4 Sistemas lineales con parámetros

1. Teorema de Rouché

Piensa y calcula

Dado el siguiente sistema en forma matricial, escribe sus ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$\left.\begin{array}{l} x + 2y - 3z = 0 \\ 2x - y = 2 \end{array}\right\}$$

Aplica la teoría

1. Escribe los siguientes sistemas en forma matricial:

a) $\left.\begin{array}{l} x - y = 2 \\ 2x + y + 2z = 0 \\ x - y + 2z = 1 \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{l} 2x + y - z = 2 \\ x + y + 2z = 5 \\ -x + 5z = 3 \end{array}\right\}$

Solución:

a) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$

2. Escribe en forma ordinaria el siguiente sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$\left.\begin{array}{l} x - 2z = 1 \\ 3x + y + z = 3 \\ 2x - y + 2z = 0 \end{array}\right\}$$

3. Discute los siguientes sistemas:

a) $\left.\begin{array}{l} 3x - y + 2z = 1 \\ x + 4y + z = 0 \\ 2x - 5y = -2 \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{l} 3x + 2y + 2z = 15 \\ 3x - 2y - 2z = -1 \\ -x + 3y + 3z = 3 \end{array}\right\}$

Solución:

a) Se calcula el determinante de la matriz de los coeficientes:

$$|C| = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & -5 & 0 \end{vmatrix} = -13$$

Como el determinante de C es distinto de cero, el R(C) = 3 y se tiene:

R(C) = R(A) = 3 = número de incógnitas $\Rightarrow$ Sistema compatible determinado.

b) Se calcula el determinante de la matriz de los coeficientes:

$$|C| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 3 & -2 & -2 \\ -1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

Como el determinante de C es igual a cero, se halla el rango de A y C por Gauss:

$$R\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 15 \\ 3 & -2 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= R\begin{array}{c} \begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & -2 & -2 & -1 \\ 3 & 2 & 2 & 15 \end{pmatrix} \end{array}\begin{array}{l} \\ 2^a + 3 \cdot 1^a \\ 3^a - 2^a \end{array} =$$

$$= R\begin{array}{c} \begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 7 & 7 & 8 \\ 0 & 4 & 4 & 16 \end{pmatrix} \end{array}\begin{array}{l} \\ \\ 3^a : 4 \end{array} =$$

$$= R\begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 7 & 7 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ 7 \cdot 3^a - 2^a \end{array} =$$

$$= R\begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 7 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 20 \end{pmatrix}$$

R(C) = 2 < R(A) = 3 ⇒ Sistema incompatible.

4. Discute los siguientes sistemas:

a) $\left.\begin{array}{r} 2x + y - z = 0 \\ x + y \qquad = 1 \\ -x \qquad + z = 1 \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{r} x + 2y + z = 1 \\ 2x + 3y + 2z = 0 \\ x + y + 2z = 3 \end{array}\right\}$

Solución:

a) Se calcula el determinante de la matriz de los coeficientes:

$$|C| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Como el determinante de C es igual a cero, se halla el rango de A y C por Gauss:

$$R\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= R\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ 2 \cdot 1^a - 2^a \\ 1^a + 3^a \end{array} =$$

$$= R\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = R\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

R(C) = R(A) = 2 < número de incógnitas ⇒ Sistema compatible indeterminado.

b) Se calcula el determinante de la matriz de los coeficientes:

$$|C| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -1$$

Como el determinante de C es distinto de cero, el R(C) = 3 y se tiene:

R(C) = R(A) = 3 = número de incógnitas ⇒ Sistema compatible determinado.

2. Regla de Cramer y forma matricial

■ Piensa y calcula

Dado el siguiente sistema, resuélvelo matricialmente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

● Aplica la teoría

5. Resuelve por Cramer:

a) $\left.\begin{array}{r} 2x + y \qquad = 5 \\ x \qquad + 3z = 16 \\ 5y - z = 10 \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{r} x + y - 2z = 6 \\ 2x + 3y - 7z = 16 \\ 5x + 2y + z = 16 \end{array}\right\}$

Solución:

a) Determinante de los coeficientes:

$$|C| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \end{vmatrix} = -29$$

La solución es:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 16 & 0 & 3 \\ 10 & 5 & -1 \end{vmatrix}}{-29} = \frac{-29}{-29} = 1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 1 & 16 & 3 \\ 0 & 10 & -1 \end{vmatrix}}{-29} = \frac{-87}{-29} = 3$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 16 \\ 0 & 5 & 10 \end{vmatrix}}{-29} = \frac{-145}{-29} = 5$$

b) Determinante de los coeficientes:

$$|C| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & -7 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

La solución es:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 1 & -2 \\ 16 & 3 & -7 \\ 16 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 6 & -2 \\ 2 & 16 & -7 \\ 5 & 16 & 1 \end{vmatrix}}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 2 & 3 & 16 \\ 5 & 2 & 16 \end{vmatrix}}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

6. Resuelve por Cramer en función del parámetro **a:**

$$\left.\begin{aligned} x + y \quad &= a \\ x \quad + z &= 0 \\ x + 2y + z &= 2 \end{aligned}\right\}$$

Solución:

Determinante de los coeficientes:

$$|C| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

La solución es:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{2 - 2a}{-2} = a - 1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{-2}{-2} = 1$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{2a - 2}{-2} = 1 - a$$

7. Resuelve por Cramer:

$$\left.\begin{aligned} 4x + 4y + 5z + 5t &= 0 \\ 2x \quad + 3z - t &= 10 \\ x + y - 5z \quad &= -10 \\ 3y + 2z \quad &= 1 \end{aligned}\right\}$$

Solución:

Determinante de los coeficientes:

$$|C| = \begin{vmatrix} 4 & 4 & 5 & 5 \\ 2 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -290$$

La solución es:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 4 & 5 & 5 \\ 10 & 0 & 3 & -1 \\ -10 & 1 & -5 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \end{vmatrix}}{-290} = \frac{-290}{-290} = 1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 0 & 5 & 5 \\ 2 & 10 & 3 & -1 \\ 1 & -10 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}}{-290} = \frac{290}{-290} = -1$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 4 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & 10 & -1 \\ 1 & 1 & -10 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{-290} = \frac{-580}{-290} = 2$$

$$t = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 4 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 10 \\ 1 & 1 & -5 & -10 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{-290} = \frac{580}{-290} = -2$$

8. Resuelve matricialmente el sistema:

$$\left.\begin{aligned} 3x + 2y + z &= 5 \\ 2x - y + z &= 6 \\ x + 5y \quad &= -3 \end{aligned}\right\}$$

Solución:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & -5 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ -11 & 13 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$x = 2, y = -1, z = 1$

9. Resuelve matricialmente el sistema:

$$\begin{pmatrix} 5 & 8 & 1 \\ 3 & -2 & 6 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{107}\begin{pmatrix} -4 & 9 & 50 \\ 15 & -7 & -27 \\ 7 & 11 & -34 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$x = -3, y = 2, z = 1$

10. Resuelve matricialmente el sistema:

$$\left.\begin{aligned} 2x - 3y + z &= -7 \\ x + 4y + 2z &= -1 \\ x - 4y \quad &= -5 \end{aligned}\right\}$$

Solución:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 8 & -4 & -10 \\ 2 & -1 & -3 \\ -8 & 5 & 11 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -7 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

La solución es: $x = -1, y = 1, z = -2$

3. Discusión de sistemas con parámetros

■ Piensa y calcula

Discute, según los valores de **k,** el siguiente sistema: $\left.\begin{aligned} x + \ \ y &= 3 \\ 2x + 2y &= k \end{aligned}\right\}$

Solución:

$$\left.\begin{aligned} x + \ \ y &= 3 \\ 2x + 2y &= k \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x + y &= 3 \\ 0 &= k - 6 \end{aligned}\right\}$$

Para todo valor $k \neq 6$ el sistema es incompatible.

Para $k = 6$ el sistema se reduce a $x + y = 3 \Rightarrow$ Compatible indeterminado.

● Aplica la teoría

11. Discute, según los valores del parámetro **a,** los siguientes sistemas:

a) $\left.\begin{aligned} ax + y + z &= 1 \\ x + ay + z &= a \\ x + y + az &= a^2 \end{aligned}\right\}$

b) $\left.\begin{aligned} (a + 1)x + y + z &= 0 \\ x + (a + 1)y + z &= 0 \\ x + y + (a + 1)z &= 0 \end{aligned}\right\}$

Solución:

a) Se calcula $|C| = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = a^3 - 3a + 2$

$a^3 - 3a + 2 = 0 \Rightarrow a = -2, a = 1$

Para todo valor de $a \neq -2$ y $a \neq 1$ se verifica que:

$R(C) = R(A) = 3 =$ número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible determinado.

Se estudian los valores que son raíces de $|C|$

• Para $a = -2$ se tiene:

$$R\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$= R\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ 1^{a} - 2^{a} \\ 2 \cdot 1^{a} + 3^{a} \end{matrix} =$$

$$= R\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 3 & -3 & 6 \\ 0 & 3 & -3 & 9 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ 2^{a} : 3 \\ 3^{a} : 3 \end{matrix} =$$

$$= R\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ 3^{a} - 2^{a} \end{matrix} = R\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se tiene que $R(C) = 2 < R(A) = 3$ y, por lo tanto, el sistema es incompatible.

• Para $a = 1$ se tiene:

$$R\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

Se tiene que $R(C) = R(A) = 1 <$ número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible indeterminado.

b) Se calcula $|C| = \begin{vmatrix} a + 1 & 1 & 1 \\ 1 & a + 1 & 1 \\ 1 & 1 & a + 1 \end{vmatrix} = a^3 + 3a$

$a^3 + 3a = 0 \Rightarrow a^2(a + 3) = 0 \Rightarrow a = -3, a = 0$

Para todo valor de $a \neq -3$ y $a \neq 0$ se verifica que:

$R(C) = R(A) = 3 =$ número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible determinado.

Se estudian los valores que son raíces de $|C|$

• Para $a = -3$ se tiene:

$$R\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = R\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ 1^{a} - 2^{a} \\ 2 \cdot 1^{a} + 3^{a} \end{matrix} =$$

$$= R\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ 2^{a} : 3 \\ = 2^{a} \end{matrix} = R\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Se tiene que $R(C) = R(A) = 2 <$ número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible indeterminado.

• Para $a = 0$ se tiene:

$$R\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

Se tiene que $R(C) = R(A) = 1 <$ número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible indeterminado.

12. Discute, según los valores del parámetro **k,** los siguientes sistemas:

a) $\left.\begin{array}{r} kx + y + z = 4 \\ x + y + z = k \\ x - y + kz = 2 \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{r} x + y + z = 0 \\ kx \quad + 2z = 0 \\ 2x - y + kz = 0 \end{array}\right\}$

Solución:

a) Se calcula $|C| = \begin{vmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & k \end{vmatrix} = k^2 - 1$

$k^2 - 1 = 0 \Rightarrow k = -1, k = 1$

Para todo valor de $k \neq -1$ y $k \neq 1$ se verifica que:

R(C) = R(A) = 3 = número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible determinado.

Se estudian los valores que son raíces de |C|

• Para k = –1 se tiene:

$$R\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{array}{l} \\ 1^a + 2^a \\ 1^a + 3^a \end{array} = R\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Se tiene que R(C) = 2 < R(A) = 3 y, por lo tanto, el sistema es incompatible.

• Para k = 1 se tiene:

$$R\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{array}{l} \\ 1^a - 2^a \\ 1^a - 3^a \end{array} =$$

$$= R\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ 3^a : 2 \end{array} = R\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Se tiene que R(C) = 2 < R(A) = 3 y, por lo tanto, el sistema es incompatible.

b) Se calcula $|C| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ k & 0 & 2 \\ 2 & -1 & k \end{vmatrix} = -k^2 - k + 6$

$k^2 + k - 6 = 0 \Rightarrow k = -3, k = 2$

Para todo valor de $k \neq -3$ y $k \neq 2$ se verifica que:

R(C) = R(A) = 3 = número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible determinado.

Se estudian los valores que son raíces de |C|

• Para k = –3 se tiene:

$$R\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}\begin{array}{l} \\ 2^a + 3 \cdot 1^a \\ 2 \cdot 1^a - 3^a \end{array} =$$

$$= R\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ = 2^a \end{array} = R\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Se tiene que R(C) = R(A) = 2 < número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible indeterminado.

• Para k = 2 se tiene:

$$R\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{array}{l} \\ 2 \cdot 1^a - 2^a \\ 2^a - 3^a \end{array} =$$

$$= R\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = R\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Se tiene que R(C) = R(A) = 2 < número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible indeterminado.

13. Discute, según los valores del parámetro **a,** el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{r} 3x + 10y = -4 \\ ax + y = 1 \\ x + 3y = -1 \end{array}\right\}$$

Solución:

Como hay más ecuaciones que incógnitas, se calcula el determinante de la matriz ampliada:

Se calcula $|A| = \begin{vmatrix} 3 & 10 & -4 \\ a & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 2 - 2a$

$2 - 2a = 0 \Rightarrow a = 1$

Para todo valor de $a \neq 1$ se verifica que:

R(C) < R(A) = 3 y, por lo tanto, el sistema es incompatible.

• Para a = 1 se tiene:

$$R\begin{pmatrix} 3 & 10 & -4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} = R\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & 10 & -4 \end{pmatrix}\begin{array}{l} \\ 2^a - 1^a \\ 3^a - 3 \cdot 1^a \end{array} =$$

$$= R\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 7 & -7 \end{pmatrix}\begin{array}{l} \\ 2^a : 2 \\ 3^a : 7 \end{array} = R\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ = 2^a \end{array} =$$

$$= R\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Se tiene que R(C) = R(A) = 2 = número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible determinado.

14. Discute, según los valores del parámetro **m,** los siguientes sistemas:

a) $\left.\begin{array}{l} x + y = 1 \\ mx + z = 0 \\ x + (1 + m)y + mz = m + 1 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{l} (2m + 2)x + my + 2z = 2m - 2 \\ 2x + (2 - m)y = 0 \\ (m + 1)x + (m + 1)z = m - 1 \end{array}\right\}$

Solución:

a) Se calcula $|C| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ m & 0 & 1 \\ 1 & 1+m & m \end{vmatrix} = -m^2 - m$

$m^2 + m = m(m+1) = 0 \Rightarrow m = -1, m = 0$

Para todo valor de $m \neq -1$ y $m \neq 0$ se verifica que:

R(C) = R(A) = 3 = número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible determinado.

Se estudian los valores que son raíces de |C|

• Para m = – 1 se tiene:

$$R\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ 1^a + 2^a \\ 2^a + 3^a \end{matrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= R\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Se tiene que R(C) = R(A) = 2 < número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible indeterminado.

• Para m = 0 se tiene:

$$R\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ = 1^a \end{matrix} = R\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Se tiene que R(C) = R(A) = 2 < número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible indeterminado.

b) Se calcula el $|C| = \begin{vmatrix} 2m+2 & m & 2 \\ 2 & 2-m & 0 \\ m+1 & 0 & m+1 \end{vmatrix} =$

$$= -2m(m+1)(m-1)$$

$m(m+1)(m-1) = 0 \Rightarrow m = 0, m = -1, m = 1$

Para todo valor de $m \neq 0, m \neq -1$ y $m \neq 1$ se verifica que:

R(C) = R(A) = 3 = número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible determinado.

Se estudian los valores que son raíces de |C|

• Para m = 0 se tiene:

$$R\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} = 2 \cdot 3^a \\ 2^a : 2 \\ \\ \end{matrix} =$$

$$= R\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ 1^a - 2^a \end{matrix} = R\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Se tiene que R(C) = R(A) = 2 < número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible indeterminado.

• Para m = –1 se tiene:

$$R\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & -4 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = R\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Se tiene que R(C) = 2 < R(A) = 3 y, por lo tanto, el sistema es incompatible.

• Para m = 1 se tiene:

$$R\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ 3^a : 2 \end{matrix} = R\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= R\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ 2^a - 4 \cdot 1^a \\ 3^a - 2 \cdot 1^a \end{matrix} = R\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ = 2^a \end{matrix} =$$

$$= R\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Se tiene que R(C) = R(A) = 2 < número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible indeterminado.

Preguntas tipo test

Contesta en tu cuaderno:

1 Un sistema lineal heterogéneo es compatible determinado si (C, matriz de los coeficientes, y A, matriz ampliada con los términos independientes):

- [ ] R(C) < R(A)
- [x] R(C) = R(A) = Nº de incógnitas
- [ ] R(C) > R(A)
- [ ] R(C) ≠ R(A)

2 Si tenemos el sistema lineal matricial CX = B tal que existe C^{-1}, la solución es:

- [ ] X = BC
- [ ] $X = BC^{-1}$
- [ ] X = CB
- [x] $X = C^{-1}B$

3 Un sistema lineal homogéneo:

- [x] siempre es compatible.
- [ ] siempre es incompatible.
- [ ] unas veces es compatible y otras incompatible.
- [ ] ninguna de las anteriores es cierta.

4 Un sistema lineal de tres ecuaciones con dos incógnitas:

- [x] si R(C) = R(A) = 2, es compatible.
- [ ] si R(A) = 3, es compatible.
- [ ] si R(C) = 3, es compatible.
- [ ] si R(C) = R(A) = 3, es compatible.

5 Un sistema lineal de tres ecuaciones con tres incógnitas:

- [ ] si R(C) = R(A) = 2, es compatible determinado.
- [ ] si R(C) ≠ R(A), es compatible determinado.
- [x] si R(C) = R(A) = 3, es compatible determinado.
- [ ] si R(C) < R(A), es compatible determinado.

6 Se considera el sistema lineal de ecuaciones, dependientes del parámetro real **a:**

$$\left\{\begin{array}{l} x - 2y + z = 0 \\ 3x + 2y - 2z = 3 \\ 2x + 2y + az = 8 \end{array}\right.$$

Discute el sistema para los distintos valores de **a**

- [x] a ≠ –7/4, S.C.D., si a = –7/4, S.I.
- [ ] a = –7/4, S.C.D., si a ≠ –7/4, S.I.
- [ ] a ≠ 2, S.C.D., si a = 2, S.I.
- [ ] a = 2, S.C.D., si a ≠ 2, S.I.

7 Resuelve el sistema del ejercicio 6 para a = 4

- [ ] x = 2, y = 3, z = 4
- [ ] x = –2, y = 3, z = –4
- [x] x = y = z = 1
- [ ] x = –1, y = –2, z = –3

8 Discute, en función del parámetro **a,** la solución del siguiente sistema de ecuaciones lineales.

$$\left\{\begin{array}{l} x + 4y + z = 2 \\ 3x - y + 2z = 1 \\ 2x - 5y + az = -a \end{array}\right.$$

- [ ] a ≠ –1, S.C.D., si a = –1, S.I.
- [x] a ≠ 1, S.C.D., si a = 1, S.C.I.
- [ ] a = 1, S.C.D., si a ≠ 1 S.C.I.
- [ ] a = 2, S.C.D., si a ≠ 2 S.I.

9 Resuelve el sistema del ejercicio 8 cuando sea compatible determinado.

- [ ] x = y = z = 5
- [ ] x = 15, y = 6, z = 1
- [ ] x = –1/2, y = 2/3, z = –4/5
- [x] x = 15/13, y = 6/13, z = –1

10 Resuelve el sistema del ejercicio 8 cuando sea compatible indeterminado.

- [ ] x = y – 2, z = –y + 2
- [x] x = 9y – 3, z = –13y + 5
- [ ] x = 3y – 1, z = –3y + 1
- [ ] x = –9y + 3, z = 13y – 5

Ejercicios y problemas

1. Teorema de Rouché

15. Discute el siguiente sistema:

$$\left.\begin{aligned} 3x - y + 2z &= 1 \\ x + 4y + z &= 3 \\ 2x - 5y + z &= -2 \end{aligned}\right\}$$

Solución:

Como $|C| = 0$, se halla el rango de C y de A por Gauss y se obtiene:

$R(C) = 2 = R(A) <$ número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible indeterminado.

16. Discute el siguiente sistema:

$$\left.\begin{aligned} 5x + 4y + 5z &= 9 \\ x - 2y &= 1 \\ 5x + 3y + 5z &= 5 \end{aligned}\right\}$$

Solución:

Como $|C| = -10$, el $R(C) = R(A) = 3$ y, por lo tanto, el sistema es compatible determinado.

17. Discute el siguiente sistema:

$$\left.\begin{aligned} 2x + y + 4z &= 0 \\ 4x - y + 2z &= -4 \\ 3x - y + z &= -2 \end{aligned}\right\}$$

Solución:

Como $|C| = 0$, se halla el rango de C y de A por Gauss y se obtiene:

$R(C) = 2 < R(A) = 3$ y, por lo tanto, el sistema es incompatible.

18. Discute el siguiente sistema:

$$\left.\begin{aligned} 8x + y + 4z &= 9 \\ 5x - 2y + 4z &= 6 \\ x + y &= 1 \end{aligned}\right\}$$

Solución:

Como $|C| = 0$, se halla el rango de C y de A por Gauss y se obtiene: $R(C) = 2 = R(A) <$ número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible indeterminado.

19. Discute el siguiente sistema:

$$\left.\begin{aligned} 2x - y + z &= -2 \\ x + 2y + 3z &= -1 \\ x - 3y - 2z &= 3 \end{aligned}\right\}$$

Solución:

Como $|C| = 0$, se halla el rango de C y de A por Gauss y se obtiene: $R(C) = 2 < R(A) = 3$ y, por lo tanto, el sistema es incompatible.

20. Discute el siguiente sistema:

$$\left.\begin{aligned} x + 2y - 4z &= 1 \\ 2x + y - 5z &= -1 \\ x - y - z &= -2 \end{aligned}\right\}$$

Solución:

Como $|C| = 0$, se halla el rango de C y de A por Gauss y se obtiene:

$R(C) = 2 = R(A) <$ número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible indeterminado.

21. Discute y resuelve, si es posible, el siguiente sistema:

$$\left.\begin{aligned} 2x + 4y - z + 2t &= 0 \\ x + y + z &= 3 \\ 5x - 2y - 4z - t &= -12 \end{aligned}\right\}$$

Solución:

Como hay más incógnitas que ecuaciones, se pasa **t** al 2º miembro y se resuelve por Gauss, y se obtiene la solución:

$$x = \frac{3t - 2}{13}, y = \frac{9 - 7t}{13}, z = \frac{4t + 32}{13}$$

La solución en ecuaciones parámetricas es:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{3\lambda - 2}{13} \\ y &= \frac{9 - 7\lambda}{13} \\ z &= \frac{4\lambda + 32}{13} \\ t &= \lambda \end{aligned}\right\} \lambda \in \mathbb{R}$$

2. Regla de Cramer y forma matricial

22. Resuelve por Cramer:

$$\left.\begin{aligned} 7x + 2y + 3z &= 15 \\ 5x - 3y + 2z &= 15 \\ 10x - 11y + 5z &= 36 \end{aligned}\right\}$$

Solución:

Como $|C| = -36$, el sistema es de Cramer.

La solución es: $x = 2, y = -1, z = 1$

23. Resuelve por Cramer:

$$\left.\begin{aligned} 3x + 2y + 4z &= 1 \\ 2x + y + z &= 0 \\ x + 2y + 3z &= 1 \end{aligned}\right\}$$

Solución:

Como $|C| = 5$, el sistema es de Cramer.

La solución es: $x = -\frac{1}{5}, y = 0, z = \frac{2}{5}$

24. Resuelve por Cramer:

$$\left.\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ 3x - 4y &= 5 \\ 7x - y - 3z &= 8 \end{aligned}\right\}$$

Solución:

Como $|C| = 46$, el sistema es de Cramer.

La solución es: $x = \dfrac{27}{23}, y = -\dfrac{17}{46}, z = \dfrac{9}{46}$

25. Resuelve por Cramer:

$$\left.\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 0 \\ x + 2y + z &= 0 \\ 2x + 3y + 4z &= 2 \end{aligned}\right\}$$

Solución:

Como $|C| = -2$, el sistema es de Cramer.

La solución es: $x = 4, y = -2, z = 0$

26. Resuelve matricialmente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Solución:

$|C| = -5$. Calculando la matriz inversa de los coeficientes se tiene:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -4 & -3 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

La solución es: $x = -1, y = 0, z = 2$

27. Resuelve matricialmente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Solución:

$|C| = 2$. Calculando la matriz inversa de los coeficientes se tiene:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

La solución es: $x = 0, y = -2, z = 2$

3. Discusión de sistemas con parámetros

28. Discute, según el valor del parámetro **m,** el siguiente sistema:

$$\left.\begin{aligned} mx + my &= 6 \\ x + (m-1)y &= 3 \end{aligned}\right\}$$

Solución:

Se calcula $|C| = \begin{vmatrix} m & m \\ 1 & m-1 \end{vmatrix} = m^2 - 2m$

$m^2 - 2m = 0 \Leftrightarrow m(m-2) = 0 \Rightarrow m = 2, m = 0$

Para todo valor de $m \neq 2$ y $m \neq 0$ se verifica que:

$R(C) = R(A) = 2$ = número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible determinado.

Se estudian los valores que son raíces de $|C|$

- Para $m = 2$ se tiene:

  $R(C) = R(A) = 1 <$ número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible indeterminado.

- Para $m = 0$ se tiene:

  $R(C) = 1 < R(A) = 2$ y, por lo tanto, el sistema es incompatible.

29. Discute, según el valor del parámetro **m,** el siguiente sistema:

$$\left.\begin{aligned} (m+1)x + y + z &= 3 \\ x + 2y + mz &= 4 \\ x + my + 2z &= 2 \end{aligned}\right\}$$

Solución:

$$|C| = \begin{vmatrix} m+1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & m \\ 1 & m & 2 \end{vmatrix} = -m^3 - m^2 + 6m$$

$m^3 + m^2 - 6m = 0 \Leftrightarrow m = 0, m = -3, m = 2$

Para todo valor de $m \neq 0, m \neq -3$ y $m \neq 2$ se verifica que:

$R(C) = R(A) = 3$ = número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible determinado.

Se estudian los valores que son raíces de $|C|$

- Para $m = 0$ se tiene:

  $R(C) = 2 = R(A) <$ número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible indeterminado.

- Para $m = -3$ se tiene:

  $R(C) = 2 < R(A) = 3$ y, por lo tanto, el sistema es incompatible.

- Para $m = 2$ se tiene:

  $R(C) = 2 < R(A) = 3$ y, por lo tanto, el sistema es incompatible.

30. Discute, según el valor del parámetro **a,** el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{r} x + y + 2z = 3 \\ 2x - y + az = 9 \\ x - y - 6z = 5 \end{array}\right\}$$

Solución:

Se calcula $|C| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & a \\ 1 & -1 & -6 \end{vmatrix} = 2a + 16$

$2a + 16 = 0 \Rightarrow a = -8$

Para todo valor de $a \neq -8$ se verifica que:

R(C) = R(A) = 3 = número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible determinado.

Se estudian los valores que son raíces de |C|

- Para $a = -8$ se tiene:
  R(C) = R(A) = 2 < número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible indeterminado.

31. Discute, según el valor del parámetro **a,** el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{r} x + y + 2z = 2 \\ 2x - y + 3z = 2 \\ 5x - y + az = 6 \end{array}\right\}$$

Solución:

$|C| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 5 & -1 & a \end{vmatrix} = -3a + 24$

$3a - 24 = 0 \Rightarrow a - 8 = 0 \Rightarrow a = 8$

Para todo valor de $a \neq 8$ se verifica que:

R(C) = R(A) = 3 = número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible determinado.

Se estudian los valores que son raíces de |C| = 0

- Para a = 8 se tiene:
  R(C) = R(A) = 2 < número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible indeterminado.

32. Discute, según el valor del parámetro **k,** el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{r} 3x - 5y = 6 \\ x + y = k \\ x + 2y = 2 \end{array}\right\}$$

Solución:

Como hay una ecuación más que incógnitas, se estudia el determinante de la matriz ampliada.

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -5 & 6 \\ 1 & 1 & k \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -11k + 22$$

$11k - 22 = 0 \Rightarrow k - 2 = 0 \Rightarrow k = 2$

Para todo valor de $k \neq 2$ se verifica que:

R(C) < R(A) = 3 y, por lo tanto, el sistema es incompatible.

Se estudian los valores que son raíces de |A|

- Para k = 2 se tiene:
  R(C) = R(A) = 2 = número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible determinado.

33. Discute, según el valor del parámetro **k,** el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{r} x + y = 1 \\ 3x + 2y - z = 3 \\ kx + 3y - 2z = 0 \\ -x - 4z = 3 \end{array}\right\}$$

Solución:

Como hay una ecuación más que incógnitas se estudia el determinante de la matriz ampliada.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 3 \\ k & 3 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -4 & 3 \end{vmatrix} = k + 20$$

$k + 20 = 0 \Rightarrow k = -20$

Para todo valor de $k \neq -20$ se verifica que:

R(C) < R(A) = 3 y, por lo tanto, el sistema es incompatible.

Se estudian los valores que son raíces de |A|

- Para k = −20 se tiene:
  R(C) = R(A) = 3 = número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible determinado.

34. Se considera el siguiente sistema lineal de ecuaciones, dependiente del parámetro **m:**

$$\left.\begin{array}{r} 2x + y - z = 2 \\ x + y + 2z = 5 \\ -x + (m + 2)z = 3 \end{array}\right\}$$

a) Discute el sistema para los distintos valores de **m**

b) Resuelve el sistema para m = 3

Solución:

a) |C| = m – 1

$m - 1 = 0 \Rightarrow m = 1$

Para todo valor de $m \neq 1$ se verifica que:

R(C) = R(A) = 3 = número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible determinado.

Se estudian los valores que son raíces de |C|

- Para m = 1 se tiene:
  R(C) = R(A) = 2 < número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible indeterminado.

b) Para m = 3 la solución del sistema es:

$$x = -3, y = 8, z = 0$$

Para ampliar

35. Se considera el siguiente sistema lineal de ecuaciones, dependiente del parámetro real **a:**

$$\left.\begin{array}{r} x - y \qquad = 2 \\ ax + y + 2z = 0 \\ x - y + az = 1 \end{array}\right\}$$

a) Discute el sistema según los diferentes valores del parámetro **a**

b) Resuelve el sistema para a = – 1

c) Resuelve el sistema para a = 2

Solución:

a) $|C| = a^2 + a = a(a + 1)$

$a^2 + a = 0 \Rightarrow a(a + 1) = 0 \Rightarrow a = 0, a = -1$

Para todo valor de $a \neq -1$ y $a \neq 0$ se verifica que:

R(C) = R(A) = 3 = número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible determinado.

Se estudian los valores que son raíces de |C|

• Para a = – 1 se tiene:

R(C) = R(A) = 2 < número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible indeterminado.

• Para a = 0 se tiene:

R(C) = 2 < R(A) = 3 y, por lo tanto, el sistema es incompatible.

b) Para a = – 1 la solución del sistema es:

$$x = 2 + y, z = 1$$

La solución en ecuaciones paramétricas es:

$$\left.\begin{array}{l} x = 2 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 \end{array}\right\} \text{con } \lambda \in \mathbb{R}$$

c) Para a = 2 la solución es:

$$x = 1, y = -1, z = -1/2$$

36. Sea el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{array}{r} ax + \;\; y - z = 0 \\ 2x + ay \qquad = 2 \\ -x \qquad + z = 1 \end{array}\right\}$$

a) Discute el sistema según los valores del parámetro **a**

b) Resuelve el sistema cuando tenga más de una solución.

Solución:

a) $|C| = a^2 - a - 2$

$a^2 - a - 2 = 0 \Rightarrow\; a = -1, a = 2$

Para todo valor de $a \neq -1$ y $a \neq 2$ se verifica que:

R(C) = R(A) = 3 = número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible determinado.

Se estudian los valores que son raíces de |C|

• Para a = – 1 se tiene:

R(C) = 2 < R(A) = 3 y, por lo tanto, el sistema es incompatible.

• Para a = 2 se tiene:

R(C) = R(A) = 2 < número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible indeterminado.

b) Para a = 2 la solución del sistema es:

$$x = z - 1, y = 2 - z$$

La solución, en ecuaciones paramétricas, es:

$$\left.\begin{array}{l} x = \lambda - 1 \\ y = 2 - \lambda \\ z = \lambda \end{array}\right\} \text{con } \lambda \in \mathbb{R}$$

37. Siendo **a** un número real cualquiera, se define el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} x + 2y - az = 1 \\ -y + \;\; z = 0 \\ ax \qquad + \;\; z = a \end{array}\right\}$$

a) Discute el sistema en función del valor de **a**

b) Encuentra todas sus soluciones para a = 1

Solución:

a) $|C| = -a^2 + 2a - 1$

$a^2 - 2a + 1 = 0 \Rightarrow a = 1$

Para todo valor de $a \neq 1$ se verifica que:

R(C) = R(A) = 3 = número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible determinado.

Se estudian los valores que son raíces de |C|

• Para a = 1 se tiene:

R(C) = R(A) = 2 < número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible indeterminado.

b) Para a = 1 la solución del sistema es:

$$x = 1 - z, y = z$$

La solución, en ecuaciones paramétricas, es:

$$\left.\begin{array}{l} x = 1 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{array}\right\} \text{con } \lambda \in \mathbb{R}$$

38. Se considera el siguiente sistema lineal de ecuaciones, dependiente del parámetro real λ:

$$\left.\begin{array}{r} x + \;\; y + 5z = 0 \\ 2x - \lambda y \qquad = 0 \\ x - \;\; y + \;\; z = 0 \end{array}\right\}$$

Discute el sistema según los diferentes valores del parámetro λ y resuélvelo.

Solución:

a) $|C| = 4\lambda - 12$

$4\lambda - 12 = 0 \Rightarrow \lambda = 3$

Para todo valor de $\lambda \neq 3$ se verifica que:

R(C) = R(A) = 3 = número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible determinado.

Se estudian los valores que son raíces de |C|

• Para $\lambda = 3$ se tiene:

R(C) = R(A) = 2 < número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible indeterminado.

b) Para $\lambda = 3$ la solución del sistema es:

$$x = -3z\ ,\ y = -2z$$

La solución, en ecuaciones paramétricas, es:

$$\left.\begin{array}{l} x = -3t \\ y = -2t \\ z = t \end{array}\right\} \text{con } t \in \mathbb{R}$$

Para $\lambda \neq 3$ la solución del sistema es la solución trivial:

$$x = 0, y = 0, z = 0$$

39. Se considera el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} mx + \ \ y + z = 1 \\ x - \ \ y \ \ \ \ \ \ = m \\ x + my + z = 1 \end{array}\right\}$$

a) Discute la compatibilidad del sistema en función del parámetro **m**

b) Encuentra, cuando existan, sus soluciones.

Solución:

a) |C| = 0 para cualquier valor de m

Se estudia el sistema por Gauss y se obtiene que es incompatible.

b) No hay soluciones.

40. Se considera el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} ax + 2y + 6z = 0 \\ 2x + ay + 4z = 2 \\ 2x + ay + 6z = a - 2 \end{array}\right\}$$

a) Discute el sistema en función del parámetro **a**

b) Resuélvelo para a = 2

Solución:

a) $|C| = 2a^2 - 8$

$a^2 - 4 = 0 \Rightarrow a = -2, a = 2$

Para todo valor de $a \neq -2$ y $a \neq 2$ se verifica que:

R(C) = R(A) = 3 = número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible determinado.

Se estudian los valores que son raíces de |C|

• Para a = –2 se tiene: R(C) = 2 < R(A) = 3 y, por lo tanto, el sistema es incompatible.

• Para a = 2 se tiene: R(C) = R(A) = 2 < número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible indeterminado.

b) Para a = 2 la solución del sistema es:

$$x = 3 - y, z = -1$$

La solución, en ecuaciones paramétricas, es:

$$\left.\begin{array}{l} x = 3 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = -1 \end{array}\right\} \text{con } \lambda \in \mathbb{R}$$

Problemas

41. Se considera el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} x - y + \qquad z = 6 \\ -x - y + (a-4)z = 7 \\ x + y + \qquad 2z = 11 \end{array}\right\}$$

a) Discute el sistema en función del parámetro real **a**

b) Resuélvelo para a = 4

Solución:

a) $|C| = -2a + 4$

$2a - 4 = 0 \Rightarrow a - 2 = 0 \Rightarrow a = 2$

Para todo valor de $a \neq 2$ se verifica que:

R(C) = R(A) = 3 = número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible determinado.

Se estudian los valores que son raíces de |C|

• Para a = 2 se tiene: R(C) = 2 < R(A) = 3 y, por lo tanto, el sistema es incompatible.

b) Para a = 4 la solución del sistema es:

$$x = -5, y = -2, z = 9$$

42. Sea el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} (a+1)x + 2y + z = a + 3 \\ ax + y \quad\;\; = a \\ ax + 3y + z = a + 2 \end{array}\right\}$$

a) Discute el sistema en función del parámetro real **a**

b) Resuelve el sistema en los casos en que resulte compatible determinado.

Solución:

a) $|C| = a + 1$

$a + 1 = 0 \Rightarrow a = -1$

Para todo valor de $a \neq -1$ se verifica que:

R(C) = R(A) = 3 = número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible determinado.

Se estudian los valores que son raíces de $|C|$

- Para $a = -1$ se tiene: R(C) = R(A) = 2 < número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible indeterminado.

b) Para $a \neq -1$ la solución del sistema es:

$$x = 1, y = 0, z = 2$$

43. Se considera el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} 2x + my \quad\quad = 0 \\ x \quad + mz = m \\ x + y + 3z = 1 \end{array}\right\}$$

a) Discute el sistema según los valores de **m**

b) Resuelve el sistema para m = 6

Solución:

a) $|C| = m^2 - 5m$

$m^2 - 5m = 0 \Rightarrow m(m-5) = 0 \Rightarrow m = 0, m = 5$

Para todo valor de $m \neq 0$ y $m \neq 5$ se verifica que:

R(C) = R(A) = 3 = número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible determinado.

Se estudian los valores que son raíces de $|C|$

- Para m = 0 se tiene: R(C) = R(A) = 2 < número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible indeterminado.
- Para m = 5 se tiene: R(C) = 2 < R(A) = 3 y, por lo tanto, el sistema es incompatible.

b) Para m = 6 la solución del sistema es:

$$x = -12, y = 4, z = 3$$

44. Sea el sistema homogéneo:

$$\left.\begin{array}{r} x \quad + \quad\quad z = 0 \\ x + my + 2mz = 0 \\ 2x + my + (2m+3)z = 0 \end{array}\right\}$$

a) Calcula el valor de **m** para el que el sistema tenga soluciones distintas de la trivial.

b) Halla las soluciones.

Solución:

a) $|C| = 2m$

$2m = 0 \Rightarrow m = 0$

Para todo valor de $m \neq 0$, la solución es la trivial.

b) Para m = 0 se tiene:

R(C) = R(A) = 2 < número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible indeterminado.

La solución es: x = 0, z = 0

La solución, en ecuaciones paramétricas, es:

$$\left.\begin{array}{r} x = 0 \\ y = \lambda \\ z = 0 \end{array}\right\} \text{con } \lambda \in \mathbb{R}$$

45. Dado el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} 2x + y + z = 1 \\ x - y + z = 2 \end{array}\right\}$$

a) estudia su compatibilidad.

b) añade al sistema una ecuación de tal forma que el sistema resultante tenga solución única. Justifica la respuesta y encuentra dicha solución.

c) añade al sistema dado una ecuación de tal forma que el sistema resultante sea incompatible. Justifica la respuesta.

Solución:

a) R(C) = R(A) = 2 < número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible indeterminado.

b) $\left.\begin{array}{r} 2x + y + z = 1 \\ x - y + z = 2 \\ z = 0 \end{array}\right\}$

El sistema tiene como solución:

$$x = 1, y = -1, z = 0$$

c) Se añade una ecuación contradictoria con las otras dos; por ejemplo, sumando y cambiando el término independiente:

$$3x + 2z = 0$$

46. Se considera el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{r} x - y \quad\quad\quad = a \\ x \quad + \quad a^2z = 2a + 1 \\ x - y + a(a-1)z = 2a \end{array}\right\}$$

a) Discute el sistema según los valores del parámetro real **a**

b) Resuelve el sistema para a = 3

Solución:

a) $|C| = a^2 - a$

$a^2 - a = 0 \Rightarrow a(a-1) = 0 \Rightarrow a = 0, a = 1$

Para todo valor de $a \neq 0$ y $a \neq 1$ se verifica que:

R(C) = R(A) = 3 = número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible determinado.

Se estudian los valores que son raíces de |C|

• Para a = 0 se tiene:

R(C) = R(A) = 2 < número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible indeterminado.

• Para a = 1 se tiene:

R(C) = 2 < R(A) = 3 y, por lo tanto, el sistema es incompatible.

b) Para a = 3 la solución del sistema es:

$$x = 5/2, y = -1/2, z = 1/2$$

Para profundizar

47. Se considera el siguiente sistema de ecuaciones en las incógnitas x, y, z, t:

$$\left.\begin{array}{l} x + 2y + z = 0 \\ y + 2z + t = 0 \\ 2x + 2ky - t = 0 \end{array}\right\}$$

a) Encuentra los valores de **k** para los que el rango de la matriz de los coeficientes del sistema es 2

b) Resuelve el sistema anterior para k = 0

Solución:

a) Estudiando la matriz de los coeficientes por Gauss se obtiene que si k = 3/2, el R(C) = 2

b) Para k = 0, la solución es:

$$x = t/2, y = 0, z = -t/2$$

La solución en ecuaciones paramétricas es:

$$\left.\begin{array}{l} x = \dfrac{\lambda}{2} \\ y = 0 \\ x = -\dfrac{\lambda}{2} \\ t = \lambda \end{array}\right\} \text{con } \lambda \in \mathbb{R}$$

48. Se considera el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} \lambda x + 2y = 3 \\ -x + 2\lambda z = -1 \\ 3x - y - 7z = \lambda + 1 \end{array}\right\}$$

a) Halla todos los valores del parámetro λ para los que el sistema correspondiente tiene infinitas soluciones.

b) Resuelve el sistema para los valores de λ obtenidos en el apartado anterior.

c) Discute el sistema para los restantes valores de λ

Solución:

a) $|C| = 2\lambda^2 + 12\lambda - 14$

$2\lambda^2 + 12\lambda - 14 = 0 \Rightarrow \lambda^2 + 6\lambda - 7 = 0 \Rightarrow \lambda = -7, \lambda = 1$

Se estudian los valores que son raíces de |C|

• Para $\lambda = -7$ se tiene: R(C) = 2 < R(A) = 3 y, por lo tanto, el sistema es incompatible.

• Para $\lambda = 1$ se tiene: R(C) = R(A) = 2 < número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible indeterminado.

b) Para $\lambda = 1$ la solución del sistema es:

$$x = 1 + 2z, y = 1 - z$$

La solución, en ecuaciones paramétricas, es:

$$\left.\begin{array}{l} x = 1 + 2\lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = \lambda \end{array}\right\} \text{con } \lambda \in \mathbb{R}$$

c) Para todo valor de $\lambda \neq -7$ y $\lambda \neq 1$ se verifica que:

R(C) = R(A) = 3 = número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible determinado.

49. Discute el sistema, según el valor del parámetro **m,** y resuelve en los casos de compatibilidad.

$$\left.\begin{array}{l} 2x + 3y + z = 4 \\ 3x + y + mz = 6 \\ -2x - 10y - 2z = m - 4 \end{array}\right\}$$

Solución:

a) $|C| = 14m - 14$

$14m - 14 = 0 \Rightarrow m - 1 = 0 \Rightarrow m = 1$

Para todo valor de $m \neq 1$ se verifica que:

R(C) = R(A) = 3 = número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible determinado.

Se estudian los valores que son raíces de |C|

• Para m = 1 se tiene:

R(C) = 2 < R(A) = 3 y, por lo tanto, el sistema es incompatible.

b) Para $m \neq 1$ la solución del sistema es:

$$x = \frac{3m^2 + 27m - 28}{14(m-1)},\quad y = \frac{-m(2m-3)}{14(m-1)},\quad z = \frac{-m}{2(m-1)}$$

50. Dado el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{l} x + z = 1 \\ y + (a-1)z = 0 \\ x + (a-1)y + az = a \end{array}\right\}$$

a) discute el sistema según el valor del parámetro **a**

b) resuelve el sistema en todos los casos de compatibilidad.

Solución:

a) $|C| = -a^2 + 3a - 2$

$a^2 - 3a + 2 = 0 \Leftrightarrow a = 1, a = 2$

Para todo valor de $a \neq 1$ y $a \neq 2$ se verifica que:

R(C) = R(A) = 3 = número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible determinado.

Se estudian los valores que son raíces de $|C|$

- Para $a = 1$ se tiene:

  R(C) = R(A) = 2 < número de incógnitas y, por lo tanto, el sistema es compatible indeterminado.

- Para $a = 2$ se tiene:

  R(C) = 2 < R(A) = 3 y, por lo tanto, el sistema es incompatible.

b) Para $a = 1$ la solución es:

$x = 1 - z, y = 0$

La solución, en ecuaciones paramétricas, es:

$$\left.\begin{array}{l} x = 1 - \lambda \\ y = 0 \\ z = \lambda \end{array}\right\} \text{con } \lambda \in \mathbb{R}$$

Para $a \neq 1$ y $a \neq 2$, la solución es:

$$x = \frac{a-1}{a-2},\ y = \frac{a-1}{a-2},\ z = -\frac{1}{a-2}$$

Paso a paso

51. Discute el siguiente sistema:

$$\left.\begin{aligned} x + 2y + z &= 1 \\ 3x + y + 4z &= 5 \\ 2x - y + 3z &= 4 \end{aligned}\right\}$$

Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

52. Resolver matricialmente el siguiente sistema:

$$\left.\begin{aligned} x + 2y - z &= 0 \\ 2x + 5y &= 4 \\ x + 3y + 2z &= 5 \end{aligned}\right\}$$

Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

53. Discute, según los valores de **k,** el siguiente sistema:

$$\left.\begin{aligned} (1-k)x + y + z &= 0 \\ x + (1-k)y + z &= k \\ x + y + (1-k)z &= k^2 \end{aligned}\right\}$$

Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

54. **Internet.** Abre: **www.editorial-bruno.es** y elige **Matemáticas, curso** y **tema.**

Practica

55. Resuelve el sistema:

$$\left.\begin{aligned} 2x - y + z &= -8 \\ x + 3y - 2z &= 5 \\ 2x + y + 3z &= 4 \end{aligned}\right\}$$

Solución:

Ejercicio 55

$$\text{resolver}\begin{bmatrix} 2x - y + z = -8 \\ x + 3y - 2z = 5 \\ 2x + y + 3z = 4 \end{bmatrix} \rightarrow \{\{x=-3, y=4, z=2\}\}$$

Solución : x = −3, y = 4, z = 2

56. Considera el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{aligned} ax + y + z &= 4 \\ x - ay + z &= 1 \\ x + y + z &= a + 2 \end{aligned}\right.$$

a) Resuélvelo para el valor de **a** que lo haga compatible indeterminado.

b) Resuelve el sistema que se obtiene para a = 2

Solución:

Ejercicio 56

a) Resuélvelo para el valor de a que lo haga compatible indeterminado.

$$C(a) := \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & -a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow a \mapsto \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & -a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A(a) := \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a+2 \end{pmatrix} \rightarrow a \mapsto \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a+2 \end{pmatrix}$$

$$|C(a)| \rightarrow -a^2+1$$

$$\text{resolver}(-a^2+1=0) \rightarrow \{\{a=-1\}, \{a=1\}\}$$

$$C(-1) \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{rango}(C(-1)) \rightarrow 2$$

$$A(-1) \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{rango}(A(-1)) \rightarrow 2$$

Para a = −1, R(C) = R(A) = 2 < 3 = número de incógnitas.
Sistema compatible indeterminado.

$$C(1) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{rango}(C(1)) \rightarrow 2$$

$$A(1) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{rango}(A(1)) \rightarrow 3$$

Para a = 1, R(C) = 2 ≠ R(A) = 3
Sistema incompatible.
Es compatible indeterminado para a = − 1
Lo resolvemos para a = −1

$$\text{resolver}\begin{bmatrix} -x + y + z = 4 \\ x + y + z = 1 \\ x + y + z = 1 \end{bmatrix} \rightarrow \left\{\left[x=-\frac{3}{2}, y=-z+\frac{5}{2}, z=z\right]\right\}$$

b) Resuelve el sistema que se obtiene para a = 2

$$\text{resolver}\begin{bmatrix} 2x+y+z=4 \\ x-2y+z=1 \\ x+y+z=4 \end{bmatrix} \rightarrow \{\{x=0, y=1, z=3\}\}$$

Solución, x = 0, y = 1, z = 3

57. Discute, según los valores del parámetro **k,** el siguiente sistema:

$$\left.\begin{aligned} kx + y &= 1 \\ x + (k + 1)y &= 1 \\ x + ky &= 1 \end{aligned}\right\}$$

Solución:

Ejercicio 57

$C(k) = \begin{pmatrix} k & 1 \\ 1 & k+1 \\ 1 & k \end{pmatrix} \Rightarrow k \mapsto \begin{pmatrix} k & 1 \\ 1 & k+1 \\ 1 & k \end{pmatrix}$

$A(k) = \begin{pmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k+1 & 1 \\ 1 & k & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow k \mapsto \begin{pmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k+1 & 1 \\ 1 & k & 1 \end{pmatrix}$

$|A(k)| \Rightarrow k-1$

resolver$(k - 1 = 0) \Rightarrow \{\{k=1\}\}$

Para $k \neq 1$, $R(C) < R(A) = 3$, sistema incompatible.

Para $k = 1$

$C(1) \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

rango$(C(1)) \Rightarrow 2$

$A(1) \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

rango$(A(1)) \Rightarrow 2$

Si $k = 1$, $R(C) = R(A) = 2 =$ nº de incógnitas.

Sistema compatible determinado.

58. Clasifica el sistema siguiente según los valores del parámetro **k**

$$\left.\begin{aligned} kx + y - 2z &= 0 \\ -x - y + kz &= 1 \\ x + y + z &= k \end{aligned}\right\}$$

Solución:

Problema 58

$C(k) = \begin{pmatrix} k & 1 & -2 \\ -1 & -1 & k \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow k \mapsto \begin{pmatrix} k & 1 & -2 \\ -1 & -1 & k \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$A(k) = \begin{pmatrix} k & 1 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & k \end{pmatrix} \Rightarrow k \mapsto \begin{pmatrix} k & 1 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & k \end{pmatrix}$

$|C(k)| \Rightarrow -k^2+1$

resolver$(-k^2+1=0) \Rightarrow \{\{k=-1\},\{k=1\}\}$

Para $k \neq -1$, $k \neq 1$, $R(C) = R(A) = 3 =$ número de incógnitas.

Sistema heterogéneo compatible determinado.

$C(-1) \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

rango$(C(-1)) \Rightarrow 2$

$A(-1) \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

rango$(A(-1)) \Rightarrow 2$

$R(C) = R(A) = 2 < 3 =$ número de incógnitas.

Sistema compatible indeterminado.

$C(1) \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

rango$(C(1)) \Rightarrow 2$

$A(1) \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

rango$(A(1)) \Rightarrow 3$

$R(C) \neq R(A)$, sistema incompatible.

59. Dado el sistema homogéneo:

$$\left.\begin{aligned} x + ky - z &= 0 \\ kx - y + z &= 0 \\ (k + 1)x + y \phantom{{}+z} &= 0 \end{aligned}\right\}$$

averigua para qué valores de **k** tienen soluciones distintas de $x = y = z = 0$. Resuélvelo en tales casos.

Solución:

Problema 59

$\begin{vmatrix} 1 & k & -1 \\ k & -1 & 1 \\ k+1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow k^2-k-2$

resolver$(k^2-k-2=0) \Rightarrow \{\{k=-1\},\{k=2\}\}$

Tiene soluciones distintas de $x = y = z$ para $k \neq -1$, $k \neq 2$

Para $k = -1$

resolver$\begin{Bmatrix} x-y-z=0 \\ -x-y+z=0 \\ y=0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \{\{x=z, y=0, z=z\}\}$

Solución $x = z$, $y = 0$

Para $k = 2$

resolver$\begin{Bmatrix} x + 2y - z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \\ 3x + y = 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \left\{\left\{x=-\frac{1}{5}\cdot z, y=\frac{3}{5}\cdot z, z=z\right\}\right\}$

Solución $x = -z/5$, $y = 3z/5$

60. Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\left.\begin{array}{r} x - ay = 2 \\ ax - \ \ y = a + 1 \end{array}\right\}$$

determina para qué valor o valores de **a** el sistema tiene una solución en la que y = 2

Solución:

Problema 60

Resolvemos el sistema cuando y = 2

$$\text{resolver}\left\{\begin{matrix} x-2a=2 \\ a\cdot x-2=a+1 \end{matrix}\right\} \rightarrow \left\{\{a=1, x=4\}, \left\{a=-\frac{3}{2}, x=-1\right\}\right\}$$

Tiene la solución y = 2 cuando a = 1 o a = −3/2

61. Plantea y resuelve el sistema de ecuaciones dado por:

$$\begin{pmatrix} 1+3x & 2 \\ x & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Solución:

Problema 61

$$\begin{pmatrix} 1+3x & 2 \\ x & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 9\cdot x+2\cdot y+3 \\ 3\cdot x-y \end{pmatrix}$$

$$\text{resolver}\left\{\begin{matrix} 9x+2y+3=5 \\ 3x-y=4 \end{matrix}\right\} \rightarrow \left\{\left\{x=\frac{2}{3}, y=-2\right\}\right\}$$

La solución es: x = 2/3, y = − 2

62. Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

calcula dos números reales **x** e **y** tales que se verfique:

$$A + xA + yI = 0$$

siendo **I** la matriz unidad de orden 2 y **O** la matriz nula de orden 2

Solución:

Problema 62

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A + x\cdot A + y\cdot I \rightarrow \begin{pmatrix} 2\cdot x+y+2 & x+1 \\ 2\cdot x+2 & 3\cdot x+y+3 \end{pmatrix}$$

$$\text{resolver}\left\{\begin{matrix} 2x+y+2=0 \\ x+1=0 \\ 2x+2=0 \\ 3x+y+3=0 \end{matrix}\right\} \rightarrow \{\{x=-1, y=0\}\}$$

La solución es: x = −1, y = 0

63. Se considera el sistema:

$$\left\{\begin{array}{l} x - 2y + \qquad z = 1 \\ 3x - 5y + \qquad z = 4 \\ x - y + (a-2)z = 2 \end{array}\right.$$

a) Discutir el sistema para los distintos valores de **a**

b) Halla todas las soluciones para a = 3

Solución:

Problema 63

$$C(a) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & -5 & 1 \\ 1 & -1 & a-2 \end{pmatrix} \rightarrow a \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & -5 & 1 \\ 1 & -1 & a-2 \end{pmatrix}$$

$$|C(a)| \rightarrow a-1$$

$$\text{resolver}(|C(a)| = 0) \rightarrow \{\{a=1\}\}$$

Para a ≠ 1, sistema compatible determinado.

Para a = 1

$$C(1) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & -5 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{rango}(C(1)) \rightarrow 2$$

$$\text{rango}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 3 & -5 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow 2$$

Sistema compatible indeterminado.

b) Para a = 3

$$\text{resolver}\left\{\begin{matrix} x-2y+z=1 \\ 3x-5y+z=4 \\ x-y+z=2 \end{matrix}\right\} \rightarrow \{\{x=3, y=1, z=0\}\}$$