} x+1 \le 3 \\ 3x > -1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+2 > 6 \\ x-2 \le 2x \end{cases}$ c) $\begin{cases} -x^2-3x+10 > 0 \\ x < -1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x+y \le 3 \\ x+3y > 1 \end{cases}$

a) $x + 1 \le 3 \Rightarrow x \le 2 \Rightarrow x \in (-\infty, 2]$ y $3x > -1 \Rightarrow x > \frac{-1}{3} \Rightarrow x \in \left(\frac{-1}{3}, +\infty\right)$

Solución: $x \in (-\infty, 2] \cap \left(\frac{-1}{3}, +\infty\right) = \left(\frac{-1}{3}, 2\right]$

b) $x + 2 > 6 \Rightarrow x > 4 \Rightarrow x \in (4, +\infty)$ y $x - 2 \le 2x \Rightarrow x \ge -2 \Rightarrow x \in [-2, +\infty)$

Solución: $x \in (4, +\infty) \cap [-2, +\infty) = (4, +\infty)$

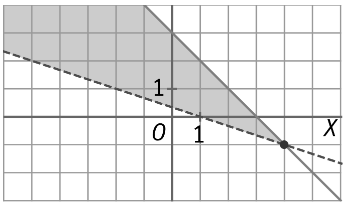
c) $x < -1 \Rightarrow x \in [-\infty,-1)$ y $-x^2 - 3x + 10 > 0 \Rightarrow -(x - 2)(x + 5) > 0 \Rightarrow (x - 2)(x + 5) < 0 \Rightarrow x \in (-5, 2)$

Solución: $x \in [-\infty,-1) \cap (-5, 2) = (-5, -1)$

$-\infty$ -5 2 $+\infty$

	$x = -6$	$x = 0$	$x = 3$
$x - 2$	–	–	+
$x + 5$	–	+	+
$(x - 2)(x + 5)$	+	–	+

d)



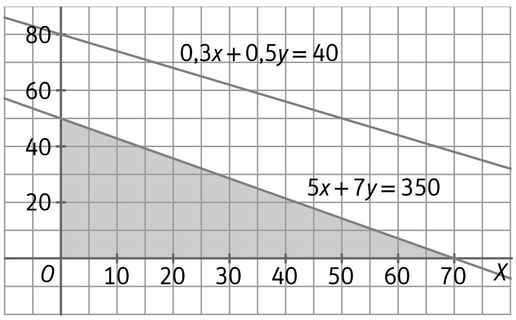
6. **Marcos quiere encargar a un cristalero un espejo circular, aunque no tiene claro qué tamaño le conviene. Lo que sabe es que el radio puede variar entre 20 cm y 25 cm. ¿Entre qué valores oscilaría el área del cristal? ¿Y su perímetro?**

Llamamos r al radio del espejo: $20 \le r \le 25 \Rightarrow 400\pi \le \text{Área} \le 625\pi$ y $40\pi \le \text{Perímetro} \le 50\pi$

7. **Dos comerciantes disponen de 35 000 € para comprar ordenadores y de 40 m³ de espacio para almacenarlos. Dos proveedores les venden aparatos de 500 € y 700 € que ocupan 0,3 m³ y 0,5 m³, respectivamente. ¿Cuántos ordenadores, como máximo, pueden comprar para optimizar el espacio y ajustarlo a su presupuesto?**

Llamamos x al número de ordenadores de 500 € e y al de 700.

$$\begin{cases} 500x + 700y \le 35\,000 \\ 0{,}3x + 0{,}5y \le 40 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$$



El máximo número de ordenadores que se pueden comprar para optimizar el espacio y ajustarlo al presupuesto es 70 ordenadores de 500 € y 0 de 700 €. En este caso se gasta todo el presupuesto y se ocupan 21 m³.