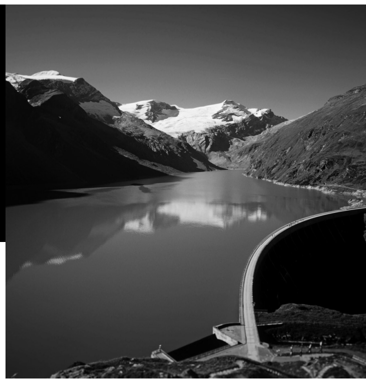
10 Integral indefinida y definida



1. Reglas de integración

■ Piensa y calcula

Calcula: a) $y = x^5$, $y' =$ b) $y' = 3x^2$, $y =$ c) $y = e^{5x}$, $y' =$ d) $y' = e^{3x}$, $y =$

Solución:

a) $y' = 5x^4$ b) $y = x^3$ c) $y' = 5e^{5x}$ d) $y = \frac{1}{3}e^{3x}$

● Aplica la teoría

1. $\int 3(3x-5)^7\,dx$

Solución:

Se aplica la integral de una función polinómica.

$\frac{(3x-5)^8}{8} + k$

2. $\int \frac{dx}{(3x+5)^3}$

Solución:

Se aplica la integral de una función racional.

$-\frac{1}{6(3x+5)^2} + k$

3. $\int \frac{9}{x+3}\,dx$

Solución:

Se aplica la integral de una función logarítmica.

$9\,L|x+3| + k$

4. $\int e^x\,dx$

Solución:

Se aplica la integral de una función exponencial.

$e^x + k$

5. $\int \frac{dx}{x+3}$

Solución:

Se aplica la integral de una función logarítmica.

$L\,|x+3| + k$

6. $\int (x^2 - 4x)\,dx$

Solución:

$\frac{x^3}{3} - 2x^2 + k$

7. $\int 2^{6x}\,dx$

Solución:

Se aplica la integral de una función exponencial.

$\frac{2^{6x-1}}{3\,L\,2} + k$

8. $\int \frac{x\,dx}{x^2-1}$

Solución:

Se aplica la integral de una función logarítmica.

$\frac{1}{2}\,L\,|x^2-1| + k$

9. $\int 4\sqrt{x}\,dx$

Solución:

$\frac{8x\sqrt{x}}{3} + k$

10. $\int \frac{7\,dx}{2\sqrt{7x+5}}$

Solución:

Se aplica la integral de una función irracional.

$\sqrt{7x+5} + k$

11. $\int 6x^3\,dx$

Solución:

$\frac{3x^4}{2} + k$

12. $\int \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3}\right) dx$

Solución:

$\sqrt{x} - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + k$

13. $\int \sqrt[3]{x}\,dx$

Solución:

$\frac{3x\sqrt[3]{x}}{4} + k$

14. $\int 2x(x^2+1)\,dx$

Solución:

$\frac{x^4}{2} + x^2 + k$

15. $\int \frac{1}{(x+3)^2}\,dx$

Solución:

$-\frac{1}{(x+3)} + k$

16. $\int (x^3 - 6x^2 + 1)\,dx$

Solución:

Se aplica la integral de una función polinómica.

$\frac{x^4}{4} - 2x^3 + x + k$

17. $\int x(x^2+5)\,dx$

Solución:

$\frac{x^4}{4} + \frac{5x^2}{2} + k$

18. $\int \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$

Solución:

Se aplica la integral de una función irracional.

$2\sqrt{x-1} + k$

19. $\int e^{x/2}\,dx$

Solución:

Se aplica la integral de una función exponencial.

$2\,e^{x/2} + k$

20. $\int \frac{x^2}{(x^3+1)^2} + k$

Solución:

$\frac{-1}{3(x^3+1)}\,dx$

21. $\int \frac{3}{(x-3)^4}\,dx$

Solución:

Se aplica la integral de una función racional.

$-\frac{1}{(x-3)^3} + k$

22. $\int (4x+1)^5\,dx$

Solución:

Se aplica la integral de una función polinómica.

$\frac{(4x+1)^6}{24} + k$

23. $\int \frac{dx}{x}$

Solución:

$L\,x + k$

24. $\int 3 \cdot 2^{3x}\,dx$

Solución:

Se aplica la integral de una función exponencial.

$\frac{2^{3x}}{L\,2} + k$

25. $\int \frac{dx}{(2x-1)^4}$

Solución:

Se aplica la integral de una función racional.

$-\frac{1}{6(2x-1)^3} + k$

26. $\int \frac{e^x}{e^x - 5}\,dx$

Solución:
L $|e^x - 5| + k$

27. $\displaystyle\int \frac{2x - 3}{x^2 - 3x + 5}\,dx$

Solución:
Se aplica la integral de una función logarítmica.
L $|x^2 - 3x + 5| + k$

28. $\displaystyle\int 2\sqrt[5]{2x}\,dx$

Solución:
Se aplica la integral de una función irracional.
$\dfrac{5x\sqrt[5]{2x}}{3} + k$

29. $\displaystyle\int \frac{2\,dx}{\sqrt{1 - (2x)^2}}$

Solución:
Se aplica la integral de una función trigonométrica.
arc sen $2x + k$

30. $\displaystyle\int e^{-7x}\,dx$

Solución:
Se aplica la integral de una función exponencial.
$-\dfrac{e^{-7x}}{7} + k$

31. $\displaystyle\int \frac{dx}{1 - x}$

Solución:
Se aplica la integral de una función logarítmica.
$-$L $|1 - x| + k$

32. $\displaystyle\int (x^4 - 2x - 5)\,dx$

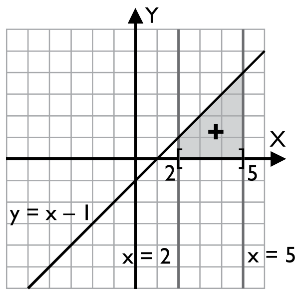
Solución:
Se aplica la integral de una función polinómica.
$\dfrac{x^5}{5} - x^2 - 5x + k$

2. Integral definida

Piensa y calcula

Halla, contando, el área de la 2ª figura del margen, la que tiene un signo **+** dentro. Cada cuadradito es una unidad cuadrada.

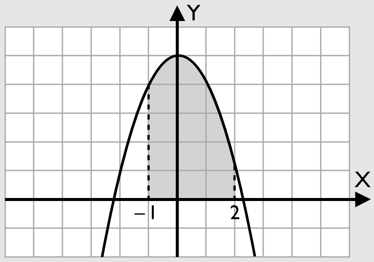
Solución:
Tiene exactamente 7,5 u^2



Aplica la teoría

33. Calcula $\displaystyle\int_{-1}^{2} (5 - x^2)\,dx$

Solución:



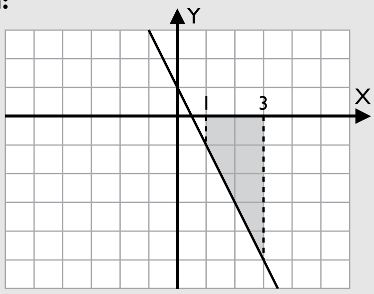
a) $F(x) = 5x - \dfrac{x^3}{3}$

b) $F(-1) = -\dfrac{14}{3}, F(2) = \dfrac{22}{3}$

c) $\displaystyle\int_{-1}^{2} (5 - x^2)\,dx = 12$ u^2

34. Calcula $\displaystyle\int_{1}^{3} (-2x + 1)\,dx$

Solución:



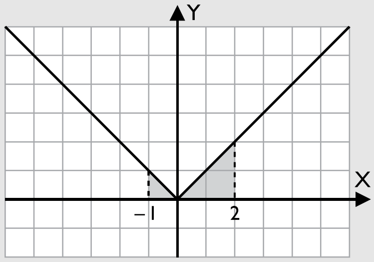
a) $F(x) = x - x^2$

b) $F(1) = 0, F(3) = -6$

c) $\int_1^3 (5 - x^2)\, dx = -6\ u^2$

35. Siendo $|x|$ el valor absoluto o módulo de x, calcula la integral definida $\int_{-1}^{2} |x|\, dx$

Solución:



a) $\int_{-1}^{2} |x|\, dx = \int_{-1}^{0} (-x)\, dx + \int_0^2 x\, dx$

Sea $F(x) = \int (-x)\, dx$

$F(x) = -\dfrac{x^2}{2}$

$F(-1) = -\dfrac{1}{2}, F(0) = 0$

$\int_{-1}^{0} (-x)\, dx = \dfrac{1}{2}\ u^2$

$G(x) = \int x\, dx$

$G(x) = \dfrac{x^2}{2}$

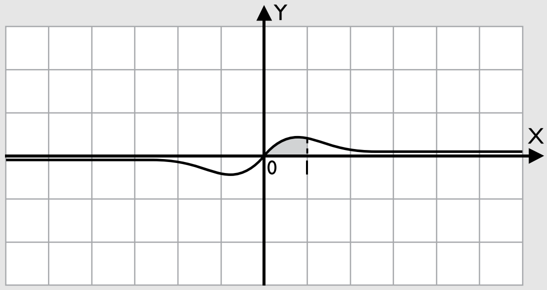
$G(0) = 0, G(2) = 2$

$\int_0^2 x\, dx = 2\ u^2$

$\int_{-1}^{2} |x|\, dx = \int_{-1}^{0} (-x)\, dx + \int_0^2 x\, dx = \dfrac{5}{2} = 2{,}5\ u^2$

36. Calcula el valor de $\int_0^1 \dfrac{x\, dx}{e^{x^2}}$

Solución:



a) $F(x) = -\dfrac{1}{2}\, e^{-x^2}$

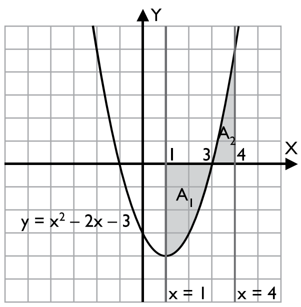
b) $F(0) = -\dfrac{1}{2}, F(1) = -\dfrac{1}{2}\, e^{-1}$

c) $\int_0^1 \dfrac{x\, dx}{e^{x^2}} = \dfrac{1}{2}(1 - e^{-1}) = 0{,}32\ u^2$

3. Cálculo de áreas

Piensa y calcula

Halla por aproximación el área de las dos regiones, la amarilla y la verde, del dibujo del margen. Cada cuadradito es una unidad cuadrada.



Solución:

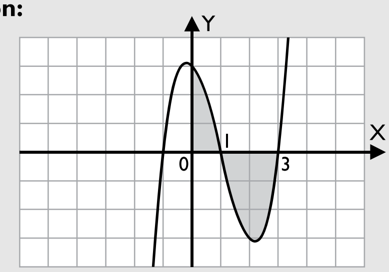
La amarilla, 5 u^2 aproximadamente, y la verde 2 u^2 aproximadamente.

En total, unas 7 unidades cuadradas.

Aplica la teoría

37. Halla el área de la región plana limitada por la gráfica de $f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$, el eje de abscisas y las rectas $x = 0, x = 3$

Solución:



Raíces: $x_1 = -1, x_2 = 1, x_3 = 3$

$$\int (x^3 - 3x^2 - x + 3)\, dx = \frac{x^4}{4} - x^3 - \frac{x^2}{2} + 3x$$

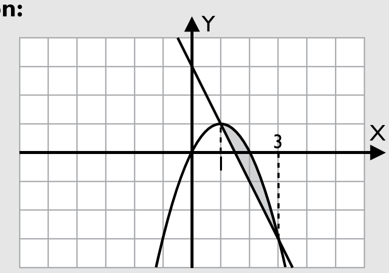
$$\int_0^1 (x^3 - 3x^2 - x + 3)\, dx = \frac{7}{4}\ u^2$$

$$\int_1^3 (x^3 - 3x^2 - x + 3)\, dx = -4\ u^2$$

$$\text{Área} = \frac{23}{4} = 5{,}75\ u^2$$

38. Halla el área del recinto limitado por la recta $y = 3 - 2x$ y la parábola $y = 2x - x^2$

Solución:



Raíces: $x_1 = 1, x_2 = 3$

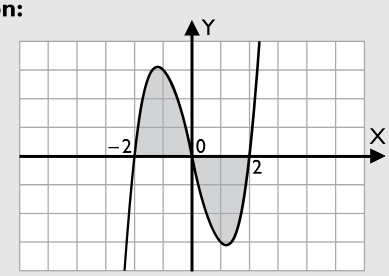
$$\int (-x^2 + 4x - 3)\, dx = -\frac{x^3}{3} + 2x^2 - 3x$$

$$\int_1^3 (-x^2 + 4x - 3)\, dx = \frac{4}{3}\ u^2$$

$$\text{Área} = \frac{4}{3} = 1{,}33\ u^2$$

39. Halla el área de la región plana limitada por la gráfica de $y = x^3 - 4x$ y el eje X

Solución:



Raíces: $x_1 = -2, x_2 = 0, x_3 = 2$

$$\int (x^3 - 4x)\, dx = \frac{x^4}{4} - 2x^2$$

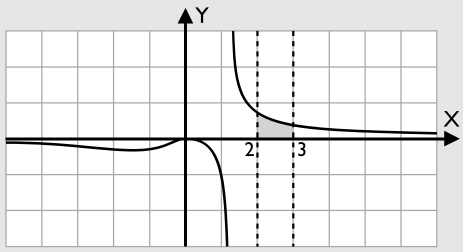
$$\int_{-2}^0 (x^3 - 4x)\, dx = 4\ u^2$$

$$\int_0^2 (x^3 - 4x)\, dx = -4\ u^2$$

$$\text{Área} = 8\ u^2$$

40. Calcula el área de la región limitada por la curva $y = \dfrac{x^2}{x^3 - 2}$ y las rectas $y = 0, x = 2, x = 3$

Solución:



Raíces: $x = 0$

$$\int \frac{x^2}{x^3 - 2}\, dx = \frac{1}{3} L\,|x^3 - 2|$$

$$\int_2^3 \frac{x^2}{x^3 - 2}\, dx = \frac{1}{3}(L\,25 - L\,6)\ u^2$$

$$\text{Área} = \frac{1}{3}(L\,25 - L\,6) = 0{,}48\ u^2$$

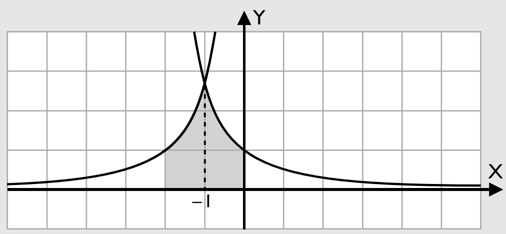
41. Resuelve las siguientes cuestiones:

a) Dibuja el recinto limitado por las curvas:

$$y = e^{x+2}, y = e^{-x}, y = 0, x = -2, x = 0$$

b) Halla el área del recinto considerado en el apartado anterior.

Solución:



Raíces: $x = -1$

$$\int_{-2}^{-1} e^{x+2}\, dx = e - 1\ u^2$$

$$\int_{-1}^{0} e^{-x}\, dx = e - 1\ u^2$$

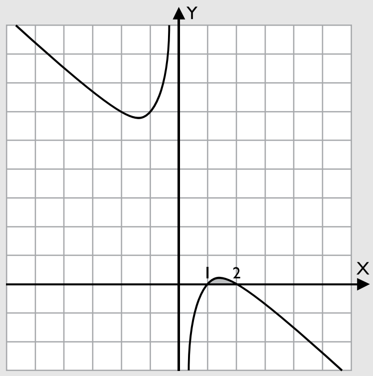
$$\text{Área} = 2e - 2 = 3{,}44\ u^2$$

42. Dada la función, definida en los números reales salvo en x = 0

$$f(x) = 3 - x - \frac{2}{x}$$

calcula el área de la región plana limitada por la gráfica de f(x) y el semieje positivo X

Solución:



Raíces: $x_1 = 1, x_2 = 2$

$$\int\left(3 - x - \frac{2}{x}\right) dx = 3x - \frac{x^2}{2} - 2L|x|$$

$$\int_1^2\left(3 - x - \frac{2}{x}\right) dx = \frac{3}{2} - 2 \text{ L } 2 \text{ u}^2$$

$$\text{Área} = \frac{3}{2} - 2 \text{ L } 2 = 0{,}11 \text{ u}^2$$

4. Aplicaciones de la integral definida

Piensa y calcula

Un depósito recoge agua de un grifo a una velocidad que sigue la función f(x) = 2x, donde f(x) se expresa en litros por minuto, y **x,** en minutos.

Calcula la integral $\int_0^5 2x\,dx$ e interpreta el resultado.

Solución:

$$\int_0^5 2x\,dx = 25$$

Se recogen 25 litros de agua en los 5 primeros minutos.

Aplica la teoría

43. Se estima que el ritmo de crecimiento de un feto durante el embarazo viene dado por la función:

$$f(x) = -\frac{x^2}{200} + \frac{x}{5}$$

donde **x** se mide en semanas y f(x) en centímetros por semana. Calcula cuánto ha crecido el feto en las 30 primeras semanas.

Solución:

a) El crecimiento será:

$$\int_0^{30}\left(-\frac{x^2}{200} + \frac{x}{5}\right) dx$$

b) $F(x) = \int\left(-\frac{x^2}{200} + \frac{x}{5}\right) dx = -\frac{x^3}{600} + \frac{x^2}{10}$

c) F(30) = 45; F(0) = 0

d) |F(30) – F(0)| = |45 – 0| = 45

Ha crecido 45 cm

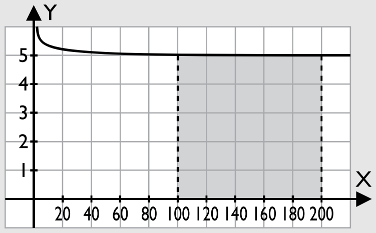
44. Una fábrica produce objetos de decoración. La función de ingreso marginal viene dada por:

$$i(x) = 5 + \frac{3}{x+2}$$

donde **x** es el número de objetos vendidos e i(x) viene dado en euros.

¿Cuál es el incremento de los ingresos obtenidos cuando se pasa de vender 100 a vender 200 objetos?

Solución:



$$\int_{100}^{200}\left(5 + \frac{3}{x+2}\right) dx = 500 + 3(L\ 101 - L\ 51) = 502{,}05\ €$$

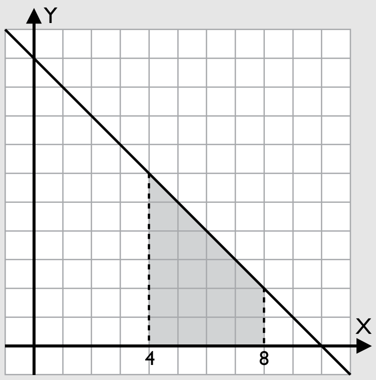
45. La función que mide el caudal que sale de un depósito es:

$$f(x) = 10 - x$$

donde f(x) está dado en litros por segundo, y **x,** en segundos.

¿Qué cantidad de agua sale del depósito entre el segundo 4 y el segundo 8?

Solución:



$$\text{Volumen} = \int_4^8 (10 - x)\, dx = 16 \text{ litros.}$$

46. En un municipio se estima que el ritmo de generación de basura viene dado por la función:

$$f(x) = 10\,000 \cdot e^{0,5x}$$

donde **x** se mide en años y f(x) en toneladas por año. Si se considera x = 0 el primer año en el que se inicia el estudio, ¿cuánta basura se generará en el municipio durante los 5 primeros años?

Solución:

a) El crecimiento será:

$$\int_0^5 10\,000\ e^{0,5x}\, dx$$

b) $F(x) = \int 10\,000\ e^{0,5x}\, dx = 20\,000\ e^{0,5x}$

c) $F(5) = 243\,650;\ \ F(0) = 20\,000$

d) $|F(5) - F(0)| = |243\,650 - 20\,000| = 223\,650$

Se han generado 223 650 Tm

Preguntas tipo test

Contesta en tu cuaderno:

1 Calcula la siguiente integral indefinida:

$$\int \left(x + \frac{5}{x}\right)^2 dx$$

- ☐ $\frac{x^4}{4} - \frac{x^4}{4} + k$
- ☐ $\frac{1}{3}\left(x + \frac{5}{x}\right)^3 + k$
- ☒ $\frac{x^3}{3} + 10x - \frac{25}{x} + k$
- ☐ $\frac{x^4}{4} + L|x| + k$

2 Sea la función $f(x) = 3x^2 - 6x$. Si $f'(x)$ representa su derivada, encuentra una primitiva $F(x)$ de $f(x)$ que verifique $F(2) = f'(3)$

- ☐ $x^3 - 3x^2 + 5$
- ☒ $x^3 - 3x^2 + 16$
- ☐ $x^3 - 3x^2 + 13$
- ☐ $x^3 - 3x^2$

3 Calcula el área de la región plana acotada limitada por las gráficas de las funciones reales de variable real:

$$f(x) = x^2 - x; g(x) = 1 - x^2$$

- ☐ $4/3$ u^2
- ☐ $8/9$ u^2
- ☐ $8/3$ u^2
- ☒ $9/8$ u^2

4 Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x \le 0 \\ (x-1)^2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

calcula el área del recinto limitado por los ejes de coordenadas y la gráfica de la función.

- ☐ $2/3$ u^2
- ☐ $1/3$ u^2
- ☒ 1 u^2
- ☐ No se puede calcular el área porque la función es discontinua en $x = 0$

5 Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x \le -3 \\ x^2 & \text{si } -3 < x < 1 \\ 1 & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$$

calcula el área limitada por la gráfica de la función $y = f(x)$, las rectas $x = -3$, $x = 2$ y el eje de abscisas.

- ☒ $31/3$ u^2
- ☐ $11/3$ u^2
- ☐ $35/3$ u^2
- ☐ No se puede calcular el área porque la función es discontinua en $x = -3$

6 Calcula el área de la región limitada por la parábola $y = x^2$ y la recta $y = -x + 2$

- ☐ 9 u^2
- ☐ 3 u^2
- ☐ $21/2$ u^2
- ☒ $9/2$ u^2

7 Dada la función $f(x) = -x^3 - 2x^2 + 3x$, calcula el área encerrada por la gráfica de la función $f(x)$ y por el eje OX

- ☐ $32/3$ u^2
- ☒ $71/6$ u^2
- ☐ $45/4$ u^2
- ☐ $7/12$ u^2

8 Una alfombra de flores lleva 21 rosas por cada 4 dm^2 de superficie. Se quiere rellenar de rosas una parte de la alfombra cuya gráfica está limitada por las funciones:

$$y = -x^2 + 4x + 3 \; ; y = 3$$

Si se mide en metros y cada rosa cuesta 0,3 €, ¿cuánto cuesta rellenar esa parte de la alfombra?

- ☒ 1 680 €
- ☐ 3 570 €
- ☐ 840 €
- ☐ 1 890 €

9 Sea la función $f(x) = 3x^2 - 6x$. Calcula el área limitada por la curva y el eje X entre $x = 1$ y $x = 3$

- ☐ 8 u^2
- ☐ 4 u^2
- ☐ 6 u^2
- ☒ 2 u^2

10 Halla el área limitada por la recta $y = -4x + 4$ y la parte positiva de los ejes de coordenadas.

- ☒ 2 u^2
- ☐ 4 u^2
- ☐ $1/2$ u^2
- ☐ 8 u^2

1. Reglas de integración

47. $\int 4(4x-1)^5\,dx$

Solución:
Se aplica la integral de una función polinómica.

$$\frac{(4x-1)^6}{6}+k$$

48. $\int \frac{dx}{(x-1)^5}$

Solución:
Se aplica la integral de una función racional.

$$-\frac{1}{4(x-1)^4}+k$$

49. $\int (2x+7)^2\,dx$

Solución:
$\frac{(2x+7)^3}{6}+k$

50. $\int e^{-x}\,dx$

Solución:
Se aplica la integral de una función exponencial.

$$-e^{-x}+k$$

51. $\int \frac{dx}{x-1}$

Solución:
Se aplica la integral de una función logarítmica.

$$L\,|x-1|+k$$

52. $\int \frac{5}{x^3}\,dx$

Solución:
$-\frac{5}{2x^2}+k$

53. $\int 2^{-4x}\,dx$

Solución:
Se aplica la integral de una función exponencial.

$$-\frac{2^{-4x}}{4\,L\,2}+k$$

54. $\int \frac{x\,dx}{x^2+9}$

Solución:
Se aplica la integral de una función logarítmica.

$$\frac{1}{2}\,L\,|x^2+9|+k$$

55. $\int \frac{3}{(x-9)^2}\,dx$

Solución:
$\frac{-3}{x-9}+k$

56. $\int \frac{3\,dx}{\sqrt{3x}}$

Solución:
Se aplica la integral de una función irracional.

$$2\sqrt{3x}+k$$

57. $\int \frac{2x}{\sqrt{x^2-1}}\,dx$

Solución:
$2\sqrt{x^2-1}+k$

58. $\int \frac{3x}{x^2-5}\,dx$

Solución:
$\frac{3\,L\,|x^2-5|}{2}+k$

59. $\int e^{4x-7}\,dx$

Solución:
$\frac{e^{4x-7}}{4}+k$

60. $\int (5-2x)^4\,dx$

Solución:
$-\frac{(5-2x)^5}{10}+k$

61. $\int \left(\frac{1}{x^2}-\frac{3}{x^3}+\frac{x}{x^2+3}\right)dx$

Solución:
$-\frac{1}{x}+\frac{3}{2x^2}+\frac{L\,|x^2+3|}{2}+k$

62. $\int (10x^4 + 2x^3 - x - 1)\,dx$

Solución:
Se aplica la integral de una función polinómica.

$$2x^5 + \frac{x^4}{2} - \frac{x^2}{2} - x + k$$

63. $\int x(x + 1)^2\,dx$

Solución:
$\frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + k$

64. $\int \sqrt[5]{x^3}\,dx$

Solución:
Se aplica la integral de una función irracional.

$$\frac{5x\sqrt[5]{x^3}}{8} + k$$

65. $\int e^{x/3}\,dx$

Solución:
Se aplica la integral de una función exponencial.

$$3e^{x/3} + k$$

66. $\int \frac{x^2 - 3x + 1}{x}\,dx$

Solución:
$\frac{1}{2}x^2 - 3x + L\,|x| + k$

67. $\int \left(3x^2 + 1 - \frac{1}{x + 2} + \frac{8}{x^5}\right) dx$

Solución:
Se aplica la integral de las operaciones.

$$x^3 + x - L\,|x + 2| - \frac{2}{x^4} + k$$

68. $\int (2x - 1)^3\,dx$

Solución:
Se aplica la integral de una función polinómica.

$$\frac{(2x - 1)^4}{8} + k$$

69. $\int 3xe^{x^2}\,dx$

Solución:
$\frac{3e^{x^2}}{2} + k$

70. $\int 5 \cdot 7^{-5x}\,dx$

Solución:
Se aplica la integral de una función exponencial.

$$-\frac{7^{-5x}}{L\,7} + k$$

71. $\int \frac{dx}{(x + 7)^2}$

Solución:
Se aplica la integral de una función racional.

$$-\frac{1}{x + 7} + k$$

72. $\int (2x + e^{5x})\,dx$

Solución:
$x^2 + \frac{e^{5x}}{5} + k$

73. $\int \frac{3x^2 + 5}{x^3 + 5x - 1}\,dx$

Solución:
Se aplica la integral de una función logarítmica.

$$L\,|x^3 + 5x - 1| + k$$

74. $\int \left(x + \frac{1}{x}\right) dx$

Solución:
$\frac{x^2}{2} + L\,|x| + k$

75. $\int (x + 1)^3\,dx$

Solución:
$\frac{(x + 1)^4}{4} + k$

76. $\int \sqrt[3]{5x + 1}\, dx$

Solución:
Se aplica la integral de una función irracional.

$$\frac{3(5x + 1)\sqrt[3]{5x + 1}}{20} + k$$

77. $\int 2^{3x}\, dx$

Solución:
$\frac{2^{3x}}{3 \text{ L } 2} + k$

78. $\int 2x\sqrt[3]{x^2 - 1}\, dx$

Solución:
$\frac{3(x^2 - 1)\sqrt[3]{x^2 - 1}}{4} + k$

79. $\int e^{5x}\, dx$

Solución:
Se aplica la integral de una función exponencial.

$$\frac{e^{5x}}{5} + k$$

80. $\int \frac{5\, dx}{5x + 4}$

Solución:
Se aplica la integral de una función logarítmica.

$$\text{L } |5x + 4| + k$$

81. $\int (6x^2 - x + 2)\, dx$

Solución:
$2x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2x + k$

82. $\int x3^{x^2}\, dx$

Solución:
$\frac{3^{x^2}}{2 \text{ L } 3} + k$

83. $\int xe^{-x^2}\, dx$

Solución:
$-\frac{e^{-x^2}}{2} + k$

84. $\int \frac{2}{x + 1}\, dx$

Solución:
$2 \text{ L } |x + 1| + k$

85. $\int \left(x^3 + \frac{3}{4}x^2 - 8x + 1\right) dx$

Solución:
Se aplica la integral de una función polinómica.

$$\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{4} - 4x^2 + x + k$$

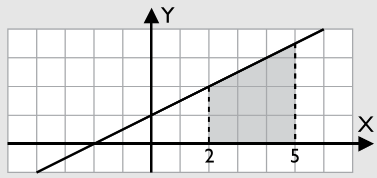
86. $\int (x + \sqrt{x})\, dx$

Solución:
$\frac{x^2}{2} + \frac{2x\sqrt{x}}{3} + k$

2. Integral definida

87. Calcula $\int_2^5 \left(\frac{x}{2} + 1\right) dx$

Solución:



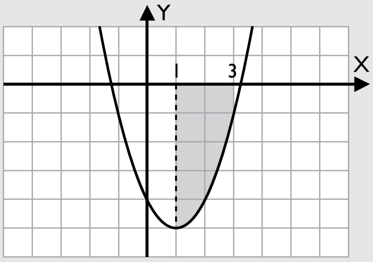
a) $F(x) = \frac{x^2}{4} + x$

b) $F(2) = 3, F(5) = \frac{45}{4}$

c) $\int_2^5 \left(\frac{x}{2} + 1\right) dx = \frac{33}{4} = 8{,}25 \text{ u}^2$

88. Calcula $\int_1^3 (x^2 - 2x - 4)\, dx$

Solución:



a) $F(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 - 4x$

b) $F(1) = -\frac{14}{3}, F(3) = -12$

c) $\int_1^3 (x^2 - 2x - 4)\, dx = -\frac{22}{3} = -7{,}33\ u^2$

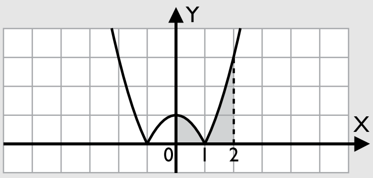
El área es negativa porque el recinto está debajo del eje X

89. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = |x^2 - 1|$

a) Esboza la gráfica de f

b) Calcula $\int_0^2 f(x)\, dx$

Solución:



$\int_0^2 |x^2 - 1|\, dx = \int_0^1 (-x^2 + 1)\, dx + \int_1^2 (x^2 - 1)\, dx$

Sea $F(x) = \int (-x^2 + 1)\, dx$

$F(x) = -\frac{x^3}{3} + x$

$F(0) = 0, F(1) = \frac{2}{3}$

$\int_0^1 (-x^2 + 1)\, dx = \frac{2}{3}\ u^2$

$G(x) = \int (x^2 - 1)\, dx$

$G(x) = \frac{x^3}{3} - x$

$G(1) = -\frac{2}{3}, G(2) = \frac{2}{3}$

$\int_1^2 (x^2 - 1)\, dx = \frac{4}{3} u^2$

$\int_0^2 |x^2 - 1|\, dx = \int_0^1 (-x^2 + 1)\, dx + \int_1^2 (x^2 - 1)\, dx = 2\ u^2$

90. Calcula $\int_0^e \left(1 + \frac{1}{x}\right) dx$

Solución:

a) $F(x) = x + L|x|$

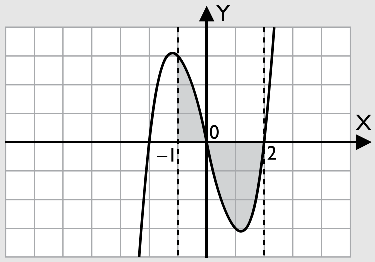
b) $F(e) = e + 1; F(1) = 1$

c) $\int_0^e \left(1 + \frac{1}{x}\right) dx = F(e) - F(1) = e$

3. Cálculo de áreas

91. Halla el área de la región plana limitada por la gráfica de $f(x) = x^3 - 4x$, el eje de abscisas y las rectas $x = -1$, $x = 2$

Solución:



Raíces: $x_1 = -2, x_2 = 0, x_3 = 2$

$\int (x^3 - 4x)\, dx = \frac{x^4}{4} - 2x^2$

$\int_{-1}^0 (x^3 - 4x)\, dx = \frac{7}{4}\ u^2$

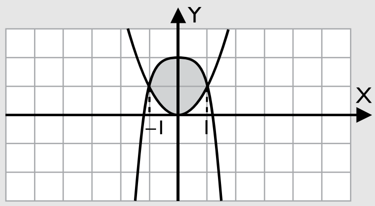
$\int_0^2 (x^3 - 4x)\, dx = -4\ u^2$

Área $= \frac{23}{4} = 5{,}75\ u^2$

92. Halla el área del recinto limitado por las gráficas de las funciones

$y = 2 - x^4 \qquad y = x^2$

Solución:



Raíces: $x_1 = -1, x_2 = 1$

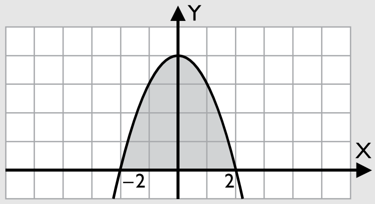
$\int (-x^4 - x^2 + 2)\, dx = -\frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3} + 2x$

$$\int_{-1}^{1} (-x^4 - x^2 + 2)\, dx = \frac{44}{15}\, u^2$$

$$\text{Área} = \frac{44}{15} = 2{,}93\, u^2$$

93. Dada la función $f(x) = 4 - x^2$, calcula el área encerrada entre la gráfica f(x) y el eje de abscisas.

Solución:



Raíces: $x_1 = -2, x_2 = 2$

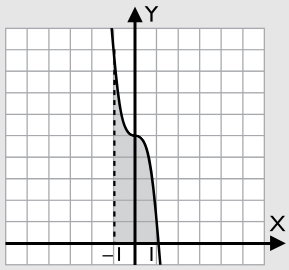
$$\int (4 - x^2)\, dx = 4x - \frac{x^3}{3}$$

$$\int_{-2}^{2} (4 - x^2)\, dx = \frac{32}{3}\, u^2$$

$$\text{Área} = \frac{32}{3} = 10{,}67\, u^2$$

94. Calcula el área de la región limitada por la gráfica de la función $f(x) = -4x^3 + 5$, el eje de abscisas, la recta $x = -1$ y la recta $x = 1$

Solución:



Raíces: $x = \frac{\sqrt[3]{10}}{2} = 1{,}08$

$$\int (-4x^3 + 5)\, dx = -x^4 + 5x$$

$$\int_{-1}^{1} (-4x^3 + 5)\, dx = 10\, u^2$$

$$\text{Área} = 10\, u^2$$

4. Aplicaciones de la integral definida

95. El caudal de un grifo viene dado por la función:

$$f(x) = 1 + 2x$$

donde **x** se mide en minutos y f(x) en litros por minuto.

a) Escribe la función que expresa la cantidad de agua que arroja el grifo al cabo de x minutos.

b) ¿Cuánta agua arroja el grifo durante la quinta hora?

Solución:

La función será:

a) $F(x) = \int (1 + 2x)\, dx = x + x^2$

$$\int_4^5 (1 + 2x)\, dx$$

b) $F(5) = 30;\ F(4) = 20$

c) $|F(5) - F(4)| = 10$

El grifo ha arrojado 10 litros.

96. La función de ingreso marginal de un producto, en millones de euros, es:

$$i(x) = 15 - 2x$$

donde **x** es el número de unidades vendidas en miles.

a) ¿Qué ingreso se obtiene por la venta de 2 000 unidades?

b) ¿Cuál es el ingreso adicional al pasar de 2 000 a 3 000 unidades vendidas?

Solución:

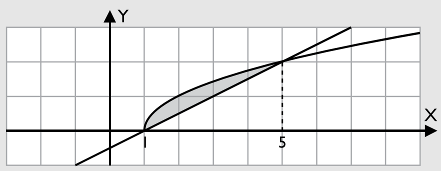
$\int_0^2 (15 - 2x)\, dx = 26$ millones de euros.

$\int_2^3 (15 - 2x)\, dx = 10$ millones de euros.

97. Dos hermanos heredan una parcela que han de repartirse. La parcela es la región plana limitada por la curva $y = \sqrt{x - 1}$ y la recta $y = \frac{1}{2}(x - 1)$

Calcula el área de la parcela.

Solución:



$$\text{Área} = \int_1^5 \left(\sqrt{x - 1} - \frac{x - 1}{2}\right) dx = \frac{4}{3} = 1{,}33\, u^2$$

Para ampliar

98. Calcula tres primitivas de la función:

$$y = x$$

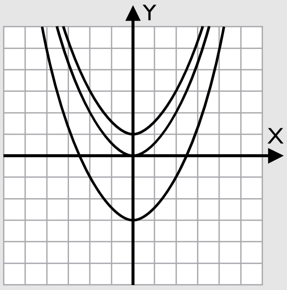
Represéntalas. ¿En qué se parecen?

Solución:

$y = \dfrac{x^2}{2}$

$y = \dfrac{x^2}{2} + 1$

$y = \dfrac{x^2}{2} - 3$



Todas las curvas tienen en común que son traslaciones verticales de la integral sin constante.

99. Dada la función:

$$y = -x + 1$$

a) calcula su integral indefinida.

b) halla la primitiva que pasa por el punto P(4, – 1)

c) dibuja la función inicial y la primitiva que se pide en el apartado anterior.

Solución:

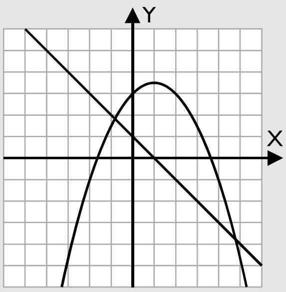
a) $\displaystyle\int (-x + 1)\,dx = -\frac{x^2}{2} + x + k$

b) $-\dfrac{4^2}{2} + 4 + k = -1$

$k = 3$

$y = -\dfrac{x^2}{2} + x + 3$

c)



100. Calcula la integral de la función:

$$f(x) = x^3 - 4x$$

Solución:

Es la integral de un polinomio.

$$\frac{x^4}{4} - 2x^2 + k$$

101. $\displaystyle\int \frac{1}{e^{2x}}\,dx$

Solución:

$\dfrac{-1}{2e^{2x}} + k$

102. $\displaystyle\int \left(\frac{1}{x} + 3x^2\right) dx$

Solución:

$L\,|x| + x^3 + k$

103. Calcula la integral de la función:

$$y = e^{x+2}$$

Solución:

Es la integral de una función exponencial.

$$e^{x+2} + k$$

104. $\displaystyle\int \left(\frac{x^3 - x + 2}{x^2}\right) dx$

Solución:

$\dfrac{x^2}{2} - L\,|x| - \dfrac{2}{x} + k$

105. $\displaystyle\int \left(x + \frac{1}{x^2}\right) dx$

Solución:

$\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{1}{x} + k$

106. Calcula la integral de la función:

$$f(x) = \sqrt{x - 1}$$

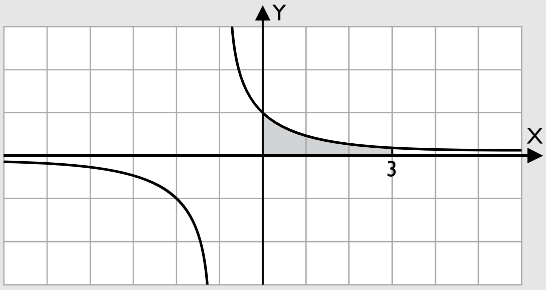
Solución:

Se aplica la integral de una función irracional.

$$\frac{2}{3}(x - 1)\sqrt{x - 1} + k$$

107. Calcula $\int_0^3 \frac{1}{x+1}\,dx$

Solución:



a) $F(x) = L\,|x+1|$

b) $F(0) = 0, F(3) = L\,4$

c) $\int_0^3 \frac{1}{x+1}\,dx = L\,4 = 1{,}39\ u^2$

108. Sea la función $f(x) = 2x^3 + bx^2 + ax - 5$

a) Halla los valores de **a** y **b,** de forma que f(x) tenga un máximo en x = 1 y un mínimo en x = 2

b) Halla el área de la región limitada por la gráfica f(x) y el eje X entre x = 0 y x = 3

Solución:

a) $f'(x) = 6x^2 + 2bx + a$

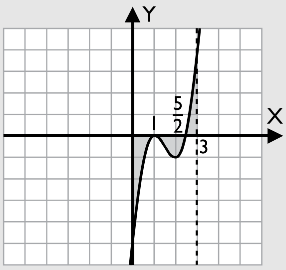
En los puntos en los que tiene el máximo y el mínimo, la primera derivada se anula.

Se obtiene el sistema:

$$\left.\begin{aligned} a + 2b + 6 &= 0 \\ a + 4b + 24 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow a = 12, b = -9$$

$y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 5$

b) Raíces: $x_1 = 1, x_2 = \frac{5}{2}$



• $F(x) = \frac{x^4}{2} - 3x^3 + 6x^2 - 5x$

• $F(0) = 0, F(1) = -\frac{3}{2}, F(5/2) = -\frac{75}{32}, F(3) = -\frac{3}{2}$

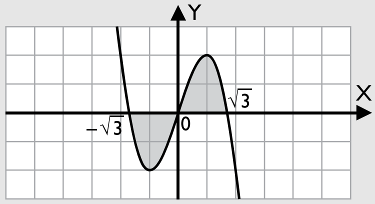
• $\text{Área} = \frac{51}{16} = 3{,}19\ u^2$

109. Sea la función $f(x) = 3x - x^3$

Halla el área de la región limitada por el eje X y dicha función.

Solución:

Raíces: $x_1 = -\sqrt{3}, x_2 = 0, x_3 = \sqrt{3}$



a) $F(x) = -\frac{x^4}{4} + \frac{3x^2}{2}$

b) $F(-\sqrt{3}) = \frac{9}{4}, F(0) = 0, F(\sqrt{3}) = \frac{9}{4}$

c) $\text{Área} = \frac{9}{2} = 4{,}5\ u^2$

110. Considera las funciones $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por:

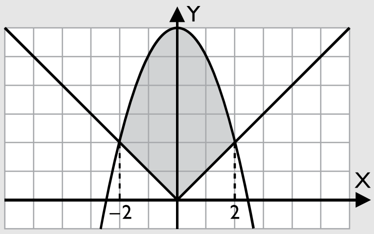
$$f(x) = 6 - x^2, \quad g(x) = |x|, \quad x \in \mathbb{R}$$

a) Dibuja el recinto limitado por las gráficas **f** y **g**

b) Calcula el área del recinto descrito en el apartado anterior.

Solución:

a) Dibujo:



b) Raíces: $x_1 = -2, x_2 = 2$

$\int_{-2}^{0} (6 - x^2 + x)\,dx = \frac{22}{3}$

$\int_{0}^{2} (6 - x^2 - x)\,dx = \frac{22}{3}$

$\text{Área} = \frac{44}{3} = 14{,}67\ u^2$

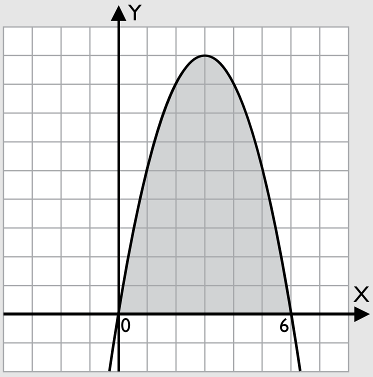
111. Calcula el valor de **a,** positivo, para que el área encerrada entre la curva $y = ax - x^2$ y el eje de abscisas sea 36. Represente la curva que se obtienen para dicho valor de **a**

Solución:

$ax - x^2 = 0 \Rightarrow x = 0, x = a$

$\int_0^a (ax - x^2)\,dx = 36 \Rightarrow a = 6$

$y = 6x - x^2$



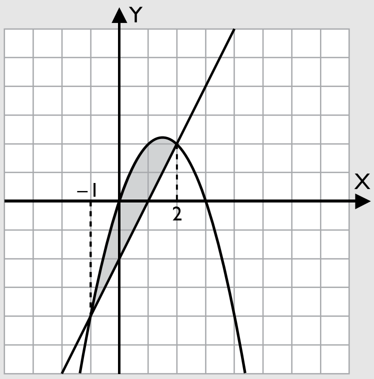
112. Resuelve las siguientes cuestiones:

a) Dibuja la región limitada por la curva de ecuación $y = x(3 - x)$ y la recta de ecuación $y = 2x - 2$

b) Halla el área de la región descrita en el apartado anterior.

Solución:

a) Gráfica:



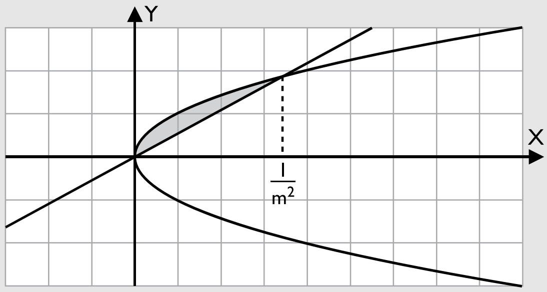
b) Raíces: $x_1 = -1, x_2 = 2$

$$\text{Área} = \int_{-1}^{2} (-x^2 + x + 2)\,dx = \frac{9}{4} = 4{,}5\ u^2$$

113. Halla los valores de **m** para que el área de la región limitada por la parábola $y^2 = x$ y la recta $y = mx$ sea 1

Solución:

Raíces: $x_1 = 0, x_2 = \dfrac{1}{m^2}$

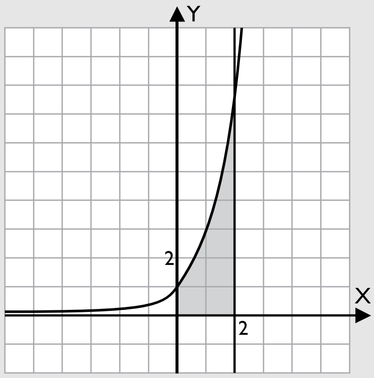


$$\int_0^{1/m^2} \left(\sqrt{x} - mx\right) = 1$$

$$m = \frac{\sqrt[3]{6^2}}{6}$$

114. Calcula el área de la región limitada por la curva $y = e^x$ y las rectas $x = 0$ y $x = 2$

Solución:



a) $\int e^x\,dx = e^x$

b) $F(2) = e^2$; $F(0) = 1$

c) $\text{Área} = \int_0^2 e^x\,dx = |F(2) - F(0)| = e^2 - 1\ u^2$

115. Halla el valor del parámetro **a** sabiendo que el área limitada por la gráfica de la parábola $y = x^2 - ax$ y el eje X es $\dfrac{32}{3}$

Solución:

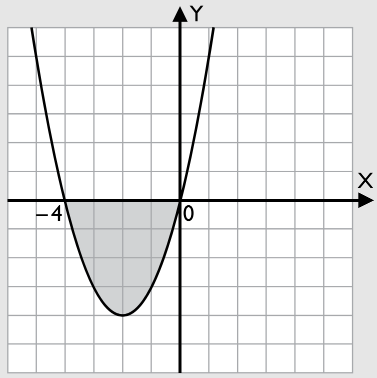
$x^2 - ax = 0 \Rightarrow x = 0, x = a$

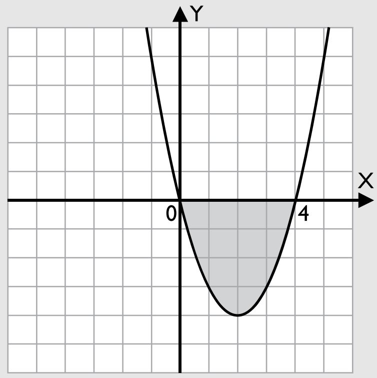
$$\left|\int_a^0 (x^2 - ax)\,dx\right| = \frac{32}{3}$$

$|a^3| = 64$

$a = 4$

$a = -4$





Problemas

116. Calcula tres primitivas de la función:

$$y = -x$$

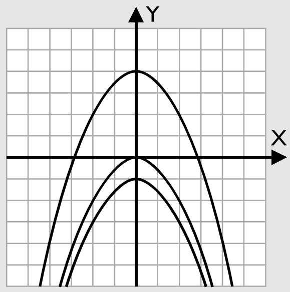
Represéntalas. ¿En qué se parecen?

Solución:

$y = -\dfrac{x^2}{2}$

$y = -\dfrac{x^2}{2} + 3$

$y = -\dfrac{x^2}{2} - 1$



Todas las curvas tienen en común que son traslaciones verticales de la integral sin constante.

117. Dada la función: $y = e^x$

a) calcula su integral indefinida.

b) halla la primitiva que pasa por el punto P(1, 1)

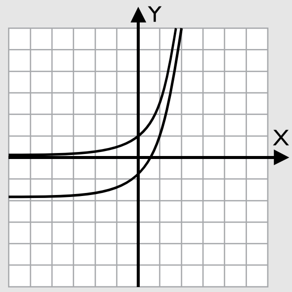
c) dibuja la función inicial y la primitiva que se pide en el apartado anterior.

Solución:

a) $\int e^x\,dx = e^x + k$

b) $e^1 + k = 1 \Rightarrow k = 1 - e \Rightarrow y = e^x + 1 - e$

c)



118. Calcula la integral de la función:

$$f(x) = x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x$$

Solución:

Es la integral de un polinomio.

$$\frac{x^5}{5} - x^4 + \frac{x^3}{3} + 3x^2 + k$$

119. Calcula la integral de la función:

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x}$$

Solución:

Se aplica el método de integración de funciones racionales.

La descomposición es:

$$x - 3 + \frac{2}{x}$$

La integral es:

$$\frac{x^2}{2} - 3x + 2\,L\,|x| + k$$

120. Calcula la integral de la función:

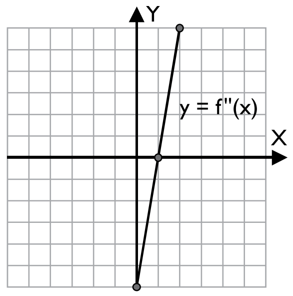
$$y = e^{-x}$$

Solución:

Es la integral de una función exponencial.

$$-e^{-x} + k$$

121. La recta que pasa por los puntos $(0, -6)$ y $(1, 0)$ (observa el dibujo) es la gráfica de la función derivada segunda f" de una cierta función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Se sabe que el origen pertenece a la curva $y = f(x)$ y que en ese punto la recta tangente tiene pendiente igual a 3. Determina una expresión de la función f



Solución:

$f''(x) = 6x - 6$

$f'(x) = 3x^2 - 6x + k_1$

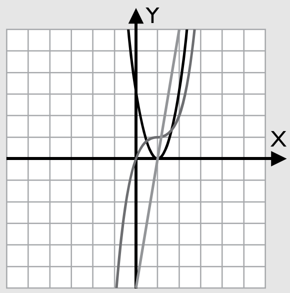
$f'(0) = 3 \Rightarrow k_1 = 3$

$f'(x) = 3x^2 - 6x + 3$

$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + k_2$

$f(0) = 0 \Rightarrow k_2 = 0$

$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$



122. Se considera la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$$

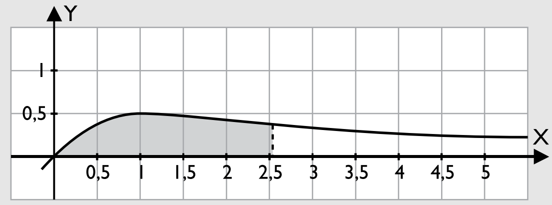
Calcula el valor de $a > 0$ para el cual se verifica la igualdad $\int_0^a f(x)\,dx = 1$

Solución:

$$\int_0^a \frac{x}{x^2 + 1}\,dx = \frac{1}{2} L\,(a^2 + 1)$$

Se resuelve la ecuación y se toma $a > 0$:

$$\frac{1}{2} L\,(a^2 + 1) = 1 \Rightarrow a = \sqrt{e^2 - 1}$$

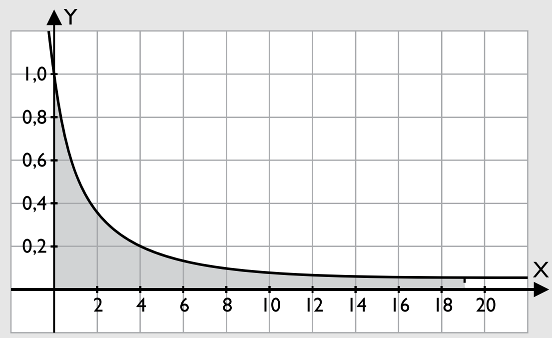


123. Calcula el valor de $a > 0$ para que $\int_0^a \frac{1}{x + 1}\,dx = 3$

Solución:

$$\int_0^a \frac{dx}{x + 1} = L\,(a + 1)$$

$$L\,(a + 1) = 3 \Rightarrow a = e^3 - 1$$



124. Se consideran las funciones $f(x) = x^2 - 2x + 3$, $g(x) = ax^2 + b$

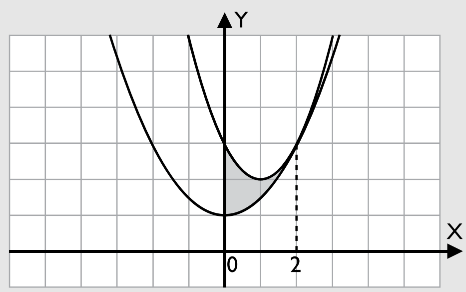
a) Calcula **a** y **b** para que las gráficas f(x) y g(x) sean tangentes en el punto de abscisa $x = 2$

b) Para los mismos valores de **a** y **b,** halla el área limitada por las gráficas de las funciones y el eje vertical Y

Solución:

a) $a = \frac{1}{2}, b = 1$

b) Área:



$$\int_0^2 \frac{x^2 - 4x + 4}{2}\,dx = \frac{4}{3} = 1{,}33\ u^2$$

125. Sean las funciones $f(x) = x^2 + ax + b$, $g(x) = -x^2 + c$

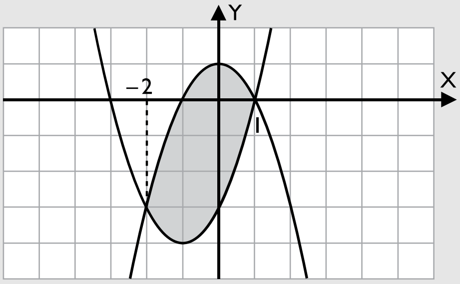
a) Determínense **a, b** y **c** sabiendo que las gráficas de ambas funciones se cortan en los puntos $(-2, -3)$ y $(1, 0)$

b) Calcula el área de la región limitada por las gráficas $f(x)$ y $g(x)$

Solución:

a) $f(x) = x^2 + 2x - 3, g(x) = -x^2 + 1$

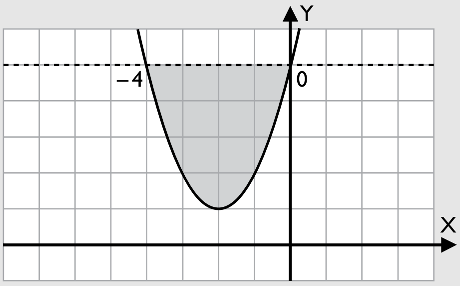
b) Área:



$$\text{Área} = \int_{-2}^{1} (-2x^2 - 2x + 4)\,dx = 9\ u^2$$

126. Halla el área del recinto delimitado por la curva $y = x^2 + 4x + 5$ y la recta $y = 5$

Solución:

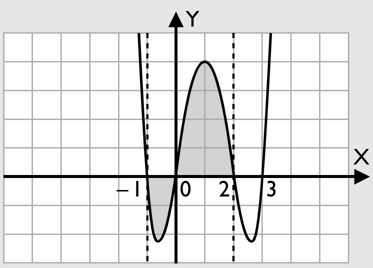


$$\text{Área} = \int_{-4}^{0} (-x^2 - 4x)\,dx = \frac{32}{3} = 10{,}67\ u^2$$

127. Sea la función $f(x) = x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x$

Calcula el área determinada por la gráfica $f(x)$, el eje horizontal y las rectas $x = -1$ y $x = 2$

Solución:



Raíces: $x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 2, x_4 = 3$

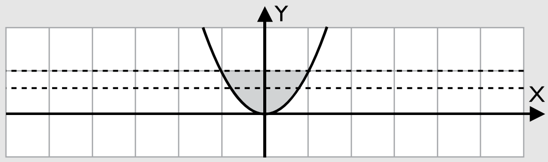
a) $F(x) = \dfrac{x^5}{5} - x^4 + \dfrac{x^3}{3} + 3x^2$

b) $F(-1) = \dfrac{22}{15}, F(0) = 0, F(2) = \dfrac{76}{15}$

c) $\text{Área} = \dfrac{98}{15} = 6{,}53\ u^2$

128. Se quiere dividir la región plana encerrada entre la parábola $y = x^2$ y la recta $y = 1$ en dos regiones de igual área mediante una recta $y = a$. Halla el valor de **a**

Solución:



Aplicando el cálculo integral, se tiene:

$$\int_{-1}^{1} (1 - x^2)\,dx = \frac{4}{3}\ u^2$$

Si $y = a, y = x^2$

$x^2 = a \Rightarrow x_1 = -\sqrt{a}, x_2 = \sqrt{a}$

La mitad de $\dfrac{4}{3}$ es $\dfrac{2}{3}$

$$\int_{0}^{\sqrt{a}} (a - x^2)\,dx = \frac{1}{3}$$

$$\frac{2a\sqrt{a}}{3} = \frac{1}{3} \Rightarrow a = \frac{\sqrt[3]{2}}{2}$$

129. Resuelve las siguientes cuestiones:

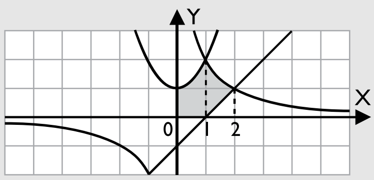
a) Dibuja el recinto limitado por los semiejes positivos de coordenadas y las curvas:

$$y = x^2 + 1, y = \frac{2}{x} \text{ e } y = x - 1$$

b) Halla el área del recinto considerado en el apartado anterior.

Solución:

a) Recinto:



b) Área del recinto.

$$\int_{0}^{1} (x^2 + 1)\,dx = \frac{4}{3}$$

$$\int_1^2 \left(\frac{2}{x} - x + 1 \right) dx = -\frac{1}{2} + L\,4$$

$$\text{Área} = \frac{5}{6} + L\,4 = 2{,}22 \text{ u}^2$$

130. Resuelve las siguientes cuestiones:

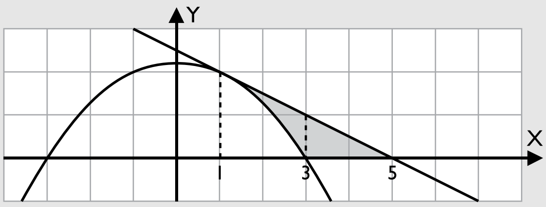
a) Dibuja el recinto limitado por la curva $y = \frac{9 - x^2}{4}$, la recta tangente a esta curva en el punto de abscisa $x = 1$ y el eje de abscisas.

b) Calcula el área del recinto considerado en el apartado anterior.

Solución:

a) Recta tangente:

$$y = \frac{5 - x}{2}$$



b) Área del recinto.

$$\int_1^3 \left(\frac{5 - x}{2} - \frac{9 - x^2}{4} \right) dx = \frac{2}{3}$$

$$\int_3^5 \frac{5 - x}{2}\, dx = 1$$

$$\text{Área} = \frac{5}{3} = 1{,}67 \text{ u}^2$$

131. De la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

se sabe que tiene un máximo relativo en $x = 1$, un punto de inflexión en $(0, 0)$ y que: $\int_0^1 f(x)\, dx = \frac{5}{4}$

Calcula **a, b, c** y **d**

Solución:

Si tiene un máximo relativo en $x = 1$, la primera derivada se anula para $x = 1$

$$3a + 2b + c = 0$$

Si tiene un punto de inflexión en $(0, 0)$, pasa por ese punto; por tanto, $d = 0$ y la segunda derivada se anula en $x = 0$

$$b = 0$$

De donde se obtiene: $c = -3a$

La función es:

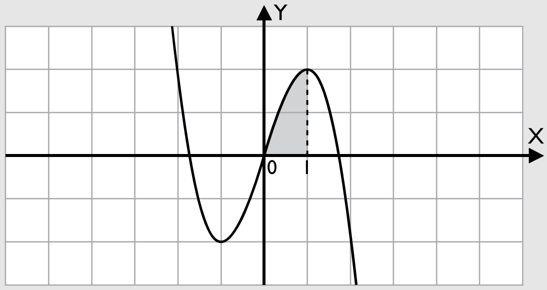
$f(x) = ax^3 - 3ax$

$$\int_0^1 (ax^3 - 3ax)\, dx = \frac{5}{4}$$

$$-\frac{5a}{4} = \frac{5}{4}$$

$a = -1$

$f(x) = -x^3 + 3x$



Para profundizar

132. La recta de ecuación $3x - y + 2 = 0$ es tangente a la parábola de ecuación $y = ax^2 + c$ en el punto $P(1, 5)$

a) Calcula las constantes **a** y **c** de la ecuación de la parábola describiendo el procedimiento que sigas.

b) Dibuja la región plana limitada por el eje Y, la parábola y la recta tangente.

c) Calcula el área de la región descrita en el apartado anterior.

Solución:

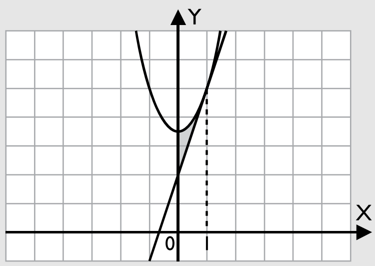
a) La pendiente de la recta es $m = 3$

La derivada de la parábola es $y' = 2ax$

Por tanto, para $x = 1 \Rightarrow 2a = 3 \Rightarrow a = \frac{3}{2}$

Si la parábola pasa por el punto $P(1, 5)$, se deduce que $c = \frac{7}{2}$

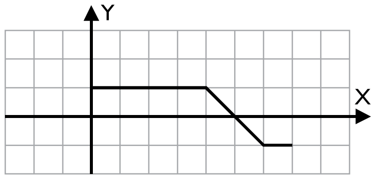
b) Dibujo:



c) $$\int_0^1 \left(\frac{3x^2}{2} + \frac{7}{2} - 3x - 2 \right) dx = \frac{1}{2}$$

$$\text{Área} = \frac{1}{2} = 0{,}5 \text{ u}^2$$

133. La figura siguiente representa la gráfica de una función $f : [0, 7] \rightarrow \mathbb{R}$



Sea $F : [0, 7] \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por:

$$F(x) = \int_0^x f(t)\, dt$$

a) Calcula F(4) y F(7)

b) Dibuja la gráfica F(x) explicando cómo lo haces.

Solución:

a) F(4) es el área comprendida entre el eje X y la función en el intervalo [0, 4], F(4) = 4 u^2

F(7) se obtiene como F(4), pero hay media unidad más positiva y una y media negativa, F(7) = 3 u^2

La fórmula de F(x) es:

- En el intervalo [0, 4] es:

$$f(t) = 1 \Rightarrow F(x) = x$$

- En el intervalo [4, 6] es:

$$f(t) = -x + 5 \Rightarrow F(x) = -\frac{x^2}{2} + 5x + k_1$$

con la condición de que debe pasar por el punto P(4, 4). De donde se obtiene que $k_1 = -8$

$$F(x) = -\frac{x^2}{2} + 5x - 8$$

- En el intervalo [6, 7] es:

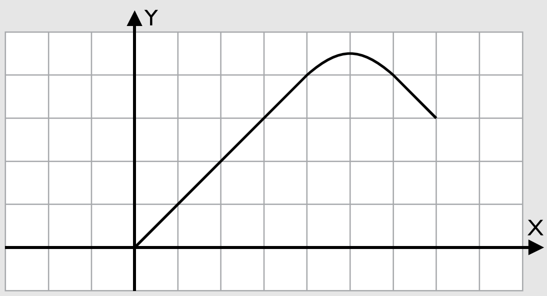
$$f(t) = -1 \Rightarrow F(x) = -x + k_2$$

con la condición de que debe pasar por el punto P(6, 4). De donde se obtiene que $k_2 = 10$

$$F(x) = -x + 10$$

$$F(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \le x \le 4 \\ -\dfrac{x^2}{2} + 5x - 8 & \text{si } 4 < x < 6 \\ -x + 10 & \text{si } 6 \le x \le 7 \end{cases}$$

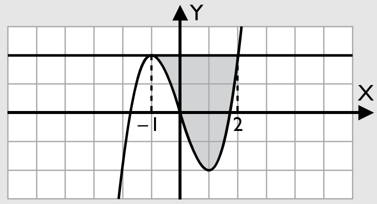
b)



134. Halla la recta tangente a la curva de ecuación $y = x^3 - 3x$ en el punto de abscisa x = –1

Dibuja el recinto limitado por dicha recta tangente y la curva dada, y calcula su área.

Solución:



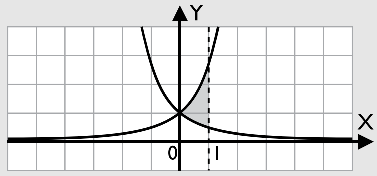
La recta tangente en el punto de abscisa x = –1 es y = 2

$$\int_{-1}^{2} (2 - x^3 + 3x)\, dx = \frac{27}{4}$$

$$\text{Área} = \frac{27}{4} = 6{,}75 \text{ u}^2$$

135. Calcula el área de la región limitada por las curvas $y = e^x$, $y = e^{-x}$ y la recta x = 1

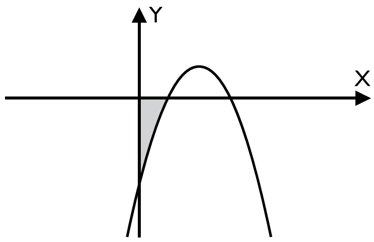
Solución:



$$\int_0^1 (e^x - e^{-x})\, dx = e + \frac{1}{e} - 2$$

$$\text{Área} = e + \frac{1}{e} - 2 = 1{,}09 \text{ u}^2$$

136. En la figura aparece una curva que representa una función polinómica de grado 2. Los puntos de intersección de la curva con el eje X son el A(1, 0) y el B(3, 0). Además, el área limitada por la curva y los dos ejes coordenados vale 4/3. Halla la expresión de dicha función.



Solución:

$f(x) = a(x - 1)(x - 3)$

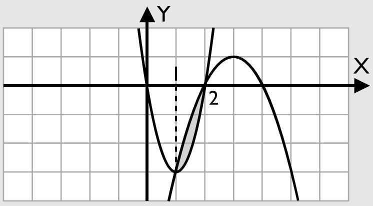
$f(x) = a(x^2 - 4x + 3)$

$$a\int_0^1 (x^2 - 4x + 3)\, dx = -\frac{4}{3} \Rightarrow a = -1$$

$f(x) = -x^2 + 4x - 3$

137. Dibujar con la mayor exactitud posible las gráficas de las funciones $f(x) = 3x^2 - 6x$ y $g(x) = -x^2 + 6x - 8$. Representa el recinto limitado por ambas funciones y obtén su área.

Solución:



Raíces: $x_1 = 1, x_2 = 2$

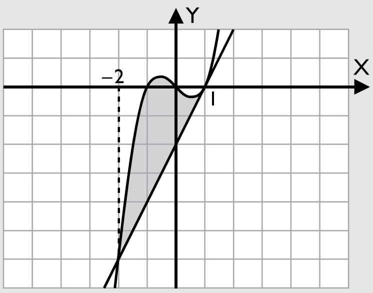
$$\int_1^2 (-4x^2 + 12x - 8)\,dx = \frac{2}{3}$$

$$\text{Área} = \frac{2}{3} = 0{,}67\ u^2$$

138. Representa gráficamente el recinto plano limitado por la curva $y = x^3 - x$ y su recta tangente en el punto de abscisa $x = 1$. Calcula su área.

Solución:

La ecuación de la recta tangente en el punto P(1, 0) es: $y = 2x - 2$

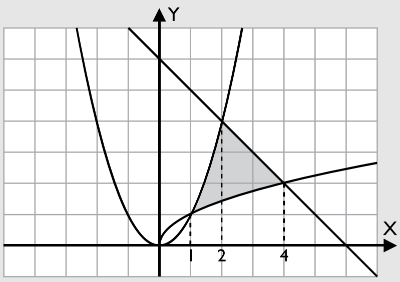


$$\int_{-2}^1 (x^3 - 3x + 2)\,dx = \frac{27}{4}$$

$$\text{Área} = \frac{27}{4} = 6{,}75\ u^2$$

139. Determina el área comprendida entre las curvas $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$ y la recta que pasa por los puntos A(2, 4) y B(4, 2)

Solución:



Raíces: $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 4$

$$\int_1^2 \left(x^2 - \sqrt{x}\right)dx = 3 - \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

$$\int_2^4 \left(6 - x - \sqrt{x}\right)dx = \frac{4\sqrt{2}}{3} + \frac{2}{3}$$

$$\text{Área} = \frac{11}{3} = 3{,}67\ u^2$$

140. Calcula el valor de $a > 0$ para que:

$$\int_0^3 \frac{1}{x + a}\,dx = 5$$

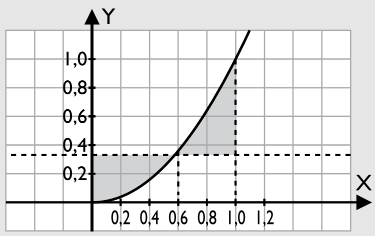
Solución:

$$\int_0^3 \frac{1}{x + a}\,dx = L\,(3 + a) - L\,a = L\,\frac{3 + a}{a}$$

$$L\,\frac{3 + a}{a} = 5 \Rightarrow \frac{3 + a}{a} = e^5 \Rightarrow a = \frac{3}{e^5 - 1}$$

141. Se consideran las curvas $y = x^2$ e $y = a$, donde **a** es un número real comprendido entre 0 y 1 $(0 < a < 1)$. Ambas curvas se cortan en el punto (x_0, y_0) con abscisa positiva. Halla **a** sabiendo que el área encerrada entre ambas curvas desde $x = 0$ hasta $x = x_0$ es igual a la encerrada entre ellas desde $x = x_0$ hasta $x = 1$

Solución:



Al punto (x_0, y_0) se le puede llamar $\left(\sqrt{a}, a\right)$

$$\int_0^{\sqrt{a}} (a - x^2)\,dx = \int_{\sqrt{a}}^1 (x^2 - a)\,dx$$

$$\frac{2}{3}a\sqrt{a} = \frac{2}{3}a\sqrt{a} - a + \frac{1}{3}$$

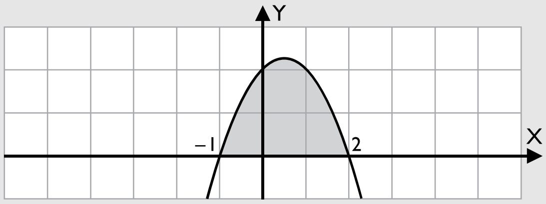
$$a = \frac{1}{3}$$

142. Considera la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = 2 + x - x^2$$

Calcula **a,** $a < 2$, de forma que $\displaystyle\int_a^2 f(x)\,dx = \frac{9}{2}$

Solución:



$$\int_a^2 (2 + x + x^2)\,dx = \frac{9}{2}$$

$$\frac{a^3}{3} - \frac{a^2}{2} - 2a + \frac{10}{3} = \frac{9}{2} \Rightarrow a = -1, a = \frac{7}{2}$$

El valor $a < 2$ es $a = -1$

143. De la gráfica de la función polinómica $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por:

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

se conocen los siguientes datos: que pasa por el origen de coordenadas y que en los puntos de abscisas 1 y –3 tiene tangentes paralelas a la bisectriz del segundo y cuarto cuadrantes.

a) Calcula **a, b** y **c**

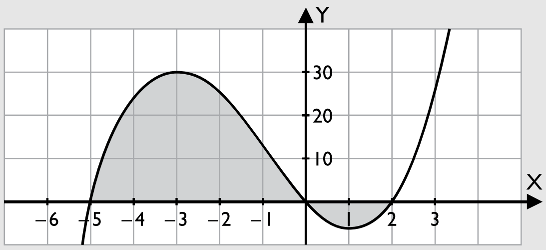
b) Dibuja el recinto limitado por la gráfica de la función f(x) y el eje de abscisas, y calcula su área.

Solución:

a) $a = 3, b = -10, c = 0$

$f(x) = x^3 + 3x^2 - 10x$

b) Dibujo:



Raíces: $x_1 = -5, x_2 = 0, x_3 = 2$

$$F(x) = \frac{x^4}{4} + x^3 - 5x^2$$

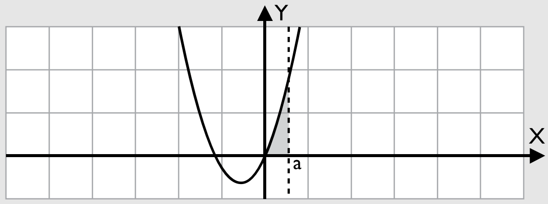
$$F(-5) = -\frac{375}{4}, F(0) = 0, F(2) = -8$$

$$\text{Área} = \frac{407}{4} = 101{,}75 \text{ u}^2$$

144. Determina una constante positiva **a** sabiendo que la figura plana limitada por la parábola $y = 3ax^2 + 2x$, la recta $y = 0$ y la recta $x = a$ tiene área $(a^2 - 1)^2$

Solución:

La parábola pasa por el origen de coordenadas.



$$\int_0^a (3ax^2 + 2x)\,dx = a^4 + a^2$$

Por tanto:

$a^4 + a^2 = (a^2 - 1)^2$

Resolviendo esta ecuación, se obtiene:

$$a = \frac{\sqrt{3}}{3}, a = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Solo se toma el resultado positivo, como indica el enunciado del problema.

Paso a paso

145. Calcula la siguiente integral indefinida:

$$\int (e^{5x} + x^2)\, dx$$

Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

146. Calcula la integral:

$$F(x) = \int (2x - 5)\, dx$$

Halla la primitiva que pase por el punto P(4, 3).

Representa la primitiva obtenida para comprobar que pasa por dicho punto.

Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

147. Dibuja y calcula el área del recinto limitado por el eje X y la función $f(x) = x^2 - 2x - 3$ en el intervalo [1, 4]

Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

148. **Internet.** Abre: **www.editorial-bruno.es** y elige **Matemáticas, curso** y **tema.**

Practica

149. $\int (x^3 - 6x^2 + 1)\, dx$

Solución:

Ejercicio 149

$$\int (x^3 - 6x^2 + 1)\, dx \rightarrow \frac{1}{4} \cdot x^4 - 2 \cdot x^3 + x$$

150. $\int \frac{5}{x^3}\, dx$

Solución:

Ejercicio 150

$$\int \frac{5}{x^3}\, dx \rightarrow \frac{-5}{2 \cdot x^2}$$

151. $\int \frac{1}{(3x + 5)^2}\, dx$

Solución:

Ejercicio151

$$\int \frac{1}{(3x + 5)^2}\, dx \rightarrow \frac{-1}{9 \cdot x + 15}$$

152. $\int 5 \cdot 7^{5x}\, dx$

Solución:

Ejercicio 152

$$\int 5 \cdot 7^{5x}\, dx \rightarrow \frac{7^{5 \cdot x}}{\ln(7)}$$

153. $\int \frac{1}{(x + 3)^2}\, dx$

Solución:

Ejercicio 153

$$\int \frac{2}{(x + 3)^2}\, dx \rightarrow \frac{-2}{x + 3}$$

154. $\int (e^{x/5} + x^2)\, dx$

Solución:

Ejercicio 154

$$\int \left(e^{\frac{x}{5}} + x^2\right) dx \rightarrow 5 \cdot e^{\frac{x}{5}} + \frac{x^3}{3}$$

155. Calcula la integral: $F(x) = \int (3x^2 - 4x - 1)\, dx$

Halla la primitiva que pase por el punto P(2, 1). Representa la primitiva obtenida para comprobar que pasa por dicho punto.

Solución:

Ejercicio 155

$f(x) = 3x^2 - 4x - 1 \rightarrow x \mapsto 3 \cdot x^2 - 4 \cdot x - 1$

$F(x) = \int f(x)\, dx \rightarrow x \mapsto x^3 - 2 \cdot x^2 - x$

P = punto(2, 1) → (2,1)

Sustituimos el punto P(2, 1)

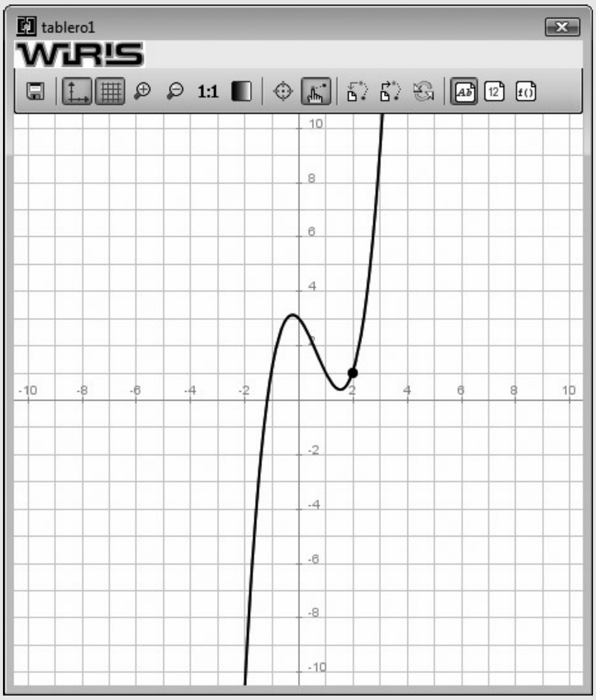
resolver(F(2) + k = 1) → {{k=3}}

La función es :

$F(x) = F(x) + 3 \rightarrow x \mapsto x^3 - 2 \cdot x^2 - x + 3$

dibujar(F(x), {color=negro, anchura_linea=2})

dibujar(P, {color = negro, tamaño_punto = 8})



156. Dibuja el recinto correspondiente y calcula la siguiente integral definida.

$$\int_2^5 (x - 1)\, dx$$

Observa y justifica el signo del valor obtenido.

Solución:

Problema 156

$f(x) = x - 1 \rightarrow x \mapsto x - 1$

dibujar(x = 2, {color = negro, anchura_linea = 2})

dibujar(x = 5, {color = negro, anchura_linea = 2})

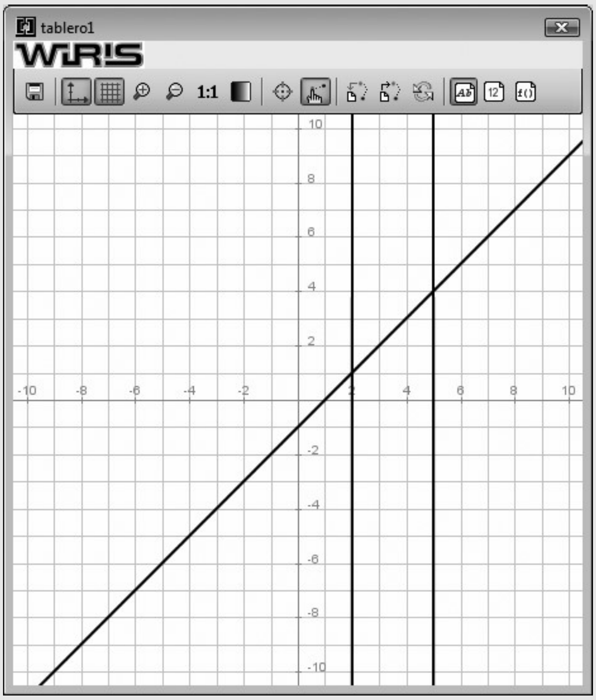
dibujar(f(x), {color = negro, anchura_linea = 2})

resolver(f(x) = 0) → {{x=1}}

Hay una sola región en el intervalo [2, 5]

$\int_2^5 f(x)\, dx \rightarrow \frac{15}{2}$

El signo es positivo porque la región está encima del eje X



157. Dibuja el recinto correspondiente y calcula la siguiente integral definida.

$$\int_1^4 (x^2 - 6x + 4)\, dx$$

Observa y justifica el signo del valor obtenido.

Solución:

Problema 157

$f(x) = x^2 - 6x + 4 \rightarrow x \mapsto x^2 - 6 \cdot x + 4$

dibujar(x = 1, {color = negro, anchura_linea = 2})

dibujar(x = 4, {color = negro, anchura_linea = 2})

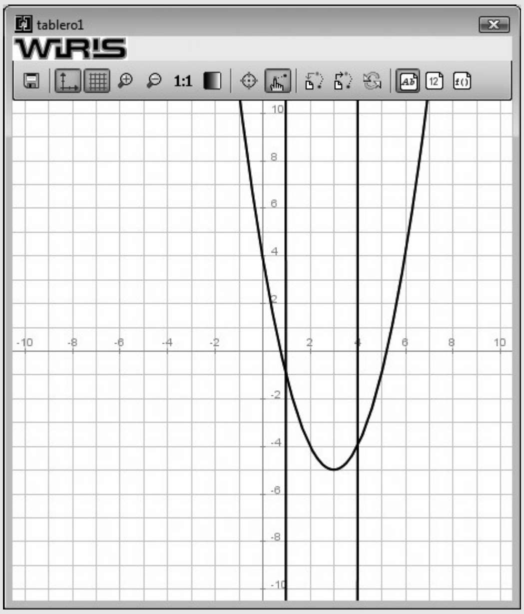
dibujar(f(x), {color = negro, anchura_linea = 2})

resolver(f(x) = 0) → $\{\{x=-\sqrt{5}+3\}, \{x=\sqrt{5}+3\}\}$

Hay una sola región en el intervalo [1, 4]

$\int_1^4 f(x)\, dx \rightarrow -12$

El signo es negativo porque la región está debajo del eje X

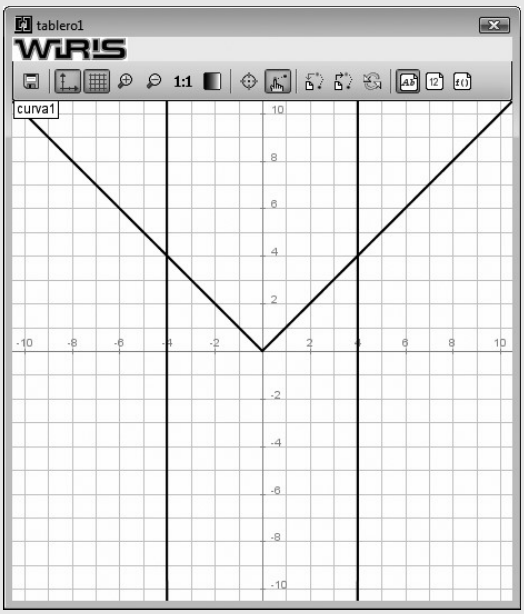


158. Dibuja el recinto correspondiente y calcula la siguiente integral definida.

$$\int_{-4}^{4} |x|\, dx$$

Solución:

Problema 158
f(x) = |x| ➞ x↦|x|
dibujar(x = −4, {color = negro, anchura_linea = 2})
dibujar(x = 4, {color = negro, anchura_linea = 2})
dibujar(f(x), {color = negro, anchura_linea = 2})
$\int_{-4}^{4} f(x)\, dx \rightarrow 16$

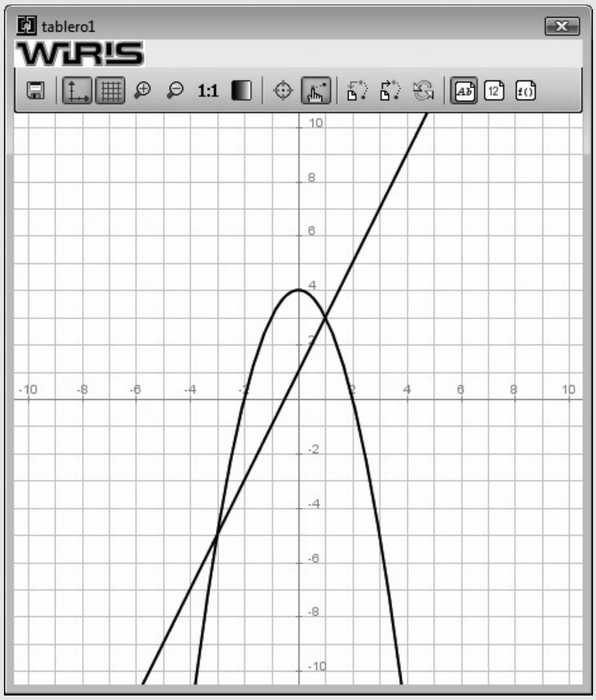


159. Dibuja el recinto limitado por las siguientes funciones y calcula su área.

$f(x) = 4 - x^2$ $\qquad$ $g(x) = 2x + 1$

Solución:

Problema 159
$f(x) = 4 - x^2 \rightarrow x \mapsto -x^2+4$
$g(x) = 2x + 1 \rightarrow x \mapsto 2\cdot x+1$
dibujar(f(x), {color = negro, anchura_linea = 2})
dibujar(g(x), {color = negro, anchura_linea = 2})
resolver(f(x) = g(x)) ➞ {{x=−3}, {x=1}}
$\int_{-3}^{1} (f(x) - g(x))\, dx \rightarrow \frac{32}{3}$
Área = $\frac{32}{3}$ u^2



160. Dibuja y calcula el área del recinto limitado por el eje X y la función:

$$f(x) = -x^3 + x^2 + 2x$$

Solución:

Problema 160

$f(x) = -x^3 + x^2 + 2x \Rightarrow x \mapsto -x^3 + x^2 + 2 \cdot x$

dibujar(f(x), {color = negro, anchura_linea = 2})

dibujar(y = 0, {color = negro, anchura_linea = 2})

resolver(f(x) = 0) ⇒ {{x=−1}, {x=0}, {x=2}}

Hay dos regiones en los intervalos [−1, 0] y [0, 2]

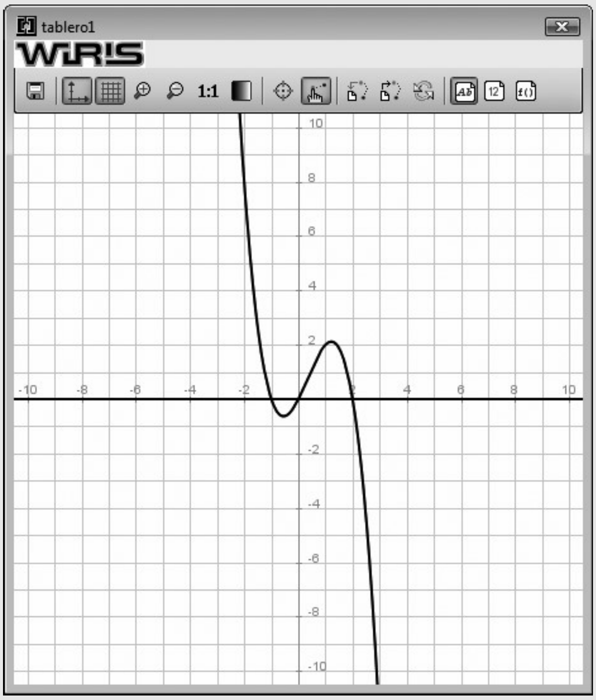
$$\int_{-1}^{0} f(x)\,dx \Rightarrow -\frac{5}{12}$$

$$\int_{0}^{2} f(x)\,dx \Rightarrow \frac{8}{3}$$

$$\left|-\frac{5}{12}\right| + \left|\frac{8}{3}\right| \Rightarrow \frac{37}{12}$$

$$\frac{37.}{12} \Rightarrow 3.0833$$

$$\text{Área} = \frac{37}{12}\,u^2 = 3{,}08\,u^2$$



161. Una fábrica produce chips para ordenadores. La función de ingreso marginal viene dada por:

$$i(x) = 3 + \frac{2}{x + 1}$$

donde **x** es el número de chips vendidos e **i(x)** viene dado en euros. Si vende 10 000 unidades, ¿cuáles son los ingresos obtenidos?

Dibuja la región correspondiente a los ingresos obtenidos.

Solución:

Problema 161

$i(x) = 3 + \frac{2}{x+1} \Rightarrow x \mapsto \frac{3 \cdot x + 5}{x + 1}$

tablero{centro = punto(5000, 1), anchura = 11000, altura = 6}

dibujar(x = 0, {color = negro, anchura_linea = 2})

dibujar(x = 10000, {color = negro, anchura_linea = 2})

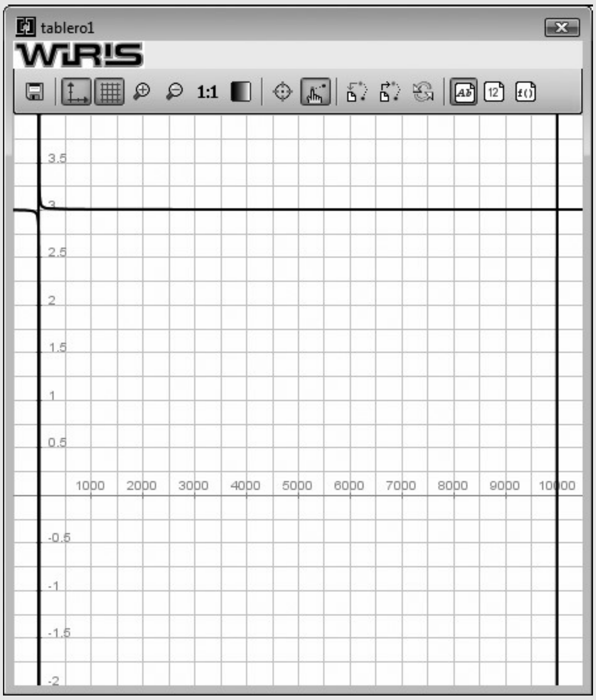
dibujar(i(x), {color = negro, anchura_linea = 2})

resolver(f(x) = 0) ⇒ {□}

Hay una única región en el intervalo [0, 12]

$$\int_{0}^{10000} i(x)\,dx \Rightarrow 30018.$$

Ingresos = 30018 €



162. Calcula el área encerrada por las funciones:

$$f(x) = x^3 + 3x^2,\ g(x) = x + 3$$

Solución:

Problema 162

$f(x) = x^3 + 3x^2 \Rightarrow x \mapsto x^3 + 3 \cdot x^2$

$g(x) = x + 3 \Rightarrow x \mapsto x + 3$

resolver(f(x) = g(x)) $\Rightarrow$ {{x=−3}, {x=−1}, {x=1}}

dibujar(f(x), {color = negro, anchura_linea = 2})

dibujar(g(x), {color = negro, anchura_linea = 2})

dibujar(x = −3, {color = negro, anchura_linea = 2})

dibujar(x = −1, {color = negro, anchura_linea = 2})

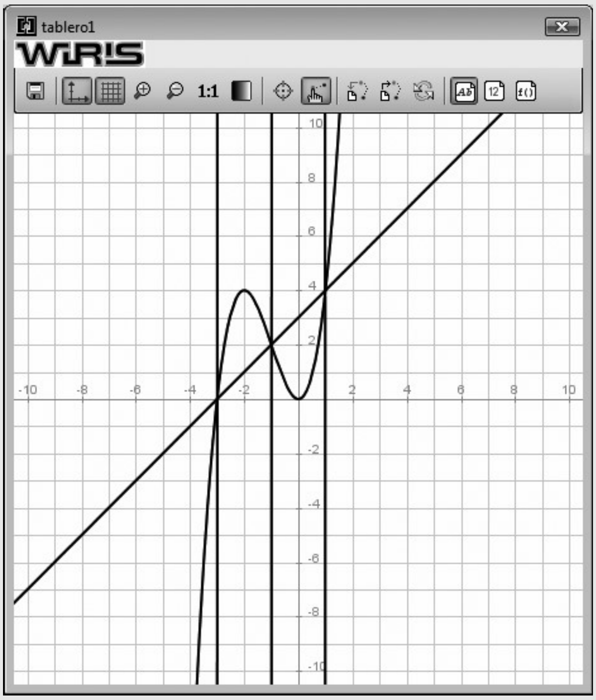
dibujar(x = 1, {color = negro, anchura_linea = 2})

$$\int_{-3}^{-1} (f(x) - g(x))\,dx \Rightarrow 4$$

$$\int_{-1}^{1} (f(x) - g(x))\,dx \Rightarrow -4$$

Área = |4| + |−4| $\Rightarrow$ 8

Área= 8 u^2



163. En una ciudad de 500 000 habitantes, se estima que la velocidad de enfermos por día que hay en una epidemia de gripe sigue la función:

$$f(x) = 2x + 20$$

donde **x** se mide en días y f(x) en miles de personas cada día.

Calcula el número de personas que enfermarán entre el segundo día y el quinto día.

Solución:

Problema 163

$f(x) = 2x + 20 \Rightarrow x \mapsto 2 \cdot x + 20$

resolver(f(x) = 0) $\Rightarrow$ {{x=−10}}

tablero{centro = punto(2.5, 15), anchura = 6, altura = 40}

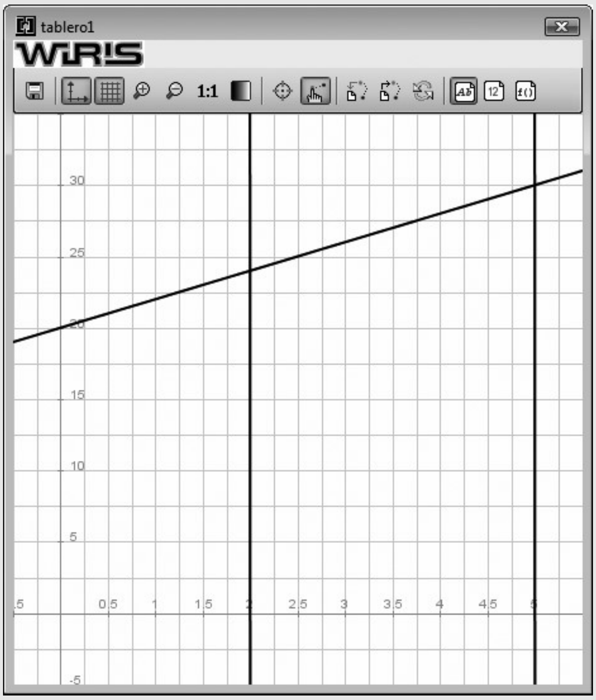
dibujar(f(x), {color = negro, anchura_linea = 2})

dibujar(x = 2, {color = negro, anchura_linea = 2})

dibujar(x = 5, {color = negro, anchura_linea = 2})

$$\int_{2}^{5} f(x)\,dx \Rightarrow 81$$

Habrá en total 81000 enfermos.



164. El ritmo de crecimiento de una determinada población de peces viene dado por la función:

$$f(x) = -x^2 + 2x + 8$$

donde **x** se mide en meses y f(x) en miles de peces por cada mes.

Calcula el crecimiento de peces en los tres primeros meses.

Solución:

Problema 164

$f(x) = -x^2 + 2x + 8 \Rightarrow x \mapsto -x^2+2\cdot x+8$

resolver(f(x) = 0) ⇒ {{x=−2}, {x=4}}

tablero{centro = punto(1.5, 5), anchura = 4, altura = 12}

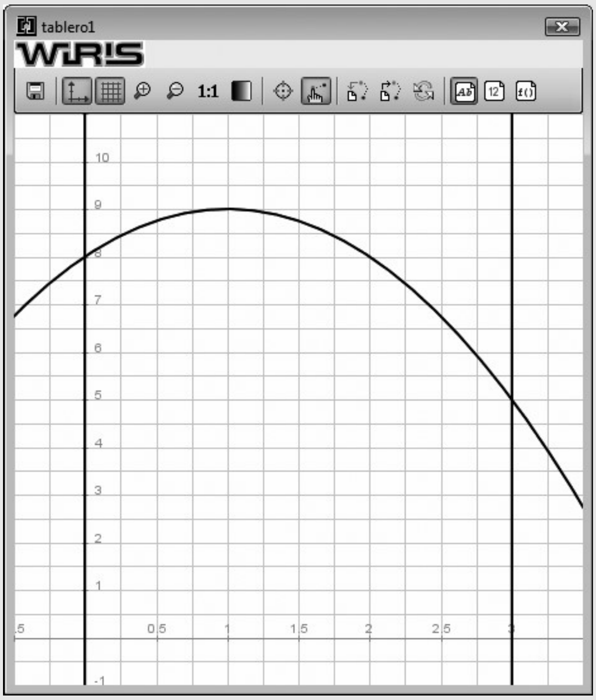
dibujar(f(x), {color = negro, anchura_linea = 2})

dibujar(x = 0, {color = negro, anchura_linea = 2})

dibujar(x = 3, {color = negro, anchura_linea = 2})

$\int_0^3 f(x)\,dx \Rightarrow 24$

La población ha crecido en 24000 peces.



165. Se estima que el ritmo de crecimiento de un feto durante el embarazo viene dado por la función:

$$f(x) = -\frac{x^2}{200} + \frac{x}{5}$$

donde **x** se mide en semanas y f(x) en centímetros por semana. Calcula cuánto ha crecido el feto en las 30 primeras semanas.

Solución:

Problema 165

$f(x) = -\frac{x^2}{200} + \frac{x}{5} \Rightarrow x \mapsto -\frac{1}{200}\cdot x^2 + \frac{1}{5}\cdot x$

resolver(f(x) = 0) ⇒ {{x=0}, {x=40}}

tablero{centro = punto(15, 1), anchura = 35, altura = 3}

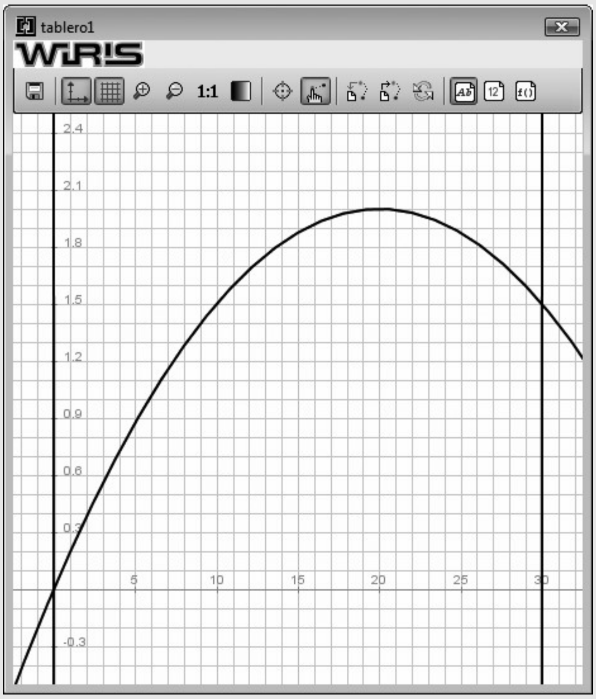
dibujar(f(x), {color = negro, anchura_linea = 2})

dibujar(x = 0, {color = negro, anchura_linea = 2})

dibujar(x = 30, {color = negro, anchura_linea = 2})

$\int_0^{30} f(x)\,dx \Rightarrow 45$

Ha crecido 45 cm



Problemas propuestos

PAU

1. Dada la función $f(x) = 4 - 3x^2 + x^3$, determina:

a) la monotonía y la curvatura de $f(x)$

b) los puntos donde la función alcanza sus extremos relativos.

c) la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = -1$

Solución:

a) Se calculan la 1ª derivada para estudiar la monotonía y la 2ª derivada para la curvatura:

$f'(x) = -6x + 3x^2$

$f''(x) = -6 + 6x$

Estudio de la monotonía:

$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 6x = 0 \Rightarrow 3x(x - 2) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 2$

Si $x = 0 \Rightarrow f(0) = 4 - 3 \cdot 0^2 + 0^3 = 4 \Rightarrow A(0, 4)$

Si $x = 2 \Rightarrow f(0) = 4 - 3 \cdot 2^2 + 2^3 = 0 \Rightarrow B(2, 0)$

$x = 1 \Rightarrow f'(1) = 3 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 = 3 - 6 = -3 < 0$ (–)

f'(x)	+		–		+
x		0		2	

Creciente (↗): $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$

Decreciente: (↘): $(0, 2)$

Estudio de la curvatura:

$f''(x) = 0 \Rightarrow 6x - 6 = 0 \Rightarrow x = 1$

Si $x = 1 \Rightarrow f(1) = 4 - 3 \cdot 1^2 + 1^3 = 2 \Rightarrow C(1, 2)$

$x = 0 \Rightarrow f''(0) = 6 \cdot 0 - 6 = -6 < 0$ (–)

f'(x)	–		+
x	0	1	

Convexa (∪): $(1, +\infty)$

Cóncava (∩): $(-\infty, 1)$

b) **Extremos relativos**

$f''(0) = 6 \cdot 0 - 6 = -6 < 0$ (–) $\Rightarrow$ **A(0, 4) es un máximo relativo**

$f''(2) = 6 \cdot 2 - 6 = 6 > 0$ (+) $\Rightarrow$ **B(2, 0) es un mínimo relativo**

c) **Ecuación recta tangente**

Si $x = -1 \Rightarrow f(-1) = 4 - 3 \cdot (-1)^2 + (-1)^3 = 0 \Rightarrow P(-1, 0)$

$f'(-1) = 3(-1)^2 - 6(-1) = 9$

La recta tangente es:

$y - 0 = 9(x + 1) \Rightarrow y = 9x + 9$

2. Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} |x + 2| & \text{si } x \le -1 \\ k & \text{si } -1 < x < 1 \\ (x - 2)^2 & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$$

a) halla el valor de **k** para que la gráfica sea continua para $x = -1$

b) para ese valor de **k,** dibuja la gráfica.

c) calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f y el eje de abscisas.

Solución:

a) $f(x) = \begin{cases} -x - 2 & \text{si } x \le -2 \\ x + 2 & \text{si } -2 < x \le -1 \\ k & \text{si } -1 < x < 1 \\ (x - 2)^2 & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$

La función está definida por cuatro funciones polinómicas que son continuas en todo $\mathbb{R}$. Los únicos puntos en los que puede haber problemas son los valores en los que cambia la definición. En concreto, $x = -1$, $x = 1$

Para que sea continua los límites laterales deben coincidir y ser iguales al valor de la función.

En $x = -1$

$f(-1) = 1$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^-} (x + 2) = 1 \\ \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} k = k \end{array}\right\} \Rightarrow k = 1$$

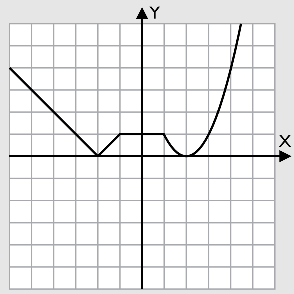
En $x = 1$

$f(1) = 1$

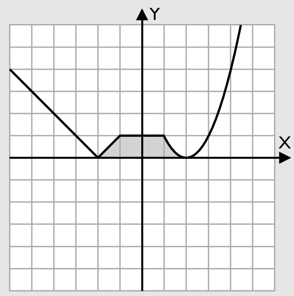
$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} k = k \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (x - 2)^2 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow k = 1$$

Para $k = 1$ la función es continua.

b)



c)



$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -2, x = 2$

$$F(x) = \begin{cases} -\dfrac{x^2}{2} - 2x & \text{si } x \le -2 \\ \dfrac{x^2}{2} + 2x & \text{si } -2 < x \le -1 \\ x & \text{si } -1 < x < 1 \\ \dfrac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$$

$$A_1 = \left|\int_{-2}^{-1} (x + 2)\, dx\right| = |F(-1) - F(-2)| = \frac{1}{2}$$

$$A_2 = \left|\int_{-1}^{1} dx\right| = |F(1) - F(-1)| = 2$$

$$A_3 = \left|\int_{1}^{2} (x - 2)^2\, dx\right| = |F(2) - F(1)| = \frac{1}{3}$$

$$A = \frac{1}{2} + 2 + \frac{1}{3} = \frac{17}{6}\ u^2$$

3. a) Si f' es la derivada de la función dada por

$$f(x) = 2x^3 - 6x^2 + \frac{3}{x^4} \quad (x \neq 0), \text{ calcula } f'(-2)$$

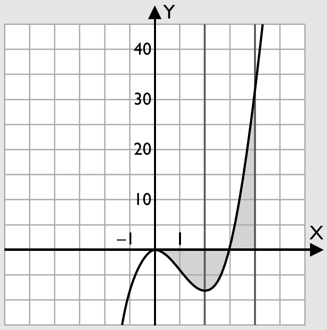
b) Dibuja la función $f(x) = 2x^3 - 6x^2$. Obtén el área que limitan la curva y el eje X entre $x = 2$ y $x = 4$

Solución:

a) $f'(x) = 6x^2 - 12x - \dfrac{12}{x^5}$

$f'(-2) = \dfrac{387}{8}$

b)



$f(x) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 3$

$$F(x) = \int (2x^3 - 6x^2)\, dx = \frac{1}{2}x^4 - 2x^3$$

$F(2) = -8; F(3) = -\dfrac{27}{2}; F(4) = 0$

$$A_1 = \left|\int_{2}^{3} (2x^3 - 6x^2)\, dx\right| = |F(3) - F(2)| = \frac{11}{2}$$

$$A_2 = \left|\int_{3}^{4} (2x^3 - 6x^2)\, dx\right| = |F(4) - F(3)| = \frac{27}{2}$$

$$\text{Área} = \frac{11}{2} + \frac{27}{2} = 19\ u^2$$

4. El coste de fabricación en euros de **x** unidades de un artículo viene dado por la función

$$f(x) = x - 2\sqrt{x} + 20$$

a) ¿Cuál es la función que determina el coste de fabricación unitario?

b) ¿Para qué producción resulta mínimo el coste unitario? ¿Cuánto vale éste? Justifica que es mínimo.

Solución:

a) Coste de fabricación unitario

$$c(x) = \frac{f(x)}{x} = \frac{x - 2\sqrt{x} + 20}{x} = 1 - \frac{2\sqrt{x}}{x} + \frac{20}{x}$$

$$c(x) = 1 - \frac{2\sqrt{x}}{x} + \frac{20}{x}$$

b) Mínimo coste unitario

$$c'(x) = \frac{\sqrt{x}}{x^2} - \frac{20}{x^2} \Rightarrow c'(x) = 0 \Rightarrow \frac{\sqrt{x}}{x^2} - \frac{20}{x^2} = 0 \Rightarrow$$

$x = 400$

$$c''(x) = -\frac{3\sqrt{x}}{2x^3} + \frac{40}{x^3} \Rightarrow c''(400) = 1/6\,400\,000 > 0 \Rightarrow$$

mínimo relativo.

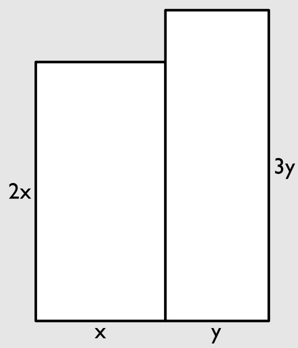
Para $x =$ **400 unidades** es mínimo.

$c(400) =$ **1/6 400 000 € cada unidad.**

5. Supongamos que tenemos un alambre de longitud **a** y lo queremos dividir en dos partes que van a servir de base a sendos rectángulos. En uno de los rectángulos su altura es el doble de su base y en el otro su altura es el triple de su base. Determina el punto por el cual debemos cortar el alambre para que la suma de las áreas de los dos rectángulos sea mínima.

Solución:

a) Datos, incógnitas y dibujo



b) Función que hay que maximizar

$A(x, y) = x \cdot 2x + y \cdot 3y = 2x^2 + 3y^2$

Sujeta a las condiciones: $x + y = a \Rightarrow y = a - x$

c) Se escribe la función con una sola variable

$A(x) = 2x^2 + 3(a - x)^2$

d) Se calculan máximos y mínimos

$A'(x) = 4x - 6(a - x) = 10x - 6a$

$A'(x) = 0 \Rightarrow 10x - 6a = 0 \Rightarrow x = 3a/5$

e) Se comprueba en la 2ª derivada

$A''(x) = 10 > 0\ (+) \Rightarrow$ mínimo relativo.

Hay que cortarla por los 3/5

6. Un taller artesanal está especializado en la producción de cierto tipo de juguetes. Los costes de fabricación, C(x), en euros están relacionados con el número de juguetes fabricados, **x,** a través de la expresión:

$$C(x) = 10x^2 - 1\,850x + 25\,000$$

El precio de venta de cada juguete es de 50 €.

a) Plantea la función de ingresos que obtiene el taller con la venta de los juguetes producidos.

b) Plantea la función de beneficios, entendidos como diferencia entre ingresos y costes de fabricación.

c) ¿Cuántos juguetes debe fabricar para maximizar beneficios? ¿A cuánto ascenderán estos beneficios?

Solución:

a) Función ingresos

$\mathbf{I(x) = 50x}$

b) Función beneficios

$B(x) = I(x) - C(x) = 50x - (10x^2 - 1\,850x + 25\,000)$

$\mathbf{B(x) = -10x^2 + 1\,900x - 25\,000}$

c) Maximizar los beneficios

$B'(x) = -20x + 1900$

$B'(x) = 0 \Rightarrow -20x + 1\,900 = 0 \Rightarrow$ **x = 95 juguetes.**

$B''(x) = -20 < 0\ (-) \Rightarrow$ máximo relativo.

$B(95) = -10 \cdot 95^2 + 1\,900 \cdot 95 - 25\,000 = 65\,250$ €

Los beneficios ascienden a 65 250 €

7. El consumo de un motor, en un trabajo de 6 horas, viene dado por la expresión

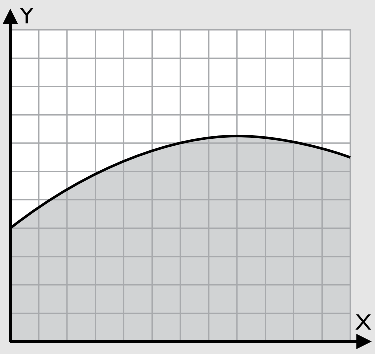
$C(t) = -t^2 + 8t + 20$, siendo **t** el tiempo en horas,

$$0 \le t \le 6$$

a) ¿Qué momento es el de mayor consumo? ¿Cuánto es el consumo máximo?

b) ¿Cuánto consume en total el motor en las 6 horas que dura el trabajo?

Solución:



a) Máximo consumo

$C'(t) = -2t + 8$

$C'(x) = 0 \Rightarrow -2t + 8 = 0 \Rightarrow$ **t = 4 horas.**

$C''(t) = -2 < 0\ (-) \Rightarrow$ máximo relativo.

$C(4) = -4^2 + 8 \cdot 4 + 20 = 36$

b) Consumo total

El consumo total es $\int_0^6 (-t^2 + 8t + 20)\, dx$

$$F(t) = \int (-t^2 + 8t + 20)\, dx = -\frac{t^3}{3} + 4t^2 + 20t$$

$F(0) = 0$

$F(6) = 192$

Consumo total = 192

8. Estudia la continuidad de la función

$$f(x) = \frac{x^3 - 5x + 2}{x^2 - 5x + 6}$$

y clasifica las discontinuidades que se encuentren. ¿Es posible definir de nuevo la función para evitar alguna discontinuidad?

Solución:

Factorizando el numerador y el denominador se obtiene:

$$f(x) = \frac{(x-2)(x+1-\sqrt{2})(x+1+\sqrt{2})}{(x-2)(x-3)}$$

Es discontinua en x = 2, x = 3

a) x = 2 es una discontinuidad evitable; se evita definiendo f(x) como la función simplificada

$$f(x) = \frac{(x-2)(x+1-\sqrt{2})(x+1+\sqrt{2})}{(x-2)(x-3)} = \frac{x^2 + 2x - 1}{x - 3}$$

b) x = 3 es una discontinuidad de 1ª especie de salto infinito.

9. El número de plazas ocupadas de un aparcamiento, a lo largo de las 24 horas de un día, viene expresado por la función

$$f(t) = \begin{cases} 1\,680 + 20t & \text{si } 0 \le t < 8 \\ -10t^2 + 260t + 400 & \text{si } 8 \le t < 16 \\ -10t^2 + 360t + 1\,200 & \text{si } 16 \le t < 24 \end{cases}$$

a) ¿A qué hora del día presenta el aparcamiento una ocupación máxima? ¿Cuántos coches hay a esa hora?

b) ¿Entre qué horas la ocupación del aparcamiento es igual o superior a 2 000 plazas?

Solución:

a) Máximo

Hay que hallar el máximo absoluto; para ello se hallan los máximos relativos en cada uno de los intervalos y en los extremos de los intervalos.

El primer trozo es una recta, que vamos a llamar:

$g(t) = 1\,680 + 20t \Rightarrow$ no tiene máximos relativos.

Problemas propuestos

$g(0) = 1\,680$

$g(8) = 1\,840$

El segundo trozo es parte de una parábola; lo vamos a llamar:

$h(t) = -10t^2 + 260t + 400$

$h'(t) = -20t + 260$, $h'(t) = 0 \Rightarrow -20t + 260 = 0 \Rightarrow$

$t = 13$

$h(13) = 2\,090$

$h''(t) = -20 < 0\ (-) \Rightarrow$ máximo relativo.

$h(8) = 1\,840$

$h(16) = 2\,000$

El tercer trozo es parte de una parábola; lo vamos a llamar:

$i(t) = -10t^2 + 360t + 1\,200$

$i'(t) = -20t + 360$, $i'(t) = 0 \Rightarrow -20t + 360 = 0 \Rightarrow t = 18$

$i(18) = 4\,440$

$i''(t) = -20 < 0\ (-) \Rightarrow$ máximo relativo.

$i(16) = 4\,400$

$i(24) = 4\,080$

El máximo absoluto es para t = 18 horas y en ese momento hay 4 440 coches

b) Ocupación superior a 2 000 plazas

Hay que resolver las inecuaciones:

$1\,680 + 20t > 2\,000 \Rightarrow x > 16$, que no sirve.

$-10t^2 + 260t + 400 > 2\,000 \Rightarrow 10 < t < 16$

$-10t^2 + 360t + 1\,200 > 2\,000 \Rightarrow 2{,}38 < t < 33{,}62$, solo sirve $16 < t < 24$

10. La función:

$$f(t) = \frac{t^2 - t + 1}{t^2 + 1}$$

representa la concentración de oxígeno en un estanque contaminado por residuos orgánicos en un tiempo **t** (medido en semanas).

a) Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f(t) para $t \geq 0$, así como los instantes en los que la concentración es máxima y mínima.

b) De forma razonada, y conforme a los datos anteriores, representa gráficamente la función para $t \geq 0$ y estudia con todo detalle sus asíntotas.

Solución:

a) Máximos, mínimos y crecimiento

$$f'(t) = \frac{t^2 - 1}{(t^2 + 1)^2}$$

$f'(t) = 0 \Rightarrow t^2 - 1 = 0 \Rightarrow t = 1, t = -1$; $t = -1$ no sirve.

$f(1) = 1/2$

$$f''(t) = \frac{-2t^3 + 6t}{(t^2 + 1)^3}$$

$f''(1) = 1/2 > 0\ (+) \Rightarrow$ mínimo relativo.

$f(0) = 1$

El máximo lo alcanza en el instante inicial, t = 0, y el mínimo en t = 1

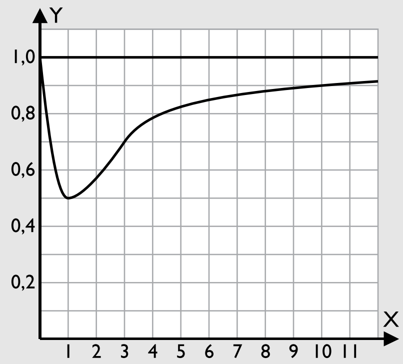
$f'(2) = 3/25$

f'(x)	–		+
x	0	1	

Creciente (↗): (1, +∞)

Decreciente: (↘): (0, 1)

b) Asíntotas y gráfica



Verticales: no tiene, porque el denominador nunca se anula.

Horizontales:

$k = \lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{t^2 - t + 1}{t^2 + 1} = 1$, es cociente de los coeficientes principales.

Asíntota horizontal k = 1

Oblicuas: no tiene, porque el grado del numerador no es uno más que el del denominador.