8 Funciones

ANALIZA Y CONTESTA

¿Qué magnitudes relaciona la función representada en un cardiograma?

En un cardiograma se relaciona la diferencia de potencial de los impulsos eléctricos del corazón, medidos en milivoltios, con el tiempo, medido en segundos.

¿Cuál es la variable independiente? ¿Y la dependiente?

La variable independiente es el tiempo, y la dependiente, la diferencia de potencial de los impulsos eléctricos del corazón.

¿Qué es la bradicardia fisiológica? ¿Y la taquicardia?

La bradicardia fisiológica es un número bajo de pulsaciones por minuto (menos de 50 sístoles por minuto) y la taquicardia es un número elevado de pulsaciones por minuto (por encima de 100 sístoles por minuto).

OBSERVA Y SACA CONCLUSIONES

Observa la gráfica de un electrocardiograma y señala dos características matemáticas de la gráfica que dan información al cardiólogo del estado del corazón.

Respuesta modelo: la periodicidad, la amplitud de las ondas, los máximos y los mínimos, la concavidad y la convexidad…

Y TÚ, ¿QUÉ OPINAS?

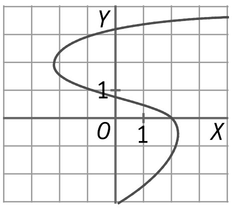
El electrocardiograma permite conocer el estado del corazón y realizar diagnósticos sobre nuestra salud. Pero es nuestra responsabilidad llevar unos hábitos de vida saludables. ¿Crees que eres responsable tú con tu salud? ¿Qué comportamientos favorecen una vida saludable?

Respuesta libre.

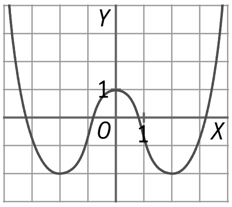
Actividades propuestas

1. Observa las gráficas de las siguientes correspondencias entre dos conjuntos.

I)



II)



a) ¿Las correspondencias son funciones?

b) ¿Las correspondencias son inyectivas?

a) La correspondencia de la gráfica I no es función porque para cada valor de x no hay un único valor de y. Por ejemplo, si $x = -1 \Rightarrow y = 1$ e $y = 3$

La correspondencia de la gráfica II sí es función porque para cada valor de x hay un único valor de y.

b) La correspondencia de la gráfica I sí es inyectiva porque si $f(x_1) = f(x_2)$, entonces $x_1 = x_2$.

La correspondencia de la gráfica II no es inyectiva, ya que si sustituimos el valor de x por 2 y por –2 se obtiene el mismo valor de y. Es decir, $f(2) = f(-2) = -2$.

2. Actividad resuelta.

3. De las siguientes correspondencias, indica cuáles son funciones. En caso afirmativo, indica la variable dependiente e independiente.

a) Cada estudiante de una clase anota el deporte que practica.

b) A cada número natural le corresponde su cubo.

c) $y = x^2 - 2x$

a) No es una función, ya que cada estudiante puede practicar más de un deporte.

La variable independiente son los estudiantes y la dependiente, los deportes.

b) Es una función, ya que a cada número natural le corresponde un único número natural.

La variable independiente son los números naturales y la dependiente, los números naturales.

c) Es una función, ya que a cada valor de x le corresponde un único valor de y.

La variable independiente es x y la dependiente, y.

4. De las correspondencias del ejercicio anterior, señala las que son inyectivas. Justifica tu respuesta.

a) Cada estudiante de una clase anota el deporte que practica.

Esta correspondencia no es inyectiva porque puede haber varios estudiantes que practiquen el mismo deporte.

b) A cada número natural le corresponde su cubo.

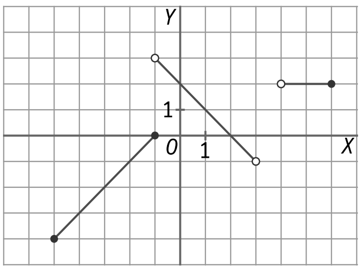
Esta función es inyectiva porque números diferentes tienen cubos diferentes.

c) $y = x^2 - 2x$

Esta función no es inyectiva porque si sustituimos el valor de x por 0 y por 2, se obtiene el mismo valor de y.

5. Representa gráficamente la función a trozos:

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si} \quad -5 \le x \le -1 \\ -x+2 & \text{si} \quad -1 < x < 3 \\ 2 & \text{si} \quad 4 < x < 6 \end{cases}$$



6. Actividad resuelta.

7. Se considera la función $f(x) = |4 - 2x|$ definida en el intervalo [–3, 3]. Exprésala como una función a trozos.

Se expresa el valor absoluto como:

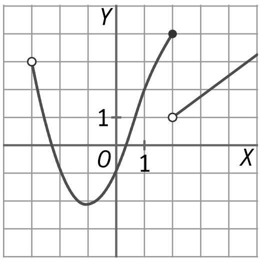
$$|4-2x| = \begin{cases} 4-2x & \text{si} \quad x < 2 \\ -(4-2x) & \text{si} \quad x \ge 2 \end{cases}$$

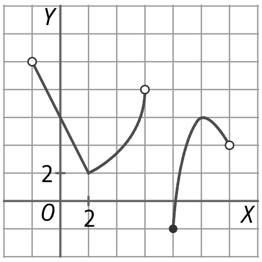
Por tanto, la función definida a trozos en el intervalo [–3, 3] es:

$$f(x) = \begin{cases} 4-2x & \text{si} \quad -3 \le x < 2 \\ -(4-2x) & \text{si} \quad 2 \le x \le 3 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} 4-2x & \text{si} \quad -3 \le x < 2 \\ 2x-4 & \text{si} \quad 2 \le x \le 3 \end{cases}$$

8. Actividad resuelta.

9. Indica el dominio y el recorrido de las funciones correspondientes a las siguientes gráficas.

a) 

b) 

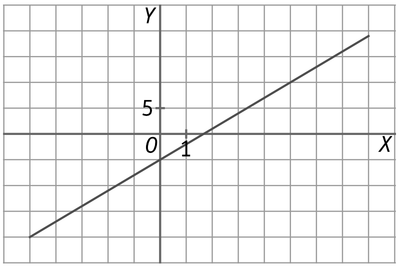
a) $D(f) = (-3, +\infty)$

$R(f) = [-2, 4]$

b) $D(f) = (-2, 6) \cup [8, 12)$

$R(f) = [-2, 10)$

10. Representa la función $f(x) = 3x - 5$ en el intervalo $[-5, 8]$. ¿Cuál es su recorrido? ¿Es inyectiva?



- $f(-5) = -20$ y $f(8) = 19 \Rightarrow R(f) = [-20, 19]$
- $f(x)$ es una función inyectiva porque: $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 3x_1 - 5 = 3x_2 - 5 \Rightarrow 3x_1 = 3x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$

11. Actividad resuelta.

12. Halla el dominio de estas funciones.

a) $f(x) = \dfrac{3}{2x-6}$

b) $h(x) = \dfrac{3}{x^2-9}$

c) $g(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$

d) $i(x) = \dfrac{-2}{|x-4|}$

a) $2x - 6 = 0 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow D(f) = \mathbb{R} - \{3\} = (-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$

b) $x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x = \pm 3 \Rightarrow D(h) = \mathbb{R} - \{-3, 3\} = (-\infty, -3) \cup (-3, 3) \cup (3, +\infty)$

c) $x^2 + 1 \neq 0 \Rightarrow D(g) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

d) $|x - 4| = 0 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow D(i) = \mathbb{R} - \{4\} = (-\infty, 4) \cup (4, +\infty)$

13. Actividad resuelta.

14. Halla el dominio y el recorrido de estas funciones.

a) $f(x) = \sqrt{2x-6}$

b) $h(x) = \sqrt{3-x}$

c) $g(x) = \sqrt{x^2+1}$

d) $i(x) = \sqrt{x}+2$

a) $2x - 6 \geq 0 \Rightarrow x \geq 3 \Rightarrow D(f) = [3, +\infty)$

$f(3) = 0 \Rightarrow R(f) = [0, +\infty)$

b) $3 - x \geq 0 \Rightarrow 3 \geq x \Rightarrow D(h) = (-\infty, 3]$

$h(3) = 0 \Rightarrow R(h) = [0, +\infty)$

c) $x^2 + 1 > 0 \Rightarrow D(g) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

$R(g) = [1, +\infty)$

d) $x \geq 0 \Rightarrow D(i) = [0, +\infty)$

$i(0) = 2 \Rightarrow R(i) = [2, +\infty)$

15. **Dadas las funciones $f(x) = x^2 + 3$, $g(x) = 2x - 5$ y $h(x) = \dfrac{3}{x+4}$, calcula:**

a) $(f + g)(5)$ c) $(f \cdot h)(1)$ e) $\left(\dfrac{1}{f}\right)(-3)$

b) $(g - h)(7)$ d) $(-g)(11)$ f) $[(f + g) \cdot h](2)$

a) $(f + g)(5) = f(5) + g(5) = 5^2 + 3 + 2 \cdot 5 - 5 = 33$

b) $(g - h)(7) = g(7) - h(7) = \dfrac{96}{11}$

c) $(f \cdot h)(1) = f(1) \cdot h(1) = (1^2 + 3) \cdot \dfrac{3}{1+4} = \dfrac{12}{5}$

d) $(-g)(11) = -g(11) = -(2 \cdot 11 - 5) = -17$

e) $\left(\dfrac{1}{f}\right)(-3) = \dfrac{1}{f(-3)} = \dfrac{1}{(-3)^2+3} = \dfrac{1}{12}$

f) $[(f + g) \cdot h](2) = [f(2) + g(2)] \cdot h(2) = 6 \cdot \dfrac{3}{2+4} = 3$

16. **Si $f(x) = \dfrac{5}{x-1}$ y $g(x) = x^2 - 1$, calcula la expresión algebraica y el dominio de las funciones:**

a) $(f + g)$ b) $(f \cdot g)$ c) $\dfrac{f}{g}$ d) $\dfrac{g}{f}$

a) $(f + g) = \dfrac{5}{x-1} + x^2 - 1 = \dfrac{5+(x-1)(x^2-1)}{x-1} = \dfrac{x^3 - x^2 - x + 6}{x-1} \Rightarrow D(f + g) = \mathbb{R} - \{1\} = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$

b) $(f + g) = \dfrac{5}{x-1} \cdot (x^2 - 1) = \dfrac{5(x^2-1)}{x-1} = \dfrac{5x^2-5}{x-1} \Rightarrow D(f \cdot g) = \mathbb{R} - \{1\} = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$

c) $\dfrac{f}{g} = \dfrac{5}{x-1} : (x^2 - 1) = \dfrac{5}{(x-1)(x^2-1)} = \dfrac{5}{x^3 - x^2 - x + 1} \Rightarrow D\left(\dfrac{f}{g}\right) = \mathbb{R} - \{-1, 1\} = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$

d) $\dfrac{g}{f} = (x^2 - 1) : \dfrac{5}{x-1} = \dfrac{(x^2-1)(x-1)}{5} = \dfrac{x^3 - x^2 - x + 1}{5} \Rightarrow D\left(\dfrac{g}{f}\right) = D(f) \cap D(g)$ con $f(x) \neq 0 = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$

17. **Encuentra dos funciones *f* y *g*, ninguna de ellas constante, de manera que la función $h = f \cdot g$ sea $h(x) = x^2 - 8x + 12$.**

Respuesta modelo: Si $f(x) = x - 2$ y $g(x) = x - 6$, entonces $f(x) \cdot g(x) = (x - 2)(x - 6) = x^2 - 8x + 12$

18. **Actividad resuelta.**

19. **Dadas las funciones $f(x) = \dfrac{x+2}{x-1}$, $g(x) = 3x + 1$ y $h(x) = \sqrt{x}$, calcula:**

a) $(f \circ g)(x)$ b) $(f \circ h)(x)$ c) $(h \circ g)(x)$ d) $(g \circ f)(x)$

a) $(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f(3x + 1) = \dfrac{3x+1+2}{3x+1-1} = \dfrac{x+1}{x}$

b) $(f \circ h)(x) = f[h(x)] = f\left(\sqrt{x}\right) = \dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-1}$

c) $(h \circ g)(x) = h[g(x)] = h(3x + 1) = \sqrt{3x+1}$

d) $(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right) = 3 \cdot \dfrac{x+2}{x-1} + 1 = \dfrac{4x+5}{x-1}$

20. **Calcula, aplicando la definición, los valores de $(g \circ f)(-2)$, $(g \circ f)(3)$, $(f \circ g)(0)$, si $f(x) = x^2 - 3x + 5$ y $g(x) = \dfrac{10}{x-5}$.**

$(g \circ f)(-2) = g[f(-2)] = g[(-2)^2 - 3 \cdot (-2) + 5] = g(15) = 1$

$(g \circ f)(3) = g[f(3)] = g(3^2 - 3 \cdot 3 + 5] = g(5)$ no existe porque 5 no pertenece al dominio de $g(x)$.

$(f \circ g)(0) = f[g(0)] = f\left(\dfrac{10}{0-5}\right) = f(-2) = (-2)^2 - 3 \cdot (-2) + 5 = 15$

21. **¿Cuál es el dominio de las funciones $g \circ f$, $f \circ g$, $f \circ f$ y $g \circ g$ si $f(x) = \dfrac{2x+1}{x+2}$ y $g(x) = \dfrac{3x-1}{x-4}$?**

$D(f) = \mathbb{R} - \{-2\} = (-\infty, -2) \cup (-2, +\infty)$ y $D(g) = \mathbb{R} - \{4\} = (-\infty, -4) \cup (-4, +\infty)$.

$g \circ f$: Se buscan los valores x del dominio de f tales que $f(x) = 4$: $\dfrac{2x+1}{x+2} = 4 \Rightarrow 2x+1 = 4x+8 \Rightarrow -7 = 2x \Rightarrow x = -\dfrac{7}{2}$

$$D(g \circ f) = \mathbb{R} - \left\{-2, -\frac{7}{2}\right\} = (-\infty, -2) \cup \left(-2, -\frac{7}{2}\right) \cup \left(-\frac{7}{2}, +\infty\right)$$

$f \circ g$: Se buscan los valores x del dominio de g tales que $g(x) = -2$: $\dfrac{3x-1}{x-4} = -2 \Rightarrow 3x-1 = -2x+8 \Rightarrow x = \dfrac{9}{5}$

$$D(f \circ g) = \mathbb{R} - \left\{\frac{9}{5}, 4\right\} = \left(-\infty, \frac{9}{5}\right) \cup \left(\frac{9}{5}, 4\right) \cup (4, +\infty)$$

$f \circ f$: Se buscan los valores x del dominio de f tales que $f(x) = -2$: $\dfrac{2x+1}{x+2} = -2 \Rightarrow 2x+1 = -2x-4 \Rightarrow x = -\dfrac{5}{4}$

$$D(f \circ f) = \mathbb{R} - \left\{-2, -\frac{5}{4}\right\} = (-\infty, -2) \cup \left(-2, -\frac{5}{4}\right) \cup \left(-\frac{5}{4}, +\infty\right)$$

$g \circ g$: Se buscan los valores x del dominio de g tales que $g(x) = 4$: $\dfrac{3x-1}{x-4} = 4 \Rightarrow 3x-1 = 4x-16 \Rightarrow x = 15$

$$D(g \circ g) = \mathbb{R} - \{-4, 15\} = (-\infty, -4) \cup (-4, 15) \cup (15, +\infty)$$

22. **Actividad resuelta.**

23. **Dadas las funciones $f(x) = x + 3$, $g(x) = \dfrac{2}{x}$ y $h(x) = x^2 - 1$. Calcula $(h \circ g) \circ f$ y $h \circ (g \circ f)$. ¿Qué observas?**

$(h \circ g) \circ f = (h \circ g)[f(x)] = (h \circ g)(x + 3) = h[g(x + 3)] = h\left(\dfrac{2}{x+3}\right) = \left(\dfrac{2}{x+3}\right)^2 - 1$

$h \circ (g \circ f) = h \circ g[f(x)] = h \circ g(x + 3) = h[g(x + 3)] = h\left(\dfrac{2}{x+3}\right) = \left(\dfrac{2}{x+3}\right)^2 - 1$

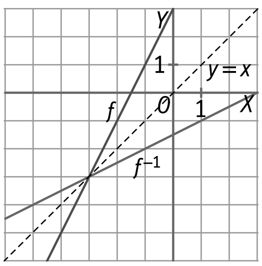
Se observa que la composición de funciones tiene la propiedad asociativa.

24. **Actividad resuelta.**

25. **Verifica que $f(x) = 4x + 8$ y $g(x) = \dfrac{x}{4} - 2$ son inversas.**

$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g(4x + 8) = \dfrac{4x+8}{4} - 2 = \dfrac{4x+8-8}{4} = \dfrac{4x}{4} = x \Rightarrow f(x)$ y $g(x)$ son una la inversa de la otra.

26. **Calcula la inversa de $f(x) = 2x + 3$ y confirma gráficamente que las dos funciones son simétricas respecto de la bisectriz del primer cuadrante.**



$f(x)$ es una función inyectiva.

$y = 2x + 3 \Rightarrow x = \dfrac{y-3}{2} \Rightarrow f^{-1}(x) = \dfrac{x-3}{2}$

27. **Halla la función inversa de cada una de las funciones inyectivas siguientes.**

a) $f(x) = 5x - 2$

b) $g(x) = \frac{4+x}{3}$

c) $h(x) = \sqrt[3]{2x+1}$

d) $i(x) = \frac{2x+3}{4-3x}$

a) $y = 5x - 2 \Rightarrow x = \frac{y+2}{5} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x+2}{5}$

b) $y = \frac{4+x}{3} \Rightarrow x = 3y - 4 \Rightarrow g^{-1}(x) = 3x - 4$

c) $y = \sqrt[3]{2x+1} \Rightarrow y^3 = 2x+1 \Rightarrow x = \frac{y^3-1}{2} \Rightarrow h^{-1}(x) = \frac{x^3-1}{2}$

d) $y = \frac{2x+3}{4-3x} \Rightarrow x = \frac{4y-3}{3y+2} \Rightarrow i^{-1}(x) = = \frac{4x-3}{3x+2}$

28. **Comprueba que la inversa de la función $f(x) = \frac{2x+1}{x-2}$ es ella misma. ¿Cuál será el recorrido de $f(x)$?**

$$(f \circ f)(x) = f[f(x)] = f\left(\frac{2x+1}{x-2}\right) = \frac{2\cdot\frac{2x+1}{x-2}+1}{\frac{2x+1}{x-2}-2} = \frac{\frac{4x+2+x-2}{x-2}}{\frac{2x+1-2x+4}{x-2}} = \frac{4x+2+x-2}{2x+1-2x+4} = \frac{5x}{5} = x \Rightarrow f^{-1}(x) = f(x)$$

Como $f^{-1}(x) = f(x)$, entonces $D(f) = R(f)$. Por tanto, $R(f) = \mathbb{R} - \{2\} = (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$.

29. **Calcula los puntos de corte con los ejes de las siguientes funciones.**

a) $f(x) = 3 - 2x$

b) $g(x) = 3x - x^2$

c) $h(x) = \frac{x^2-4}{x}$

a) Corte con el eje *Y*: $x = 0 \Rightarrow f(0) = 3 \Rightarrow$ Punto de corte: (0, 3)

Corte con el eje *X*: $f(x) = 0 \Rightarrow 0 = 3 - 2x \Rightarrow x = \frac{3}{2} \Rightarrow$ Punto de corte: $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$

b) Corte con el eje *Y*: $x = 0 \Rightarrow g(0) = 0 \Rightarrow$ Punto de corte: (0, 0)

Corte con el eje *X*: $g(x) = 0 \Rightarrow 0 = 3x - x^2 \Rightarrow 0 = x(3 - x) \Rightarrow x = 0$ y $x = 3 \Rightarrow$ Puntos de corte: (0, 0). y (3, 0)

c) Corte con el eje *Y*: $x = 0 \Rightarrow 0$ no pertenece al dominio de $h \Rightarrow$ No corta al eje *Y*.

Corte con el eje *X*: $h(x) = 0 \Rightarrow 0 = \frac{x^2-4}{x} \Rightarrow 0 = x^2 - 4 \Rightarrow x = \pm 2 \Rightarrow$ Puntos de corte: (2, 0). y (–2, 0)

30. **Estudia el signo de las siguientes funciones.**

a) $f(x) = x^4 - 1$

b) $h(x) = \frac{1}{x-2}$

c) $i(x) = \frac{x}{x^2-4}$

a) La función $f(x) = x^4 - 1$, con $D(f) = \mathbb{R}$, corta al eje *X* en los puntos (1, 0) y (–1, 0). Los intervalos a estudiar son:

- En $(-\infty, -1)$: $f(-2) = 15 > 0 \Rightarrow$ Positiva
- En $(-1,1)$: $f(0) = -1 < 0 \Rightarrow$ Negativa
- En $(1, +\infty)$: $f(2) = 15 > 0 \Rightarrow$ Positiva

b) La función $h(x) = \frac{1}{x-2}$, con $D(h) = \mathbb{R} - \{2\}$, no corta al eje *X*. Los intervalos a estudiar son:

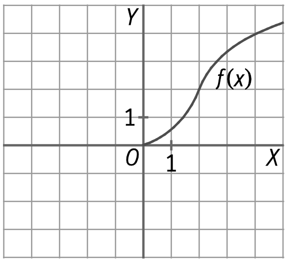
- En $(-\infty, 2)$: $h(1) = -1 < 0 \Rightarrow$ Negativa
- En $(2, +\infty)$: $h(3) = 1 > 0 \Rightarrow$ Positiva

c) La función $i(x) = \frac{x}{x^2-4}$, con $D(i) = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$, corta al eje *X* en el punto (0, 0).Los intervalos a estudiar son:

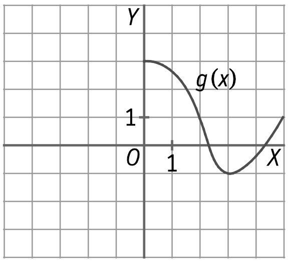
- En $(-\infty, -2)$: $i(-4) = -\frac{1}{3} < 0 \Rightarrow$ Negativa
- En $(0, 2)$: $i(1) = -\frac{1}{3} < 0 \Rightarrow$ Negativa
- En $(-2, 0)$: $i(-1) = \frac{1}{3} > 0 \Rightarrow$ Positiva
- En $(2, +\infty)$: $i(4) = \frac{1}{3} > 0 \Rightarrow$ Positiva

31. **Completa estas gráficas en tu cuaderno para valores negativos de *x*, sabiendo que la función *f* es impar y la *g* es par.**

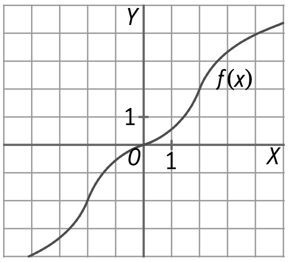
a)



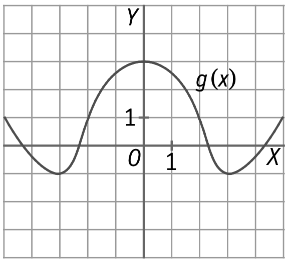
b)



a)



b)



32. **Estudia la simetría de las funciones:**

a) $f(x)=\dfrac{3}{x-1}$ **c)** $h(x)=\sqrt{4+x^2}$ **e)** $j(x)=\dfrac{2}{x^3}$

b) $g(x) = 5x^2 - 3x$ **d)** $i(x) = 5x$ **f)** $k(x) = x^3 + 27$

a) La función $f(x)$ no es par porque $f(-x) \neq f(x)$ y tampoco es impar porque $f(-x) \neq -f(x)$.

b) La función $g(x)$ no es par porque $g(-x) \neq g(x)$ y tampoco es impar porque $g(-x) \neq -g(x)$.

c) La función $h(x)$ es par porque $h(-x)=\sqrt{4+(-x)^2}=\sqrt{4+x^2}=h(x)$.

d) La función $i(x)$ es impar porque $i(-x) = 5(-x) = -5x = -i(x)$

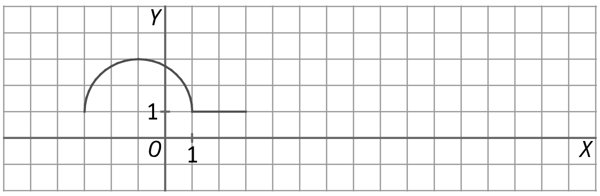
e) La función $j(x)$ es impar porque $i(-x)=\dfrac{2}{(-x)^3}=-\dfrac{2}{x^3}=-i(x)$

f) La función $k(x)$ no es par porque $k(-x) \neq k(x)$ y tampoco es impar porque $k(-x) \neq -k(x)$.

33. **Actividad interactiva.**

34. **Actividad resuelta.**

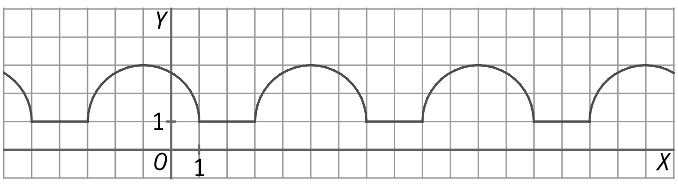
35. **La siguiente gráfica corresponde a una función periódica cuyo periodo es $T = 6$.**



a) **Cópiala en tu cuaderno y complétala en el intervalo [–6, 18].**

b) **Halla los siguientes valores de la función: $f(9)$, $f(31)$, $f(-13)$ y $f(2015)$.**

a)



b) $f(9) = f(3 + 6) = f(3) = 1$

$f(31) = f(1 + 5 \cdot 6) = f(1) = 1$

$f(-13) = f(-1 - 2 \cdot 6) = f(-1) = 3$

$f(2015) = f(5 + 335 \cdot 6) = f(5) = f(-1 + 6) = f(-1) = 3$

36. Justifica que si se suman dos funciones periódicas del mismo período *T* resulta otra función periódica. ¿Cuál será el período de la función suma?

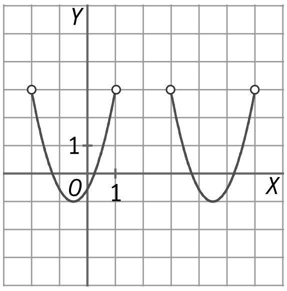
Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones periódicas de período T. Entonces $f(x) = f(x + T)$ y $g(x) = g(x + T)$.

$(f + g)(x + T) = f(x + T) + g(x + T) = f(x) + g(x) = (f + g)(x)$

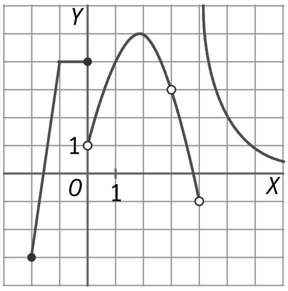
Luego la suma de dos funciones periódicas de período T, es otra función periódica cuyo peíodo también es T.

37. Indica los puntos de discontinuidad y los intervalos de continuidad de las funciones representadas.

a)



b)



a) La función es continua en todos los puntos de su dominio; es decir, es continua en $(-2, 1) \cup (3, 6)$.

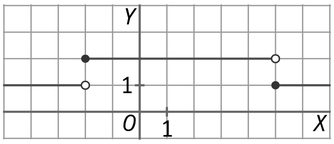
No tiene puntos de discontinuidad.

b) La función es continua en $[-2, 0) \cup (0, 3) \cup (3, 4) \cup (4, +\infty)$.

La función es discontinua en $x = 0$, $x = 3$ y $x = 4$.

38. Dibuja en tu cuaderno la gráfica de una función que presente discontinuidades en los puntos $x = -2$ y $x = 5$. ¿En qué intervalos es continua la función que has representado?

Respuesta modelo: la función $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x < -2 \\ 2 & \text{si} \quad -2 \le x < 5 \\ 1 & \text{si} \quad 5 \le x \end{cases}$



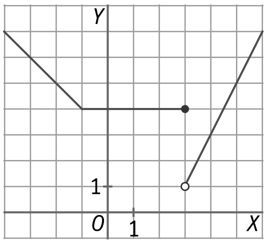
La función es continua en $(-\infty,-2) \cup (-2, 5) \cup (5, +\infty)$. Presenta discontinuidades en $x = -2$ y $x = 5$.

39. Representa las siguientes funciones en tu cuaderno. Indica los puntos de discontinuidad si los hubiera.

a) $f(x) = \begin{cases} -x + 3 & \text{si} \quad x < -1 \\ 4 & \text{si} \quad -1 \le x \le 3 \\ 2x - 5 & \text{si} \quad x > 3 \end{cases}$

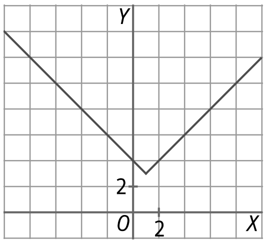
b) $g(x) = |x - 1| + 3$

a) La función es discontinua en $x = 3$.



b) $g(x) = \begin{cases} 4 - x & si \quad x < 1 \\ 2 + x & si \quad x \ge 1 \end{cases}$

La función no tiene puntos de discontinuidad.



40. La función parte entera, $f(x) = [x]$, asocia cada número real con su parte entera.

a) Construye una tabla de valores para la función $f(x) = [x]$, en el intervalo $[-3, 5]$. Conviene tomar algunos valores de x no enteros.

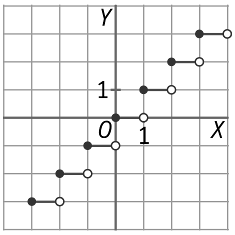
b) Representa gráficamente la función.

c) ¿Es continua? Indica sus discontinuidades si existen.

a) Respuesta libre. Por ejemplo:

x	–3	–2,5	–2,1	–2	–1,5	–1	0	0,3	1	1,4	1,8	2	3	4	5
$[x]$	–3	–3	–3	–2	–2	–1	0	0	1	1	1	2	3	4	5

b)



c) La función es discontinua en todos los números enteros.

41. Calcula la tasa de variación media de las funciones en los intervalos indicados.

a) $f(x) = x^2 + 2x - 3$ **en [0, 2]**

b) $h(x) = \dfrac{3}{4-x}$ **en [–2, 1]**

c) $g(x) = -x^3 + 2$ **en [–2, 1]**

d) $i(x) = \sqrt{x-2}$ **en [3, 6]**

a) $TVM\, f[0, 2] = \dfrac{f(2)-f(0)}{2-0} = \dfrac{5-(-3)}{2} = 4$

b) $TVM\, h[-2, 1] = \dfrac{h(1)-h(-2)}{1-(-2)} = \dfrac{1-\frac{1}{2}}{3} = \dfrac{1}{6}$

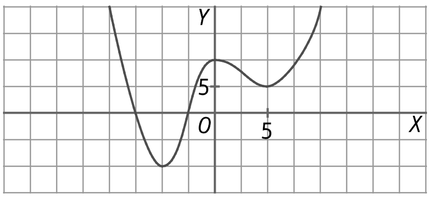
c) $TVM\, g[-2, 1] = \dfrac{g(1)-g(-2)}{1-(-2)} = \dfrac{1-10}{3} = -3$

d) $TVM\, i[3, 6] = \dfrac{i(6)-i(3)}{6-3} = \dfrac{2-1}{3} = \dfrac{1}{3}$

42. ¿Se puede calcular la tasa de variación media de la siguiente función en el intervalo pedido? Razona tu respuesta. $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$**, en [0, 2]**

La función $f(x)$ presenta una discontinuidad en $x = 1$. Por tanto, no se puede calcular $TVM\, f[0, 2]$.

43. Indica los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los máximos y los mínimos de la siguiente función. Calcula la tasa de variación media para probar tus resultados.



Decreciente: $(-\infty,-5) \cup (0, 5)$

Si $a < -5 \Rightarrow f(a) > f(-5) \Rightarrow TVM\, f[a, -5] = \dfrac{f(-5)-f(a)}{-5-a} < 0$ y si $a \in (0, 5) \Rightarrow TVM\, f[0, a] < 0$

Creciente: $(-5, 0) \cup (5, +\infty)$

Si $a \in (-5, 0) \Rightarrow TVM\, f[-5, a) > 0$ y si $a > 5 \Rightarrow f(a) > f(5) \Rightarrow TVM\, f[5, a] = \dfrac{f(a)-f(5)}{a-5} > 0$

Máximo en $x = 0$ y mínimos en $x = -5$ (absoluto) y $x = 5$

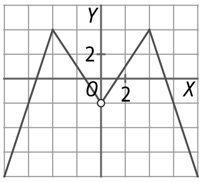
Para que f sea decreciente en (0, 5) no es suficiente que $TVM\, f(0, 5) < 0$.

44. ¿Cómo son los máximos y mínimos de una función creciente en (–∞, 1) ∪ (2, 5) y decreciente en (1, 2) ∪ (5, +∞)?

La función tendrá un mínimo en $x = 2$ y máximos en $x = 1$ y $x = 5$.

45. Dibuja la gráfica de una función que presente simetría par, con dominio en (–∞, 0) ∪ (0, +∞), creciente en (0, 4) y decreciente en (4, +∞). Indica cuáles son los máximos y mínimos de la función que has dibujado.

Respuesta modelo:



La función presenta un máximo en $x = –4$ y otro en $x = 4$. No tiene mínimos.

46. Actividad resuelta.

47. Estudia el crecimiento y el decrecimiento de las funciones:

a) $f(x) = 2x + 7$, $D(f) = [–5, 4]$

b) $g(x) = 4 – x^2$, $D(g) = [–10, 0]$

a) Si tomamos dos valores del dominio x_1 y x_2, tales que $x_1 < x_2$, se cumple que $2x_1 + 7 < 2x_2 + 7 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

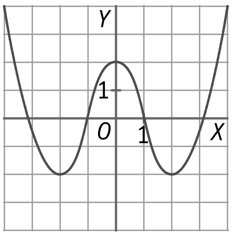
Por tanto, $TVMf[x_1, x_2] > 0$ y la función es creciente en todo su dominio.

b) Si tomamos dos valores del dominio x_1 y x_2, tales que $x_1 < x_2$, se cumple que $x_1^2 > x_2^2 \Rightarrow 4 – x_1^2 < 4 – x_2^2 \Rightarrow$

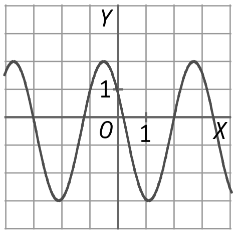
$\Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$. Por tanto, $TVMf[x_1, x_2] > 0$ y la función es creciente en todo su dominio.

48. Indica si las siguientes funciones están acotadas superior o inferiormente y, en caso afirmativo, señala cuál es su cota.

a)



b)



a) No está acotada superiormente.

Está acotada inferiormente por –2.

b) Está acotada superiormente por 2.

Está acotada inferiormente por –3.

49. Analiza si las siguientes funciones están acotadas o no. En caso de estarlo indica alguna de sus cotas.

a) $f(x) = 2 + \dfrac{1}{x}$ **con dominio en (0, +∞)**

b) $g(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

c) $h(x) = x^2 – 2x$

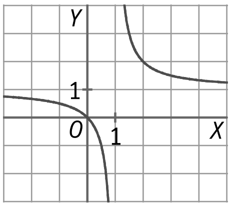
a) $\dfrac{1}{x} > 0 \Rightarrow 2 + \dfrac{1}{x} > 2 \Rightarrow 2$ es una cota inferior de $f(x)$. No está acotada superiormente.

b) $x^2 > 0 \Rightarrow 1 + x^2 > 1 \Rightarrow 1$ es una cota inferior de $g(x)$. No está acotada superiormente.

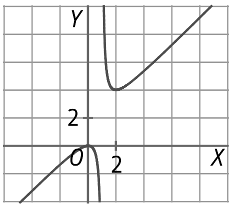
c) La función es una parábola con vértice en $x = 1$. Por tanto 1 es una cota inferior de $h(x)$. No está acotada superiormente.

50. Indica si las funciones tienen asíntotas y en caso afirmativo, escribe su ecuación.

a)



b)



a) Asíntota horizontal: $y = 1$

Asíntota vertical: $x = 1$

b) Asíntota oblicua: $y = x$

Asíntota vertical: $x = 1$

51. Halla las asíntotas verticales y horizontales de las siguientes funciones, si las hay.

a) $f(x) = \dfrac{5}{x-3}$

b) $g(x) = \dfrac{1}{16-x^2}$

a) Asíntota horizontal: $y = 0$

Asíntota vertical: $x = 3$

b) Asíntota horizontal: $y = 0$

Asíntotas verticales: $x = -4$ y $x = 4$

52. Calcula las asíntotas oblicuas de las siguientes funciones.

a) $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$

b) $f(x) = \dfrac{2x^3+3}{x^2}$

a) $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1} = x - 1 + \dfrac{1}{x+1}$

Asíntota oblicua: $y = x - 1$

b) $f(x) = \dfrac{2x^3+3}{x^2} = 2x + \dfrac{3}{x^2}$

Asíntota oblicua: $y = 2x$

53. De las siguientes correspondencias entre dos conjuntos indica cuáles son funciones y los conjuntos inicial y final.

a) A cada coche su matrícula.

b) A cada alumno de una clase, el año en que nació.

c) A cada cuadrado perfecto, su raíz cuadrada.

d) A cada triángulo rectángulo, el valor de su hipotenusa.

a) Es una función porque cada coche tiene una única matrícula.

El conjunto inicial está formado por los coches y, el final, por las matrículas.

b) Es una función porque cada alumno nació en un único año.

El conjunto inicial está formado por los alumnos y, el final, por los años de nacimiento.

c) No es una función porque si *a* es un cuadrado perfecto, entonces *a* tiene dos imágenes: $\pm\sqrt{a}$.

El conjunto inicial está formado por los cuadrados perfectos y, el final, por sus raíces.

d) Es una función porque cada triángulo rectángulo tiene una única hipotenusa.

El conjunto inicial está formado por los triángulos rectángulos y, el final, por las medidas de las hipotenusas.

54. De las correspondencias del ejercicio anterior señala las que son inyectivas y justifícalo.

a) Es una correspondencia inyectiva porque coches distintos tienen matrículas diferentes.

b) No es una correspondencia inyectiva porque alumnos distintos pueden haber nacido el mismo año.

c) Es una correspondencia inyectiva porque cuadrados perfectos distintos tienen raíces cuadradas diferentes.

d) No es una correspondencia inyectiva porque triángulos rectángulos diferentes pueden tener igual hipotenusa. Por ejemplo, todos los triángulos cuya hipotenusa es el diámetro de una circunferencia y el vértice opuesto es un punto de la circunferencia, son triángulos rectángulos con igual hipotenusa.

55. **Expresa mediante una expresión o fórmula las correspondencias siguientes.**

a) **A cada número real positivo x, la longitud de la diagonal del cuadrado de lado x.**

b) **A cada número x, su distancia al número 5.**

c) **A cada número x, el inverso de x + 1.**

a) $D(x) = \sqrt{x^2 + x^2} = \sqrt{2x^2} = \sqrt{2}x$

b) $d(x) = |x - 5|$

c) $i(x) = \dfrac{1}{x+1}$

56. **Relaciona en tu cuaderno las tablas de valores con la función a la que corresponden.**

A.

x	0	1	2
y	0	1	2

I. $f(x) = x$

B.

x	0	1	2
y	0	1	4

II. $g(x) = x^2$

C.

x	0	1	3
y	0	1	9

III. $h(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$

A. $\Rightarrow f(x) = x$ y $h(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$ *B.* $\Rightarrow g(x) = x^2$ *C.* $\Rightarrow g(x) = x^2$ y $h(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$

57. **Completa la tabla correspondiente a la función:**

$$f(x) = \begin{cases} 4x - x^2 & \text{si} \quad x < 3 \\ 2x - 1 & \text{si} \quad x \geq 3 \end{cases}$$

x	–3	–1	3	4,5	6	•
y	•	•	•	•	•	4

¿Puedes justificar que la función no es inyectiva?

x	–3	–1	3	4,5	6	2
y	–21	–5	5	8	11	4

Únicamente con la tabla no se puede justificar que la función no sea inyectiva.

Sin embargo, si $x = 1{,}5 \Rightarrow f(1{,}5) = 3{,}75$ y si $x = 2{,}5 \Rightarrow f(2{,}5) = 3{,}75$, por tanto la función no es inyectiva.

58. **Determina el dominio de las siguientes funciones.**

a) $f(x) = x + 3$

b) $g(x) = 4x - x^2$

c) $h(x) = 3 - \sqrt{x+1}$

d) $i(x) = \dfrac{3}{x+1}$

e) $j(x) = \dfrac{5}{x^2+9}$

f) $k(x) = \dfrac{2x}{x-2}$

a) $D(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

b) $D(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

c) $x + 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -1 \Rightarrow D(h) = [-1, +\infty)$

d) $x + 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq -1 \Rightarrow D(i) = \mathbb{R} - \{-1\} = (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$

e) $x^2 + 9 \neq 0 \Rightarrow D(j) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

f) $x - 2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 2 \Rightarrow D(k) = \mathbb{R} - \{2\} = (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$

59. Halla el dominio de las funciones:

a) $y=\dfrac{2x+3}{x^2+4x-3}$ **c)** $y=\dfrac{x+1}{x^3+8}$ **e)** $y=\dfrac{1}{\sqrt{2x+5}}$

b) $y=\sqrt[3]{x+1}$ **d)** $y=\sqrt{(3-x)(x+4)}$ **f)** $y=\sqrt{3-|x|}$

a) $x^2+4x-3\neq 0 \Rightarrow x\neq -2\pm\sqrt{7} \Rightarrow D=\mathbb{R}-\left\{-2\pm\sqrt{7}\right\}=\left(-\infty,-2-\sqrt{7}\right)\cup\left(-2-\sqrt{7},-2+\sqrt{7}\right)\cup\left(-2+\sqrt{7},+\infty\right)$

b) $D=\mathbb{R}=(-\infty,+\infty)$

c) $x^3+8\neq 0 \Rightarrow x\neq -2 \Rightarrow D=\mathbb{R}-\{-2\}=(-\infty,-2)\cup(-2,+\infty)$

d) $(3-x)(x+4)>0 \Rightarrow -4\leq x\leq 3 \Rightarrow D=[-4,3]$

e) $2x+5>0 \Rightarrow x>\dfrac{-5}{2} \Rightarrow D=\left(\dfrac{-5}{2},+\infty\right)$

f) $3-|x|>0 \Rightarrow -3\leq x\leq 3 \Rightarrow D=[-3,3]$

60. Actividad resuelta.

61. Halla el recorrido de las funciones:

a) $y=5-2x$ **con** $-2\leq x<3$ **c)** $y=8-\sqrt{9-x^2}$

b) $y=6x-x^2$ **con** $-1<x\leq 3$ **d)** $y=\dfrac{3}{x^2+3}$

a) La función es una recta decreciente. Por tanto, como $f(-2)=9$ y $f(3)=-1 \Rightarrow R=[-1,9]$.

b) La función es una rama de parábola creciente en el intervalo (–1, 3). Luego, $f(-1)=-7$ y $f(3)=9 \Rightarrow R=[-7,9]$.

c) D = [–3, 3]. En este intervalo, $0\leq 9-x^2\leq 9 \Rightarrow 0\leq\sqrt{9-x^2}\leq 3 \Rightarrow 0\geq -\sqrt{9-x^2}\geq -3 \Rightarrow 8\geq 8-\sqrt{9-x^2}\geq 5$
$\Rightarrow R=[5,8]$.

d) $x^2+3>3 \Rightarrow 0<\dfrac{1}{x^2+3}\leq\dfrac{1}{3}\Rightarrow 0<\dfrac{3}{x^2+3}\leq\dfrac{3}{3}=1 \Rightarrow R=(0,1]$.

62. Se considera la función $f(x)=|4-x^2|$ definida en el intervalo [–3, 3]. Exprésala a trozos.

Se expresa el valor absoluto como:

$$|4-x^2|=\begin{cases}4-x^2 & \text{si } x^2<4\\ -(4-x^2) & \text{si } x^2\geq 4\end{cases}\Rightarrow |4-x^2|=\begin{cases}-(4-x^2) & \text{si } x\leq -2\\ 4-x^2 & \text{si } -2<x<2\\ -(4-x^2) & \text{si } 2\leq x\end{cases}$$

Por tanto, la función definida a trozos en el intervalo [–3, 3] es:

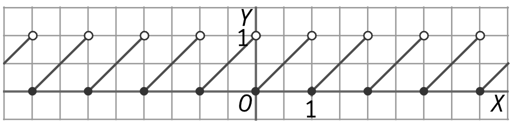
$$f(x)=\begin{cases}-(4-x^2) & \text{si } -3\leq x\leq -2\\ 4-x^2 & \text{si } -2<x<2\\ -(4-x^2) & \text{si } 2\leq x\leq 3\end{cases}\Rightarrow f(x)=\begin{cases}x^2-4 & \text{si } -3\leq x\leq -2\\ 4-x^2 & \text{si } -2<x<2\\ x^2-4 & \text{si } 2\leq x\leq 3\end{cases}$$

63. La función parte decimal de un número real x, asigna a cada número real su parte decimal. Se define como $f(x)=x-[x]$, donde $[x]$ representa la parte entera de x.

a) Indica los valores de $f(2{,}34)$, $f(5)$ y $f(-2{,}3)$.

b) Representa gráficamente la función en el intervalo [–4, 4].

a) $f(2{,}34)=2{,}34-2=0{,}34$
$f(5)=5-5=0$
$f(-2{,}3)=-2{,}3-(-3)=0{,}7$.

b)


64. **Dadas las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = \dfrac{5}{x-4}$ calcula:**

a) $(f+g)(1)$ **c)** $(f-2g)(-5)$ **e)** $\left[(f+g)\circ f\right]\left(\dfrac{2}{3}\right)$

b) $(f\cdot g)(1)$ **d)** $(f\circ g)(-1)$ **f)** $(g\circ f)(2)$

a) $(f+g)(1) = f(1) + g(1) = 1 - \dfrac{5}{3} = \dfrac{-2}{3}$

b) $(f\cdot g)(1) = f(1)\cdot g(1) = 1\cdot\left(\dfrac{-5}{3}\right) = \dfrac{-5}{3}$

c) $(f-2g)(-5) = f(-5) - 2g(-5) = 25 + \dfrac{10}{9} = \dfrac{236}{9}$

d) $(f\circ g)(-1) = f[g(-1)] = f(-1) = 1$

e) $\left[(f+g)\circ f\right]\left(\dfrac{2}{3}\right) = (f+g)\left[f\left(\dfrac{2}{3}\right)\right] = f\left(\dfrac{4}{9}\right) + g\left(\dfrac{4}{9}\right) = \dfrac{-3133}{2592}$

f) $(g\circ f)(2) = g[f(2)] = g(4)$ no existe porque $D(g) = \mathbb{R} - \{4\}$.

65. **Dadas las funciones $f(x) = x + 3$, $g(x) = x^2 - 2$ y $h(x) = \dfrac{1}{x}$. Calcula:**

a) $(g\circ h)$ **c)** $(f\circ g)$ **e)** $(h\circ g)$ **g)** $(g\circ f)$

b) $[f\circ(g\circ h)]$ **d)** $[(f\circ g)\circ h)]$ **f)** $[(h\circ g)\circ f]$ **h)** $[h\circ(g\circ f)]$

¿A la vista de los resultados anteriores se puede afirmar que la composición de funciones tiene la propiedad asociativa?

a) $(g\circ h)(x) = g[h(x)] = g\left(\dfrac{1}{x}\right) = \left(\dfrac{1}{x}\right)^2 - 2 = \dfrac{1-2x^2}{x^2}$

b) $[f\circ(g\circ h)](x) = f\circ g[h(x)] = f\left(\dfrac{1-2x^2}{x^2}\right) = \dfrac{x^2+1}{x^2}$

c) $(f\circ g)(x) = f[g(x)] = f(x^2-2) = x^2 - 2 + 3 = x^2 + 1$

d) $[(f\circ g)\circ h)](x) = (f\circ g)\left(\dfrac{1}{x}\right) = \left(\dfrac{1}{x}\right)^2 + 1 = \dfrac{x^2+1}{x^2}$

e) $(h\circ g)(x) = h[g(x)] = h(x^2-2) = \dfrac{1}{x^2-2}$

f) $[(h\circ g)\circ f](x) = (h\circ g)(x+3) = \dfrac{1}{(x+3)^2-2} = \dfrac{1}{x^2+6x+7}$

g) $(g\circ f)(x) = g[f(x)] = g(x+3) = (x+3)^2 - 2 = x^2 + 6x + 7$

h) $[h\circ(g\circ f)](x) = [h\circ(g\circ f)](x) = h(x^2+6x+7) = \dfrac{1}{x^2+6x+7}$

Como $f\circ(g\circ h)](x) = [(f\circ g)\circ h)](x)$ y $[(h\circ g)\circ f](x) = [h\circ(g\circ f)](x)$ se puede afirmar que la composición de funciones tiene la propiedad asociativa.

66. **Expresa la función $h(x) = 2x^2 - 3x + 1$ como producto de dos funciones polinómicas de primer grado $f(x)$ y $g(x)$. ¿Puedes encontrar más de una solución para estas funciones?**

Como $h(x) = (2x-1)(x-1)$, entonces una posible solución sería $f(x) = 2x - 1$ y $g(x) = x - 1$.

Se pueden encontrar más soluciones: si $f(x) = k(2x-1)$ y $g(x) = \dfrac{1}{k}(x-1)$, donde k es un número real no nulo.

67. **Calcula la expresión algebraica de la función $(f\cdot g)$ donde $f(x) = \dfrac{5}{x-1}$ y $g(x) = x^2 - 1$. ¿Cuál es su dominio?**

$(f\cdot g)(x) = f(x)\cdot g(x) = \dfrac{5}{x-1}\cdot(x^2-1) = 5(x+1)$ y $D(f\cdot g) = D(f)\cap D(g) = \mathbb{R}-\{1\}$ porque $D(f) = \mathbb{R}-\{1\}$ y $D(g) = \mathbb{R}$.

68. **Si $D(f) = (-\infty, 2)\cup(2, 4]$ y $g(x) = x^2 - 5x$, determina el dominio de:**

a) $(f+g)$ **b)** $(f\cdot g)$ **c)** $\dfrac{f}{g}$ **d)** $\dfrac{g}{f}$

a) $D(f+g) = D(f)\cap D(g) = (-\infty, 2)\cup(2, 4]$

b) $D(f\cdot g) = D(f)\cap D(g) = (-\infty, 2)\cup(2, 4]$

c) $D\left(\dfrac{f}{g}\right) = D(f)\cap D(g)$ y $g(x)\neq 0 = (-\infty, 0)\cup(0, 2)\cup(2, 4]$

d) $D\left(\dfrac{g}{f}\right) = D(f)\cap D(g)$ con $f(x)\neq 0$

69. **Con las funciones $f(x) = x$, $g(x) = 3$ y $h(x) = \dfrac{1}{x}$ obtén la expresión de las siguientes funciones.**

a) $(f \cdot h)(x)$ **c)** $(f \cdot f + g)(x)$ **e)** $(h \circ h)(x)$

b) $[(f + g) \cdot h](x)$ **d)** $(g \circ h)(x)$ **f)** $(h \circ g)(x)$

a) $(f \cdot h)(x) = f(x) \cdot h(x) = x \cdot \dfrac{1}{x} = 1$

b) $[(f + g) \cdot h](x) = [f(x) + g(x)] \cdot h(x) = \dfrac{x+3}{x}$

c) $(f \cdot f + g)(x) = f(x) \cdot f(x) + g(x) = x^2 + 3$

d) $(g \circ h)(x) = g[h(x)] = g\left(\dfrac{1}{x}\right) = 3$

e) $(h \circ h)(x) = h[h(x)] = h\left(\dfrac{1}{x}\right) = x$

f) $(h \circ g)(x) = h[g(x)] = h(3) = \dfrac{1}{3}$

70. **Se consideran las funciones $f(x) = \dfrac{4x-3}{x+1}$ y $g(x) = \dfrac{x+3}{4-x}$. Calcula, si es posible:**

a) $f(0)$ **e)** $f(-1)$ **i)** $f(-5)$

b) $g[f(0)]$ **f)** $g[f(-1)]$ **j)** $g[f(-5)]$

c) $f(2)$ **g)** $f(5)$ **k)** $f(4)$

d) $g[f(2)]$ **h)** $g[f(5)]$ **l)** $g[f(4)]$

En primer lugar hallamos $g[f(x)]$:

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g\left(\frac{4x-3}{x+1}\right) = \frac{\dfrac{4x-3}{x+1}+3}{4-\dfrac{4x-3}{x+1}} = \frac{\dfrac{4x-3+3x+3}{x+1}}{\dfrac{4x+4-4x+3}{x+1}} = \frac{4x-3+3x+3}{4x+4-4x+3} = \frac{x}{1} = x$$

a) $f(0) = -3$

b) $g[f(0)] = 0$

c) $f(2) = \dfrac{5}{3}$

d) $g[f(2)] = 2$

e) $f(-1)$ No existe.

f) $g[f(-1)]$ = No existe.

g) $f(5) = \dfrac{17}{6}$

h) $g[f(5)] = 5$

i) $f(-5) = \dfrac{23}{4}$

j) $g[f(-5)] = -5$

k) $f(4) = \dfrac{13}{5}$

l) $g[f(4)] = 4$

71. **Con los datos y los resultados obtenidos en los apartados del ejercicio anterior, ¿qué puedes afirmar de las funciones f y g? ¿Cuál es el dominio de $g \circ f$? ¿Cuál es el dominio de $f \circ g$?**

Como $(g \circ f)(x) = x$, entonces se puede afirmar que f y g son funciones inversas.

Como $D(f) = \mathbb{R} - \{-1\}$ y $D(g) = \mathbb{R} - \{4\}$, entonces $D(g \circ f) = \mathbb{R} - \{-1\}$ y $D(f \circ g) = \mathbb{R} - \{4\}$.

72. **Actividad resuelta.**

73. **Si $h(x) = \sqrt{2x+3}$ es la función compuesta $(f \circ g)(x)$ de $f(x)$ y $g(x)$, ¿cuáles pueden ser esas funciones? Calcula en ese caso la función $(g \circ f)(x)$.**

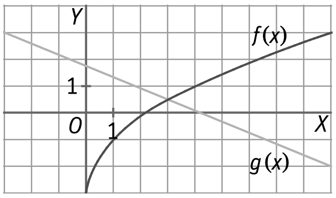
Para que al componer dos funciones se obtenga h(x), una posibilidad es que una función sea la raíz y la otra el radicando:

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{x} \\ g(x) = 2x+3 \end{cases} \Rightarrow h(x) = f[g(x)] = \sqrt{2x+3}$$

Se calcula $(g \circ f)(x)$:

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{x} \\ g(x) = 2x+3 \end{cases} \Rightarrow g[f(x)] = 2\sqrt{x} + 3.$$

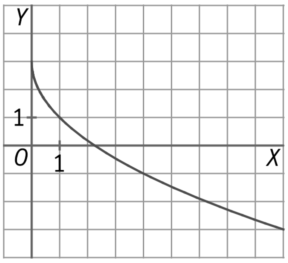
74. Las gráficas siguientes corresponden a dos funciones *f*(*x*) y *g*(*x*).



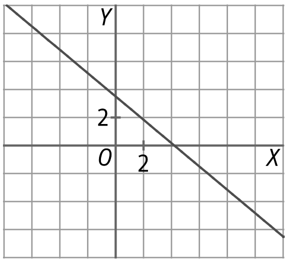
Representa de forma aproximada en tu cuaderno las gráficas de las funciones:

a) (–*f*) **b) 2*g*** **c) *f* + *g***

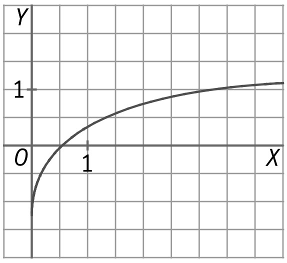
a)



b)



c)



75. Las siguientes tablas de valores corresponden a dos funciones cuyo dominio es [0, 10]. Una de ellas tiene función inversa, y la otra, no.

I.

x	**1**	**3**	**4**	**4,5**	**6**	**10**
y	**10**	**5**	**1**	**0**	**–3**	**–10**

II.

x	**1**	**3**	**4**	**4,5**	**6**	**10**
y	**1**	**5**	**6**	**6,2**	**7**	**6**

a) Indica, justificando la respuesta, cuál de ellas no tiene función inversa.

b) Escribe una tabla de valores correspondiente a la función inversa de la otra función.

a) La tabla II no es una función inyectiva porque *f*(4) = *f*(10) = 6. Por tanto, como no es inyectiva, no tiene inversa.

b) La tabla de valores de la inversa de la función I es:

x	–10	–3	0	1	5	10
y	10	6	4,5	4	3	1

76. Comprueba, mediante una tabla de valores, que las funciones $f(x)=\frac{3}{4}x-\frac{1}{2}$ y $g(x)=\frac{4x+2}{3}$ son una inversa de la otra.

a) Represéntalas gráficamente en los mismos ejes de coordenadas.

b) ¿Qué simetría observas entre ambas gráficas?

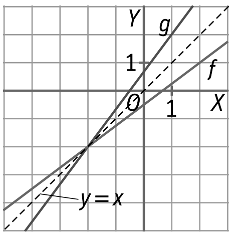
c) ¿En qué punto se cortan las gráficas?

d) ¿Por qué crees que ese punto de corte tiene sus dos coordenadas iguales?

x	–10	–6	–2	2	6	10
f(*x*)	–8	–5	–2	1	4	7

x	–8	–5	–2	1	4	7
g(*x*)	–10	–6	–2	2	6	10

a)



b) *f*(*x*) y *g*(*x*) son simétricas respecto a la bisectriz del primer cuadrante; es decir, respecto a la recta *y* = *x*.

c) Se cortan en el punto (–2, –2).

d) Porque los puntos de corte de dos funciones inversas siempre pertenecen a la recta *y* = *x*.

77. **Actividad resuelta.**

78. **En los ejercicios siguientes determina la función inversa de $f(x)$ de manera intuitiva e informal. Confirma después que $f(f^{-1}(x)) = f^{-1}(f(x)) = x$.**

a) $f(x) = 5x$

b) $f(x) = x - 7$

c) $f(x) = 6 - 3x$

d) $f(x) = \sqrt[3]{x}$

e) $f(x) = \dfrac{x-5}{3}$

f) $f(x) = x^3 + 7$

a) Al aplicar f a un valor de x se multiplica por 5. Entonces, la función inversa dividirá entre 5: $f^{-1}(x) = \dfrac{x}{5}$.

$f(f^{-1}(x)) = f\left(\dfrac{x}{5}\right) = 5 \cdot \dfrac{x}{5} = x$ y $f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(5x) = \dfrac{5x}{5} = x$

b) Al aplicar f a un valor de x se le resta 7. Entonces, la función inversa sumará 7: $f^{-1}(x) = x + 7$.

$f(f^{-1}(x)) = f(x + 7) = x + 7 - 7 = x$ y $f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(x - 7) = x - 7 + 7 = x$

c) Al aplicar f a un valor de x primero se multiplica por –3 y, después, se suma 6. Entonces, la función inversa primero restará 6 y luego dividirá entre –3: $f^{-1}(x) = \dfrac{x-6}{-3} = \dfrac{6-x}{3}$.

$f(f^{-1}(x)) = f\left(\dfrac{6-x}{3}\right) = 6 - 3 \cdot \left(\dfrac{6-x}{3}\right) = 6 - 6 + x = x$ y $f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(6 - 3x) = \dfrac{6-(6-3x)}{3} = \dfrac{6-6+3x}{3} = x$

d) Al aplicar f a un valor de x se calcula su raíz cúbica. Entonces, la función inversa elevará al cubo: $f^{-1}(x) = x^3$.

$f(f^{-1}(x)) = f(x^3) = \sqrt[3]{x^3} = x$ y $f^{-1}(f(x)) = f^{-1}\left(\sqrt[3]{x}\right) = \left(\sqrt[3]{x}\right)^3 = x$

e) Al aplicar f a un valor de x primero se resta 5 y, después, se divide entre 3. Entonces, la función inversa primero multiplicará por 3 y luego sumará 5: $f^{-1}(x) = 3x + 5$.

$f(f^{-1}(x)) = f(3x + 5) = \dfrac{3x+5-5}{3} = x$ y $f^{-1}(f(x)) = f^{-1}\left(\dfrac{x-5}{3}\right) = 3\left(\dfrac{x-5}{3}\right) + 5 = x - 5 + 5 = x$

f) Al aplicar f a un valor de x primero se eleva al cubo y, después, se suma 7. Entonces, la función inversa restará primero 7 y, después, calculará su raíz cúbica: $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-7}$.

$f(f^{-1}(x)) = f\left(\sqrt[3]{x-7}\right) = \left(\sqrt[3]{x-7}\right)^3 + 7 = x - 7 + 7 = x$ y x y $f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(x^3 + 7) = \sqrt[3]{x^3 + 7 - 7} = x = x$

79. **Verifica en cada caso que f y g son funciones inversas la una de la otra.**

a) $f(x) = \dfrac{5x+1}{x-1}$ $\quad g(x) = \dfrac{x-1}{x+5}$

b) $f(x) = \sqrt{x-4}$ $\quad g(x) = x^2 + 4,\ x \geq 0$

c) $f(x) = \dfrac{1}{x+1},\ x \geq 0$ $\quad g(x) = \dfrac{1-x}{x},\ 0 < x \leq 1$

a) f y g no son inversas.

$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f\left(\dfrac{x-1}{x+5}\right) = \dfrac{5 \cdot \dfrac{x-1}{x+5} + 1}{\dfrac{x-1}{x+5} - 1} = \dfrac{\dfrac{5x-5+x+5}{x+5}}{\dfrac{x-1-x-5}{x+5}} = \dfrac{5x-5+x+5}{x-1-x-5} = \dfrac{6x}{-6} = -x \Rightarrow$ f y g no son inversas.

b) f y g son inversas.

$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f(x^2 + 4) = \sqrt{x^2+4-4} = x$ y $(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g\left(\sqrt{x-4}\right) = \left(\sqrt{x-4}\right)^2 + 4 = x - 4 + 4 = x$

c) f y g son inversas.

$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f\left(\dfrac{1-x}{x}\right) = \dfrac{1}{\dfrac{1-x}{x} + 1} = \dfrac{x}{1-x+x} = \dfrac{x}{1} = x$ y $(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g\left(\dfrac{1}{x+1}\right) = \dfrac{1 - \dfrac{1}{x+1}}{\dfrac{1}{x+1}} = \dfrac{x+1-1}{1} = x$

80. Halla la correspondencia inversa en cada caso y comprueba que son funciones.

a) $f(x) = 5 - 2x$

b) $g(x) = \sqrt{x-2}$

c) $h(x) = 4 - (x + 2)^2$, **con** $-2 \le x \le 3$

d) $i(x) = x^2 - 2x + 2$ **con** $-2 \le x \le 3$

a) $y = 5 - 2x \Rightarrow x = \dfrac{5-y}{2} \Rightarrow f^{-1}(x) = \dfrac{5-x}{2}$

$f^{-1}(x)$ es función porque a cada x le corresponde una única y.

b) $y = \sqrt{x-2} \Rightarrow x = y^2 + 2 \Rightarrow f^{-1}(x) = x^2 + 2$

$g^{-1}(x)$ es función, con $D(g^{-1}) = [0, +\infty)$, porque a cada x le corresponde una única y.

c) $y = 4 - (x + 2)^2 \Rightarrow x = -2 \pm \sqrt{4-y} \Rightarrow h^{-1}(x) = -2 \pm \sqrt{4-x}$

$h^{-1}(x) = -2 \pm \sqrt{4-x}$ no es una función, pero al considerar el dominio de h en $[-2, 3]$, en la que la función es monótona y cuyo recorrido es $[h(3), h(-2)] = [-21, 4]$, entonces $h^{-1}(x) = -2 + \sqrt{4-x}$.

Por tanto, $h^{-1}(x)$ es función porque a cada x le corresponde una única y.

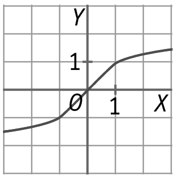
d) $y = x^2 - 2x + 2 \Rightarrow x = 1 \pm \sqrt{y-1} \Rightarrow i^{-1}(x) = 1 \pm \sqrt{x-1}$

$i^{-1}(x) = 1 \pm \sqrt{x-1}$ no es una función, pero al considerar el dominio de i en $[-2, 3]$, en la que la función es monótona y cuyo recorrido es $[i(3), i(-2)] = [5, 10]$, entonces $h^{-1}(x) = 1 + \sqrt{x-1}$.

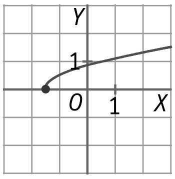
Por tanto, $i^{-1}(x)$ es función porque a cada x le corresponde una única y.

81. En las siguientes gráficas identifica las que corresponden a funciones inversas entre sí.

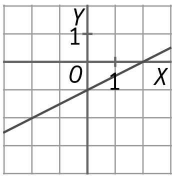
a)



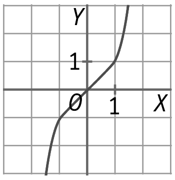
c)



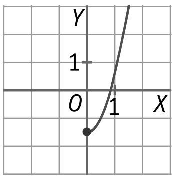
e)



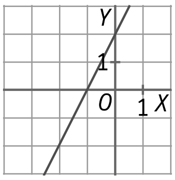
b)



d)



f)



a) y b)

c) y d)

e) y f)

82. Halla la función inversa de $f(x) = \dfrac{x+2}{2x-1}$.

a) ¿Cuál es el dominio de $f(x)$? ¿Y de $f^{-1}(x)$?

b) ¿Cuál serán los recorridos de las dos funciones?

$$y = \frac{x+2}{2x-1} \Rightarrow 2xy - y = x + 2 \Rightarrow 2xy - x = y + 2 \Rightarrow x(2y-1) = y + 2 \Rightarrow x = \frac{y+2}{2y-1} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x+2}{2x-1}$$

a) $2x - 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq \dfrac{1}{2} \Rightarrow D(f) = D(f^{-1}) = \mathbb{R} - \left\{\dfrac{1}{2}\right\}$

b) $R(f^{-1}) = D(f)$ y $R(f) = D(f^{-1}) \Rightarrow R(f^{-1}) = R(f) = \mathbb{R} - \left\{\dfrac{1}{2}\right\}$

83. Actividad resuelta.

84. Estudia el signo de las siguientes funciones.

a) $f(x) = 2 - \dfrac{1}{x}$

b) $g(x) = \dfrac{3x-6}{x+1}$

c) $h(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

d) $i(x) = (x-2)(x^2-25)$

e) $j(x) = \dfrac{x^2-9x+14}{x-5}$

f) $k(x) = 9x^4 - 25x^2$

a) La función $f(x)$, con $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$, corta al eje X en el punto $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$. Los intervalos a estudiar son:

- En $(-\infty, 0)$: $f(-1) = 3 > 0 \Rightarrow$ Positiva
- En $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$: $f(1) = 1 > 0 \Rightarrow$ Positiva
- En $\left(0, \frac{1}{2}\right)$: $f\left(\frac{1}{4}\right) = -2 < 0 \Rightarrow$ Negativa

b) La función $g(x)$, con $D(g) = \mathbb{R} - \{-1\}$, corta al eje X en el punto $(2, 0)$. Los intervalos a estudiar son:

- En $(-\infty, -1)$: $g(-2) = 12 > 0 \Rightarrow$ Positiva
- En $(2, +\infty)$: $g(3) = \frac{3}{4} > 0 \Rightarrow$ Positiva
- En $(-1, 2)$: $g(0) = -6 < 0 \Rightarrow$ Negativa

c) La función $h(x)$, con $D(h) = (-1, +1)$ corta al eje X en el punto $(0, 0)$.Los intervalos a estudiar son:

- En $(-1, 0)$: $h(-0{,}5) = -0{,}58 < 0 \Rightarrow$ Negativa
- En $(0, 1)$: $h(0{,}5) = 0{,}58 > 0 \Rightarrow$ Positiva

d) La función $i(x)$, con $D(j) = \mathbb{R}$ corta al eje X en los puntos $(2, 0)$, $(5, 0)$ y $(-5, 0)$.Los intervalos a estudiar son:

- En $(-\infty, -5)$: $f(-6) = -88 < 0 \Rightarrow$ Negativa
- En $(2, 5)$: $f(4) = -18 < 0 \Rightarrow$ Negativa
- En $(-5, 2)$: $f(0) = 50 > 0 \Rightarrow$ Positiva
- En $(5, +\infty)$: $f(6) = 44 > 0 \Rightarrow$ Positiva

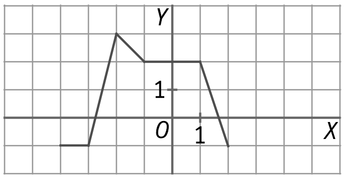
e) La función $j(x)$, con $D(j) = \mathbb{R} - \{5\}$, corta al eje X en los puntos $(2, 0)$ y $(7, 0)$.Los intervalos a estudiar son:

- En $(-\infty, 2)$: $f(-1) = -4 < 0 \Rightarrow$ Negativa
- En $(5, 7)$: $f(6) = -4 < 0 \Rightarrow$ Negativa
- En $(2, 5)$: $f(3) = 2 > 0 \Rightarrow$ Positiva
- En $(7, +\infty)$: $f(8) = 2 > 0 \Rightarrow$ Positiva

f) La función $k(x)$, con $D(k) = \mathbb{R}$ corta al eje X en los puntos $(0, 0)$, $\left(\frac{5}{3}, 0\right)$ y $\left(\frac{-5}{3}, 0\right)$.Los intervalos son:

- En $\left(-\infty, \frac{-5}{3}\right)$: $f(-2) = 44 > 0 \Rightarrow$ Positiva
- En $\left(0, \frac{5}{3}\right)$: $f(1) = -16 < 0 \Rightarrow$ Negativa
- En $\left(\frac{-5}{3}, 0\right)$: $f(-1) = -16 > 0 \Rightarrow$ Negativa
- En $\left(\frac{5}{3}, +\infty\right)$: $f(2) = 44 > 0 \Rightarrow$ Positiva

85. La siguiente gráfica corresponde a una función periódica de período *T* = 6.



a) Representa en tu cuaderno otros dos períodos de la gráfica de la función, uno a la izquierda y otro a la derecha.

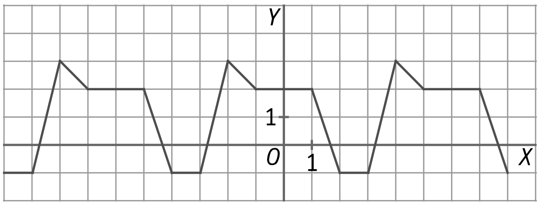
b) ¿Cuál es el recorrido de la función?

c) ¿Está acotada? ¿Cuáles son sus cotas?

d) Halla los valores de la función *f*(1), *f*(–2), *f*(0), *f*(27), *f*(–31) y *f*(2016).

e) ¿En qué puntos del intervalo [60, 70] la función es igual a –2?

a)



b) $R(f) = [-1, 3]$

c) La función está acotada superiormente porque $f(x) < 3$ e inferiormente porque $f(x) > -1$.

d) $f(1) = 2$ $\quad f(0) = 2$ $\quad f(-31) = f(-1 - 5 \cdot 6) = f(-1) = 2$

$f(-2) = 3$ $\quad f(27) = f(3 + 4 \cdot 6) = f(3) = -1$ $\quad f(2016) = f(0 + 336 \cdot 6) = f(0) = 2$

e) La función no es igual a –2 nunca en el intervalo [–4, 2].

Como la función es periódica, entonces en ningún punto del intervalo [60, 70] la función es igual a –2.

86. Halla la tasa de variación media de la función $f(x) = \frac{4}{x}$ en los intervalos siguientes:

a) [1, 3]

b) [2, 4]

c) [–5, –1]

d) [–2, –1]

¿Tendría sentido hallar la *TVM f*[–2, 1]? ¿Por qué?

Con los resultados obtenidos, ¿qué puedes decir acerca del crecimiento de la función?

a) *TVM f*[1, 3] = $\frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{\frac{4}{3} - 4}{2} = -\frac{4}{3}$

b) *TVM f*[2, 4] = $\frac{f(4) - f(2)}{4 - 2} = \frac{1 - 2}{2} = -\frac{1}{2}$

c) *TVM f*[–5, –1] = $\frac{f(-1) - f(-5)}{-1 + 5} = \frac{-4 + \frac{4}{5}}{4} = -\frac{4}{5}$

d) *TVM f*[–2, –1] = $\frac{f(-1) - f(-2)}{-1 + 2} = \frac{-4 + 2}{1} = -2$

No tendría sentido hallar la *TVM f*[–2, 1] porque la función no es continua en $x = 0$, ya que $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$

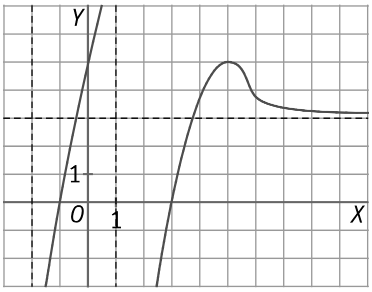
Como la TVM es siempre negativa, la función parece ser decreciente en todo su dominio.

87. Representa una función continua que cumpla las siguientes condiciones:

1. **Su dominio es (–2, 1) ∪ (1, +∞)**
2. **Es continua en todo su dominio.**
3. **Tiene como asíntotas las rectas:**

   ***x* = –2, *x* = 1, *y* = 3**
4. **Corta a los ejes de coordenadas en los puntos:**

   ***A*(–1, 0), *B*(0, 5), *C*(3, 0).**
5. **Es creciente en (–2, 1) ∪ (1, 5) y decreciente en (5, +∞).**
6. **Solo tiene un máximo relativo en (5, 5).**



88. Se define la siguiente función para valores de *x* pertenecientes al intervalo [*n*, *n* + 1) en donde *n* representa un número entero:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ es par} \\ -1 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

Así por ejemplo *f*(4,3) = 1 porque 4,3 pertenece al intervalo [4, 5) y el 4 es par.

a) Halla los valores *f*(1), *f*(1,25), *f*(–4,2), *f*(π).

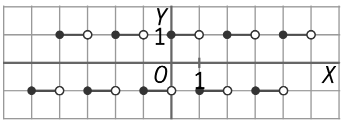
b) Representa la función en el intervalo [–5, 5).

c) La función es periódica. ¿Cuál es su periodo? ¿Por qué?

a) *f*(1) = –1 *f*(–4,2) = –1

f(1,25) = –1 *f*(π) = –1.

b)



c) Es una función periódica de período *T* = 2, porque si *x* es un número del intervalo [*n*, *n* + 1) entonces *x* + 2 es un número del intervalo [*n* + 2, *n* + 2 + 1) y, como *n* y *n* + 2 tienen la misma paridad entonces *f*(*x*) = *f*(*x* + 2).

89. **Si f y g son funciones pares, h y k son funciones impares, y ninguna de ellas es la función nula, ¿qué se puede asegurar sobre la simetría de las siguientes funciones?**

a) $f + g$ **c)** $f \cdot g$ **e)** $h + k$ **g)** $f \cdot (h + k)$

b) $f - g$ **d)** $\dfrac{h}{g}$ **f)** $(f + g) \cdot k$ **h)** $\dfrac{f+g}{h \cdot k}$

Como f y g son funciones pares, entonces $f(x) = f(-x)$ y $g(x) = g(-x)$.

Como h y k son funciones impares, entonces $-h(x) = h(-x)$ y $-k(x) = k(-x)$.

a) $(f + g)(-x) = f(-x) + g(-x) = f(x) + g(x) = (f + g)(x) \Rightarrow$ Función par

b) $(f - g)(-x) = f(-x) - g(-x) = f(x) - g(x) = (f - g)(x) \Rightarrow$ Función par

c) $(f \cdot g)(-x) = f(-x) \cdot g(-x) = f(x) \cdot g(x) = (f \cdot g)(x) \Rightarrow$ Función par

d) $\left(\dfrac{h}{g}\right)(-x) = \dfrac{h(-x)}{g(-x)} = \dfrac{-h(x)}{g(x)} = -\left(\dfrac{h}{g}\right)(x) \Rightarrow$ Función impar

e) $(h + k)(-x) = h(-x) + k(-x) = -h(x) - k(x) = -(h + k)(x) \Rightarrow$ Función impar

f) $[(f + g) \cdot k](-x) = (f + g)(-x) \cdot k(-x) = (f + g)(x) \cdot [-k(x)] = -[(f + g) \cdot k](x) \Rightarrow$ Función impar

g) $[f \cdot (h + k)](-x) = f(-x) \cdot (h + k)(-x) = f(x) \cdot [-(h + k)(x)] = -[f \cdot (h + k)](x) \Rightarrow$ Función impar

h) $\left(\dfrac{f+g}{h \cdot k}\right)(-x) = \dfrac{(f+g)(-x)}{(h \cdot k)(-x)} = \dfrac{f(-x)+g(-x)}{h(-x)k(-x)} = \dfrac{f(x)+g(x)}{-h(x)\left[-k(x)\right]} = \dfrac{f(x)+g(x)}{h(x)k(x)} = \left(\dfrac{f+g}{h \cdot k}\right)(x) \Rightarrow$ Función par

90. **Halla $g \circ f$ y $f \circ g$, siendo:**

$$f(x) = \begin{cases} 3x & \text{si } x < 2 \\ 1 - x & \text{si } x \geq 2 \end{cases} \quad \text{y} \quad g(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{si } x < 0 \\ x + 5 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Si $x < 0$ o si $x \geq 2 \Rightarrow f(x) < 0$ y si $0 \leq x < 2 \Rightarrow f(x) \geq 0 \Rightarrow (g \circ f)(x) = \begin{cases} 6x+1 & \text{si } x < 0 \\ 3x+5 & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ 2(1-x)+1 & \text{si } 2 \leq x \end{cases} = \begin{cases} 6x+1 & \text{si } x < 0 \\ 3x+5 & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ 3-2x & \text{si } 2 \leq x \end{cases}$

Si $x < 0 \Rightarrow g(x) < 2$ y si $0 \leq x \Rightarrow g(x) \geq 2 \Rightarrow (f \circ g)(x) = \begin{cases} 3(2x+1) & \text{si } x < 0 \\ 1-x-5 & \text{si } x \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} 6x+3 & \text{si } x < 0 \\ -x-4 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

91. **Para grupos de 50 o más personas una empresa de transportes ofrece, para una excursión, un precio por persona, en euros, según la fórmula:**

$P(n) = 40 - 0{,}5(n - 50)$, $n > 50$, donde n es el número de excursionistas.

a) **Escribe cuál será el ingreso, $G(n)$, para la empresa en función del número n de excursionistas.**

b) **Copia y completa la tabla en tu cuaderno.**

n	60	70	90	110	120	140	160
$G(n)$	●	●	●	●	●	●	●

c) **A la vista de los resultados, ¿cuál parece ser el número de personas más conveniente para la empresa?**

d) **Determina de manera exacta y razonada cuál es ese número de personas y cuánto ingresaría la empresa.**

a) $G(n) = n \cdot [40 - 0{,}5(n - 50)] = n \cdot (40 - 0{,}5n + 25) = 40n - 0{,}5n^2 + 25n = -0{,}5n^2 + 65n$

b)

n	60	70	90	110	120	140	160
$G(n)$	2100	2100	1800	1100	600	–700	–2400

c) Observando la tabla, se concluye que el número de personas más conveniente sería entre 60 y 70.

d) La función $G(n) = -0{,}5n^2 + 65n$ corresponde a la gráfica de una parábola cuyo vértice está en el punto de abscisa $x = 65$ y ordenadas $G(65) = 2112{,}5$. Como la parábola tiene las ramas hacia abajo, el vértice es un máximo. Por tanto, el número de personas más conveniente para la empresa es 65 y, con ese número de personas, obtendría unos beneficios de 2112,5 €.

92. **El coste de producir n palas de pádel viene dado por la expresión: $P(n) = 40 + 16\sqrt{n-1}$, con $n \leq 50$. Si la empresa pretende ganar un 50 % en la venta de cada pala, determina:**

a) El precio $U(n)$ de producción de cada una de las palas al producir n.

b) ¿A qué precio deberá vender cada pala si producen 17?

c) ¿Cuánto dinero ganará si producen 30 palas pero solo logran vender 25?

d) La ganancia, $G(n)$, al producir y vender n palas.

e) Analiza si cada una de las funciones $P(n)$, $U(n)$ y G(n) son crecientes o decrecientes.

a) $U(n) = \dfrac{P(n)}{n} = \dfrac{40+16\sqrt{n-1}}{n}$

b) $2 \cdot U(17) = 2 \cdot \dfrac{40+16\sqrt{17-1}}{17} = 12{,}24$ €

c) Al producir 30 palas sus gastos serán $P(30) = 40 + 16\sqrt{30-1} = 126{,}16$ € y si vende 25 conseguirá unos ingresos de $2 \cdot P(25) = 2\cdot\left(40+16\sqrt{25-1}\right) = 236{,}77$ €. Por tanto, ganará 236,77 – 126,16 = 110,61 €.

d) $G(n) = 2P(n) - P(n) = P(n) = 40+16\sqrt{n-1}$

e) Sea $n_1 < n_2$. Entonces:

$n_1 < n_2 \Rightarrow n_1 - 1 < n_2 - 1 \Rightarrow \sqrt{n_1-1} < \sqrt{n_2-1} \Rightarrow 16\sqrt{n_1-1} < 16\sqrt{n_2-1} \Rightarrow 40+16\sqrt{n_1-1} < 40+16\sqrt{n_2-1} \Rightarrow$ $P(n_1) < P(n_2)$ y $G(n_1) < G(n_2) \Rightarrow P(n)$ y $G(n)$ son funciones crecientes.

$n_1 < n_2 \Rightarrow n_1 - 1 < n_2 - 1 \Rightarrow \sqrt{n_1-1} < \sqrt{n_2-1} \Rightarrow 16\sqrt{n_1-1} < 16\sqrt{n_2-1} \Rightarrow 40+16\sqrt{n_1-1} < 40+16\sqrt{n_2-1} \Rightarrow$ $\dfrac{40+16\sqrt{n_1-1}}{n_1} > \dfrac{40+16\sqrt{n_2-1}}{n_2} \Rightarrow U(n_1) > U(n_2) \Rightarrow U(n)$ es una función decreciente.

93. **Un jugador de béisbol golpea a la pelota y esta sigue la trayectoria $y = 0{,}9 + 0{,}2x - 0{,}0012x^2$, donde x e y están en metros.**

a) ¿Pasará por encima de una valla que tiene 5 metros de altura y está a 155 m del jugador?

b) Si no existiera la valla y el suelo fuera totalmente horizontal, ¿qué distancia alcanzaría la pelota antes de caer al suelo?

a) $f(155) = 3{,}07 < 5 \Rightarrow$ La pelota no pasará por encima de la valla.

b) $0{,}9 + 0{,}2x - 0{,}0012x^2 = 0 \Rightarrow x = -4{,}38$ y $x = 171{,}05$

La pelota alcanzaría 171,05 m antes de caer al suelo.

94. **Con un cartón rectangular de 40 x 60 cm se construye una caja, sin tapa, recortando en las esquinas unos cuadraditos de lado x cm y doblando el material.**

a) Determina el volumen de la caja y la superficie del cartón que forma la caja en función de x.

b) ¿Cuál es el dominio de ambas funciones?

c) ¿Cuál es el volumen de la caja y la superficie del cartón cuando x = 10 cm?

a) $V(x) = (40 - 2x)(60 - 2x)x$ $\qquad$ $S(x) = 40 \cdot 60 - 4x^2$

b) $D(V) = [0, 20]$ y $D(S) = [0, 20]$ porque si $x > 20$ no se pueden formar las esquinas de los cuadrados.

c) $V(10) = (40 - 2 \cdot 10)(60 - 2 \cdot 10) \cdot 10 = 8000$ cm^3 y $S(10) = 40 \cdot 60 - 4 \cdot 10^2 = 2000$ cm^2

95. **¿Cuál de estas funciones expresa que el número y es el 30 % menos que el número x?**

A. $y = 0{,}7x$ $\qquad$ **B.** $y = 0{,}3x$ $\qquad$ **C.** $y = \dfrac{x}{0{,}3}$ $\qquad$ **D.** $y = x - 0{,}3$

$y = x - 30$ % de $x = x - 0{,}3x = 0{,}7x$

La respuesta correcta es la A.

96. **Las gráficas de $y = -|x - a| + b$ e $y = |x - c| + d$ se cortan en los puntos (2, 5) y (8, 3). El valor de $a + c$ es:**

A. 7 **B. 8** **C. 10** **D. 13**

La recta $y = -|x - a| + b$ pasa por los puntos (2, 5) y (8, 3): $5 = -|2 - a| + b$ y $3 = -|8 - a| + b$.

Restando ambas ecuaciones se obtiene: $2 = -|2 - a| + b + |8 - a| - b = -|2 - a| + |8 - a|$

- Si $a < 2 \Rightarrow 2 = -2 + a + 8 - a = 6$ Imposible
- Si $a > 8 \Rightarrow 2 = 2 - a + a - 8 = -6$ Imposible
- Si $2 \leq a \leq 8$: $2 = 2 - a + 8 - a = 10 - 2a \Rightarrow a = 4$

La recta $y = -|x - c| + d$ pasa por los puntos (2, 5) y (8, 3): $5 = |2 - c| + d$ y $3 = |8 - c| + d$.

Restando ambas ecuaciones se obtiene: $2 = |2 - c| + d - |8 - c| - d = |2 - c| - |8 - c|$

- Si $c < 2 \Rightarrow 2 = 2 - c - 8 + c = -6$ Imposible
- Si $c > 8 \Rightarrow 2 = c - 2 - c - 8 = -10$ Imposible
- Si $2 \leq c \leq 8$: $2 = c - 2 - 8 + c = 2c - 10 \Rightarrow c = 6$

Por tanto, $a + c = 4 + 6 = 10$

La respuesta correcta es la C.

97. **Sea f la función definida por $f(x) = ax^2 - \sqrt{2}$ con $a > 0$. Si $f\left(f\left(\sqrt{2}\right)\right) = -\sqrt{2}$, el valor de a es:**

A. $\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$ **B.** $\dfrac{1}{2}$ **C.** $2-\sqrt{2}$ **D.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$$-\sqrt{2} = f\left(f\left(\sqrt{2}\right)\right) = f\left(2a - \sqrt{2}\right) = a\left(2a - \sqrt{2}\right)^2 - \sqrt{2} \Rightarrow -\sqrt{2} = a\left(2a - \sqrt{2}\right)^2 - \sqrt{2} \Rightarrow a\left(2a - \sqrt{2}\right)^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

La respuesta correcta es la D.

98. **Si $f\left(\dfrac{x}{3}\right) = x^2 + x + 1$, ¿cuál es la suma de todos los valores z para los que $f(3z) = 7$?**

A. $\dfrac{-1}{3}$ **B.** $\dfrac{-1}{9}$ **C.** 0 **D.** $\dfrac{5}{9}$

$$7 = f(3z) = f\left(\frac{9z}{3}\right) = (9z)^2 + 9z + 1 = 81z^2 + 9z + 1 \Rightarrow 7 = 81z^2 + 9z + 1 \Rightarrow 81z^2 + 9z - 6 = 0$$

La suma de las soluciones de esta ecuación de segundo grado es $S = \dfrac{-b}{a} = \dfrac{-9}{81} = \dfrac{-1}{9}$.

La respuesta correcta es la B.

Encuentra el error

99. **Antonio ha obtenido un 6 en el último examen de Matemáticas y quiere convencer a su profesor para que le ponga un notable en la evaluación:**

Para ello, hace el siguiente razonamiento:

Mi nota ha sido $x = 6$, luego $13x = 78$ y $x^2 = 36$. Como $36 = 78 - 42$ puedo escribir que $x2 = 78 - 42 = 13x - 42$.

Si resto $6x$ a ambos miembros de la igualdad obtengo $x^2 - 6x = 7x - 42$. Es decir, $x(x - 6) = 7(x - 6)$ y de aquí se obtiene que evidentemente x tiene que ser 7.

Muy bueno tu intento, le dice el profesor, pero algo has hecho mal para concluir que un 6 es igual que un 7.

¿Cuál es el error en el razonamiento de Antonio?

Indica el error en la solución incorrecta.

El error está al simplificar $x(x - 6) = 7(x - 6)$.
Para simplificar, el alumno divide entre $x - 6$, pero no se puede dividir entre esta expresión porque como ha supuesto que $x = 6$, entonces $x - 6 = 0$.

PONTE A PRUEBA

¿Cómo invertir dinero?

Actividad resuelta.

La gravedad

Son muchas y muy variadas las actividades de la vida en las que es preciso tener en cuenta y conocer adecuadamente las consecuencias de la fuerza de la gravedad en nuestro planeta. Por citar algunas de ellas basta fijarse en actividades deportivas como el parapente, el ala delta, los lanzamientos de jabalina, el tiro con arco… En todas ellas, para determinar su trayectoria, influyen muchos otros factores como son: la resistencia del aire, la velocidad y el ángulo de salida, la fuerza del viento…, cuyos efectos se suman para dar lugar a la trayectoria final.

Se plantea, mediante el manejo de funciones elementales, estudiar y obtener la trayectoria que seguirá un objeto lanzado con cierta velocidad y despreciando la resistencia del aires.

Desde una plataforma horizontal y situada a 20 m de altura se lanza una bola, que rueda sobre la plataforma, con una velocidad de 2 m/s. El espacio que recorre horizontalmente será $x = 2t$ (velocidad por el tiempo) y verticalmente $y = \frac{1}{2} g \cdot t^2$, donde g es la aceleración de la gravedad, $g \cong -10$ m/s^2. En ese caso, como se lanza desde una altura de 20 m, la posición inicial de la bola en cada instante será $y = 20 - 5t^2$.

1. **¿Cuánto tiempo tardará en caer al suelo?**

   $0 = 20 - 5t^2 \Rightarrow t^2 = 4 \Rightarrow t = \pm 2 \Rightarrow$ Tardará 2 s en caer al suelo.

2. **¿Qué desplazamiento horizontal habrá tenido la bola en ese tiempo?**

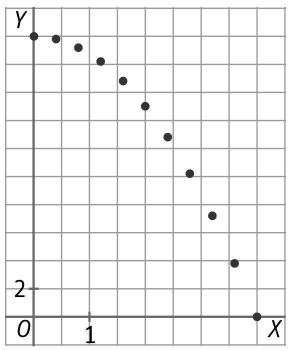
   $x = 2 \cdot 2 = 4$ m

3. **¿En qué punto caerá la bola?**

   La bola caerá a 4 m de la vertical del borde de la plataforma.

4. **Halla las posiciones de la bola cada 0,2 segundos y represéntalas sobre unos ejes de coordenadas.**

Tiempo	x	y
0	0	20
0,2	0,4	19,8
0,4	0,8	19,2
0,6	1,2	18,2
0,8	1,6	16,8
1	2	15
1,2	2,4	12,8
1,4	2,8	10,2
1,6	3,2	7,2
1,8	3,6	3,8
2	4	0



5. **La gráfica que obtienes, ¿a qué tipo de función corresponde? Halla la expresión de esa función de la forma habitual $y = f(x)$ eliminando el tiempo t entre las dos expresiones que has utilizado.**

   La gráfica que se obtiene corresponde a una parábola, con vértice en el punto $V(0, 20)$, cóncava hacia abajo, y con $0 \le x \le 4$.

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = 20 - 5t^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = \dfrac{x}{2} \\ y = 20 - 5t^2 \end{cases} \Rightarrow y = 20 - 5 \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^2 \Rightarrow y = 20 - 5 \cdot \frac{x^2}{4} \Rightarrow y = 20 - \frac{5x^2}{4}$$

AUTOEVALUACIÓN

1. En el conjunto *C* = {1, 2, 3, …, 100} formado por los 100 primeros números naturales y el conjunto *B* formado por los 20 primeros, establecemos la siguiente correspondencia:

A cada elemento de *C* le corresponde la suma de sus cifras.

a) ¿Esta correspondencia, *f*, es una función?

b) ¿Es inyectiva? ¿Por qué?

c) ¿Cuál es su recorrido?

d) ¿Cuántos elementos de *C* verifican que $f(x) = 9$?

a) La correspondencia *f* es una función porque a cada elemento del conjunto *C* le corresponde un único elemento del conjunto *B*.

b) No es una función inyectiva porque, por ejemplo, a los elementos 24 y 51 de *C* les corresponde el mismo elemento de *B*, 6.

c) $R = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18\}$

d) Hay 10 elementos de *C* que verifican que $f(x) = 9$: {9, 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81, 90, 99}

2. Dadas las funciones $f(x) = \dfrac{1}{x+3}$ y $g(x) = x^2 - 4$, determina:

a) El dominio de $f + g$, de $f \cdot g$ y $\dfrac{f}{g}$.

b) El valor de $(f \circ g)(2)$.

c) El dominio de $(f \circ g)$.

$D(f) = \mathbb{R} - \{-3\}$ y $D(g) = \mathbb{R}$

a) $D(f + g) = D(f) \cap D(f) = \mathbb{R} - \{-3\} = (-\infty, -3) \cup (-3, +\infty)$

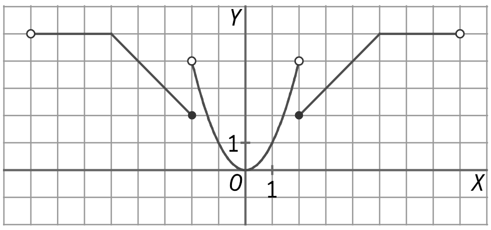
$D(f \cdot g) = D(f) \cap D(f) = \mathbb{R} - \{-3\} = (-\infty, -3) \cup (-3, +\infty)$

$D\left(\dfrac{f}{g}\right) = D(f) \cap D(f)$ y $g(x) \neq 0 = \mathbb{R} - \{-3, -2, 2\} = (-\infty, -3) \cup (-3, -2) \cup (-2, -2) \cup (2, +\infty)$

b) $(f \circ g)(2) = f[g(2)] = f(2^2 - 4) = f(0) = \dfrac{1}{3}$

c) $D(f \circ g)(x) = \{x \in D(g) / g(x) \in D(f)\} = \mathbb{R} - \{-1, 1\} = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$

3. Observa la siguiente gráfica:



a) Indica su dominio y su recorrido.

b) ¿Es par o impar?

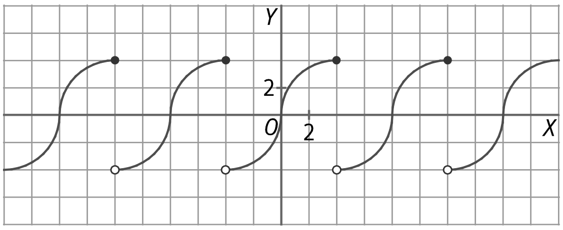
c) Calcula $f[4 + f(2)]$

a) $D(f) = (-8, 8)$ y $R(f) = [0, 5]$

b) La función es par porque es simétrica respecto el eje *Y*.

c) $f[4 + f(2)] = f(4 + 2) = f(6) = 5$

4. La gráfica que aparece a continuación se corresponde con una función periódica.



a) ¿Cuál es su recorrido? ¿Está acotada? ¿Es simétrica?

b) Calcula *f*(2016) y *f*(–2020).

c) ¿Cuál es el período de *f*(2*x*)?

a) $R(f) = (–4, 4]$

Está acotada superiormente porque $f(x) \leq 4$ e inferiormente porque $f(x) < –4$, para todo x del dominio de f.

La gráfica no es simétrica.

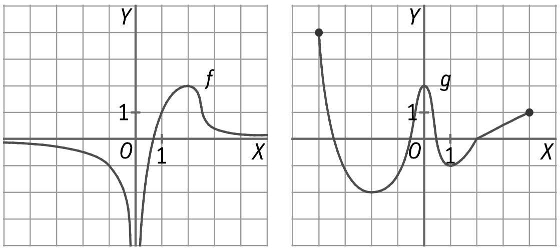
b) La gráfica es periódica de período $T = 8$.

$f(2016) = f(0 + 252 \cdot 8) = f(0) = 0$

$f(–2020) = f(–4 – 252 \cdot 8) = f(–4) = 4$

c) El período de $f(2x)$ será $T = 4$, porque $f(2x) = f(2x + 8) = f[2(x + 4)]$.

5. Las gráficas siguientes corresponden a dos funciones *f* y *g*.



a) ¿Están acotadas?

b) Indica los intervalos de crecimiento y decrecimiento. ¿Cuáles son sus máximos y sus mínimos?

c) ¿Cuáles pueden ser las asíntotas de la función f?

a) La función f está acotada superiormente porque $f(x) \leq 2$ para todo x del dominio de f, pero no está acotada inferiormente.

La función g está acotada superiormente porque $f(x) \leq 4$ e inferiormente porque $f(x) \geq –2$, para todo x del dominio de f.

b) Función f

- Creciente: $(0, 2)$
- Decreciente: $(–\infty, 0) \cup (2, +\infty)$
- Tiene un máximo en $x = 2$.
- No tiene mínimos.

Función g

- Creciente: $(–2, 0) \cup (1, 4)$
- Decreciente: $(–4, –2) \cup (0, 1)$
- Tiene un máximo en $x = 0$ y que vale $g(0) = 2$.
- Tiene un mínimo en $x = –2$, que vale $g(–2) = –2$, y otro en $x = 1$, que vale $g(1) = –1$. Por tanto, el mínimo en $x = – 2$ es mínimo absoluto.

c) Asíntota horizontal: $y = 0$

Asíntota vertical: $x = 0$