5 Programación lineal

1. Introducción a la programación lineal

■ Piensa y calcula

Escribe una función f(x, y) que calcule los ingresos que se obtienen al vender **x** chaquetas a 30 € e **y** pantalones a 20 €

Solución:

$f(x, y) = 30x + 20y$

● Aplica la teoría

1. Dado el recinto definido por el siguiente sistema de inecuaciones:

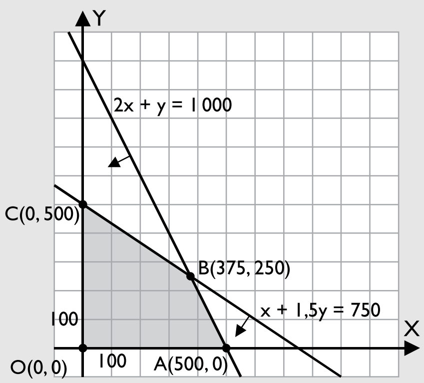
$$\left.\begin{array}{l} 2x + y \le 1\,000 \\ x + 1{,}5y \le 750 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{array}\right\}$$

a) represéntalo gráficamente.

b) halla sus vértices.

c) obtén el valor máximo de la función $f(x, y) = 15x + 12y$ en el recinto anterior, así como el punto en que lo alcanza.

Solución:



$O(0, 0) \Rightarrow f(0, 0) = 15 \cdot 0 + 12 \cdot 0 = 0$

$A(500, 0) \Rightarrow f(500, 0) = 15 \cdot 500 + 12 \cdot 0 = 7\,500$

$B(375, 250) \Rightarrow f(375, 250) = 15 \cdot 375 + 12 \cdot 250 =$
$= 8\,625$ **Máximo**

$C(0, 500) \Rightarrow f(0, 500) = 15 \cdot 0 + 12 \cdot 500 = 6\,000$

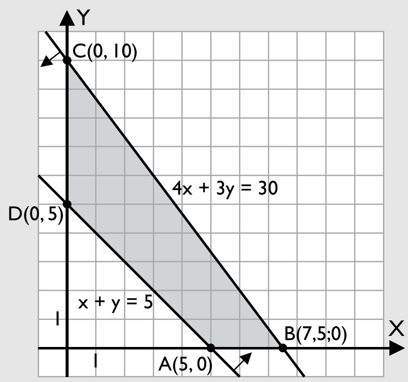
La solución óptima es B(375, 250)

2. Representa gráficamente la región factible determinada por las siguientes desigualdades:

$$\left.\begin{array}{l} x \ge 0 \\ y \ge 0 \\ x + y \ge 5 \\ 4x + 3y \le 30 \end{array}\right\}$$

Calcula la solución que hace mínima la función objetivo $z = x + 2y$ sometida a las restricciones anteriores.

Solución:



$A(5, 0) \Rightarrow f(5, 0) = 5 + 2 \cdot 0 = 5$ **Mínimo**

$B(7{,}5; 0) \Rightarrow f(7{,}5; 0) = 7{,}5 + 2 \cdot 0 = 7{,}5$

$C(0, 10) \Rightarrow f(0, 10) = 0 + 2 \cdot 10 = 20$

$D(0, 5) \Rightarrow f(0, 5) = 0 + 2 \cdot 5 = 10$

La solución óptima es A(5, 0)

2. Resolución de problemas de programación lineal

Piensa y calcula

Escribe la función objetivo que calcule los ingresos que se obtienen al vender **x** bicicletas de paseo a 200 € e **y** bicicletas de montaña a 150 €

Solución:
$f(x, y) = 200x + 150y$

Aplica la teoría

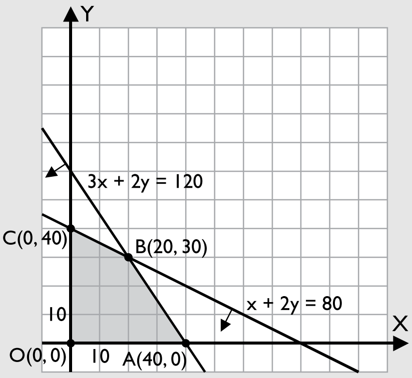
3. Un sastre tiene 80 m^2 de tejido A y 120 m^2 de tejido B. Un traje de caballero requiere 1 m^2 de A y 3 m^2 de B, y un vestido de señora 2 m^2 de cada tejido. Si la venta de un traje deja al sastre el mismo beneficio que la de un vestido, halla cuántos trajes y vestidos debe fabricar para obtener la máxima ganancia.

Solución:

a) Tabla con los datos del problema.

	Traje	Vestido	Restricciones	
Nº de unidades	x	y	$x \geq 0; y \geq 0$	
Tejido A	x	2y	$x + 2y \leq 80$	
Tejido B	3x	2y	$3x + 2y \leq 120$	
Beneficio	x	y	$f(x, y) = x + y$	Maximizar

b) Región factible.



c) Valores de la función objetivo en los vértices de la región factible.

$O(0, 0) \Rightarrow f(0, 0) = 0 + 0 = 0$

$A(40, 0) \Rightarrow f(40, 0) = 40 + 0 = 40$

$B(20, 30) \Rightarrow f(20, 30) = 20 + 30 = 50$ **Máximo**

$C(0, 40) \Rightarrow f(0, 40) = 0 + 40 = 40$

d) La solución óptima es B(20, 30)

4. Una empresa produce dos bienes, A y B. Tiene dos factorías y cada una de ellas produce los dos bienes en las cantidades por hora siguientes:

	Factoría 1	Factoría 2
Bien A	10 unidades/hora	20 unidades/hora
Bien B	25 unidades/hora	25 unidades/hora

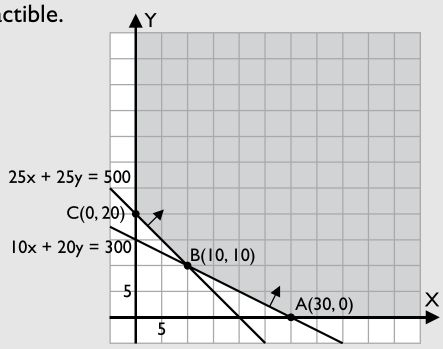
La empresa recibe un pedido de 300 unidades de A y 500 de B. Los costes de funcionamiento de las dos factorías son: 100 € por hora para la factoría 1 y 80 € por hora para la factoría 2. ¿Cuántas horas debe funcionar cada factoría para minimizar los costes de la empresa y satisfacer el pedido?

Solución:

a) Tabla con los datos del problema.

	Factoría 1	Factoría 2	Restricciones	
Tiempo (h)	x	y	$x \geq 0; y \geq 0$	
Bien A	10x	20y	$10x + 20y \geq 300$	
Bien B	25x	25y	$25x + 25y \geq 500$	
Costes	100x	80y	$f(x, y) = 100x + 80y$	Minimizar

b) Región factible.



c) Valores de la función objetivo en los vértices de la región factible.

A(30, 0) ⇒ f(30, 0) = 100 · 30 + 80 · 0 = 3 000

B(10, 10) ⇒ f(10, 10) = 100 · 10 + 80 · 10 = 1 800

C(0, 20) ⇒ f(0, 20) = 100 · 0 + 80 · 20 =
= 1 600 **Mínimo**

d) La solución óptima es C(0, 20)

5. Un vendedor de libros usados tiene en su tienda 90 libros de la colección Austral y 80 de la colección Alianza de bolsillo. Decide hacer dos tipos de lotes: el lote de tipo A con 3 libros de Austral y 1 de Alianza de bolsillo, que vende a 8 €, y el de tipo B con 1 libro de Austral y 2 de Alianza de bolsillo, que vende a 10 €

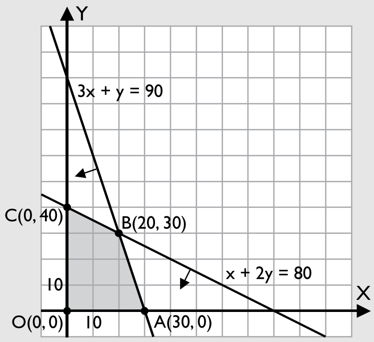
¿Cuántos lotes de cada tipo debe hacer el vendedor para maximizar su ganancia cuando los haya vendido todos?

Solución:

a) Tabla con los datos del problema.

	Lote A	Lote B	Restricciones	
Nº de lotes	x	y	x ≥ 0; y ≥ 0	
Austral	3x	y	3x + y ≤ 90	
Alianza	x	2y	x + 2y ≤ 80	
Ganancias	8x	10y	f(x, y) = 8x + 10y	Maximizar

b) Región factible.



c) Valores de la función objetivo en los vértices de la región factible.

O(0, 0) ⇒ f(0, 0) = 8 · 0 + 10 · 0 = 0

A(30, 0) ⇒ f(30, 0) = 8 · 30 + 10 · 0 = 240

B(20, 30) ⇒ f(20, 30) = 8 · 20 + 10 · 30 =
= 460 **Máximo**

C(0, 40) ⇒ f(0, 40) = 8 · 0 + 10 · 40 = 400

d) La solución óptima es B(20, 30)

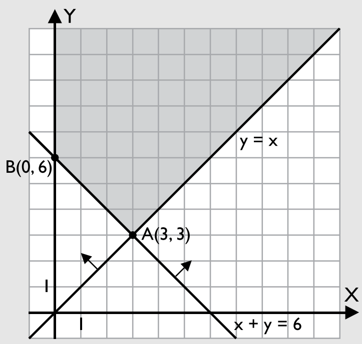
3. Número de soluciones

■ Piensa y calcula

Representa la región definida por las siguientes restricciones: x ≥ 0 y ≥ 0 x + y ≥ 6 y ≥ x

¿Está acotada?

Solución:



No está acotada.

Aplica la teoría

6. Dado el recinto definido por el siguiente sistema de inecuaciones:

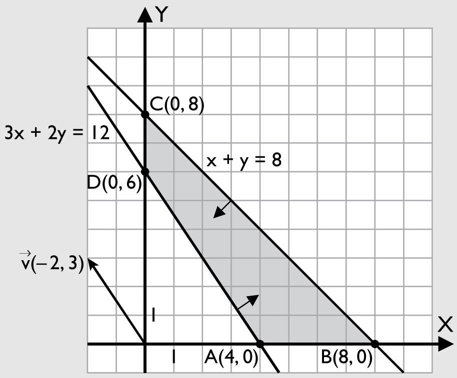
$$\left.\begin{array}{l} x + y \le 8 \\ 3x + 2y \ge 12 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{array}\right\}$$

minimiza en dicho recinto el valor de la función:

$$f(x, y) = 15x + 10y$$

Solución:

a) Región factible.



b) Valores de la función objetivo en los vértices de la región factible.

A(4, 0) ⇒ f(4, 0) = 15 · 4 + 10 · 0 = 60 **Mínimo**

B(8, 0) ⇒ f(8, 0) = 15 · 8 + 10 · 0 = 120

C(0, 8) ⇒ f(0, 8) = 15 · 0 + 10 · 8 = 80

D(0, 6) ⇒ f(0, 6) = 15 · 0 + 10 · 6 = 60 **Mínimo**

c) La solución se alcanza en los vértices A(4, 0) y D(0, 6); por tanto, también se alcanza en todos los puntos del lado que une los puntos A(4, 0) y D(0, 6), es decir, tiene infinitas soluciones.

Se observa gráficamente que el lado AD es paralelo al vector director de la función objetivo.

$\vec{v}(-10, 15) \parallel (-2, 3)$

7. Dado el recinto definido por el siguiente sistema de inecuaciones:

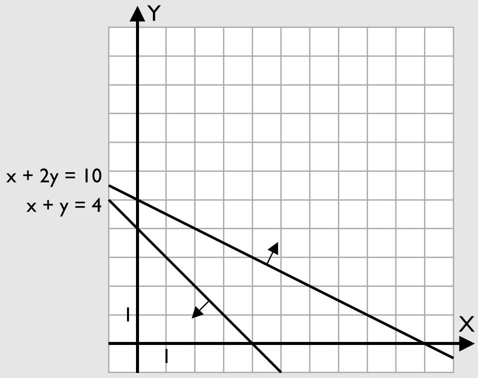
$$\left.\begin{array}{l} x + y \le 4 \\ x + 2y \ge 10 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{array}\right\}$$

minimiza en dicho recinto el valor de la función:

$$f(x, y) = 12x + 19y$$

Solución:

Región factible.



Se observa que la región factible es vacía, es decir, no hay ningún punto en el plano que verifique las restricciones del enunciado del problema.

8. Dado el recinto definido por el siguiente sistema de inecuaciones:

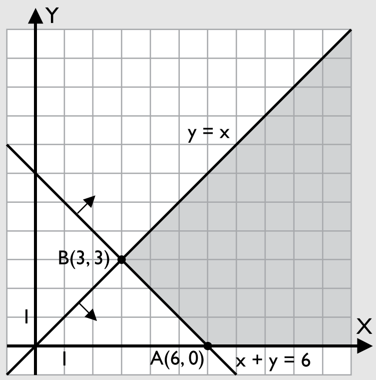
$$\left.\begin{array}{l} x + y \ge 6 \\ x \ge y \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{array}\right\}$$

maximiza en dicho recinto el valor de la función:

$$f(x, y) = 7x + 11y$$

Solución:

Región factible.



Se observa que la región factible no está acotada y, por tanto, nunca se alcanza en ella el valor máximo.

Preguntas tipo test

Contesta en tu cuaderno:

1 Representa gráficamente el conjunto de soluciones del sistema de inecuaciones:

$3x + 2y \geq 5;\ x - 2y \geq -1;\ 5x + 4y \leq 16;\ x - y \leq 5$

Determina los vértices de la región obtenida en el apartado anterior.

- ☐ A(5, 2); B(3, 1); C(9, 7/2); D(5, 5)
- ☐ A(13, –1); B(2, 3); C(1, –1)
- ☒ A(3, –2); B(4, –1); C(2, 3/2); D(1, 1)
- ☐ A(0, 0); B(3, 4); C(0, 9); D(7, 0)

2 En el ejercicio anterior calcula el punto donde la función $f(x, y) = 3x - y$ alcanza el mínimo en dicha región. Determina dicho valor mínimo.

- ☒ A(1, 1); el mínimo es 2
- ☐ A(3, 5); el mínimo es 23
- ☐ A(7, 4); el mínimo es 56
- ☐ A(9, 0); el mínimo es 1

3 Una hamburguesería necesita diariamente un mínimo de 180 kg de carne de cerdo y 120 kg de carne de ternera. Hay dos mataderos A y B que pueden suministrarle la carne requerida, pero ha de ser en lotes. El lote del matadero A contiene 6 kg de carne de cerdo y 2 kg de carne de ternera cuyo coste es 25 €, y el lote del matadero B contiene 4 kg de carne de cerdo y 3 kg de carne de ternera, cuyo coste es 35 €. Determina, justificando la respuesta, el número de lotes que debe adquirir la hamburguesería en cada matadero con objeto de garantizar sus necesidades diarias con el mínimo coste.

- ☐ 5 lotes del matadero A y 23 lotes del B
- ☐ 9 lotes del matadero A y 18 lotes del B
- ☐ 15 lotes del matadero A y 15 lotes del B
- ☒ 6 lotes del matadero A y 36 lotes del B

4 En el ejercicio anterior, calcula valor de dicho coste diario mínimo.

- ☐ El coste mínimo es de 2 600 €
- ☐ El coste mínimo es de 5 000 €
- ☒ El coste mínimo es de 1 410 €
- ☐ El coste mínimo es de 250 €

5 Un taller de bisutería produce sortijas sencillas a 4,5 € y sortijas adornadas a 6 €. Las máquinas condicionan la producción de modo que no pueden salir al día más de 400 sortijas sencillas, ni más de 300 adornadas, ni más de 500 en total.

Suponiendo que se vende toda la producción, ¿cuántas unidades de cada clase interesará fabricar para obtener los máximos ingresos?

- ☐ 150 sortijas sencillas y 150 adornadas.
- ☐ 250 sortijas sencillas y 200 adornadas.
- ☒ 200 sortijas sencillas y 300 adornadas.
- ☐ 300 sortijas sencillas y 250 adornadas.

6 En el ejercicio anterior, calcula los ingresos máximos.

- ☒ 2 700 €
- ☐ 3 000 €
- ☐ 1 000 €
- ☐ 10 000 €

7 En un almacén de electrodomésticos hay neveras y lavadoras, y pueden almacenarse hasta un total de 180 unidades. Para atender adecuadamente la demanda de los clientes, deben existir al menos 30 lavadoras, y el número de neveras debe ser, al menos, igual al número de lavadoras más 20. Si el costo de cada nevera es de 450 €, y del de cada lavadora, de 375 €, ¿cuántas unidades de cada electrodoméstico se han de almacenar minimizando los costes totales.

- ☐ 25 neveras y 10 lavadoras.
- ☐ 75 neveras y 20 lavadoras.
- ☐ 40 neveras y 40 lavadoras.
- ☒ 50 neveras y 30 lavadoras.

8 En el ejercicio anterior, clacula los costes mínimos.

- ☒ 33 750 €
- ☐ 10 000 €
- ☐ 50 000 €
- ☐ 25 000 €

9 Un profesor ha dado a sus alumnos una lista de problemas para que resuelvan, como máximo, 70 de ellos. Los problemas están clasificados en dos grupos. Los del grupo A valen 5 puntos cada uno, y los del B, 7 puntos. Para resolver un problema del tipo A, se necesitan 2 minutos, y para resolver un problema del tipo B, 3 minutos. Si los alumnos disponen de dos horas y media para resolver los problemas, ¿cuántos problemas de cada tipo habría que hacer para obtener la puntuación máxima? ¿Cuál es dicha puntuación máxima?

- ☐ 25 problemas del grupo A y 70 del B
- ☐ 35 problemas del grupo A y 53 del B
- ☐ 65 problemas del grupo A y 10 del B
- ☒ 60 problemas del grupo A y 10 del B

10 En el ejercicio anterior, calcula la puntuación máxima.

- ☐ 500 puntos
- ☐ 400 puntos
- ☒ 370 puntos
- ☐ 200 puntos

1. Introducción a la programación lineal

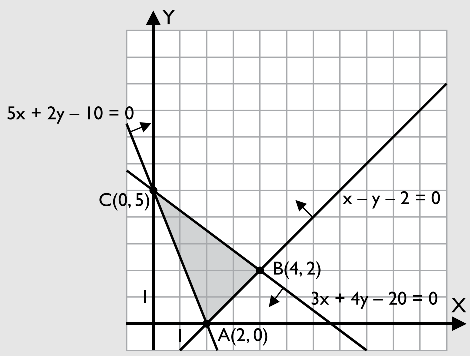
9. Sea el recinto definido por las siguientes inecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} 5x + 2y - 10 \geq 0 \\ x - y - 2 \leq 0 \\ 3x + 4y - 20 \leq 0 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array}\right\}$$

a) Dibuja dicho recinto y determina sus vértices.

b) Determina en qué punto de ese recinto alcanza la función $f(x, y) = 4x + 3y$ el máximo valor.

Solución:



$A(2, 0) \Rightarrow f(2, 0) = 4 \cdot 2 + 3 \cdot 0 = 8$

$B(4, 2) \Rightarrow f(4, 2) = 4 \cdot 4 + 3 \cdot 2 = 22$ **Máximo**

$C(0, 5) \Rightarrow f(0, 5) = 4 \cdot 0 + 3 \cdot 5 = 15$

La solución óptima es $B(4, 2)$

10. Dado el recinto definido por el siguiente sistema de inecuaciones:

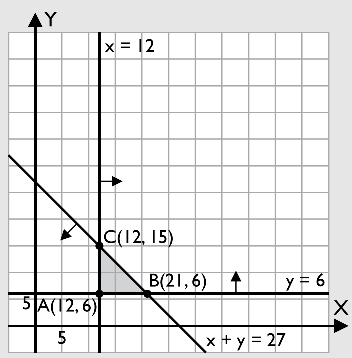
$$\left.\begin{array}{l} x + y \leq 27 \\ x \geq 12 \\ y \geq 6 \end{array}\right\}$$

a) represéntalo gráficamente.

b) determina los vértices de ese recinto.

c) ¿cuáles son los valores máximo y mínimo de la función $f(x, y) = 90x + 60y$ en el recinto anterior? ¿En qué puntos alcanza dichos valores?

Solución:



$A(12, 6) \Rightarrow f(12, 6) = 90 \cdot 12 + 60 \cdot 6 = 1\,440$ **Mínimo**

$B(21, 6) \Rightarrow f(21, 6) = 90 \cdot 21 + 60 \cdot 6 = 2\,250$ **Máximo**

$C(12, 15) \Rightarrow f(12, 15) = 90 \cdot 12 + 60 \cdot 15 = 1\,980$

La solución óptima del máximo es $B(21, 6)$

La solución óptima del mínimo es $A(12, 6)$

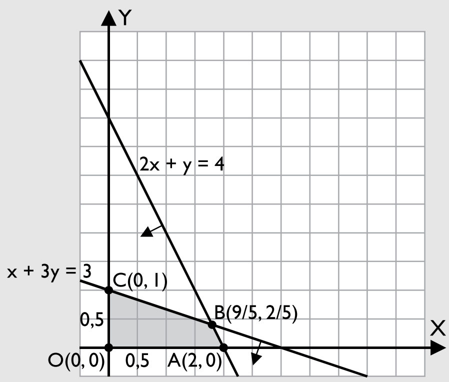
11. Sea el siguiente sistema de inecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} x + 3y \leq 3 \\ 2x + y \leq 4 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array}\right\}$$

a) Dibuja el conjunto de puntos definidos por las inecuaciones.

b) Maximiza en dicho conjunto la función objetivo $z = 2x + 3y$

Solución:



$O(0, 0) \Rightarrow f(0, 0) = 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 = 0$

$A(2, 0) \Rightarrow f(2, 0) = 2 \cdot 2 + 3 \cdot 0 = 4$

$B(9/5, 2/5) \Rightarrow f(9/5, 2/5) = 2 \cdot 9/5 + 3 \cdot 2/5 =$
$= 4{,}8$ **Máximo**

$C(0, 1) \Rightarrow f(0, 1) = 2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 = 3$

La solución óptima es $B(9/5, 2/5)$

12. Dada la función objetivo $f(x, y) = 2x + 3y$, sujeta a las restricciones siguientes:

$3x + y \leq 10$

$x + 2y \leq 8$

$x \geq 0$

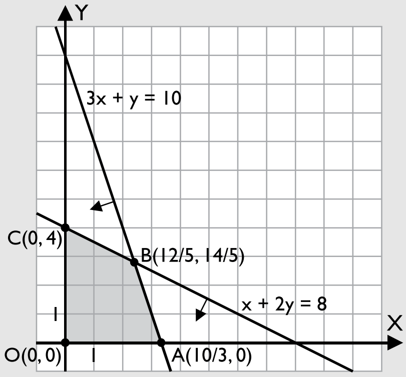
$y \geq 0$

a) representa la región factible.

b) halla los valores de **x** e **y** que hacen máxima la función objetivo.

c) determina los valores **x** e **y** que minimizan la función objetivo.

Solución:



O(0, 0) ⇒ f(0, 0) = 2 · 0 + 3 · 0 = 0 **Mínimo**

A(10/3, 0) ⇒ f(10/3, 0) = 2 · 10/3 + 3 · 0 = 20/3 = 6,67

B(12/5, 14/5) ⇒ f(12/5, 14/5) = 2 · 12/5 + 3 · 14/5 =
= 13,2 **Máximo**

C(0, 4) ⇒ f(0, 4) = 2 · 0 + 3 · 4 = 12

La solución óptima del mínimo es O(0, 0)

La solución óptima del máximo es B(12/5, 14/5)

2. Resolución de problemas de programación lineal

13. Un artesano fabrica collares y pulseras. Hacer un collar lleva dos horas, y hacer una pulsera una hora. El material de que dispone no le permite hacer más de 50 piezas. Como mucho, el artesano puede dedicar al trabajo 80 horas. Por cada collar gana 5 €, y por cada pulsera, 4 €. El artesano desea determinar el número de collares y pulseras que debe fabricar para optimizar sus beneficios.

a) Expresa la función objetivo y las restricciones del problema.

b) Representa gráficamente el recinto definido.

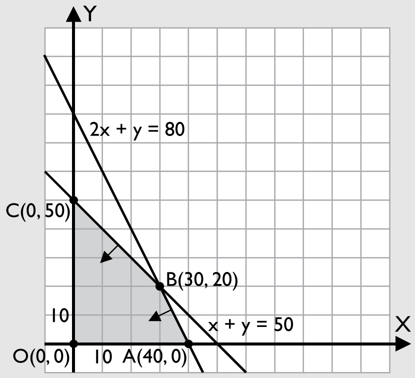
c) Obtén el número de collares y pulseras correspondientes al máximo beneficio.

Solución:

a) Tabla con los datos del problema.

	Collares	Pulseras	Disponible	
Número	x	y	x ≥ 0; y ≥ 0	
Material	x	y	x + y ≤ 50	
Tiempo	2x	y	2x + y ≤ 80	
Beneficio	5x	4y	f(x, y) = 5x + 4y	Maximizar

b) Región factible.



c) Valores de la función objetivo en los vértices de la región factible.

O(0, 0) ⇒ f(0, 0) = 5 · 0 + 4 · 0 = 0

A(40, 0) ⇒ f(40, 0) = 5 · 40 + 4 · 0 = 200

B(30, 20) ⇒ f(30, 20) = 5 · 30 + 4 · 20 =
= 230 **Máximo**

C(0, 50) ⇒ f(0, 50) = 5 · 0 + 4 · 50 = 200

d) La solución óptima es B(30, 20)

14. Un ganadero tiene que elaborar un pienso a partir de dos ingredientes nutritivos: A y B. Los mínimos que necesita son 30 unidades de A y 32 unidades de B. En el mercado se venden sacos de dos marcas que contienen A y B, cuyos contenidos y precios se dan en la tabla siguiente:

Marca	Unidades de A	Unidades de B	Precio del saco
I	3	1	9 €
II	1	4	12 €

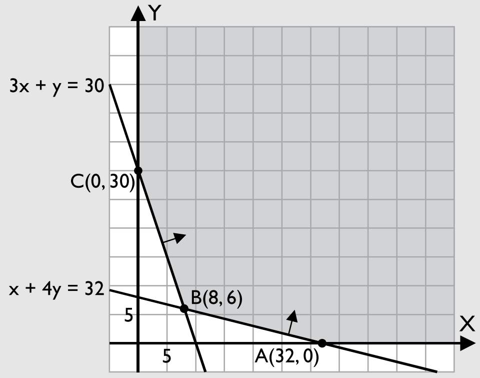
¿Cuántos sacos de cada marca tiene que comprar el ganadero para elaborar este pienso con el mínimo coste?

Solución:

a) Tabla con los datos del problema.

	Marca I	Marca II	Restricciones	
Nº de sacos	x	y	$x \geq 0; y \geq 0$	
Unidades de A	3x	y	$3x + y \geq 30$	
Unidades de B	x	4y	$x + 4y \geq 32$	
Coste	9x	12y	$f(x, y) = 9x + 12y$	Minimizar

b) Región factible.



c) Valores de la función objetivo en los vértices de la región factible.

$A(32, 0) \Rightarrow f(32, 0) = 9 \cdot 32 + 12 \cdot 0 = 288$

$B(8, 6) \Rightarrow f(8, 6) = 9 \cdot 8 + 12 \cdot 6 = 144$ **Mínimo**

$C(0, 30) \Rightarrow f(0, 30) = 9 \cdot 0 + 12 \cdot 30 = 360$

d) La solución óptima es B(8, 6)

15. Una fábrica produce confitura de albaricoque y confitura de ciruela. El doble de la producción de confitura de ciruela es menor o igual que la producción de confitura de albaricoque más 800 unidades. Además, el triple de la producción de confitura de albaricoque más el doble de la producción de confitura de ciruela es menor o igual que 2 400 unidades.

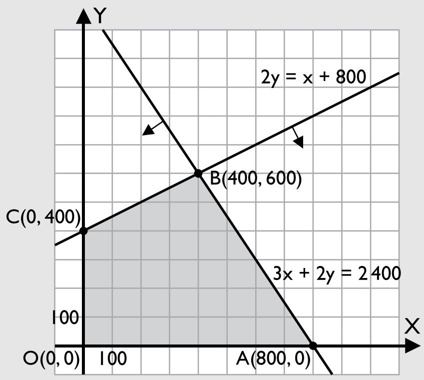
Cada unidad de confitura de albaricoque produce un beneficio de 60 €, y cada unidad de confitura de ciruela 80 €. ¿Cuántas unidades de cada tipo de confitura, se tienen que producir para obtener un beneficio máximo?

Solución:

a) Tabla con los datos del problema.

	Confitura de albaricoque	Confitura de ciruela	Restricciones	
Nº de unidades	x	y	$x \geq 0; y \geq 0$	
Condición 1	x	2y	$2y \leq x + 800$	
Condición 2	3x	2y	$3x + 2y \leq 2400$	
Beneficios	60x	80y	$f(x, y) = 60x + 80y$	Maximizar

b) Región factible.



c) Valores de la función objetivo en los vértices de la región factible.

$O(0, 0) \Rightarrow f(0, 0) = 60 \cdot 0 + 80 \cdot 0 = 0$

$A(800, 0) \Rightarrow f(800, 0) = 60 \cdot 800 + 80 \cdot 0 = 48\,000$

$B(400, 600) \Rightarrow f(400, 600) = 60 \cdot 400 + 80 \cdot 600 =$
$= 72\,000$ **Máximo**

$C(0, 400) \Rightarrow f(0, 400) = 60 \cdot 0 + 80 \cdot 400 = 32\,000$

d) La solución óptima es B(400, 600)

16. Una empresa que sirve comidas preparadas tiene que diseñar un menú utilizando dos ingredientes. El ingrediente A contiene 35 g de grasas y 150 kilocalorías por cada 100 gramos de ingrediente, mientras que el ingrediente B contiene 15 g de grasas y 100 kilocalorías por cada 100 g. El coste es de 1,5 € por cada 100 g del ingrediente A y de 2 € por cada 100 g del ingrediente B

El menú que hay que diseñar debería contener no más de 30 g de grasas y, al menos, 110 kilocalorías por cada 100 g de alimento. Se pide determinar las proporciones de cada uno de los ingredientes que se emplearán en el menú, de manera que su coste sea lo más reducido posible.

a) Indica la expresión de las restricciones y la función objetivo del problema.

b) Representa gráficamente la región delimitada por las restricciones.

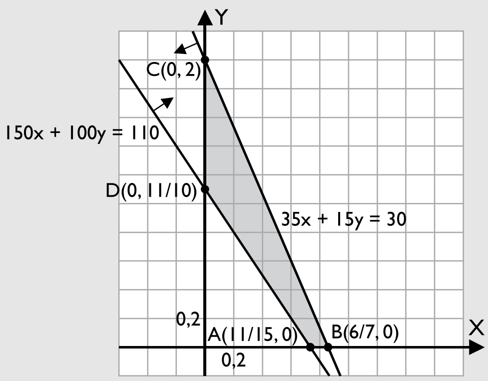
c) Calcula el porcentaje óptimo de cada uno de los ingredientes que se incluirán en el menú.

Solución:

a) Tabla con los datos del problema.

	Ingrediente A	Ingrediente B	Restricciones	
Unidades de 100 g	x	y	$x \geq 0; y \geq 0$	
Grasa	35x	15y	$35x + 15y \leq 30$	
Kilocalorías	150x	100y	$150x + 100y \geq 110$	
Coste	1,5x	2y	$f(x, y) = 1{,}5x + 2y$	Minimizar

b) Región factible.



c) Valores de la función objetivo en los vértices de la región factible.

$A(11/15, 0) \Rightarrow f(11/15, 0) = 1{,}5 \cdot 11/15 + 2 \cdot 0 =$
$= 1{,}1$ **Mínimo**

$B(6/7, 0) \Rightarrow f(6/7, 0) = 1{,}5 \cdot 6/7 + 2 \cdot 0 = 1{,}29$

$C(0, 2) \Rightarrow f(0, 2) = 1{,}5 \cdot 0 + 2 \cdot 2 = 4$

$D(0, 11/10) \Rightarrow f(0, 11/10) = 1{,}5 \cdot 0 + 2 \cdot 11/10 =$
$= 2{,}22$

d) La solución óptima es B(11/5, 0)

3. Número de soluciones

17. Dado el recinto definido por el siguiente sistema de inecuaciones:

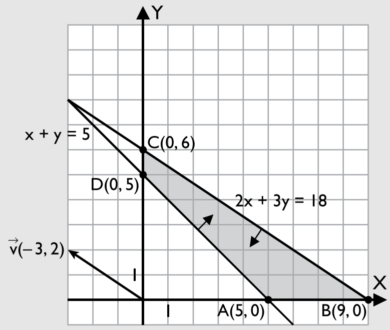
$$\left.\begin{array}{l} x + y \geq 5 \\ 2x + 3y \leq 18 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array}\right\}$$

maximiza en dicho recinto el valor de la función:

$$f(x, y) = 16x + 24y$$

Solución:

a) Región factible.



b) Valores de la función objetivo en los vértices de la región factible.

$A(5, 0) \Rightarrow f(5, 0) = 16 \cdot 5 + 24 \cdot 0 = 80$

$B(9, 0) \Rightarrow f(9, 0) = 16 \cdot 9 + 24 \cdot 0 = 144$ **Máximo**

$C(0, 6) \Rightarrow f(0, 6) = 16 \cdot 0 + 24 \cdot 6 = 144$ **Máximo**

$D(0, 5) \Rightarrow f(0, 5) = 16 \cdot 0 + 24 \cdot 5 = 120$

c) La solución se alcanza en los vértices B(9, 0) y C(0, 6); por tanto, también se alcanza en todos los puntos del lado que une los puntos B(9, 0) y C(0, 6), es decir, tiene infinitas soluciones.

Se observa gráficamente que el lado BC es paralelo al vector director de la función objetivo.

$\vec{v}(-24, 16) \parallel (-3, 2)$

18. Dado el recinto definido por el siguiente sistema de inecuaciones:

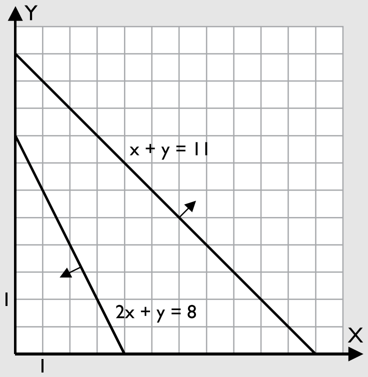
$$\left.\begin{array}{l} x + y \geq 11 \\ 2x + y \leq 8 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array}\right\}$$

minimiza en dicho recinto el valor de la función:

$$f(x, y) = 5x + 7y$$

Solución:

a) Región factible.



Se observa que la región factible es vacía, es decir, no hay ningún punto en el plano que verifique las restricciones del enunciado del problema.

19. Dado el recinto definido por el siguiente sistema de inecuaciones:

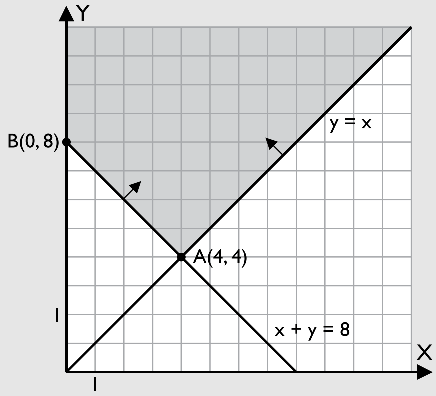
$$\left.\begin{array}{l} x + y \geq 8 \\ x \leq y \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array}\right\}$$

maximiza en dicho recinto el valor de la función:

$$f(x, y) = 23x + 14y$$

Solución:

a) Región factible.



Se observa que la región factible no está acotada y, por tanto, nunca se alcanza en ningún punto de ella el valor máximo.

Para ampliar

20. Dado el recinto definido por el siguiente sistema de inecuaciones:

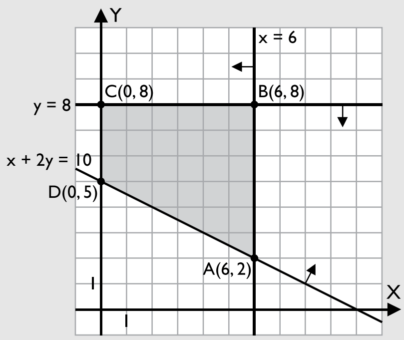
$$\left.\begin{array}{l} x \geq 6 \\ y \leq 8 \\ x + 2y \geq 10 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array}\right\}$$

a) represéntalo gráficamente.

b) calcula sus vértices.

c) calcula el máximo de la función f(x, y) = 20x + 60y en dicho recinto.

Solución:



$A(6, 2) \Rightarrow f(6, 2) = 20 \cdot 6 + 60 \cdot 2 = 240$

$B(6, 8) \Rightarrow f(6, 8) = 20 \cdot 6 + 60 \cdot 8 = 600$ **Máximo**

$C(0, 8) \Rightarrow f(0, 8) = 20 \cdot 0 + 60 \cdot 8 = 480$

$D(0, 5) \Rightarrow f(0, 5) = 20 \cdot 0 + 60 \cdot 5 = 300$

La solución óptima es B(6, 8)

21. Dado el recinto definido por el siguiente sistema de inecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} x + y \le 11 \\ 40x + 30y \ge 360 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{array}\right\}$$

a) represéntalo gráficamente.

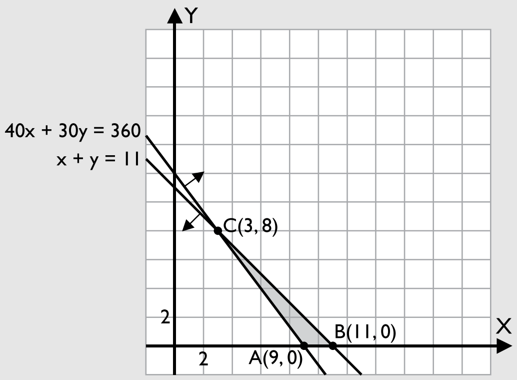
b) calcula los vértices de ese recinto.

c) obtén en dicho recinto el valor máximo y el valor mínimo de la función dada por

$$f(x, y) = 10\,000x + 7\,000y$$

y di en qué puntos se alcanzan.

Solución:



$A(9, 0) \Rightarrow f(9, 0) = 10\,000 \cdot 9 + 7\,000 \cdot 0 = 90\,000$

$B(11, 0) \Rightarrow f(11, 0) = 10\,000 \cdot 11 + 7\,000 \cdot 0 =$
$= 110\,000$ **Máximo**

$C(3, 8) \Rightarrow f(3, 8) = 10\,000 \cdot 3 + 7\,000 \cdot 8 =$
$= 86\,000$ **Mínimo**

La solución óptima máxima es B(11, 0)

La solución óptima mínima es B(3, 8)

22. Sea P el polígono de vértices O(0, 0), A(6, 0), B(8, 3), C(4, 8) y D(0, 6). Averigua en qué puntos del polígono alcanza la función $f(x, y) = 2x + 3y$ los valores máximo y mínimo.

Solución:

$O(0, 0) \Rightarrow f(0, 0) = 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 = 0$ **Mínimo**

$A(6, 0) \Rightarrow f(6, 0) = 2 \cdot 6 + 3 \cdot 0 = 12$

$B(8, 3) \Rightarrow f(8, 3) = 2 \cdot 8 + 3 \cdot 3 = 25$

$C(4, 8) \Rightarrow f(4, 8) = 2 \cdot 4 + 3 \cdot 8 = 32$ **Máximo**

$D(0, 6) \Rightarrow f(0, 6) = 2 \cdot 0 + 3 \cdot 6 = 18$

La solución óptima en la que es máximo es B(4, 8), y en la que es mínimo, O(0, 0)

23. Dado el recinto definido por el siguiente sistema de inecuaciones:

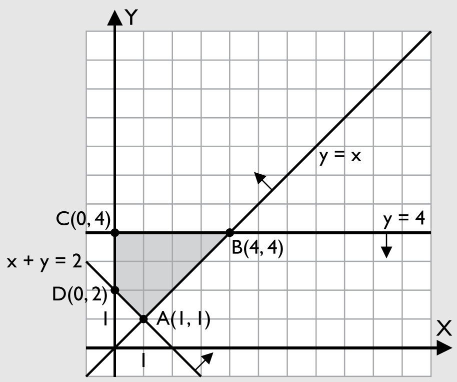
$$\left.\begin{array}{l} x + y \ge 2 \\ x - y \le 0 \\ y \le 4 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{array}\right\}$$

a) represéntalo gráficamente.

b) calcula los vértices de ese recinto.

c) determina el máximo y el mínimo de la función $f(x, y) = 12x + 4y$ en el recinto anterior.

Solución:



$A(1, 1) \Rightarrow f(1, 1) = 12 \cdot 1 + 4 \cdot 1 = 16$

$B(4, 4) \Rightarrow f(4, 4) = 12 \cdot 4 + 4 \cdot 4 = 64$ **Máximo**

$C(0, 4) \Rightarrow f(0, 4) = 12 \cdot 0 + 4 \cdot 4 = 16$

$D(0, 2) \Rightarrow f(0, 2) = 12 \cdot 0 + 4 \cdot 2 = 8$ **Mínimo**

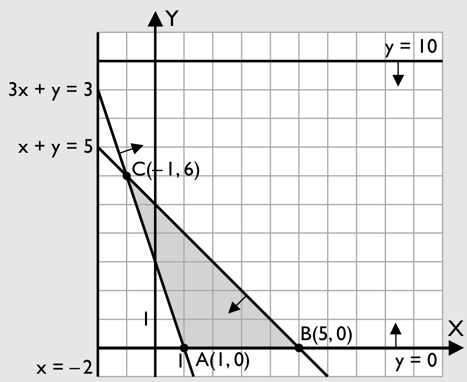
La solución óptima máxima es B(4, 4)

La solución óptima mínima es D(0, 2)

24. Determina los valores máximo y mínimo de la función $z = 3x + 4y$, sujeta a las restricciones:

$$\left.\begin{array}{l} 3x + y \ge 3 \\ x + y \le 5 \\ x \ge -2 \\ y \le 10 \\ y \ge 0 \end{array}\right\}$$

Solución:



A(1, 0) ⇒ f(1, 0) = 3 · 1 + 4 · 0 = 3 **Mínimo**

B(5, 0) ⇒ f(5, 0) = 3 · 5 + 4 · 0 = 15

C(– 1, 6) ⇒ f(– 1, 6) = 3 · (– 1) + 4 · 6 = 21 **Máximo**

La solución óptima máxima es C(– 1, 6)

La solución óptima mínima es A(1, 0)

25. Sea el conjunto de restricciones siguiente:

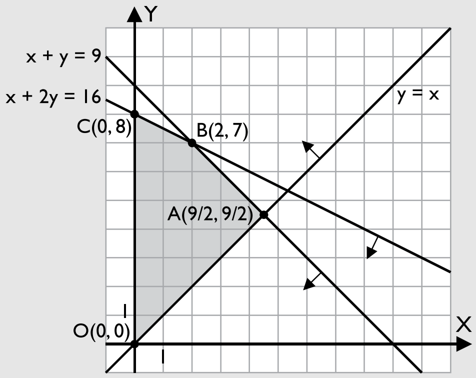
$$\left.\begin{array}{l} x + y \le 9 \\ x - y \le 0 \\ x + 2y \le 16 \\ y \ge 0 \end{array}\right\}$$

a) Dibuja la región factible determinada por dichas restricciones.

b) Calcula los vértices de dicha región.

c) Obtén los puntos en los que presenta el máximo y el mínimo la función f(x, y) = x + 2y

Solución:



O(0, 0) ⇒ f(0, 0) = 0 + 2 · 0 = 0 **Mínimo**

A(9/2, 9/2) ⇒ f(9/2, 9/2) = 9/2 + 2 · 9/2= 13,5

B(2, 7) ⇒ f(2, 7) = 2 + 2 · 7 = 16 **Máximo**

C(0, 8) ⇒ f(0, 8) = 0 + 2 · 8 = 16 **Máximo**

La solución óptima máxima son los vértices B(2, 7) y C(0, 8); por tanto, también lo son todos los puntos del segmento de extremos B y C

La solución óptima mínima es O(0, 0)

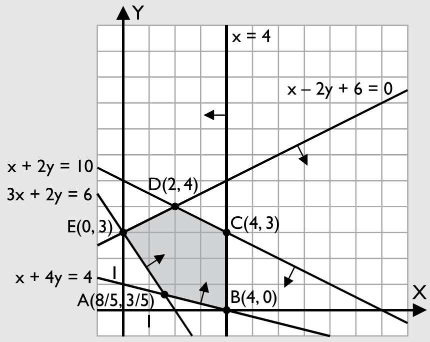
26. Se considera la función f(x, y) = 2x + 4y, sujeta a las siguientes restricciones:

$$\left.\begin{array}{l} 3x + 2y \ge 6 \\ x + 4y \ge 4 \\ x - 2y + 6 \ge 0 \\ x + 2y \le 10 \\ x \le 4 \end{array}\right\}$$

a) Representa la región del plano determinada por el conjunto de restricciones.

b) Calcula los puntos de dicha región en los que la función f(x, y) alcanza su valor máximo y su valor mínimo.

Solución:



A(8/5, 3/5) ⇒ f(8/5, 3/5) = 2 · 8/5 + 4 · 3/5 = 5,6 **Mínimo**

B(4, 0) ⇒ f(4, 0) = 2 · 4 + 4 · 0 = 8

C(4, 3) ⇒ f(4, 3) = 2 · 4 + 4 · 3 = 20 **Máximo**

D(2, 4) ⇒ f(2, 4) = 2 · 2 + 4 · 4 = 20 **Máximo**

E(0, 3) ⇒ f(0, 3) = 2 · 0 + 4 · 3 = 12

La solución óptima máxima son los vértices C(4, 3) y D(2, 4); por tanto, también lo son todos los puntos del segmento de extremos C y D

La solución óptima mínima es A(8/5, 3/5)

27. Dado el recinto definido por el siguiente sistema de inecuaciones:

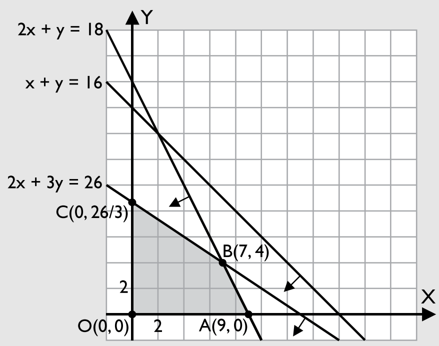
$$\left.\begin{array}{l} 2x + y \le 18 \\ 2x + 3y \le 26 \\ x + y \le 16 \\ x \ge 0;\ y \ge 0 \end{array}\right\}$$

a) represéntalo gráficamente.

b) calcula los vértices del recinto.

c) obtén en dicho recinto el valor máximo y el valor mínimo de la función f(x, y) = 5x + 3y. Halla en qué puntos se alcanzan.

Solución:



O(0, 0) ⇒ f(0, 0) = 5 · 0 + 3 · 0 = 0 **Mínimo**

A(9, 0) ⇒ f(9, 0) = 5 · 9 + 3 · 0 = 45

B(7, 4) ⇒ f(7, 4) = 5 · 7 + 3 · 4 = 47 **Máximo**

C(0, 26/3) ⇒ f(0, 26/3) = 5 · 0 + 3 · 26/3 = 26

La solución óptima máxima es B(7, 4)

La solución óptima mínima es O(0, 0)

Problemas

28. Un granjero desea crear una granja de pollos de dos razas, A y B. Dispone de 9 000 € para invertir y de un espacio con una capacidad limitada para 7 000 pollos. Cada pollo de la raza A le cuesta 1 € y obtiene con él un beneficio de 1 €, y cada pollo de la raza B le cuesta 2 € y el beneficio es de 1,4 € por unidad. Si por razones comerciales el número de pollos de la raza B no puede ser superior a los de la raza A, determina, justificando la respuesta:

a) ¿qué cantidad de ambas razas debe comprar el granjero para obtener un beneficio máximo?

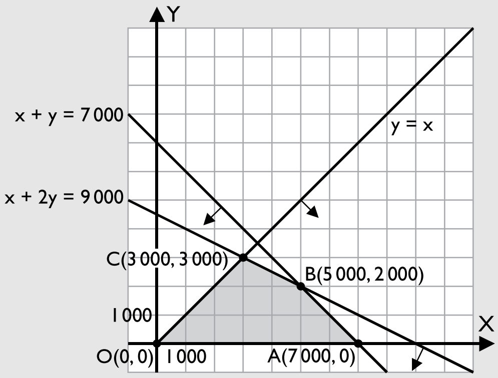
b) ¿cuál será el valor de dicho beneficio?

Solución:

a) Tabla con los datos del problema.

	Raza A	Raza B	Restricciones	
Nº de unidades	x	y	$x \geq 0; y \geq 0$	
Capacidad	x	y	$x + y \leq 7\,000$	
Coste inicial	x	2y	$x + 2y \leq 9\,000$	
Razones comerciales	x	y	$y \leq x$	
Beneficios	x	1,4y	$f(x, y) = x + 1,4y$	Maximizar

b) Región factible.



c) Valores de la función objetivo en los vértices de la región factible.

$O(0, 0) \Rightarrow f(0, 0) = 0 + 1,4 \cdot 0 = 0$

$A(7\,000, 0) \Rightarrow f(7\,000, 0) = 7\,000 + 1,4 \cdot 0 = 7\,000$

$B(5\,000, 2\,000) \Rightarrow f(5\,000, 2\,000) =$
$= 5\,000 + 1,4 \cdot 2\,000 = 7\,800$ **Máximo**

$C(3\,000, 3\,000) \Rightarrow f(3\,000, 3\,000) =$
$= 3\,000 + 1,4 \cdot 3\,000 = 7\,200$

d) La solución óptima es B(500, 2000)

a) Debe comprar 5 000 pollos de la raza A y 2 000 pollos de la raza B

b) 7 800 €

29. Un vendedor dispone de dos tipos de pienso, A y B, para alimentar ganado. Si mezcla a partes iguales los dos piensos, obtiene una mezcla que vende a 0,15 €/kg; si la proporción de la mezcla es de una parte de A por 3 de B, vende la mezcla resultante a 0,1 €/kg. El vendedor dispone de 100 kg de pienso del tipo A y de 210 kg del tipo B. Desea hacer las dos mezclas de modo que sus ingresos por venta sean máximos.

a) Plantea el problema y dibuja la región factible.

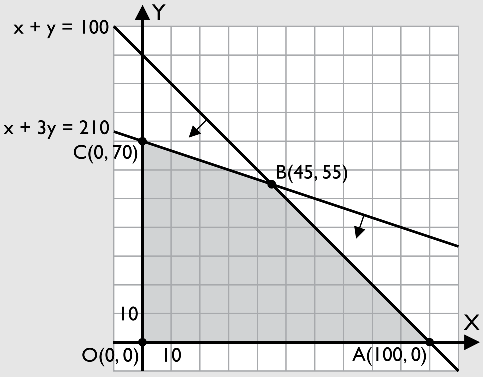
b) Halla cuántos kilos de cada mezcla deben producirse para maximizar los ingresos, y calcula dicho ingreso.

Solución:

a) Tabla con los datos del problema.

	Mezcla 1 a 1	Mezcla 1 a 3	Restricciones	
Nº de kg	x	y	$x \geq 0; y \geq 0$	
Pienso tipo A	x	y	$x + y \leq 100$	
Pienso tipo B	x	3y	$x + 3y \leq 210$	
Ingresos	0,15x	0,1y	$f(x, y) = 0,15x + 0,1y$	Maximizar

b) Región factible.



c) Valores de la función objetivo en los vértices de la región factible.

O(0, 0) ⇒ f(0, 0) = 0,15 · 0 + 0,1 · 0 = 0

A(100, 0) ⇒ f(100, 0) = 0,15 · 100 + 0,1 · 0 = = 15 **Máximo**

B(45, 55) ⇒ f(45, 55) = 0,15 · 45 + 0,1 · 55 = 12,25

C(0, 70) ⇒ f(0, 70) = 0,15 · 0 + 0,1 · 70 = 7

d) La solución óptima es B(45, 55), 45 kg de la mezcla 1 de 1 y 55 kg de la mezcla 1 de 3

30. Los alumnos de un centro educativo pretenden vender dos tipos de lotes, A y B, para sufragar los gastos del viaje de estudios. Cada lote de tipo A consta de una caja de mantecadas y cinco participaciones de lotería, y cada lote del tipo B consta de dos cajas de mantecadas y dos participaciones de lotería. Por cada lote de tipo A vendido, los alumnos obtienen un beneficio de 12,25 €; y por cada lote de tipo B ganan 12,5 €

Por razones de almacenamiento, pueden disponer a lo sumo de 400 cajas de mantecadas. Los alumnos solo cuentan con 1 200 participaciones de lotería y desean maximizar sus beneficios.

a) Determina la función objetivo y expresa mediante inecuaciones las restricciones del problema.

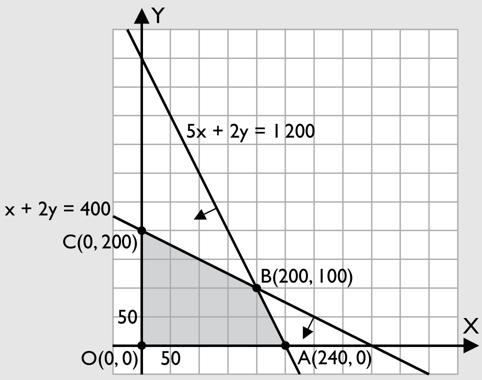
b) ¿Cuántas unidades de cada tipo de lote deben vender los alumnos para que el beneficio obtenido sea máximo? Calcula dicho beneficio.

Solución:

a) Tabla con los datos del problema.

	Lote A	**Lote B**	**Restricciones**	
Nº de lotes	x	y	x ≥ 0; y ≥ 0	
Cajas de mantecados	x	2y	x + 2y ≤ 400	
Participaciones de lotería	5x	2y	5x + 2y ≤ 1 200	
Beneficios	12,25x	12,5y	f(x, y) = 12,25x + 12,5y	Maximizar

b) Región factible.



c) Valores de la función objetivo en los vértices de la región factible.

O(0, 0) ⇒ f(0, 0) = 12,25 · 0 + 12,5 · 0 = 0

A(240, 0) ⇒ f(240, 0) = 12,25 · 240 + 12,5 · 0 = 2 940

B(200, 100) ⇒ f(200, 100) = 12,25 · 200 + 12,5 · 100 = = 3 700 **Máximo**

C(0, 200) ⇒ f(0, 200) = 12,25 · 0 + 12,5 · 200 = 2 500

d) La solución óptima es B(200, 100), 200 del lote A y 100 del lote B. El beneficio es 3 700 €

31. Cada mes una empresa puede gastar, como máximo, 10 000 € en salarios y 1 800 € en energía (electricidad y gasoil). La empresa solo elabora dos tipos de productos A y B. Por cada unidad de A que elabora gana 0,8 €; y por cada unidad de B gana 0,5 €. El coste salarial y energético que acarrea la elaboración de una unidad del producto A y de una unidad del producto B aparece en la siguiente tabla:

Se desea determinar cuántas unidades de cada uno de los productos A y B debe producir la empresa para que el beneficio sea máximo.

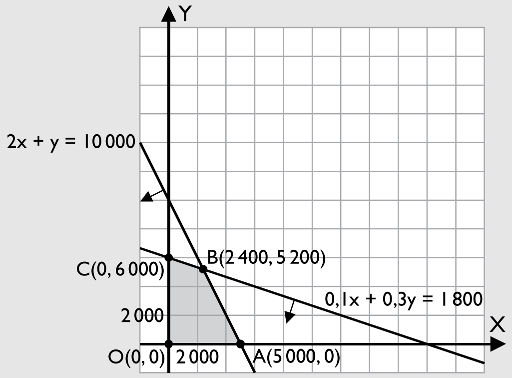
	Producto A	**Producto B**
Coste salarial	2	1
Coste energético	0,1	0,3

Solución:

a) Tabla con los datos del problema.

	Producto A	Producto B	Restricciones	
Nº de unidades	x	y	$x \geq 0; y \geq 0$	
Coste salarial	2x	y	$2x + y \leq 10\,000$	
Coste energético	0,1x	0,3y	$0{,}1x + 0{,}3y \leq 1\,800$	
Beneficios	0,8x	0,5y	$f(x, y) = 0{,}8x + 0{,}5y$	Maximizar

b) Región factible.



c) Valores de la función objetivo en los vértices de la región factible.

$O(0, 0) \Rightarrow f(0, 0) = 0{,}8 \cdot 0 + 0{,}5 \cdot 0 = 0$

$A(5\,000, 0) \Rightarrow f(5\,000, 0) = 0{,}8 \cdot 5\,000 + 0{,}5 \cdot 0 = 4\,000$

$B(2\,400, 5\,200) \Rightarrow f(2\,400, 5\,200) =$
$= 0{,}8 \cdot 2\,400 + 0{,}5 \cdot 5\,200 = 4\,520$ **Máximo**

$C(0, 6\,000) \Rightarrow f(0, 6\,000) = 0{,}8 \cdot 0 + 0{,}5 \cdot 6\,000 = 3\,000$

d) La solución óptima es B(2 400, 5 200)

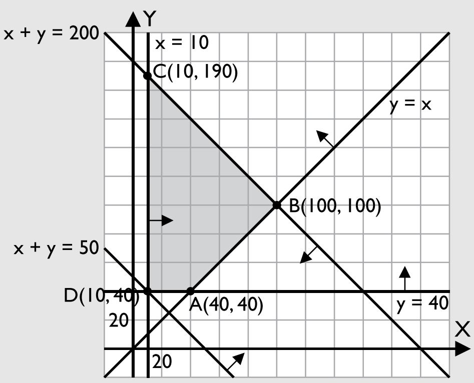
32. En un depósito se almacenan bidones de petróleo y gasolina. Para poder atender la demanda se han de tener almacenados un mínimo de 10 bidones de petróleo y 40 de gasolina. Siempre debe haber más bidones de gasolina que de petróleo, y la capacidad del depósito es de 200 bidones. Por razones comerciales, deben mantenerse en inventario, al menos, 50 bidones. El gasto de almacenaje de un bidón de petróleo es de 0,2 € y el de uno de gasolina es de 0,3 €. Se desea saber cuántos bidones de cada clase han de almacenarse para que el gasto de almacenaje sea mínimo.

Solución:

a) Tabla con los datos del problema.

	Petróleo	Gasolina	Restricciones	
Bidones	x	y	$x \geq 0; y \geq 0$	
Mínimo de petróleo	x		$x \geq 10$	
Mínimo de gasolina		y	$y \geq 40$	
Relación gasolina-petróleo	x	y	$y \geq x$	
Capacidad máxima	x	y	$x + y \leq 200$	
Razones comerciales	x	y	$x + y \geq 50$	
Coste	0,2x	0,3y	$f(x, y) = 0{,}2x + 0{,}3y$	Minimizar

b) Región factible.



c) Valores de la función objetivo en los vértices de la región factible.

$A(40, 40) \Rightarrow f(40, 40) = 0{,}2 \cdot 40 + 0{,}3 \cdot 40 = 20$

$B(100, 100) \Rightarrow f(100, 100) = 0{,}2 \cdot 100 + 0{,}3 \cdot 100 = 50$

$C(10, 190) \Rightarrow f(10, 190) = 0{,}2 \cdot 10 + 0{,}3 \cdot 190 = 59$

$D(10, 40) \Rightarrow f(10, 40) = 0{,}2 \cdot 10 + 0{,}3 \cdot 40 =$
$= 14$ **Mínimo**

d) La solución óptima es D(10, 40)

33. Un agricultor cosecha garbanzos y lentejas. Se sabe que, a lo sumo, solo se pueden cosechar 500 toneladas métricas (Tm), de las que, como máximo, 200 Tm son lentejas. Los beneficios por Tm de garbanzos y lentejas son de 500 € y 300 €, respectivamente, y desea planificar la producción para optimizar el beneficio total.

a) Formula el sistema de inecuaciones asociado al enunciado del problema y la función objetivo del mismo.

b) Representa gráficamente la región factible y calcula sus vértices.

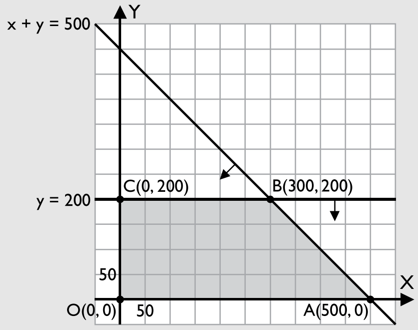
c) ¿Cuántas Tm de garbanzos y cuántas de lentejas debe cosechar para obtener el máximo beneficio?

Solución:

a) Tabla con los datos del problema.

	Garbanzos	Lentejas	Restricciones	
Nº de Tm	x	y	$x \geq 0; y \geq 0$	
Tope de cosecha	x	y	$x + y \leq 500$	
Tope de lentejas		y	$y \leq 200$	
Beneficios	500x	300y	$f(x, y) = 500x + 300y$	Maximizar

b) Región factible.



c) Valores de la función objetivo en los vértices de la región factible.

$O(0, 0) \Rightarrow f(0, 0) = 500 \cdot 0 + 300 \cdot 0 = 0$

$A(500, 0) \Rightarrow f(500, 0) = 500 \cdot 500 + 300 \cdot 0 =$
$= 250\,000$ **Máximo**

$B(300, 200) \Rightarrow f(300, 200) = 500 \cdot 300 + 300 \cdot 200 =$
$= 210\,000$

$C(0, 200) \Rightarrow f(0, 200) = 500 \cdot 0 + 300 \cdot 200 = 60\,000$

d) La solución óptima es B(500, 0), es decir, 500 Tm de garbanzos y 0 Tm de lentejas.

34. Cierta sala de espectáculos tiene una capacidad máxima de 1 500 personas entre adultos y niños, aunque el número de niños asistentes no puede superar los 600. El precio de la entrada de un adulto a una sesión es de 8 €, mientras que la de un niño es de un 40% menos. El número de adultos no puede superar al doble del número de niños.

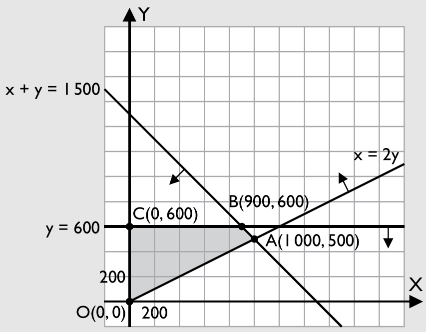
Cumpliendo las condiciones anteriores, ¿cuál es la cantidad máxima que se puede recaudar por la venta de entradas? ¿Cuántas de las entradas serán de niños?

Solución:

a) Tabla con los datos del problema.

	Adultos	Niños	Restricciones	
Personas	x	y	$x \geq 0; y \geq 0; x + y \leq 1\,500$	
Niños		y	$y \leq 600$	
Condición adultos	x	y	$x \leq 2y$	
Recaudación	8x	4,8y	$f(x, y) = 8x + 4{,}8y$	Maximizar

b) Región factible.



c) Valores de la función objetivo en los vértices de la región factible.

$O(0, 0) \Rightarrow f(0, 0) = 8 \cdot 0 + 4{,}8 \cdot 0 = 0$

$A(1\,000, 500) \Rightarrow f(1\,000, 500) = 8 \cdot 1\,000 + 4{,}8 \cdot 500 =$
$= 10\,400$ **Máximo**

$B(900, 600) \Rightarrow f(900, 600) = 8 \cdot 900 + 4{,}8 \cdot 600 = 10\,080$

$C(0, 600) \Rightarrow f(0, 600) = 8 \cdot 0 + 4{,}8 \cdot 600 = 2\,880$

d) La solución óptima es A(1 000, 500), es decir, 1 000 entradas de adulto y 500 entradas de niño.

35. Un grupo musical va a lanzar un nuevo trabajo al mercado. La casa discográfica considera necesario realizar una campaña intensiva de publicidad, combinando dos publicidades: anuncios en televisión, con un coste estimado de 10 000 € por anuncio, y cuñas radiofónicas, con un coste estimado de 1 000 € por cuña. No obstante, no pueden gastar más de un millón de euros para dicha campaña, a lo largo de la cual se tienen que emitir, al menos, 50 cuñas, pero no más de 100. Un estudio de mercado cifra en 10 000 el número de copias que se venderá por anuncio de televisión emitido, y en 2 000 el número de copias por cuña radiofónica emitida.

a) ¿De cuántos anuncios y cuñas radiofónicas podrá constar esta campaña? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones.

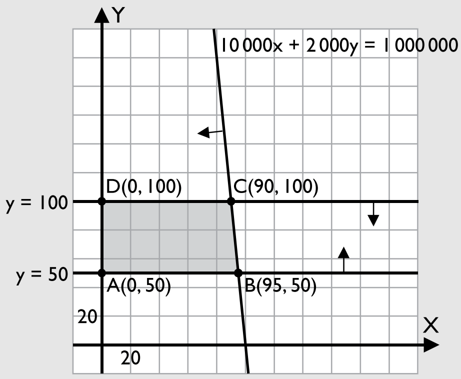
b) ¿Qué combinación de ambos se debería realizar para vender el mayor número de copias posibles? ¿Se llega a gastar el millón de euros?

Solución:

a) Tabla con los datos del problema.

	Anuncios TV	Cuñas de radio	Restricciones	
Nº de unidades	x	y	$x \geq 0; y \geq 0$	
Límite campaña	10 000x	1 000y	$10\,000x + 1\,000y \leq 1\,000\,000$	
Cuñas		y	$50 \leq y \leq 100$	
Ventas	10 000x	2 000y	$f(x, y) = 10\,000x + 2\,000y$	Maximizar

b) Región factible.



c) Valores de la función objetivo en los vértices de la región factible.

$A(0, 50) \Rightarrow f(0, 50) = 10\,000 \cdot 0 + 2\,000 \cdot 50 = 100\,000$

$B(95, 50) \Rightarrow f(95, 50) = 10\,000 \cdot 95 + 2\,000 \cdot 50 = 1\,050\,000$

$C(90, 100) \Rightarrow f(90, 100) = 10\,000 \cdot 90 + 2\,000 \cdot 100 = 1\,100\,000$ **Máximo**

$D(0, 100) \Rightarrow f(0, 100) = 10\,000 \cdot 0 + 2\,000 \cdot 100 = 200\,000$

d) La solución óptima es el vértice C(90, 100). Sí se gastan el 1 000 000 €

36. Una fábrica de coches va a lanzar al mercado dos nuevos modelos, uno básico y otro de lujo. El coste de fabricación del modelo básico es de 10 000 € y el del modelo de lujo es de 15 000 €. Se dispone de un presupuesto de 600 000 € para esta operación de lanzamiento. Para evitar riesgos se cree conveniente lanzar al menos tantos coches del modelo básico como del modelo de lujo y, en todo caso, no fabricar más de 45 coches del modelo básico.

a) ¿Cuántos coches interesa fabricar de cada modelo si el objetivo es maximizar el número de coches fabricados?

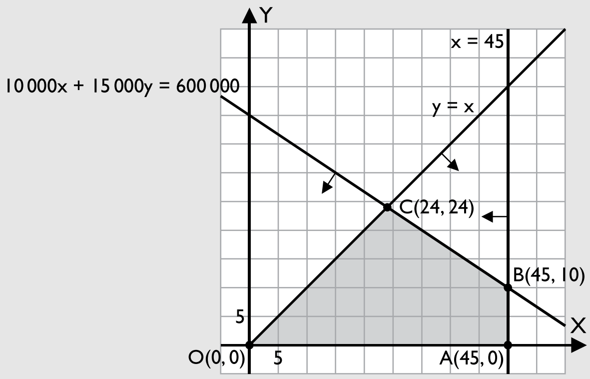
b) ¿Se agota el presupuesto disponible?

Solución:

a) Tabla con los datos del problema.

	Modelo básico	Modelo de lujo	Restricciones	
Nº de unidades	x	y	$x \geq 0; y \geq 0$	
Coste fabricación	10 000x	15 000y	$10\,000x + 15\,000y \leq 600\,000$	
Condiciones	x	y	$x \geq y$	
Modelo básico	x		$x \leq 45$	
Nº de coches	x	y	$f(x, y) = x + y$	Maximizar

b) Región factible.



c) Valores de la función objetivo en los vértices de la región factible.

O(0, 0) ⇒ f(0, 0) = 0 + 0 = 0

A(45, 0) ⇒ f(45, 0) = 45 + 0 = 45

B(45, 10) ⇒ f(45, 10) = 45 + 10 = 55 **Máximo**

C(24, 24) ⇒ f(24, 24) = 24 + 24 = 48

d) La solución óptima es B(45, 10), es decir, 45 coches del modelo básico y 10 coches del modelo de lujo. Se agota el presupuesto.

37. Por motivos de ampliación de plantilla, una empresa de servicios de traducción quiere contratar, a lo sumo, 50 nuevos traductores. El salario que ha de pagar a cada traductor de una lengua es de 2 000 €, y de 3 000 € a los que son de más de una lengua. Como poco, y por motivos de demanda, dicha empresa tiene que contratar a la fuerza a un traductor de más de una lengua. La política de selección de personal de la compañía obliga también a contratar al menos a tantos traductores de una lengua como de más de una. Sabiendo que el objetivo fijado de beneficios totales es, como mínimo, de 120 000 €, y que los beneficios que aportan los traductores de una lengua son de 4 000 €/traductor, y de 8 000 €/traductor los de más de una lengua:

a) ¿cuántos traductores de cada tipo puede contratar? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones.

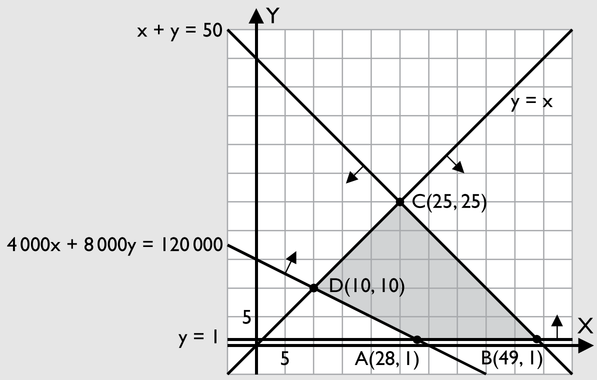
b) ¿cuántos traductores contratará para minimizar el gasto en salarios? ¿Qué beneficios totales tendrá la empresa en este caso?

Solución:

a) Tabla con los datos del problema.

	Traductor de 1 lengua	Traductor de más de 1 lengua	Restricciones	
Nº de traductores	x	y	x ≥ 0; y ≥ 0; x + y ≤ 50	
Motivos de demanda		y	y ≥ 1	
Política de selección	x	y	x ≥ y	
Mínimos beneficios	4 000x	8 000y	4 000x + 8 000y ≥ 120 000	
Ganancias	2 000x	3 000y	f(x, y) = 2 000x + 3 000y	Minimizar

b) Región factible.



c) Valores de la función objetivo en los vértices de la región factible.

A(28, 1) ⇒ f(28, 1) = 2 000 · 28 + 3 000 · 1 = 59 000

B(49, 1) ⇒ f(49, 1) = 2 000 · 49 + 3 000 · 1 = 101 000

C(25, 25) ⇒ f(25, 25) = 2 000 · 25 + 3 000 · 25 =
= 125 000

D(10, 10) ⇒ f(10, 10) = 2 000 · 10 + 3 000 · 10 =
= 50 000 **Mínimo**

d) La solución óptima es D(10, 10), es decir, 10 traductores de cada tipo.

Los beneficios totales son:

40 000 · 10 + 8 000 · 10 = 480 000 €

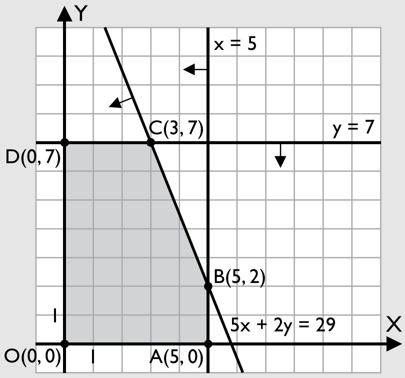
38. Un agricultor puede sembrar trigo (5 hectáreas como máximo) y centeno (7 hectáreas como máximo) en sus tierras. La producción de trigo, por cada hectárea sembrada, es de 5 toneladas, mientras que la producción de centeno, también por hectárea sembrada, es de 2 toneladas, y puede producir un máximo de 29 toneladas de los dos cereales. Si el beneficio que obtiene el agricultor por cada tonelada de trigo es de 290 € y el beneficio por cada tonelada de centeno es de 240 €, ¿qué número de hectáreas ha de sembrar de cada cultivo para maximizar los beneficios?

Solución:

a) Tabla con los datos del problema.

	Trigo	Centeno	Restricciones	
Nº de hectáreas	x	y	$x \geq 0; y \geq 0$	
Condición 1	x		$x \leq 5$	
Condición 2		y	$y \leq 7$	
Producción	5x	2y	$5x + 2y \leq 29$	
Beneficios	290x	240y	$f(x, y) = 290x + 240y$	Maximizar

b) Región factible.



c) Valores de la función objetivo en los vértices de la región factible.

$O(0, 0) \Rightarrow f(0, 0) = 290 \cdot 0 + 240 \cdot 0 = 0$

$A(5, 0) \Rightarrow f(5, 0) = 290 \cdot 5 + 240 \cdot 0 = 1\,450$

$B(5, 2) \Rightarrow f(5, 2) = 290 \cdot 5 + 240 \cdot 2 = 1\,930$

$C(3, 7) \Rightarrow f(3, 7) = 290 \cdot 3 + 240 \cdot 7 =$
$= 2\,550$ **Máximo**

$D(0, 7) \Rightarrow f(0, 7) = 290 \cdot 0 + 240 \cdot 7 = 1\,680$

d) La solución óptima es C(3, 7), es decir, 3 hectáreas de trigo y 7 de centeno.

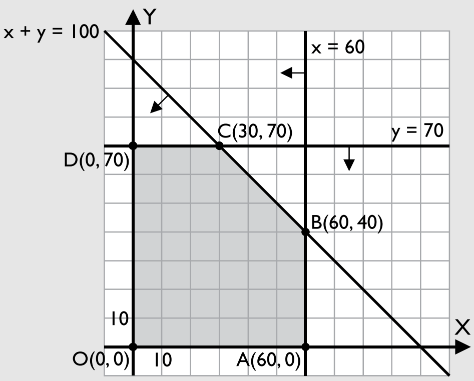
39. El número de unidades de dos productos (A y B) que un comercio puede vender es, como máximo, igual a 100. Dispone de 60 unidades de producto de tipo A, con un beneficio unitario de 2,5 €, y de 70 unidades tipo B con un beneficio de 3 €. Determina cuántas unidades de cada tipo de productos A y B debe vender el comercio para maximizar sus beneficios globales.

Solución:

a) Tabla con los datos del problema.

	Producto A	Producto B	Restricciones	
Nº de unidades	x	y	$x \geq 0; y \geq 0$	
Máximo	x	y	$x + y \leq 100$	
Unidades de A	x		$x \leq 60$	
Unidades de B		y	$y \leq 70$	
Beneficios	2,5x	3y	$f(x, y) = 2{,}5x + 3y$	Maximizar

b) Región factible.



c) Valores de la función objetivo en los vértices de la región factible.

$O(0, 0) \Rightarrow f(0, 0) = 2{,}5 \cdot 0 + 3 \cdot 0 = 0$

$A(60, 0) \Rightarrow f(60, 0) = 2{,}5 \cdot 60 + 3 \cdot 0 = 150$

$B(60, 40) \Rightarrow f(60, 40) = 2{,}5 \cdot 60 + 3 \cdot 40 = 270$

$C(30, 70) \Rightarrow f(30, 70) = 2{,}5 \cdot 30 + 3 \cdot 70 =$
$= 285$ **Máximo**

$D(0, 70) \Rightarrow f(0, 70) = 2{,}5 \cdot 0 + 3 \cdot 70 = 210$

d) La solución óptima es C(30, 70), es decir, 30 unidades del producto A y 70 unidades del producto B

40. Un comerciante desea comprar dos tipos de lavadoras, A y B. Las de tipo A cuestan 450 €, y las de tipo B, 750 €. Dispone de 10 500 € y de sitio para 20 lavadoras, y, al menos, ha de comprar una de cada tipo.

¿Cuántas lavadoras ha de comprar de cada tipo para obtener beneficios máximos con su venta posterior, sabiendo que en cada lavadora gana el 20% del precio de compra?

Nota: se recuerda que el número de lavadoras de cada tipo ha de ser entero.

Solución:

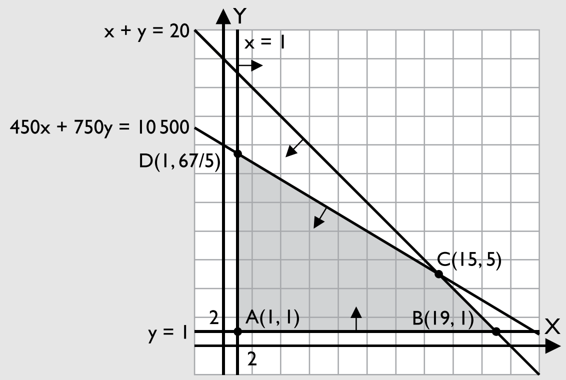
a) Tabla con los datos del problema.

Ganancia por cada lavadora del tipo A: $450 \cdot 0{,}2 = 90$ €

Cada hectárea de centeno produce: $750 \cdot 0{,}2 = 150$ €

	Tipo A	Tipo B	Restricciones	
Nº de lavadoras	x	y	$x \geq 0; y \geq 0; x + y \leq 20$	
Condición 1	x		$x \geq 1$	
Condición 2		y	$y \geq 1$	
Dispone	$450x$	$750y$	$450x + 750y \leq 10\,500$	
Beneficios	$90x$	$150y$	$f(x, y) = 90x + 150y$	Maximizar

b) Región factible.



c) Valores de la función objetivo en los vértices de la región factible.

$A(1, 1) \Rightarrow f(1, 1) = 90 \cdot 1 + 150 \cdot 1 = 240$

$B(19, 1) \Rightarrow f(19, 1) = 90 \cdot 19 + 150 \cdot 1 = 1\,860$

$C(15, 5) \Rightarrow f(15, 5) = 90 \cdot 15 + 150 \cdot 5 =$
$= 2\,100$ **Máximo**

$D(1, 67/5) \Rightarrow f(1, 67/5) = 90 \cdot 1 + 150 \cdot 67/5 =$
$= 2\,100$ **Máximo**

d) La solución óptima son los vértices C(15, 5) y D(1, 67/5), por tanto también lo son todos los puntos del segmento de extremos C y D. Pero las soluciones tienen que ser números enteros, por tanto las únicas soluciones son C(15,5), E(10, 8) y F(5, 11)

41. Una empresa se dedica a la fabricación de frascos de perfume y de agua de colonia, a partir de tres factores productivos, F_1, F_2 y F_3. Las unidades de dichos factores utilizadas en la producción de cada tipo de frasco se detallan en la siguiente tabla:

	Perfume	Agua de colonia
F_1	1	2
F_2	2	0
F_3	0	4

Sabiendo que el precio de venta de un frasco de perfume es de 50 €, el de uno de agua de colonia es de 20 €, y que la empresa dispone de 240 unidades de F_1, 360 de F_2 y 440 de F_3:

a) calcula el número de frascos de cada tipo que debe fabricar la empresa para maximizar sus beneficios. Explica los pasos seguidos para obtener la respuesta.

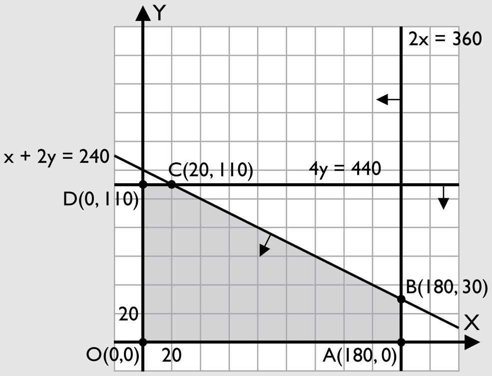
b) ¿se consumen todas las existencias de F_1, F_2 y F_3 en la producción de los frascos que maximiza los beneficios?

Solución:

a) Tabla con los datos del problema.

	Perfume	Agua de colonia	Restricciones	
Nº de frascos	x	y	$x \geq 0; y \geq 0$	
Factor productivo F_1	x	$2y$	$x + 2y \leq 240$	
Factor productivo F_2	$2x$		$2x \leq 360$	
Factor productivo F_3		$4y$	$4y \leq 440$	
Beneficio	$50x$	$20y$	$f(x, y) = 50x + 20y$	Maximizar

b) Región factible.



c) Valores de la función objetivo en los vértices de la región factible.

O(0, 0) ⇒ f(0, 0) = 50 · 0 + 20 · 0 = 0

A(180, 0) ⇒ f(180, 0) = 50 · 180 + 20 · 0 = 9 000

B(180, 30) ⇒ f(180, 30) = 50 · 180 + 20 · 30 = = 9 600 **Máximo**

C(20, 110) ⇒ f(20, 110) = 50 · 20 + 20 · 110 = 3 200

D(0, 110) ⇒ f(0, 110) = 50 · 0 + 20 · 110 = 2 200

d) La solución óptima es B(180, 30), es decir, 180 perfumes y 30 unidades de agua de colonia.

No se consumen todas las existencias.

42. Un concesionario de coches vende dos modelos: el A, con el que gana 1 000 € por unidad vendida, y el B, con el que gana 500 € por unidad vendida. El número **x** de coches vendidos del modelo A debe verificar que $50 \leq x \leq 75$. El número **y** de coches vendidos del modelo B debe ser mayor o igual que el número de coches vendidos del modelo A.

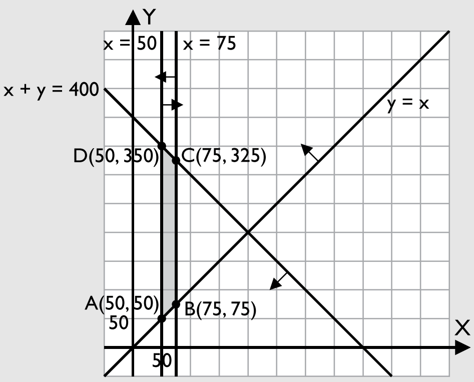
Sabiendo que el máximo de coches que puede vender es 400, determina cuántos coches debe vender de cada modelo para que su beneficio sea máximo.

Solución:

a) Tabla con los datos del problema.

	Modelo A	Modelo B	Restricciones	
Nº de unidades	x	y	$x \geq 0; y \geq 0$	
Limitaciones modelo A	x		$50 \leq x \leq 75$	
Condición	x	y	$x \leq y$	
Máximo	x	y	$x + y \leq 400$	
Beneficio	1 000x	500y	f(x, y) = 1 000x + 500y	Maximizar

b) Región factible.



c) Valores de la función objetivo en los vértices de la región factible.

A(50, 50) ⇒ f(50, 50) = 1 000 · 50 + 500 · 50 = 75 000

B(75, 75) ⇒ f(75, 75) = 1 000 · 75 + 500 · 75 = 112 500

C(75, 325) ⇒ f(75, 325) = 1 000 · 75 + 500 · 325 = = 237 500 **Máximo**

D(50, 350) ⇒ f(50, 350) = 1 000 · 50 + 500 · 350 = = 225 000

d) La solución óptima es C(75, 325), es decir, 75 coches del modelo A y 325 del modelo B

43. Un cliente de un banco dispone de 30 000 € para adquirir fondos de inversión. El banco le ofrece dos tipos de fondos, A y B. El de tipo A tiene una rentabilidad del 12% y unas limitaciones legales de 12 000 € de inversión máxima; el del tipo B presenta una rentabilidad del 8% sin ninguna limitación. Además, este cliente desea invertir en los fondos tipo B, como máximo, el doble de lo invertido en los fondos tipo A.

a) ¿Qué cantidad de dinero debe invertir en cada tipo de fondo para obtener un beneficio máximo?

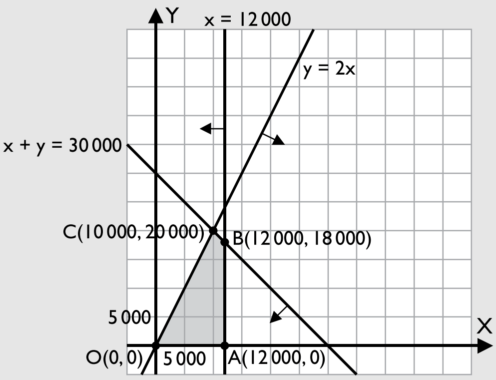
b) ¿Cuál será el valor de dicho beneficio máximo?

Solución:

a) Tabla con los datos del problema.

	Fondo tipo A	Fondo tipo B	Restricciones	
Dinero invertido	x	y	$x \geq 0; y \geq 0$	
Capital pendiente	x	y	$x + y \leq 30\,000$	
Limitaciones legales	x		$x \leq 12\,000$	
Desea	x	y	$2x \geq y$	
Beneficio	0,12x	0,08y	$f(x, y) = 0{,}12x + 0{,}08y$	Maximizar

b) Región factible.



c) Valores de la función objetivo en los vértices de la región factible.

$O(0, 0) \Rightarrow f(0, 0) = 0{,}12 \cdot 0 + 0{,}08 \cdot 0 = 0$

$A(12\,000, 0) \Rightarrow f(12\,000, 0) =$
$= 0{,}12 \cdot 12\,000 + 0{,}08 \cdot 0 = 1440$

$B(12\,000, 18\,000) \Rightarrow f(12\,000, 18\,000) =$
$= 0{,}12 \cdot 12\,000 + 0{,}08 \cdot 18\,000 = 2\,880$ **Máximo**

$C(10\,000, 20\,000) \Rightarrow f(10\,000, 20\,000) =$
$= 0{,}12 \cdot 10\,000 + 0{,}08 \cdot 20\,000 = 2\,800$

d) La solución óptima es B(12 000, 18 000), es decir, 12 000 € en fondos del tipo A y 18 000 € en fondos del tipo B

El beneficio máximo es 2 880 €

Para profundizar

44. En un problema de programación lineal la región factible es el pentágono convexo que tiene de vértices los puntos: O(0, 0), P(0, 4), Q(3/2, 3), R(5/2, 2) y S(11/4, 0), y la función objetivo que hay que maximizar es $F(x, y) = 2x + ay$ (**a** es un número real positivo).

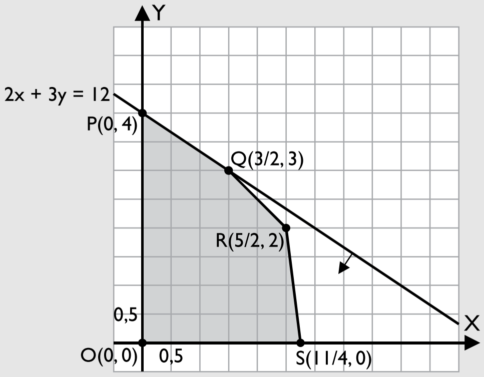
a) Dibuja la región factible.

b) Halla el vértice, o punto extremo, del mismo en el que la función objetivo alcanza el máximo para a = 1/2

c) Encuentra un valor de **a** para que el máximo se alcance en el punto (0, 4)

Solución:

a) Región factible.



b) Valores de la función objetivo en los vértices de la región factible.

$O(0, 0) \Rightarrow f(0, 0) = 2 \cdot 0 + 0{,}5 \cdot 0 = 0$

$P(0, 4) \Rightarrow f(0, 4) = 2 \cdot 0 + 0{,}5 \cdot 4 = 2$

$Q(3/2, 3) \Rightarrow f(3/2, 3) = 2 \cdot 3/2 + 0{,}5 \cdot 3 = 4{,}5$

$R(5/2, 2) \Rightarrow f(5/2, 2) = 2 \cdot 5/2 + 0{,}5 \cdot 2 = 6$ **Máximo**

$S(11/4, 0) \Rightarrow f(11/4, 0) = 2 \cdot 11/4 + 0{,}5 \cdot 0 = 5{,}5$

La solución óptima es R(5/2, 2)

c) La recta que pasa por P y Q es $2x + 3y = 12$. Siempre que **a** ≥ 3 el máximo será P(0, 4). Si a = 3, el máximo se alcanza en todos los puntos del segmento PQ. Para a > 3, el máximo se alcanza en P(0, 4).

45. Un hipermercado quiere ofrecer dos clases de bandejas: A y B. La bandeja A contiene 40 g de queso manchego, 160 g de roquefort y 80 g de camembert; la bandeja B contiene 120 g de cada uno de los tres tipos de queso anteriores. Para confeccionarlas disponen de 10,4 kg de queso manchego, 17,6 kg de roquefort y 11,2 kg de camembert. El precio de venta es de 5,8 € la bandeja A y de 7,32 € la bandeja B. El hipermercado desea maximizar los ingresos.

a) Expresa la función objetivo.

b) Escribe mediante inecuaciones las restricciones del problema y representa gráficamente el recinto definido.

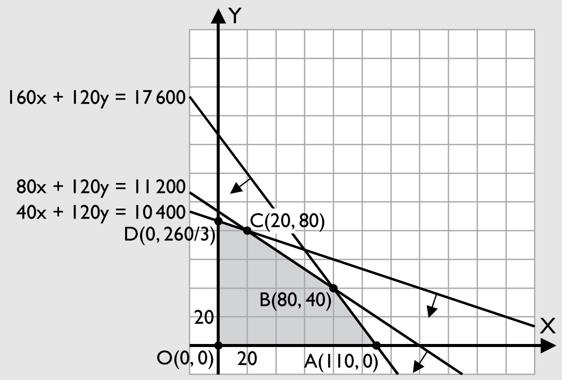
c) Determina el número de bandejas que debe vender de cada clase para que los ingresos obtenidos sean máximos. Calcula dichos ingresos.

Solución:

a) Tabla con los datos del problema.

	Bandeja A	Bandeja B	Restricciones	
Nº de bandejas	x	y	$x \geq 0; y \geq 0$	
Queso manchego	40x	120y	$40x + 120y \leq 10\,400$	
Queso roquefort	160x	120y	$160x + 120y \leq 17\,600$	
Queso camembert	80x	120y	$80x + 120y \leq 11\,200$	
Ingresos	5,8x	7,32y	$f(x, y) = 5{,}8x + 7{,}32y$	Maximizar

b) Región factible.



c) Valores de la función objetivo en los vértices de la región factible.

$O(0, 0) \Rightarrow f(0, 0) = 5{,}8 \cdot 0 + 7{,}32 \cdot 0 = 0$

$A(110, 0) \Rightarrow f(110, 0) = 5{,}8 \cdot 110 + 7{,}32 \cdot 0 = 638$

$B(80, 40) \Rightarrow f(80, 40) = 5{,}8 \cdot 80 + 7{,}32 \cdot 40 =$
$= 756{,}8$ **Máximo**

$C(20, 80) \Rightarrow f(20, 80) = 5{,}8 \cdot 20 + 7{,}32 \cdot 80 = 701{,}6$

$D(0, 260/3) \Rightarrow f(0, 260/3) = 5{,}8 \cdot 0 + 7{,}32 \cdot 260/3 =$
$= 634{,}4$

d) La solución óptima es B(80, 40), es decir, 80 bandejas A y 40 bandejas B

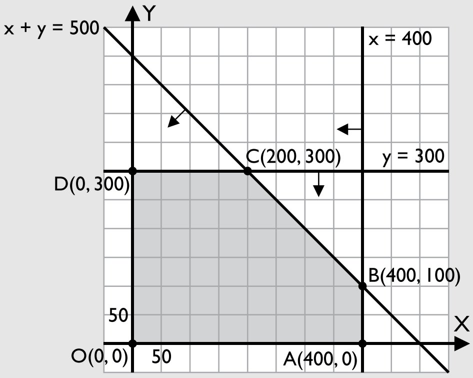
46. Una fábrica de adornos produce broches sencillos y broches de fiesta. Se obtiene un beneficio de 4,5 € por cada broche sencillo y de 6 € por cada broche de fiesta. En un día no se pueden fabricar más de 400 broches sencillos ni más de 300 de fiesta; tampoco pueden producirse más de 500 broches en total. Suponiendo que se logra vender toda la producción de un día, ¿cuál es el número de broches de cada clase que conviene fabricar para obtener el máximo beneficio? ¿Cuál debería ser la producción para obtener el máximo beneficio si se obtuvieran 6 € por cada broche sencillo y 4,5 € por cada broche de fiesta?

Solución:

a) Tabla con los datos del problema.

	Broche sencillo	Broche de fiesta	Restricciones	
Nº de broches	x	y	$x \geq 0; y \geq 0; x + y \leq 500$	
Condición 1	x		$x \leq 400$	
Condición 2		y	$y \leq 300$	
Beneficios	4,5x	6y	$f(x, y) = 4{,}5x + 6y$	Maximizar
Beneficios	6x	4,5y	$f(x, y) = 6x + 4{,}5y$	Maximizar

b) Región factible.



c1) Valores de la función objetivo f(x, y) = 4,5x + 6y en los vértices de la región factible.

O(0, 0) ⇒ f(0, 0) = 4,5 · 0 + 6 · 0 = 0

A(400, 0) ⇒ f(400, 0) = 4,5 · 400 + 6 · 0 = 1 800

B(400, 100) ⇒ f(400, 100) = 4,5 · 400 + 6 · 100 =
= 2 400

C(200, 300) ⇒ f(200, 300) = 4,5 · 200 + 6 · 300 =
= 2 700 **Máximo**

D(0, 300) ⇒ f(0, 300) = 4,5 · 0 + 6 · 300 = 1 800

d1) La solución óptima es C(200, 300), es decir, 200 broches sencillos y 300 broches de fiesta

c2) Valores de la función objetivo f(x, y) = 6x + 4,5y en los vértices de la región factible.

O(0, 0) ⇒ f(0, 0) = 6 · 0 + 4,5 · 0 = 0

A(400, 0) ⇒ f(400, 0) = 6 · 400 + 4,5 · 0 = 2 400

B(400, 100) ⇒ f(400, 100) = 6 · 400 + 4,5 · 100 =
= 2 850 **Máximo**

C(200, 300) ⇒ f(200, 300) = 6 · 200 + 4,5 · 300 =
= 2 550

D(0, 300) ⇒ f(0, 300) = 6 · 0 + 4,5 · 300 = 1 350

d2) La solución óptima es B(400, 100), es decir, 400 broches sencillos y 100 broches de fiesta.

47. Para fabricar 2 tipos de cable, A y B, que se venderán a 1,5 y 1 € el metro, respectivamente, se emplean 16 kg de plástico y 4 kg de cobre para cada hectómetro (hm) del tipo A y 6 kg de plástico y 12 kg de cobre para cada hm del tipo B

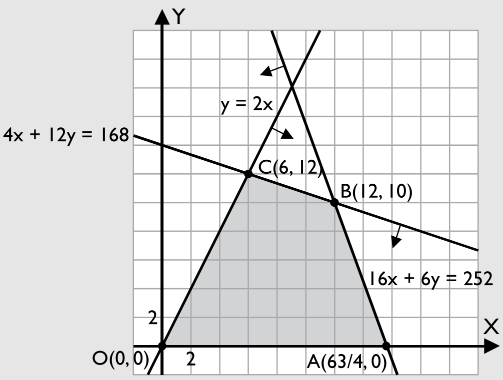
Sabiendo que la longitud de cable fabricado del tipo B no puede ser mayor que el doble de la del tipo A y que, además, no pueden emplearse más de 252 kg de plástico ni más de 168 kg de cobre, determina la longitud, en hectómetros, de cada tipo de cable que debe fabricarse para que la cantidad de dinero obtenida en la venta sea máxima.

Solución:

a) Tabla con los datos del problema.

	Cable A	Cable B	Restricciones	
Longitud (hm)	x	y	x ≥ 0; y ≥ 0; 2x ≥ y	
Plástico	16x	6y	16x + 6y ≤ 252	
Cobre	4x	12y	4x + 12y ≤ 168	
Beneficio	1,5x	y	f(x, y) = 1,5x + y	Maximizar

b) Región factible.



c) Valores de la función objetivo en los vértices de la región factible.

O(0, 0) ⇒ f(0, 0) = 1,5 · 0 + 0 = 0

A(63/4, 0) ⇒ f(63/4, 0) = 1,5 · 63/4 + 0 = 23,625

B(12, 10) ⇒ f(12, 10) = 1,5 · 12 + 10 = 28 **Máximo**

C(6, 12) ⇒ f(6, 12) = 1,5 · 6 + 12 = 21

d) La solución óptima es B(12, 10), es decir, 12 hm de cable de tipo A y 10 hm de tipo B

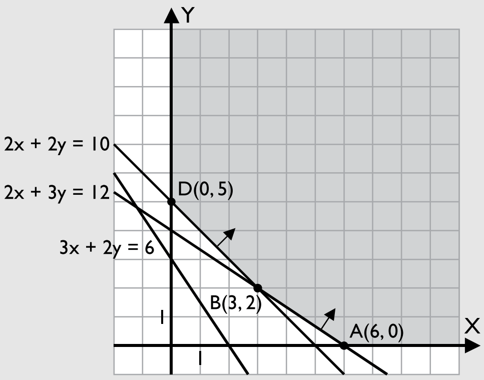
48. Un proyecto de asfaltado puede llevarse a cabo por dos grupos diferentes de una misma empresa: G1 y G2. Se trata de asfaltar tres zonas: A, B y C. En una semana, el grupo G1 es capaz de asfaltar 3 unidades en la zona A, 2 en la zona B y 2 en la zona C. El grupo G2 es capaz de asfaltar semanalmente 2 unidades en la zona A, 3 en la zona B y 2 en la zona C. El coste semanal se estima en 3 300 € para G1 y en 3 500 € para G2. Se necesita asfaltar un mínimo de 6 unidades en la zona A, 12 en la zona B y 10 en la zona C. ¿Cuántas semanas deberá trabajar cada grupo para finalizar el proyecto con el mínimo coste?

Solución:

a) Tabla con los datos del problema.

	G1	G2	Disponible	
Semanas	x	y	$x \geq 0; y \geq 0$	
Zona A	$3x$	$2y$	$3x + 2y \geq 6$	
Zona B	$2x$	$3y$	$2x + 3y \geq 12$	
Zona C	$2x$	$2y$	$2x + 2y \geq 10$	
Coste	$3\,300x$	$3\,500y$	$f(x, y) = 3\,300x + 3\,500y$	Minimizar

b) Región factible.



c) Valores de la función objetivo en los vértices de la región factible.

$A(6, 0) \Rightarrow f(6, 0) = 3\,300 \cdot 6 + 3\,500 \cdot 0 = 19\,800$

$B(3, 2) \Rightarrow f(3, 2) = 3\,300 \cdot 3 + 3\,500 \cdot 2 =$
$= 16\,900$ **Mínimo**

$C(0, 5) \Rightarrow f(0, 5) = 3\,300 \cdot 0 + 3\,500 \cdot 5 = 17\,500$

d) La solución óptima es B(3, 2), es decir, G1 durante 3 semanas y G2 durante 2 semanas.

49. Una empresa, especializada en la fabricación de mobiliario para casas de muñecas, produce cierto tipo de mesas y sillas, que vende, respectivamente, a 20 € y 30 € por unidad. La empresa desea saber cuántas unidades de cada artículo debe fabricar diariamente un operario para maximizar los ingresos, teniendo las siguientes restricciones:

El número total de unidades de los dos tipos no podrá exceder de 4 por día y operario. Cada mesa requiere 2 horas para su fabricación; cada silla, 3 horas. La jornada laboral máxima es de 10 horas.

El material utilizado en cada mesa cuesta 4 €. El utilizado en cada silla cuesta 2 €. Cada operario dispone de 12 € diarios para material.

a) Expresa la función objetivo y las restricciones del problema.

b) Representa gráficamente la región factible y calcula los vértices de la misma.

c) Razona si con estas restricciones un operario puede fabricar diariamente una mesa y una silla, y si esto le conviene a la empresa.

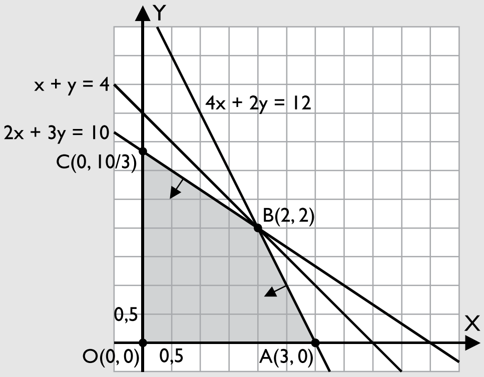
d) Resuelve el problema.

Solución:

a) Tabla con los datos del problema.

	Mesas	Sillas	Disponible	
Unidades	x	y	$x \geq 0; y \geq 0$	
Total unidades			$x + y \leq 4$	
Tiempo	$2x$	$3y$	$2x + 3y \leq 10$	
Coste	$4x$	$2y$	$4x + 2y \leq 12$	
Beneficios	$20x$	$30y$	$f(x, y) = 20x + 30y$	Maximizar

b) Región factible.



c) Valores de la función objetivo en los vértices de la región factible.

O(0, 0) ⇒ f(0, 0) = 20 · 0 + 30 · 0 = 0

A(3, 0) ⇒ f(3, 0) = 20 · 3 + 30 · 0 = 60

B(2, 2) ⇒ f(2, 2) = 20 · 2 + 30 · 2 = 100

C(0, 10/3) ⇒ f(0, 10/3) = 20 · 0 + 30 · 10/3 = 100

d) Las soluciones óptimas son B(2, 2) y C(0, 10/3); por tanto, serán todos los puntos del segmento que une B y C. Pero el único punto de coordenadas enteras de dicho segmento es B(2, 2); por tanto, la solución óptima se alcanza en B(2, 2), cuando se fabrican 2 mesas y 2 sillas.

50. Una agencia de viajes vende paquetes turísticos para acudir a la final de un campeonato de fútbol. La agencia está considerando ofrecer dos tipos de viajes. El primero de ellos, A, incluye desplazamiento en autocar para dos personas, una noche de alojamiento en habitación doble y cuatro comidas. El segundo, B, incluye desplazamiento en autocar para una persona, una noche de alojamiento (en habitación doble) y dos comidas.

El precio de venta del paquete A es de 150 € y el del paquete B es de 90 €. La agencia tiene contratadas un máximo de 30 plazas de autobús, 20 habitaciones dobles y 56 comidas. El número de paquetes del tipo B no debe superar al del tipo A. La empresa desea maximizar sus ingresos.

Se pide:

a) expresar la función objetivo.

b) escribir mediante inecuaciones las restricciones del problema y representar gráficamente el recinto definido.

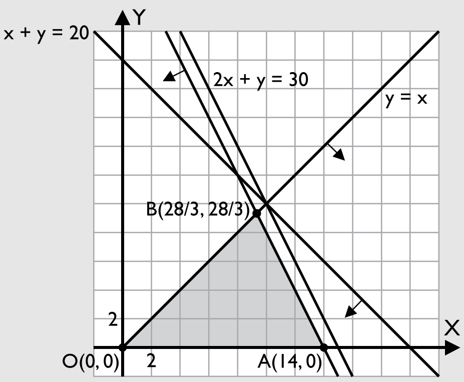
c) determinar cuántos paquetes de cada tipo debe vender la agencia para que sus ingresos sean máximos. Calcula dichos ingresos.

Solución:

a) Tabla con los datos del problema.

	Paquete A	Paquete B	Restricciones	
Nº de paquetes	x	y	x ≥ 0; y ≥ 0	
Relación entre paquetes	x	y	y ≤ x	
Autobús	2x	y	2x + y ≤ 30	
Habitaciones dobles	x	y	x + y ≤ 20	
Comidas	4x	2y	4x + 2y ≤ 56	
Ingresos	150x	90y	f(x, y) = 150x + 90y	Maximizar

b) Región factible.



c) Valores de la función objetivo en los vértices de la región factible.

O(0, 0) ⇒ f(0, 0) = 150 · 0 + 90 · 0 = 0

A(14, 0) ⇒ f(14, 0) = 150 · 14 + 90 · 0 = 2 100

B(28/3, 28/3) ⇒ f(28/3, 28/3) = 150 · 28/3+ 90 · 28/3 =
= 2 240 **Máximo**

d) La solución óptima es B(28/3, 28/3), como la solución tiene que ser números enteros hay que probar los puntos cercanos que estén dentro de la región factible.

C(9, 9) ⇒ f(9, 9) = 150 · 9 + 90 · 9 = 2 160

D(10, 8) ⇒ f(10, 8) = 150 · 10 + 90 · 8 = 2 220

Luego la solución óptima es D(10, 8), es decir, 10 del paquete A y 8 del paquete B

Paso a paso

51. Una fábrica quiere construir bicicletas de paseo y de montaña. La fábrica dispone de 80 kg de acero y 120 kg de aluminio. Para construir una bicicleta de paseo se necesitan 1 kg de acero y 3 kg de aluminio y para construir una bicicleta de montaña se necesitan 2 kg de acero y otros 2 kg de aluminio. Si las bicicletas de paseo las vende a 200 € y las de montaña a 150 €, ¿cuántas bicicletas de cada tipo debe construir para que el beneficio sea máximo?

Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

52. Internet. Abre: **www.editorial-bruno.es** y elige **Matemáticas, curso** y **tema.**

Practica

53. Se quiere organizar un puente aéreo entre dos ciudades, con plazas suficientes de pasaje y carga, para transportar 1 600 personas y 96 toneladas de equipaje. Los aviones disponibles son de dos tipos: 11 del tipo A y 8 del tipo B. La contratación de un avión del tipo A, que puede transportar a 200 personas y 6 toneladas de equipaje, cuesta 40 000 €; y la contratación de un avión del tipo B, que puede transportar a 100 personas y 15 toneladas de equipaje, cuesta 10 000 €. ¿Cuántos aviones de cada tipo deben utilizarse para que el coste sea mínimo?

Solución:

Problema 53

a) Tabla con los datos del problema :

	Tipo A	Tipo B	Restricciones	
Nº de aviones	x	y	$0 \leq x \leq 11;\ 0 \leq y \leq 8$	
Personas	200x	100y	$200x + 100y \geq 1600$	
Equipajes	6x	15y	$6x + 15y \geq 96$	
Coste	40000x	10000y	$f(x, y) = 40000x + 10000y$	Minimizar

b) Región factible :

```
tablero({centro = punto(9, 9), anchura = 20, altura = 20}) → tablero1
dibujar(x = 11, {color = azul}) → tablero1
dibujar(y = 8, {color = verde}) → tablero1
dibujar(200x + 100y = 1600, {color = magenta}) → tablero1
dibujar(6x + 15y = 96, {color = cian}) → tablero1
```

$\text{resolver}\begin{Bmatrix} 200x + 100y = 1600 \\ 6x + 15y = 96 \end{Bmatrix} \rightarrow \{\{x=6, y=4\}\}$

$\text{resolver}\begin{Bmatrix} x = 11 \\ 6x + 15y = 96 \end{Bmatrix} \rightarrow \{\{x=11, y=2\}\}$

$\text{resolver}\begin{Bmatrix} y = 8 \\ 200x + 100y = 1600 \end{Bmatrix} \rightarrow \{\{x=4, y=8\}\}$

```
dibujar(polígono(punto(6, 4), punto(11, 2), punto(11, 8), punto(4, 8)), {color=rojo, llenar=cierto, color_relleno=amarillo})
dibujar(punto(6, 4), {color = azul, tamaño_punto = 5}) → tablero1
dibujar(punto(11, 2), {color = azul, tamaño_punto = 5}) → tablero1
dibujar(punto(11, 8), {color = azul, tamaño_punto = 5}) → tablero1
dibujar(punto(4, 8), {color = azul, tamaño_punto = 5}) → tablero1
```

c) Valores de la función objetivo en los vértices de la región factible.

$f(x, y) = 40000x + 10000y \rightarrow (x,y) \mapsto 40000 \cdot x + 10000 \cdot y$

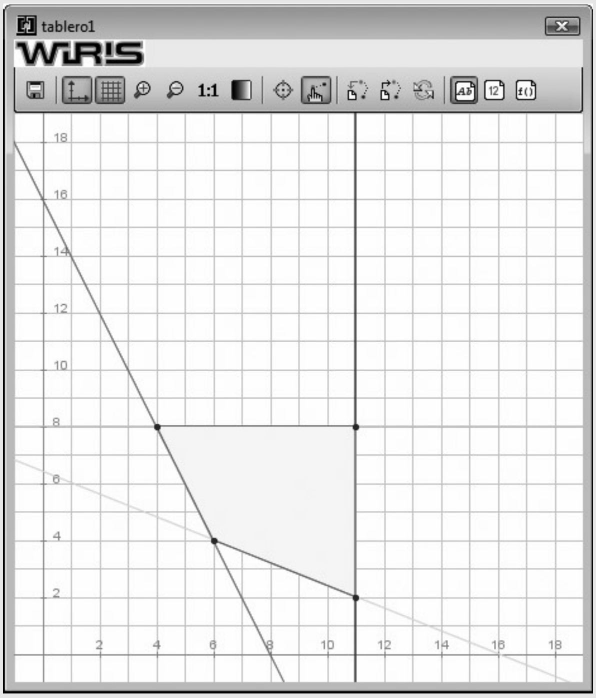
$f(6, 4) \rightarrow 280000$

$f(11, 2) \rightarrow 460000$

$f(11,8) \rightarrow 520000$

$f(4, 8) \rightarrow 240000$

d) La solución óptima es D(4, 8), es decir, x = 4 aviones del tipo A e y = 8 aviones del tipo B.



54. Un sastre tiene 80 m^2 de tejido A y 120 m^2 de tejido B. Un traje de caballero requiere 1 m^2 de A y 3 m^2 de B, y un vestido de señora, 2 m^2 de cada tejido. Si la venta de un traje deja al sastre el mismo beneficio que la de un vestido, halla cuántos trajes y vestidos debe fabricar para obtener la máxima ganancia.

Solución:

Problema 54

a) Tabla con los datos del problema :

	Trajes	Vestidos	Restricciones	
Nº de unidades	x	y	$x \geq 0;\ y \geq 0$	
Tejido A	x	2y	$x + 2y \leq 80$	
Tejido B	3x	2y	$3x + 2y \leq 120$	
Beneficio	x	y	$f(x, y) = x + y$	Maximizar

b) Región factible :

tablero ({centro = punto (45, 45), anchura = 100, altura = 100}) → tablero1

dibujar (x + 2y = 80, {color = magenta}) → tablero1

dibujar (3x + 2y = 120, {color = cian}) → tablero1

resolver $\begin{Bmatrix} x + 2y = 80 \\ 3x + 2y = 120 \end{Bmatrix}$ → {{x=20,y=30}}

dibujar (polígono (punto (0, 0), punto (40, 0), punto (20,30), punto (0, 40)), {color=rojo, llenar=cierto, color_relleno=amarillo})

dibujar (punto (0, 0), {color = azul, tamaño_punto = 5}) → tablero1

dibujar (punto (40, 0), {color = azul, tamaño_punto = 5}) → tablero1

dibujar (punto (20,30), {color = azul, tamaño_punto = 5}) → tablero1

dibujar (punto (0, 40), {color = azul, tamaño_punto = 5}) → tablero1

c) Valores de la función objetivo en los vértices de la región factible.

f(x, y) = x + y → (x,y) ↦ x+y

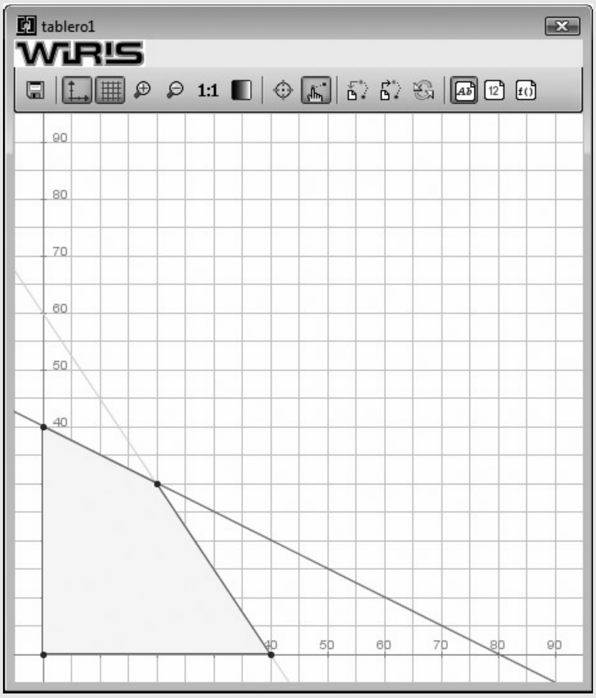
f(0, 0) → 0

f(40, 0) → 40

f(20,30) → 50

f(0, 40) → 40

d) La solución óptima es C(20, 30), es decir, x = 20 trajes e y = 30 vestidos.



55. Una empresa produce dos bienes A y B. Tiene dos factorías y cada una de ellas produce los dos bienes en las cantidades por hora siguientes:

	Factoría 1	Factoría 2
Bien A	10 unidades/hora	20 unidades/hora
Bien B	25 unidades/hora	25 unidades/hora

La empresa recibe un pedido de 300 unidades de A y 500 de B. Los costes de funcionamiento de las dos factorías son: 100 € por hora para la factoría 1 y 80 € por hora para la factoría 2. ¿Cuántas horas debe funcionar cada factoría para minimizar los costes de la empresa y satisfacer el pedido?

Solución:

Problema 55

a) Tabla con los datos del problema :

	Factoria 1	Factoria 2	Restricciones	
Tiempo (h)	x	y	$x \geq 0;\ y \geq 0$	
Bien A	10x	20y	$10x + 20y \geq 300$	
Bien B	25x	25y	$25x + 25y \geq 500$	
Coste	100x	80y	$f(x, y) = 100x + 80y$	Minimizar

b) Región factible :

tablero({centro = punto(18, 18), anchura = 40, altura = 40})

dibujar(10x + 20y = 300, {color = magenta}) → tablero1

dibujar(25x + 25y = 500, {color = cian}) → tablero1

resolver$\begin{Bmatrix} 10x + 20y = 300 \\ 25x + 25y = 500 \end{Bmatrix}$ → {{x=10,y=10}}

dibujar(polígono(punto(10, 10), punto(30, 0), punto(40,0), punto(40, 40), punto(0, 40), punto(0, 20)), {color=rojo,llenar=cierto,color_relleno=amarillo})

dibujar(punto(10, 10), {color = azul,tamaño_punto = 5})

dibujar(punto(30, 0), {color = azul,tamaño_punto = 5})

dibujar(punto(0, 20), {color = azul,tamaño_punto = 5})

c) Valores de la función objetivo en los vértices de la región factible.

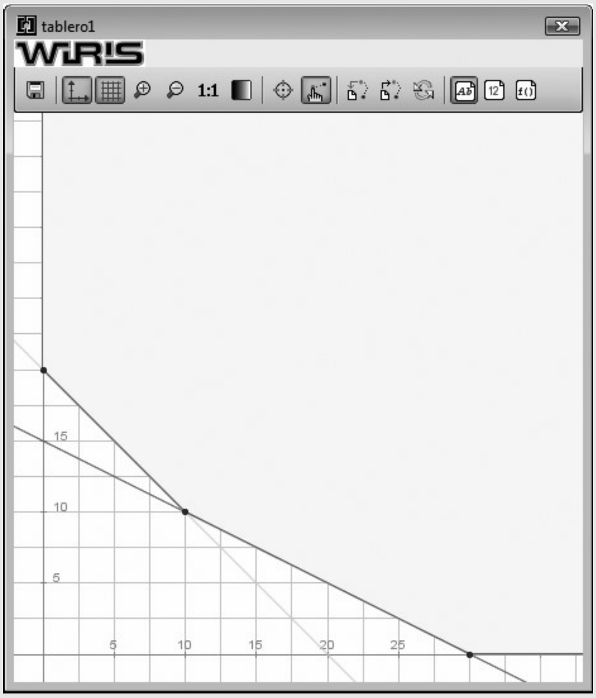
f(x, y) = 100x + 80y → $(x,y) \mapsto 100 \cdot x + 80 \cdot y$

f(10, 10) → 1800

f(30, 0) → 3000

f(0, 20) → 1600

d) La solución óptima es (0, 20), es decir, x = 0 h factoría 1 e y = 20 h factoría 2



56. Un comerciante desea comprar dos tipos de lavadora, A y B. Las de tipo A cuestan 450 €, y las de tipo B, 750 €. Dispone de 10 500 € y de sitio para 20 lavadoras, y, al menos, ha de comprar una de cada tipo.

¿Cuántas lavadoras ha de comprar de cada tipo para obtener beneficios máximos con su venta posterior, sabiendo que en cada lavadora gana el 20% del precio de compra?

Nota: se recuerda que el número de lavadoras de cada tipo ha de ser entero.

Solución:

Problema 56

Ganancias por cada lavadora del tipo A : 450 · 0,2 = 90 €

Ganancias por cada lavadora del tipo B : 750 · 0,2 = 150 €

a) Tabla con los datos del problema :

	Tipo A	Tipo B	Restricciones	
Nº de lavadoras	x	y	$x \geq 0$; $y \geq 0$; $x + y \leq 20$	
Condición 1	x		$x \geq 1$	
Condición 2		y	$y \geq 1$	
Dispone	450x	750y	$450x + 750y \leq 10500$	
Beneficios	90x	150y	$f(x, y) = 90x + 150y$	Maximizar

b) Región factible :

```
tablero({centro = punto(12, 12), anchura = 25, altura = 25}) ➞ tablero1
dibujar(x + y = 20, {color = azul}) ➞ tablero1
dibujar(450x+ 750y = 10500, {color = verde}) ➞ tablero1
dibujar(x = 1, {color = magenta}) ➞ tablero1
dibujar(y = 1, {color = magenta}) ➞ tablero1
```

resolver$\begin{Bmatrix} x + y = 20 \\ 450x + 750y = 10500 \end{Bmatrix}$ ➞ {{x=15,y=5}}

resolver$\begin{Bmatrix} x + y = 20 \\ y = 1 \end{Bmatrix}$ ➞ {{x=19,y=1}}

resolver$\begin{Bmatrix} 450x + 750y = 10500 \\ x = 1 \end{Bmatrix}$ ➞ $\left\{\left[x=1, y=\frac{67}{5}\right]\right\}$

```
dibujar(polígono(punto(1, 1),punto(19, 1),punto(15, 5),punto(1, 67/5)),{color=rojo,llenar=cierto,color_relleno=amarillo})
 ➞ tablero1
dibujar(punto(1, 1),{color=azul,tamaño_punto=5}) ➞ tablero1
dibujar(punto(19, 1),{color=azul,tamaño_punto=5}) ➞ tablero1
dibujar(punto(15, 5),{color=azul,tamaño_punto=5}) ➞ tablero1
dibujar(punto(1, 67/5),{color=azul,tamaño_punto=5}) ➞ tablero1
```

c) Valores de la función objetivo en los vértices de la región factible.

$f(x, y) = 15x + 25y$ ➞ $(x,y) \mapsto 15 \cdot x + 25 \cdot y$

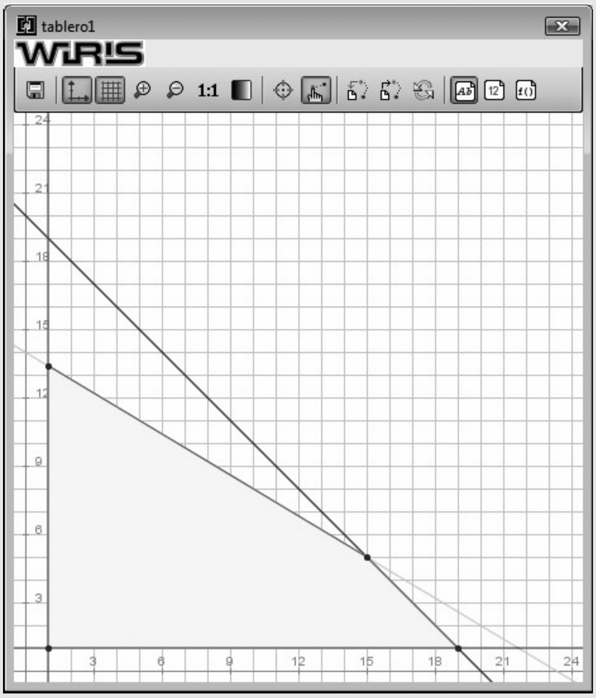
$f(1, 1)$ ➞ 40

$f(19, 1)$ ➞ 310

$f(15, 5)$ ➞ 350

$f(1, 67/5)$ ➞ 350

d) La solución óptima son los vértices C(15, 5) y D(1, 67/5), por tanto también lo son todos los puntos del segmento C y D.
Pero las soluciones tienen que ser números enteros, por tanto las únicas soluciones son C(15, 5), E(10, 8) y F(5, 11)



57. Cierta sala de espectáculos tiene una capacidad máxima de 1 500 personas entre adultos y niños, aunque el número de niños asistentes no puede superar los 600. El precio de la entrada de un adulto a una sesión es de 8 €, mientras que la de un niño cuesta un 40% menos. El número de adultos no puede superar al doble del número de niños.

Cumpliendo las condiciones anteriores, ¿cuál es la cantidad máxima que se puede recaudar por la venta de entradas? ¿Cuántas de las entradas serán de niños?

Solución:

Problema 57

E_niños = (1 − 0.4) · 8 → 4.8

a) Tabla con los datos del problema :

	Adultos	Niños	Restricciones	
Personas	x	y	x ≥ 0; 0 ≤ y ≤ 600	
Total	x	y	x + y ≤ 1500	
Condición	x	y	x ≤ 2y	
Recaudación	8x	4,8y	f(x, y) = 8x + 4,8y	Maximizar

b) Región factible :

tablero({centro = punto(750, 750), anchura = 1600, altura = 1600}) → tablero1

dibujar(y = 600, {color = azul}) → tablero1

dibujar(x + y = 1500, {color = verde}) → tablero1

dibujar(x = 2y, {color = magenta}) → tablero1

resolver$\begin{Bmatrix} y = 600 \\ x + y = 1500 \end{Bmatrix}$ → {{x=900,y=600}}

resolver$\begin{Bmatrix} x + y = 1500 \\ x = 2y \end{Bmatrix}$ → {{x=1000,y=500}}

dibujar(polígono(punto(0, 0), punto(1000, 500), punto(900, 600), punto(0, 600)), {color=rojo, llenar=cierto, color_relleno=amarillo})

dibujar(punto(0, 0), {color=azul, tamaño_punto=5}) → tablero1

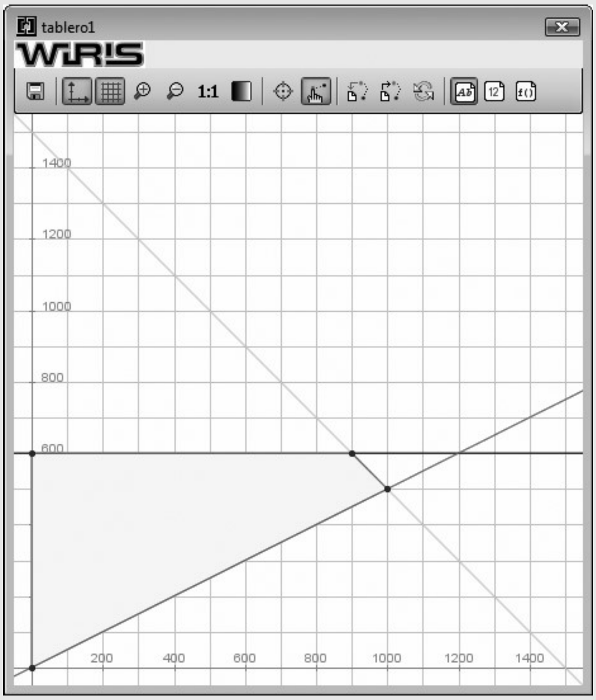
dibujar(punto(1000, 500), {color=azul, tamaño_punto=5}) → tablero1

dibujar(punto(900, 600), {color=azul, tamaño_punto=5}) → tablero1

dibujar(punto(0, 600), {color=azul, tamaño_punto=5}) → tablero1

c) Valores de la función objetivo en los vértices de la región factible.

f(x, y) = 8x + 4.8y ➞ (x,y) ↦ 8. · x + 4.8 · y
f(0, 0) ➞ 0.
f(1000, 500) ➞ 10400.
f(900, 600) ➞ 10080.
f(0, 600) ➞ 2880.
d) La solución óptima es (1000, 500), es decir, x = 1000 entradas de adulto e y = 500 entradas de niño.



Problemas propuestos

1. Se están preparando dosis con dos tipos de complementos para los astronautas de la nave *Enterprise*. Cada gramo del complemento A contiene 2 unidades de riboflavina, 3 de hierro y 2 de carbohidratos. Cada gramo del complemento B contiene 2 unidades de riboflavina, 1 de hierro y 4 de carbohidratos. ¿Cuántos gramos de cada complemento son necesarios para producir exactamente una dosis con 12 unidades de riboflavina, 16 de hierro y 14 de carbohidratos?

Solución:

a) Incógnitas, datos y preguntas

Nº de gramos de complemento A: x

Nº de gramos de complemento B: y

b) Manos a la obra

$$\left.\begin{array}{l} 2x + 2y = 12 \\ 3x + y = 16 \\ 2x + 4y = 14 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 1^a:2 \\ \\ 3^a:2 \end{array} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x + y = 6 \\ 3x + y = 16 \\ x + 2y = 7 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \\ 3 \cdot 1^a - 2^a \\ 3^a - 1^a \end{array} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r} x + y = 6 \\ 2y = 2 \\ y = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \\ y = 1 \\ y = 1 \end{array} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x + 1 = 6 \\ y = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 5 \\ y = 1 \end{array}\right.$$

La solución del sistema es: x = 5, y = 1

c) Solución

Se necesitan:

5 gramos del complemento A.

1 gramo del complemento B.

2. En un domicilio se pagaron 3 facturas (agua, luz y teléfono) por un total de 140 €. De agua se pagó la tercera parte que de luz, y la factura del teléfono fue el 45% del total.

a) Plantea el correspondiente sistema de ecuaciones.

b) ¿Cuánto se pagó en cada factura?

Solución:

Incógnitas, datos y preguntas

Importe de la factura de agua: x

Importe de la factura de luz: y

Importe de la factura de teléfono: z

Manos a la obra

$$\left.\begin{array}{l} x + y + z = 140 \\ 3x = y \\ z = 0{,}45 \cdot 140 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x + y + z = 140 \\ 3x - y = 0 \\ z = 63 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 77 \\ 3x - y = 0 \end{array}\right\} \underset{1^a + 2^a}{\Rightarrow} \left.\begin{array}{l} x + y = 77 \\ 4x = 77 \end{array}\right\} \begin{array}{l} y = 57{,}75 \\ x = 19{,}25 \end{array}$$

La solución del sistema es: x = 19,25; y = 57,75; z = 63

Solución:

Las facturas fueron:

Factura del agua, 19,25 €

Factura de la luz, 57,75 €

Factura del teléfono, 63 €

3. Considera la ecuación matricial:

$$X + X \cdot A + B^t = 2C$$

donde las matrices A, B y C son:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 4 & -5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

y donde B^t denota la matriz traspuesta de B.

a) Despeja la matriz X en la ecuación matricial. ¿De qué orden es?

b) Calcula la matriz $2C - B^t$ y la inversa de la matriz I + A, siendo I la matriz identidad de orden 3

c) Resuelve la ecuación matricial obteniendo la matriz X

Solución:

a) $X + X \cdot A + B^t = 2C$

$X(I + A) = 2C - B^t$

$X = (2C - Bt)\,(I + A)^{-1}$

X es una matriz de orden 2×3

b) $2C - B^t = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 4 & -2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & 4 & 4 \\ 5 & -5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$

$$I + A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$|I + A| = -1$

$$(I + A)^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

c) $X = (2C - B^t)(I + A)^{-1} =$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

4. Sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ -2 \end{pmatrix} \qquad Y = \begin{pmatrix} -x \\ 2 \\ z \end{pmatrix}$$

a) Determina la matriz inversa de A

b) Halla los valores de x, y, z para los que $A \cdot X = Y$

Solución:

a) Matriz inversa

$$|A| = 1,\ A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Valores de x, y, z

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - 2y - 2 \\ y \\ -x + 3y \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} x - 2y - 2 \\ y \\ -x + 3y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ 2 \\ z \end{pmatrix}$$

Se pasa al sistema:

$$\left.\begin{aligned} x - 2y - 2 &= -x \\ y &= 2 \\ -x + 3y &= z \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} 2x - 2y &= 2 \\ y &= 2 \\ -x + 3y - z &= 0 \end{aligned}\right\} \begin{matrix} 1^a : 2 \\ y = 2 \Rightarrow \\ \end{matrix}$$

$$\left.\begin{aligned} x - y &= 1 \\ y &= 2 \\ -x + 3y - z &= 0 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} x &= 3 \\ y &= 2 \Rightarrow \\ z &= 3 \end{aligned}$$

Solución: **x = 3, y = 2, z = 3**

5. Sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & y \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} y \\ ay \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 6 - ay \\ 1 - a \end{pmatrix}$$

a) Consideramos **x** e **y** dos variables y **a,** un parámetro. Obtén el sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas que resulta de plantear AB – C = D

b) Estudia el sistema para los distintos valores de **a**

c) Encuentra una solución para a = 2

Solución:

a) Sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + y \\ 1y \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B - C = \begin{pmatrix} ax + y \\ 1y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y \\ ay \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax \\ -ay + y \end{pmatrix}$$

Si A · B – C = D, se tiene $\begin{pmatrix} ax \\ -ay + y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 - ay \\ 1 - a \end{pmatrix}$

Se obtiene el sistema:

$$\left.\begin{aligned} ax &= 6 - ay \\ -ay + y &= 1 - a \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} ax + ay &= 6 \\ (1 - a)y &= 1 - a \end{aligned}\right\}$$

b) Clasificación:

$$C = \begin{pmatrix} a & a \\ 0 & 1 - a \end{pmatrix} \Rightarrow |C| = \begin{vmatrix} a & a \\ 0 & 1 - a \end{vmatrix} =$$

$= a(1 - a), a(1 - a) = 0 \Rightarrow a = 0, a = 1$

Si $a \neq 0, a \neq 1$, R(C) = R(A) = 2 = número de incógnitas, el sistema es compatible determinado:

Para a = 0, se estudian los rangos de la matriz de los coeficientes C y de la ampliada A

$$R(A) = R\begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} 2^a \\ 1^a \end{matrix} = R\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Se tiene R(C) = 1 < R(A) = 2; el sistema es incompatible.

Para a = 1, se estudian los rangos de la matriz de los coeficientes C y de la ampliada A

$$R(A) = R\begin{pmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Se tiene R(C) = R(A) = 1 < número de incógnitas; el sistema es compatible indeterminado.

c) Para a = 2

$$\left.\begin{aligned} 2x + 2y &= 6 \\ -y &= -1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} x &= 2 \\ y &= 1 \end{aligned}$$

Solución: **x = 2, y = 1**

6. Estudia para qué valores de **m** el sistema, con incógnitas representadas por **x** e **y,** dado por:

$$\left\{\begin{aligned} mx - m - 2 &= 0 \\ mx + (m - 1)y - 2m - 1 &= 0 \end{aligned}\right.$$

tiene solución y cuándo es única. Encuentra dos soluciones para m = 1

Solución:

Clasificación:

$$C = \begin{pmatrix} m & 0 \\ m & m - 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |C| = \begin{vmatrix} m & 0 \\ m & m - 1 \end{vmatrix} = m^2 - m,$$

$m(m - 1) = 0 \Rightarrow m = 0, m = 1$

Si $m \neq 0, m \neq 1$, R(C) = R(A) = 2 = número de incógnitas, el sistema es compatible determinado:

Para m = 0, se estudian los rangos de la matriz de los coeficientes C y de la ampliada A

$$R(A) = R\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} 2^a \\ 1^a \end{matrix} = R\left(\begin{array}{cc|c} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

Se tiene R(C) = 1 < R(A) = 2; el sistema es incompatible.

Para m = 1, se estudian los rangos de la matriz de los coeficientes C y de la ampliada A

$$R(A) = R\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Se tiene R(C) = R(A) = 1 < número de incógnitas; el sistema es compatible indeterminado.

Para m = 1, la solución es x = 3, y cualquiera

Dos soluciones para m = 1 son:

x = 3, y = 0

x = 3, y = 1

7. Considera el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} ax + y + 3z &= 0 \\ x + ay + 2z &= 1 \\ x + ay + 3z &= -1 \end{aligned}\right\}$$

a) Discute sus posibles soluciones según los valores del parámetro **a**

b) Resuelve el sistema para a = 0

Solución:

a) Discusión: $C = \begin{pmatrix} a & 1 & 3 \\ 1 & a & 2 \\ 1 & a & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow |C| = \begin{vmatrix} a & 1 & 3 \\ 1 & a & 2 \\ 1 & a & 3 \end{vmatrix} = a^2 - 1; a^2 - 1 = 0 \Rightarrow a = 1, a = -1$

Para $a \neq 1, a \neq -1 \Rightarrow R(C) = R(A) =$ nº de incógnitas = 3; sistema compatible determinado.

Para a = 1, se estudian los rangos de la matriz de los coeficientes C y de la ampliada A

$$R(A) = R\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ 1^a - 2^a \\ 1^a - 3^a \end{array} = R\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

R(C) = 2 < R(A) = 3; el sistema es incompatible.

Para a = −1

$$R(A) = R\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ 1^a + 2^a \\ 3^a - 2^a \end{array} = R\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ 2^a - 5 \cdot 3^a \end{array} = R\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 11 \end{array}\right)$$

Se tiene, R(C) = 2 < R(A) = 3; el sistema es incompatible.

b) Para a = 0 se tiene el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} y + 3z = 0 \\ x \quad + 2z = 1 \\ x \quad + 3z = -1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 2^a \\ 1^a \\ 3^a - 2^a \end{array} = \left.\begin{array}{r} x \quad + 2z = 1 \\ y + 3z = 0 \\ z = -2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = 5 \\ y = 6 \\ z = -2 \end{array}$$

La solución única es: **x = 5, y = 6, z = −2**

8. Un agricultor desea plantar 750 cerezos, 700 perales y 650 manzanos. En el vivero Agro ofrecen un lote de 15 cerezos, 30 perales y 10 manzanos por 700 €, y en el vivero Ceres el lote de 15 cerezos, 10 perales y 20 manzanos cuesta 650 €.

a) Plantea y resuelve un programa lineal para averiguar el número de lotes que ha de comprar en cada vivero para que pueda plantar los árboles que desea y para que el coste total de adquisición sea mínimo.

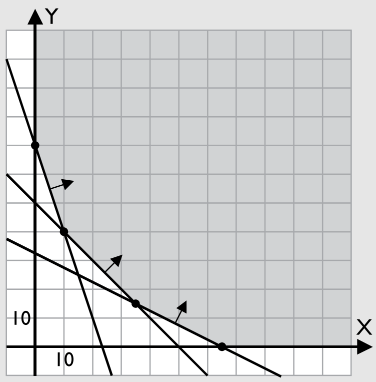
b) ¿Utiliza el agricultor todos los árboles que ha adquirido? En caso negativo, di cuántos no ha plantado y de qué tipo son.

Solución:

a) Tabla con los datos del problema.

	V. Agro	V. Ceres	Restricciones	
Nº de lotes	x	y	$x \geq 0; y \geq 0$	
Cerezos	15x	15y	$15x + 15y \geq 750$	
Perales	30x	10y	$30x + 10y \geq 700$	
Manzanos	10x	20y	$10x + 20y \geq 650$	
Coste	700x	650y	$f(x, y) = 700x + 650y$	**Mínimo**

b) Región factible.



c) Valores de la función objetivo en los vértices de la región factible.

$A(35, 15) \Rightarrow f(35, 15) = 700 \cdot 35 + 650 \cdot 15 = 34\,250$ €

$B(65, 0) \Rightarrow f(65, 0) = 700 \cdot 65 + 650 \cdot 0 = 45\,500$ €

$C(0, 70) \Rightarrow f(0, 70) = 700 \cdot 0 + 650 \cdot 70 = 45\,500$ €

$D(10, 40) \Rightarrow f(10, 40) = 700 \cdot 10 + 650 \cdot 40 = 33\,000$ € **Mínimo**

d) La solución óptima es D(10, 40), es decir, **x = 10 lotes del vivero Agro** e **y = 40 lotes del vivero Ceres**

Cerezos = 10 · 15 + 40 · 15 = 750

Perales = 10 · 30+ 40 · 10 = 700

Cerezos = 10 · 10 + 40 · 20 = 900

Le sobran 250 manzanos.

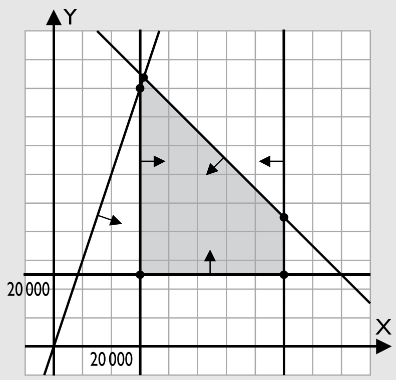
9. Se desea invertir una cantidad de dinero menor o igual que 125 000 €, distribuido entre acciones del tipo A y del tipo B. Las acciones del tipo A garantizan una ganancia del 10% anual, y es obligatorio invertir en ellas un mínimo de 30 000 € y un máximo de 81 000 €. Las acciones del tipo B garantizan una ganancia del 5% anual, y es obligatorio invertir en ellas un mínimo de 25 000 €. La cantidad invertida en acciones del tipo B no puede superar el triple de la cantidad invertida en acciones del tipo A. ¿Cuál debe ser la distribución de la inversión para maximizar la ganancia anual? Determina dicha ganancia máxima.

Solución:

a) Tabla con los datos del problema.

	Acciones A	Acciones B	Restricciones	
Dinero	x	y	$30\,000 \le x \le 81\,000$; $y \ge 25\,000$	
Suma	x	y	$x + y \le 125\,000$	
Relación	x	y	$y \le 3x$	
Beneficio	0,1x	0,05y	$f(x, y) = 0{,}1x + 0{,}05y$	**Máximo**

b) Región factible.



c) Valores de la función objetivo en los vértices de la región factible.

$A(30\,000, 25\,000) \Rightarrow f(30\,000, 25\,000) = 0{,}1 \cdot 30\,000 + 0{,}05 \cdot 25\,000 = 4\,250$ €

$B(81\,000, 25\,000) \Rightarrow f(81\,000, 25\,000) = 0{,}1 \cdot 81\,000 + 0{,}05 \cdot 25\,000 = 9\,350$ €

$C(81\,000, 44\,000) \Rightarrow f(81\,000, 44\,000) = 0{,}1 \cdot 81\,000 + 0{,}05 \cdot 44\,000 = 10\,300$ € Máximo

$D(31\,250, 93\,750) \Rightarrow f(31\,250, 93\,750) = 0{,}1 \cdot 31\,250 + 0{,}05 \cdot 93\,750 = 7\,812{,}5$ €

$E(30\,000, 90\,000) \Rightarrow f(30\,000, 90\,000) = 0{,}1 \cdot 30\,000 + 0{,}05 \cdot 90\,000 = 7\,500$ €

d) La solución óptima es C(81 000, 44 000), es decir, **x = 81 000 € en acciones del tipo A** e **y = 44 000 en acciones del tipo B**

La ganáncia máxima es de 10 300 €

10. Un nutricionista informa a un individuo que, en cualquier tratamiento que siga, no debe ingerir diariamente más de 240 mg de hierro ni más de 200 mg de vitamina B. Para ello están disponibles píldoras de dos marcas, P y Q. Cada píldora de la marca P contiene 40 mg de hierro y 10 mg de vitamina B, y cuesta 6 céntimos de euro; cada píldora de la marca Q contiene 10 mg de hierro y 20 mg de vitamina B, y cuesta 8 céntimos de euro.

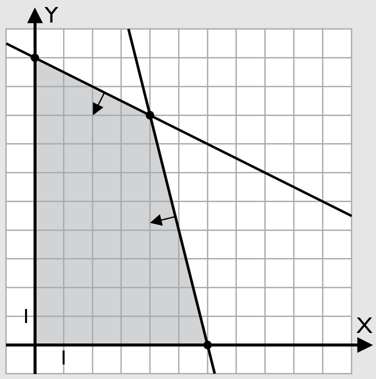
Entre los distintos tratamientos, ¿cuál sería el de máximo coste diario?

Solución:

a) Tabla con los datos del problema.

	Píldora P	Píldora Q	Restricciones	
Nº de píldoras	x	y	$x \geq 0; y \geq 0$	
Hierro	40x	10y	$40x + 10y \leq 240$	
Vitamina B	10x	20y	$10x + 20y \leq 200$	
Coste	6x	8y	$f(x, y) = 6x + 8y$	**Máximo**

b) Región factible.



c) Valores de la función objetivo en los vértices de la región factible.

$A(0, 0) \Rightarrow f(0, 0) = 6 \cdot 0 + 8 \cdot 0 = 0$ €

$B(6, 0) \Rightarrow f(6, 0) = 6 \cdot 6 + 8 \cdot 0 = 36$ €

$C(4, 8) \Rightarrow f(4, 8) = 6 \cdot 4 + 8 \cdot 8 = 88$ € **Máximo**

$D(0, 10) \Rightarrow f(0, 10) = 6 \cdot 0 + 8 \cdot 10 = 80$ €

d) La solución óptima es C(4, 8), es decir, **x = 4 píldoras del tipo P** e **y = 8 píldoras del tipo Q.**