

# 6

# Límites, continuidad y asíntotas



## 1. Límite de una función en un punto

### ■ Piensa y calcula

Completa mentalmente la tabla siguiente:

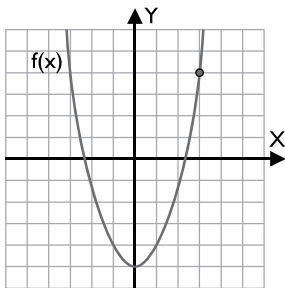
**Solución:**

x	1,9	1,99	1,999	→	2	→	2,001	2,01	2,1
f(x) = x + 1	2,9	2,99	2,999	→	3	→	3,001	3,01	3,1

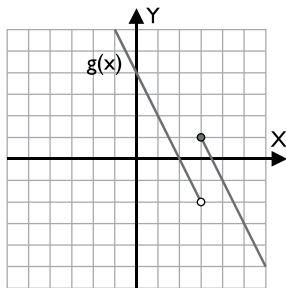
### ● Aplica la teoría

1. Observando la gráfica, halla el límite en cada caso; si no existe, justifícalo:

a)  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$



b)  $\lim_{x \rightarrow 3} g(x)$



**Solución:**

a)  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 4$

b)  $\lim_{x \rightarrow 3} g(x)$  no existe porque los límites laterales son distintos.

$\lim_{x \rightarrow 3^-} g(x) = -2$ ;  $\lim_{x \rightarrow 3^+} g(x) = 1$

2. Completa las tablas para estimar el límite en cada caso:

x	0,9	0,99	0,999	→	1
f(x) = x <sup>2</sup> - 1				→	

x	1,1	1,01	1,001	→	1
f(x) = x <sup>2</sup> - 1				→	

a)  $\lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 - 1)$

b)  $\lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 - 1)$

**Solución:**

x	0,9	0,99	0,999	→	1
f(x) = x <sup>2</sup> - 1	-0,19	-0,0199	-0,001999	→	0

x	1,1	1,01	1,001	→	1
f(x) = x <sup>2</sup> - 1	0,21	0,0201	0,002	→	0

a)  $\lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 - 1) = 0$

b)  $\lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 - 1) = 0$

3. Calcula mentalmente los siguientes límites:

a)  $\lim_{x \rightarrow 2} (x^3 - 2x + 1)$

b)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x}{x + 3}$

c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x^2 + 4}$

d)  $\lim_{x \rightarrow 2} 5^{x-2}$

e)  $\lim_{x \rightarrow 1} L(4x + 2)$

**Solución:**

a)  $\lim_{x \rightarrow 2} (x^3 - 2x + 1) = 8 - 4 + 1 = 5$

b)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x}{x + 3} = \frac{6}{6} = 1$

c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x^2 + 4} = \sqrt{4} = 2$

d)  $\lim_{x \rightarrow 2} 5^{x-2} = 5^0 = 1$

e)  $\lim_{x \rightarrow 1} L(4x + 2) = L 6$

## 2. Límite de una función en el infinito

### ■ Piensa y calcula

Completa mentalmente la siguiente tabla:

**Solución:**

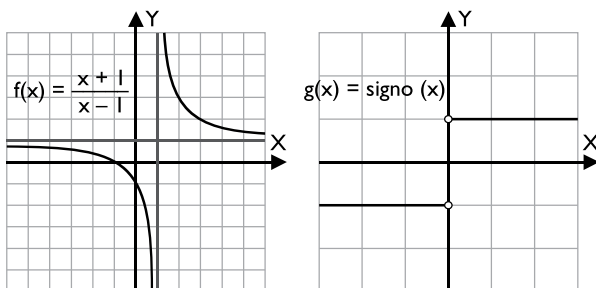
x	$-\infty \leftarrow$	-1 000	-100	-10	-1	1	10	100	1 000	$\rightarrow +\infty$
$f(x) = 1/x$	0	-0,001	-0,01	-0,1	-1	1	0,1	0,01	0,001	0

### ● Aplica la teoría

4. Usa la gráfica para estimar el límite en cada caso; y si no existe, justifícalo:

a)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  siendo  $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$

b)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$  siendo  $g(x) = \text{signo}(x)$



**Solución:**

a)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$

b)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -1$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1$

5. Indica si los siguientes límites son infinitos, un número o una indeterminación:

a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 3x)$

b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 3x)$

c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2^{-x}$

d)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{-5}$

e)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log x}{x^2}$

f)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$

g)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^2}{x^2 - 5} \right)^x$

h)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x-5}}{L(x+5)}$

i)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \cdot 2^{-x}$

j)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x} - 3x)$

**Solución:**

a)  $\infty + \infty = +\infty$

b)  $[\infty - \infty] = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$

(Observa que:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 > \lim_{x \rightarrow +\infty} 3x$ )

c)  $\frac{1}{\infty} = 0$

d)  $\infty^{-5} = 0$

e)  $\left[ \frac{\infty}{\infty} \right] = 0$  (Observa que:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log x < \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2$ )

f)  $\left[ \frac{-\infty}{\infty} \right]$  Indeterminado.

g)  $[1 \ ]$  Indeterminado.

h)  $\left[ \frac{\infty}{\infty} \right] = +\infty$

(Observa que:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x-5} > \lim_{x \rightarrow +\infty} L(x+5)$ )

i)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{2^x} = \left[ \frac{\infty}{\infty} \right] = 0$

(Observa que:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 < \lim_{x \rightarrow +\infty} 2^x$ )

j)  $\infty + \infty = +\infty$

### 3. Límites de funciones polinómicas y racionales

#### ■ Piensa y calcula

Indica cuál de las siguientes expresiones es determinada, y calcula el resultado, y cuál indeterminada:

- a)  $(-\infty)^3$       b)  $\infty^3$       c)  $\frac{4}{0}$       d)  $\frac{0}{4}$       e)  $\frac{0}{0}$       f)  $\frac{5}{\infty}$       g)  $\frac{\infty}{\infty}$

**Solución:**

- a)  $(-\infty)^3 = -\infty$       b)  $\infty^3 = \infty$       c)  $\frac{4}{0} = \infty$       d)  $\frac{0}{4} = 0$   
 e)  $\left[\frac{0}{0}\right]$  Indeterminada.      f)  $\frac{5}{\infty} = 0$       g)  $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$  Indeterminada.

#### ● Aplica la teoría

6. Calcula los límites siguientes:

- a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^5 + x^2 + 3)$       b)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^3 + 5x - 4)$

**Solución:**

- a)  $-\infty$       b)  $+\infty$

7. Calcula los límites siguientes:

- a)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x}{x^3 - x^2 + x - 1}$       b)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 + x - 6}$

**Solución:**

- a)  $1/2$       b)  $2$

8. Calcula los límites siguientes:

- a)  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x + 5}{x + 2}$       b)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + 2}{x^2 - 1}$

**Solución:**

- a)  $\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x + 5}{x + 2} = -\infty$        $\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x + 5}{x + 2} = +\infty$   
 b)  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x + 2}{x^2 - 1} = -\infty$        $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x + 2}{x^2 - 1} = +\infty$

9. Calcula los límites siguientes:

- a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 3}{x^3 + 2x}$       b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 + 2}{x^2 + 1}$

**Solución:**

- a)  $0$       b)  $3$

10. Calcula los límites siguientes:

- a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^3 + 1}{x^2 + 2} - x \right)$       b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{5x^4 - x}{x^2 + 3} - 2x \right)$   
 c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{3x + 1}{2} - \frac{x^2 + 3}{x} \right)$   
 d)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^3 - 4x^2}{2x^2 - 1} - \frac{x}{2} \right)$

**Solución:**

- a)  $0$   
 b)  $+$   
 c)  $+$   
 d)  $-2$

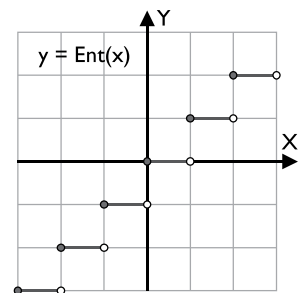
### 4. Continuidad

#### ■ Piensa y calcula

Indica en qué valores es discontinua la función parte entera del 1<sup>er</sup> gráfico del margen:

**Solución:**

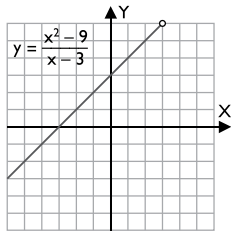
En los valores enteros en los que tiene una discontinuidad de salto finito.



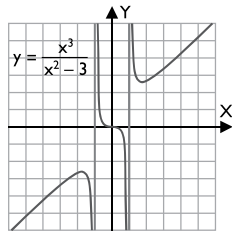
## ● Aplica la teoría

11. A la vista de la gráfica, clasifica las discontinuidades de las siguientes funciones:

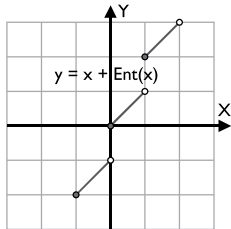
a)



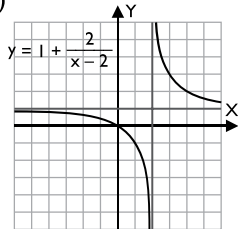
b)



c)



d)



### Solución:

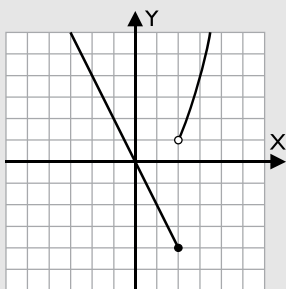
- Tiene una discontinuidad evitable en  $x = 3$ , que se evita haciendo  $f(3) = 6$
- Tiene una discontinuidad de 1ª especie de salto infinito en  $x = -1$  y  $x = 1$
- Tiene una discontinuidad de 1ª especie de salto finito en los valores enteros.
- Tiene una discontinuidad de 1ª especie de salto infinito en  $x = 2$ .

12. Representa y estudia la continuidad de las siguientes funciones:

$$a) f(x) = \begin{cases} -2x & \text{si } x \leq 2 \\ x^2 - 2x + 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

$$b) g(x) = \begin{cases} 2^x - 2 & \text{si } x \leq 1 \\ Lx & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

### Solución:



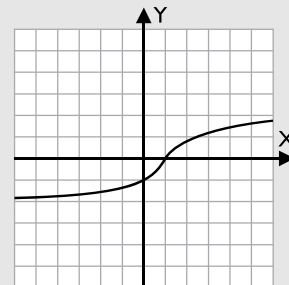
La función está definida a trozos con dos funciones polinómicas que siempre son continuas en su dominio. El único punto conflictivo puede ser para  $x = 2$

- $f(2) = -4$
- $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (-2x) = -4$   
 $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 - 2x + 1) = 1$

Como los límites laterales no son iguales, no existe el  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

Existe una discontinuidad de 1ª especie de salto finito en  $x = 2$

b)



La función está definida a trozos con una función exponencial y una logarítmica que siempre son continuas en su dominio. El único punto conflictivo puede ser para  $x = 1$

a)  $g(1) = 0$

$$b) \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (2^x - 2) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} Lx = 0$$

Como los límites laterales son iguales, el  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$   
La función es continua.

13. Estudia la continuidad de las siguientes funciones:

$$a) f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$$

$$b) f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

### Solución:

a) Es una función racional que es continua en todo su dominio.

Los valores donde no existe la función son  $x = -1$  y  $x = 1$

• En  $x = -1$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x}{x^2 - 1} = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x}{x^2 - 1} = +\infty$$

La función tiene una discontinuidad de 1ª especie de salto infinito.

• En  $x = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x}{x^2 - 1} = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{x^2 - 1} = +\infty$$

La función tiene una discontinuidad 1ª especie de salto infinito.

b) Es una función racional que es continua en todo su dominio.

El valor donde no existe la función es  $x = 2$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4$$

La función tiene una discontinuidad evitable. Se evita haciendo  $f(2) = 4$

14. Halla el valor del parámetro  $k$  para que la siguiente función sea continua en  $x = 2$

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{2-x} & \text{si } x \leq 2 \\ kx - 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

**Solución:**

a)  $f(2) = 0$

b)  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \sqrt{2-x} = 0$

$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (kx - 1) = 2k - 1$

c) Para que sea continua, el límite debe existir cuando  $x$  tiende a 2, y ser igual que  $f(2)$

$$2k - 1 = 0 \Rightarrow k = 1/2$$

## 5. Asíntotas de funciones racionales

### ■ Piensa y calcula

Calcula mentalmente los siguientes límites:

a)  $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{x-2}$       b)  $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x-2}$       c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x}$

**Solución:**

a)  $-\infty$       b)  $+\infty$       c) 0

### ● Aplica la teoría

Calcula las asíntotas y la posición de la gráfica respecto de las asíntotas de las siguientes funciones:

15.  $f(x) = \frac{1}{4-x^2}$

**Solución:**

Verticales:  $x = -2, x = 2$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{1}{4-x^2} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{1}{4-x^2} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{4-x^2} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{4-x^2} = -\infty$$

Horizontales:  $y = 0$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{4-x^2} = 0^-$$

La gráfica está por debajo de la asíntota.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{4-x^2} = 0^-$$

La gráfica está por debajo de la asíntota.

Oblicuas: no tiene.

16.  $f(x) = \frac{x^2}{x+2}$

**Solución:**

Verticales:  $x = -2$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x^2}{x+2} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x^2}{x+2} = +\infty$$

Horizontales: no tiene.

Oblicuas:  $y = x - 2$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4}{x+2} = 0^-$$

La gráfica está debajo de la asíntota.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{x+2} = 0^+$$

La gráfica está encima de la asíntota.

17.  $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$

**Solución:**

Verticales: no tiene.

Horizontales:  $y = 0$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^2 + 1} = 0^-$$

La gráfica está debajo de la asíntota.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2 + 1} = 0^+$$

La gráfica está encima de la asíntota.

Oblicuas: no tiene.

18.  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2}$

**Solución:**

Verticales:  $x = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 - 1}{x^2} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - 1}{x^2} = -\infty$$

Horizontales:  $y = 1$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{x^2} = 0^-$$

La gráfica está debajo de la asíntota.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x^2} = 0^-$$

La gráfica está debajo de la asíntota.

Oblicuas: no tiene.

## Preguntas tipo test

Contesta en tu cuaderno:

- 1 Dada la función real de variable real definida por:

$$f(x) = \frac{(x-3)^2}{x+3}$$

determina las asíntotas de la función.

- Asíntota vertical:  $x = 3$   
 Asíntota oblicua:  $y = x$   
 Asíntota vertical:  $x = -3$ , asíntota oblicua:  $y = x - 9$   
 No tiene asíntotas.

- 2 Dada la función  $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x \leq 0 \\ (x-1)^2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

estudia su continuidad en el punto  $x = 0$

- Es continua en  $x = 0$   
 Tiene una discontinuidad de salto finito.  
 Tiene una discontinuidad evitable.  
 Tiene una discontinuidad de salto infinito.

- 3 La profundidad de la capa de arena en una playa se verá afectada por la construcción de un dique. En una zona de la playa, esa profundidad vendrá dada por la siguiente función ( $P$  es la profundidad en metros, y  $t$ , el tiempo en años desde el inicio de la construcción). Si la profundidad llegara a superar los 4 metros, se debería elevar la altura del paseo marítimo.

$$P(t) = \begin{cases} 2 + t^2 & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \\ \frac{8t^2 - t - 1}{2t^2} & \text{si } 0 > 1 \end{cases}$$

¿Es la profundidad una función continua del tiempo?

- Es continua para todo valor de  $t$   
 Tiene una discontinuidad de salto finito en  $t = 1$   
 Tiene una discontinuidad evitable en  $t = 1$   
 Tiene una discontinuidad de salto infinito en  $t = 1$

- 4 En el enunciado anterior, por mucho tiempo que pase, ¿será necesario elevar la altura del paseo por causa de la profundidad de la capa de arena?

- No, porque no pasará de 1 m  
 No, porque no sobrepasará los 4 m  
 Sí, porque sobrepasará los 4 m  
 No se puede saber.

- 5 Estudia la continuidad en el intervalo  $[0,4]$  de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ x^3 - 6x^2 + 9x + 1 & \text{si } 1 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

- Tiene una discontinuidad de salto finito en  $x = 1$   
 Tiene una discontinuidad evitable en  $x = 1$   
 Tiene una discontinuidad de salto infinito en  $x = 1$   
 Es continua para todo valor de  $x$

- 6 Dada la función  $f(x) = \frac{x+1}{2-x}$ , se pide calcular sus asíntotas.

- Asíntota vertical:  $x = -2$   
 Asíntota oblicua:  $y = -x$   
 Asíntota vertical:  $x = 2$ , asíntota horizontal:  $y = 1/2$   
 Asíntota vertical:  $x = 2$ , asíntota horizontal:  $y = -1$

- 7 Estudia la discontinuidad de la función:

$$f(x) = \frac{x^3 - 5x + 2}{x^2 - 5x + 6}$$

- Tiene una discontinuidad de salto finito en  $x = 2$   
 Tiene una discontinuidad evitable en  $x = 2$  y una discontinuidad de salto infinito en  $x = 3$   
 Tiene una discontinuidad evitable en  $x = 3$   
 Es continua para todo valor de  $x$

- 8 Supongamos que el valor  $V$ , en euros, de un producto disminuye o se deprecia con el tiempo  $t$ , en meses, donde:

$$V(t) = 50 - \frac{25t^2}{(t+2)^2}; t \neq 0$$

Halla el  $\lim_{t \rightarrow +\infty} V(t)$ .

- 75     50     25      $+\infty$

- 9 Calcula los valores de  $a, b \in \mathbb{R}$  para que la función:

$$f(x) = \begin{cases} x + a & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{3x} & \text{si } 0 < x < 1 \\ bx & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

sea continua en todo punto.

- $a = 1, b = 3$       $a = -1/3, b = -3$   
  $a = 1/3, b = \sqrt{2}/3$       $a = 1, b = \sqrt{2}$

- 10 El número de individuos, en millones, de una población viene dado por la función:

$$f(t) = \frac{18 + t^2}{(t+3)^2}$$

donde  $t$  es el tiempo medido en años desde  $t = 0$ . Calcula el tamaño de la población a largo plazo, cuando el tiempo tiende a  $\infty$

- 1     18     6      $+\infty$

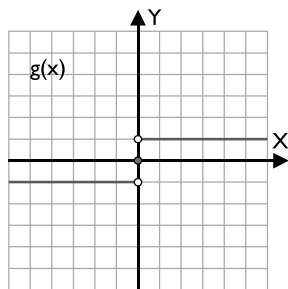
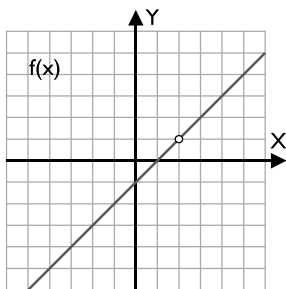
# Ejercicios y problemas

## 1. Límite de una función en un punto

19. Observando la gráfica en cada caso, halla el límite, y si no existe, justifícalo:

a)  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$  siendo  $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2}$

b)  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$  siendo  $g(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$



**Solución:**

a)  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 1$       b)  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  no existe.

20. Completa la tabla para estimar el límite en cada caso:

x	2,9	2,99	2,999	→	3
$f(x) = \frac{1}{x-2}$				→	

x	3,1	3,01	3,001	→	3
$f(x) = \frac{1}{x-2}$				→	

a)  $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{1}{x-2}$       b)  $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{x-2}$

**Solución:**

x	2,9	2,99	2,999	→	3
$f(x) = \frac{1}{x-2}$	1,111	1,01	1,001	→	1

x	3,1	3,01	3,001	→	3
$f(x) = \frac{1}{x-2}$	0,909	0,990	0,999	→	1

a)  $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{1}{x-2} = 1$       b)  $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{x-2} = 1$

21. Calcula mentalmente los siguientes límites:

a)  $\lim_{x \rightarrow 4} (x^2 - 5x + 2)$       b)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+4}{x+1}$

c)  $\lim_{x \rightarrow -6} \sqrt{2-x}$

**Solución:**

a) -2      b) 2      c)  $2\sqrt{2}$

## 2. Límite de una función en el infinito

22. Completa la tabla en cada caso:

x	-10	-100	-1 000	→	$-\infty$
$f(x) = \frac{x}{x+1}$				→	

x	10	100	1 000	→	$+\infty$
$f(x) = \frac{x}{x+1}$				→	

a)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x+1}$       b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x+1}$

**Solución:**

x	-10	-100	-1 000	→	$-\infty$
$f(x) = \frac{x}{x+1}$	1,11111	1,01	1,001	→	1

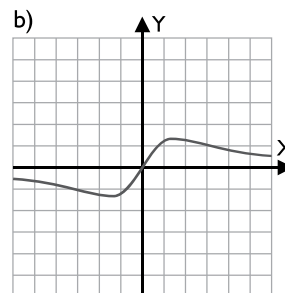
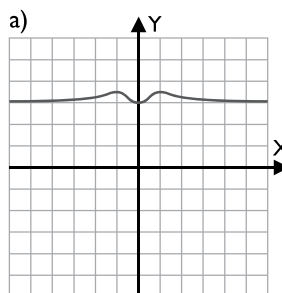
x	10	100	1 000	→	$+\infty$
$f(x) = \frac{x}{x+1}$	0,9090	0,99	0,999	→	1

a)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x+1} = 1$       b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x+1} = 1$

23. Asocia cada gráfica con una función ayudándote de los límites a los que tiende la función cuando x tiende a infinito.

$f(x) = \frac{x}{x^2 + 2}$

$i(x) = 3 + \frac{x^2}{x^4 + 1}$



**Solución:**

$f(x) = \frac{x}{x^2 + 2}$  es la gráfica b)

$i(x) = 3 + \frac{x^2}{x^4 + 1}$  es la gráfica a)



# Ejercicios y problemas

24. Ordena de menor a mayor los órdenes de los siguientes infinitos:

- a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{2/3}$   
 b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2^x$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1,5^x$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x$   
 c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_2 x$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3^x$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{10}$   
 d)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^4$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} L x$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2,5^x$

**Solución:**

- a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{2/3} < \lim_{x \rightarrow +\infty} x < \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3$   
 b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1,5^x < \lim_{x \rightarrow +\infty} 2^x < \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x$   
 c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_2 x < \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{10} < \lim_{x \rightarrow +\infty} 3^x$   
 d)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} L x < \lim_{x \rightarrow +\infty} x^4 < \lim_{x \rightarrow +\infty} 2,5^x$

25. Indica si los siguientes límites son infinitos, un número o una indeterminación:

- a)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^4 + x^2)$       b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x})$   
 c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4^x}{x + 5}$       d)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(x^2 + 1)}{x^2}$

**Solución:**

- a)  $+\infty$       b)  $[\infty - \infty]$       c)  $+\infty$       d) 0

## 3. Límites de funciones polinómicas y racionales

26. Calcula los límites siguientes:

- a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^4 + 5x^2 - x + 2)$   
 b)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^3 + 5x^2 - 4x + 1)$

**Solución:**

- a)  $+\infty$       b)  $+\infty$

27. Calcula los límites siguientes:

- a)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 4x^2 + 4x}{x^3 - 3x^2 + 4}$       b)  $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 + 4x + 3}$

**Solución:**

- a) 2/3      b) 2

28. Calcula los límites siguientes:

- a)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 2x^2 + x}{x^2 + x - 2}$       b)  $\lim_{x \rightarrow -6} \frac{x^2 + 4x - 5}{x^3 + 10x^2 + 25x}$

**Solución:**

- a) 0      b) -7/6

29. Calcula los límites siguientes:

- a)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x}{x^2 - 2x}$       b)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2}{x^2 - 1}$

**Solución:**

- a)  $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x}{x^2 - 2x} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{x - 2} = -\infty$   
 $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x}{x^2 - 2x} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x - 2} = +\infty$   
 b)  $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{2}{x^2 - 1} = +\infty$   
 $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{2}{x^2 - 1} = -\infty$

30. Calcula los límites siguientes:

- a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + x}{x^3 + 2}$       b)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{7x^2 - x + 1}{2x^2 + 3}$

**Solución:**

- a) 0      b) 7/2

31. Calcula los límites siguientes:

- a)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + 5}{x^2 + 2x}$       b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 + x - 1}{4x^3 + 3}$

**Solución:**

- a)  $-\infty$       b) 1/2

32. Calcula los límites siguientes:

- a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x+1}{x+2} - x \right)$       b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{2x^3 - 4}{x^2 + 1} - 2x \right)$   
 c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{2x} - \frac{3}{x} \right)$

**Solución:**

- a)  $-\infty$       b) 0

- c)  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \left( \frac{1}{2x} - \frac{3}{x} \right) = +\infty$   
 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{2x} - \frac{3}{x} \right) = -\infty$

## 4. Continuidad

33. Se considera la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x & \text{si } x > 0 \\ e^{-x} - 1 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Razona si es continua en  $x = 0$

**Solución:**

$$f(0) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (e^{-x} - 1) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 + x) = 0$$

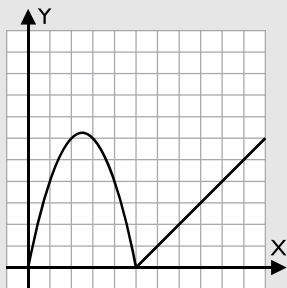
$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

$f(x)$  es continua en  $x = 0$

34. Representa y estudia la continuidad de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 5x & \text{si } 0 \leq x < 5 \\ x - 5 & \text{si } 5 \leq x \leq 10 \end{cases}$$

**Solución:**

Como la función está definida por dos funciones polinómicas que son continuas, el único punto conflictivo puede ser para el valor  $x = 5$

$$f(5) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5^-} (-x^2 + 5x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5^+} (x - 5) = 0$$

$$f(5) = \lim_{x \rightarrow 5} f(x) = 0 \Rightarrow f(x) \text{ es continua en } x = 5$$

35. Dada la función  $f(x)$ :

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x}{x - 4}$$

el segundo miembro de la igualdad carece de sentido cuando  $x = 4$ . ¿Cómo elegir el valor de  $f(4)$  para que la función  $f(x)$  sea continua en ese punto?

**Solución:**

$$f(4) = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 4x}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x(x-4)}{x-4} = \lim_{x \rightarrow 4} x = 4$$

36. Estudia la continuidad de la función:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$$

**Solución:**

La función está definida para  $[0, 4) \cup (4, +\infty)$

Se estudian los valores  $x = 4$  y  $x = 0$

• En  $x = 4$

$f(4)$  no existe.

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4} = 1/4$$

Tiene una discontinuidad evitable que se evita haciendo  $f(4) = 1/4$

• En  $x = 0$

$f(0) = 1/2$

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$  no existe.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1/2$$

Es continua por la derecha.

Hay una discontinuidad de 2ª especie en  $x = 0$

37. Se considera la función:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 5 & \text{si } x \leq 1 \\ x^2 + k & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Determina el valor de  $k$  para que la función sea continua.

**Solución:**

Como está definida por funciones polinómicas, el punto que puede ser conflictivo se da para el valor  $x = 1$

$$f(1) = 7$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (2x + 5) = 7$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 + k) = 1 + k$$

Como para ser continua

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$$

se tiene:

$$1 + k = 7 \Rightarrow k = 6$$

**5. Asíntotas de funciones racionales**

38. Calcula las asíntotas de la siguiente función y estudia la posición de la curva respecto de ellas:

$$f(x) = \frac{2x^2}{x - 1}$$

**Solución:**

Verticales:  $x = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x^2}{x - 1} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x^2}{x - 1} = +\infty$$

Horizontales: no tiene.

Oblicuas:  $y = 2x + 2$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x - 1} = 0^-$$

# Ejercicios y problemas

La gráfica está por debajo de la asíntota.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x-1} = 0^+$$

La gráfica está por encima de la asíntota.

39. Calcula la asíntota de la siguiente función y estudia la posición de la curva respecto de ella:

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2+8}$$

**Solución:**

Verticales: no tiene.

Horizontales:  $y = 0$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{x^2+8} = 0^-$$

La gráfica está por debajo de la asíntota.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x^2+8} = 0^+$$

La gráfica está por encima de la asíntota.

Oblicuas: no tiene.

40. Calcula las asíntotas de la siguiente función y estudia la posición de la curva respecto de ellas:

$$f(x) = \frac{x^2+3}{x^2-4}$$

**Solución:**

Verticales:  $x = -2, x = 2$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x^2+3}{x^2-4} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x^2+3}{x^2-4} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2+3}{x^2-4} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2+3}{x^2-4} = +\infty$$

Horizontales:  $y = 1$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{7}{x^2-4} = 0^+$$

La gráfica está por encima de la asíntota.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7}{x^2-4} = 0^+$$

La gráfica está por encima de la asíntota.

Oblicuas: no tiene.

41. Calcula las asíntotas de la siguiente función y estudia la posición de la curva respecto de ellas:

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2+x-2}$$

**Solución:**

Verticales:  $x = -2, x = 1$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x^2}{x^2+x-2} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x^2}{x^2+x-2} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2}{x^2+x-2} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2}{x^2+x-2} = +\infty$$

Horizontales:  $y = 1$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x+2}{x^2+x-2} = 0^+$$

La gráfica está por encima de la asíntota.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x+2}{x^2+x-2} = 0^-$$

La gráfica está por debajo de la asíntota.

Oblicuas: no tiene.

## Para ampliar

42. Estudia la continuidad de la función:

$$f(x) = \begin{cases} 1-x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ 3x^2-12x+9 & \text{si } 1 < x \leq 3 \\ -2x^2+16x-30 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

**Solución:**

• En  $x = 1$

$$f(1) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x^2) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (3x^2-12x+9) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) \Rightarrow \text{La función es continua en } x = 1$$

• En  $x = 3$

$$f(3) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} (3x^2-12x+9) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} (-2x^2+16x-30) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3) \Rightarrow \text{La función es continua en } x = 3$$

La función es continua en  $\mathbb{R}$

43. Estudia la continuidad de la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2+2x+1 & \text{si } x < -1 \\ 2x+2 & \text{si } -1 \leq x \leq 2 \\ -x^2+8x & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

**Solución:**

- En  $x = -1$

$$f(-1) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} (x^2 + 2x + 1) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (2x + 2) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = f(-1) \Rightarrow \text{La función es continua en } x = -1$$

- En  $x = 2$

$$f(2) = 6$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (2x + 2) = 6$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (-x^2 + 8) = 12$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \neq f(2) \Rightarrow \text{La función no es continua en } x = 2$$

Tiene una discontinuidad de 1ª especie de salto finito.

44. Estudia la continuidad de  $f(x)$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3 & \text{si } x \leq 1 \\ 4 & \text{si } 1 < x \leq 4 \\ (x - 4)^2 + 2 & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

**Solución:**

- En  $x = 1$

$$f(1) = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 + 3) = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} 4 = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) \Rightarrow \text{La función es continua en } x = 1$$

- En  $x = 4$

$$f(4) = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} 4 = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} ((x - 4)^2 + 2) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} f(x) \neq f(4) \Rightarrow \text{La función no es continua en } x = 4$$

Tiene una discontinuidad de 1ª especie de salto finito.

45. Estudia la continuidad de la función:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x-2} & \text{si } x \geq 2 \\ x(x-2) & \text{si } x < 2 \end{cases}$$

**Solución:**

$$\text{En } x = 2$$

$$f(2) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} x(x-2) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \sqrt[3]{x-2} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) \Rightarrow \text{La función es continua en } x = 2 \text{ y por}$$

consiguiente es continua en  $\mathbb{R}$

46. Estudia la continuidad de  $f(x)$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+2}{x-1} & \text{si } x \leq 2 \\ \frac{3x^2-2x}{x+2} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

**Solución:**

La función está definida mediante dos funciones racionales. Además de estudiar el valor  $x = 2$ , hay que estudiar el valor  $x = 1$ , para el que no está definida la función  $\frac{x+2}{x-1}$

- En  $x = 1$

$f(1)$  no existe.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x+2}{x-1} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+2}{x-1} = +\infty$$

La función es discontinua en  $x = 1$ , donde tiene una discontinuidad de 1ª especie de salto infinito.

- En  $x = 2$

$$f(2) = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x+2}{x-1} = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3x^2-2x}{x+2} = 2$$

La función es discontinua en  $x = 2$ , donde tiene una discontinuidad de 1ª especie de salto finito.

## Problemas

47. Se considera la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 25}{x - 5} & \text{si } x \neq 5 \\ 0 & \text{si } x = 5 \end{cases}$$

- a) Demuestra que  $f(x)$  no es continua en  $x = 5$   
 b) ¿Existe una función continua que coincida con  $f(x)$  para todos los valores  $x \neq 5$ ? En caso afirmativo, da su expresión.

**Solución:**

a)  $f(5) = 0$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 5} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 25}{x - 5} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(x-5)(x+5)}{x-5} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 5} (x+5) = 10 \end{aligned}$$

En  $x = 5$  hay una discontinuidad evitable. Se evita definiendo  $f(5) = 10$

b)  $g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq 5 \\ 10 & \text{si } x = 5 \end{cases}$

48. Calcula las asíntotas de la función y estudia la posición de la gráfica respecto de ellas.

$$f(x) = \frac{3x^2 - 3x}{x + 2}$$

**Solución:**

Verticales:  $x = -2$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{3x^2 - 3x}{x + 2} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{3x^2 - 3x}{x + 2} = +\infty$$

Horizontales: no tiene.

Oblicuas:

$$\frac{3x^2 - 3x}{x + 2} = 3x - 9 + \frac{18}{x + 2}$$

$$y = 3x - 9$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{18}{x + 2} = 0^-$$

La gráfica está por debajo de la asíntota.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{18}{x + 2} = 0^+$$

La gráfica está por encima de la asíntota.

49. Se considera la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 + 3x + 1}{x} & \text{si } x \geq -1 \\ \frac{2x}{x-1} & \text{si } x < -1 \end{cases}$$

- a) Estudia la continuidad de  $f$   
 b) Halla las asíntotas de la gráfica de  $f$

**Solución:**

a) La función está definida mediante dos funciones racionales. Además de estudiar el valor  $x = -1$ , hay que estudiar el valor  $x = 0$ , para el que no está definida la función  $\frac{x^3 + 3x + 1}{x}$

• En  $x = -1$

$$f(-1) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{2x}{x-1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^3 + 3x + 1}{x} = 3$$

La función es discontinua en  $x = -1$ , donde tiene una discontinuidad de 1ª especie de salto finito.

• En  $x = 0$

$f(0) = \text{no existe.}$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^3 + 3x + 1}{x} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^3 + 3x + 1}{x} = +\infty$$

La función es discontinua en  $x = 0$ , donde tiene una discontinuidad de 1ª especie de salto infinito.

b) La función tiene una asíntota vertical en  $x = 0$

Tiene una asíntota horizontal en  $y = 2$

50. Determina el valor de  $a$  y  $b$  para que la función  $f(x)$  sea continua.

$$f(x) = \begin{cases} -2x - a & \text{si } x \leq 0 \\ x - 1 & \text{si } 0 < x \leq 2 \\ bx - 5 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

**Solución:**

Hay que estudiar los valores  $x = 0$  y  $x = 2$

$f(0) = -a$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-2x - a) = -a$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x - 1) = -1$$

Se tiene que cumplir:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$$

$$-1 = -a \Rightarrow a = 1$$

En  $x = 2$

$$f(2) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x - 1) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (bx - 5) = 2b - 5$$

Se tiene que cumplir:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2)$$

$$1 = 2b - 5 \Rightarrow 2b = 6 \Rightarrow b = 3$$

51. Se considera la función

$$f(x) = \begin{cases} a^x - 6 & \text{si } x < 2 \\ |x - 5| & \text{si } 2 \leq x < 10 \end{cases}$$

Determina el valor de **a** sabiendo que **f** es continua y que **a** > 0

**Solución:**

$$f(2) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (a^x - 6) = a^2 - 6$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} |x - 5| = 3$$

Se tiene que cumplir:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2)$$

$$a^2 - 6 = 3 \Rightarrow a^2 = 9 \Rightarrow a = \pm 3$$

$$\text{Como } a > 0 \Rightarrow a = 3$$

52. Se considera la función

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 5a & \text{si } x < 0 \\ bx^2 + 3 & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ x^2 - 4 & \text{si } 2 \leq x \end{cases}$$

Estudia la continuidad de **f(x)** según los valores de las constantes **a** y **b**

**Solución:**

$$\text{En } x = 0$$

$$f(0) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (3x + 5a) = 5a$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (bx^2 + 3) = 3$$

Se tiene que cumplir:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$$

$$5a = 3 \Rightarrow a = 3/5$$

$$\text{En } x = 2$$

$$f(2) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (bx^2 + 3) = 4b + 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 - 4) = 0$$

Se tiene que cumplir:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2)$$

$$4b + 3 = 0 \Rightarrow b = -3/4$$

## Para profundizar

53. Estudia la continuidad de **f(x)**

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x < -1 \\ \frac{4}{x+3} & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ 1 + Lx & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

**Solución:**

La función está definida por funciones continuas en sus dominios. Los valores que se estudian son  $x = -1; x = 1$

• En  $x = -1$

$$f(-1) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} e^x = 1/e$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{4}{x+3} = 2$$

La función tiene una discontinuidad de 1ª especie de salto finito en  $x = -1$

• En  $x = 1$

$$f(1) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{4}{x+3} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (1 + Lx) = 1$$

La función es continua en  $x = 1$

54. Se considera la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + a - 1 & \text{si } x \leq 2 \\ L(x - 1) & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Estudia la continuidad según el valor del parámetro **a**

**Solución:**

$$f(2) = 3a + 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 + ax + a - 1) = 3a + 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} L(x - 1) = 0$$

Se tiene que cumplir:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2)$$

$$3a + 3 = 0 \Rightarrow a = -1$$

55. Se considera la función

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 - 2 & \text{si } x \leq -2 \\ a & \text{si } -2 < x \leq 2 \\ x & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

a) Calcula el valor de **a** para que **f(x)** sea continua en  $x = -2$

b) Para el valor de **a** hallado, ¿es continua la función en  $x = 2$ ?

# Ejercicios y problemas

## Solución:

a) En  $x = -2$

$$f(-2) = 4a - 2$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} (ax^2 - 2) = 4a - 2$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} a = a$$

Se tiene que cumplir:

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = f(-2)$$

$$4a - 2 = a \Rightarrow a = 2/3$$

b) Para  $a = 2/3$

$$f(2) = 2/3$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} 2/3 = 2/3$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} x = 2$$

La función tiene una discontinuidad de 1ª especie de salto finito.

56. Se ha estudiado la evolución de la ganancia  $y$  en céntimos de euro en cada instante desde un tiempo inicial, hasta pasados 5 años, por la fabricación de un determinado producto y se ha modelizado funcionalmente dicha evolución así:

Durante el primer año:  $y = 2t^2$

Durante el segundo y tercer año:  $y = 4t - 2$

Durante el resto:  $y = e^{3-t}$

Explica la continuidad de la función.

## Solución:

Se escribe la función:

$$f(t) = \begin{cases} 2t^2 & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ 4t - 2 & \text{si } 1 \leq t < 3 \\ e^{3-t} & \text{si } t \geq 3 \end{cases}$$

Se estudian los valores  $t = 1$  y  $t = 3$

En  $t = 1$

$$f(1) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 2t^2 = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (4t - 2) = 2$$

La función es continua en  $t = 1$

En  $t = 3$

$$f(3) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} (4t - 2) = 10$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} e^{3-t} = 1$$

La función no es continua en  $t = 3$ . Tiene una discontinuidad de 1ª especie de salto finito.

57. Un comerciante vende un determinado producto. Por cada unidad de producto cobra la cantidad de 5 €. No obstante, si se le encargan más de 10 unidades, decide disminuir el precio por unidad, y por cada  $x$  unidades cobra la siguiente cantidad:

$$c(x) = \begin{cases} 5x & \text{si } 0 < x \leq 10 \\ \sqrt{ax^2 + 500} & \text{si } x > 10 \end{cases}$$

a) Halla  $a$  para que el precio varíe de forma continua al variar el número de unidades que se compran.

b) ¿A cuánto tiende el precio de una unidad cuando se compran «muchísimas» unidades?

## Solución:

a) Se estudia en  $x = 10$

$$f(10) = 50$$

$$\lim_{x \rightarrow 10^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 10^-} 5x = 50$$

$$\lim_{x \rightarrow 10^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 10^+} \sqrt{ax^2 + 500} = \sqrt{100a + 500}$$

Se tiene que cumplir:

$$\lim_{x \rightarrow 10^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 10^+} f(x) = f(10)$$

$$\sqrt{100a + 500} = 50 \Rightarrow a = 20$$

b) El precio por unidad es:

$$\frac{c(x)}{x}$$

Se calcula  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{20x^2 + 500}}{x} = \sqrt{20}$

58. Estudia la continuidad de la función  $f(x) = \frac{x}{1 + |x|}$

## Solución:

Es el cociente de dos funciones continuas, luego es continua; salvo cuando se anule el denominador, lo que nunca sucede, ya que:

$$1 + |x| \geq 1$$

La función es continua en  $\mathbb{R}$

59. Calcula, de forma razonada, dos funciones que no sean continuas en un cierto valor  $x = a$  de su dominio y tales que la función suma sea continua en dicho valor.

## Solución:

Cualquier función constante es continua en  $\mathbb{R}$ . Se trata de buscar dos funciones que se rompan en un punto y que al sumarlas dé una constante. Por ejemplo:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 0 \\ 0 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

La función  $f(x) + g(x) = 1$  es continua en  $\mathbb{R}$

**Paso a paso**

60. Halla el siguiente límite y representa la función correspondiente para comprobarlo gráficamente.

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 1)$$

**Solución:**

Resuelto en el libro del alumnado.

61. Halla los siguientes límites y representa la función correspondiente para comprobarlo gráficamente.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 1}}; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

**Solución:**

Resuelto en el libro del alumnado.

62. Representa la siguiente función y estudia sus discontinuidades.

$$y = \begin{cases} x - 1 & \text{si } x < 2 \\ 3 & \text{si } x = 2 \\ x^2 - 4x + 5 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

**Solución:**

Resuelto en el libro del alumnado.

63. Representa la función  $y = \frac{x^2 - 3x + 3}{x - 1}$ , halla sus asíntotas y represéntalas.

**Solución:**

Resuelto en el libro del alumnado.

64. **Internet.** Abre: [www.editorial-bruno.es](http://www.editorial-bruno.es) y elige **Matemáticas, curso y tema.**

**Practica**

Halla los siguientes límites y representa la función correspondiente para comprobarlo gráficamente.

65.  $\lim_{x \rightarrow 2} (x^3 - 2x + 1)$

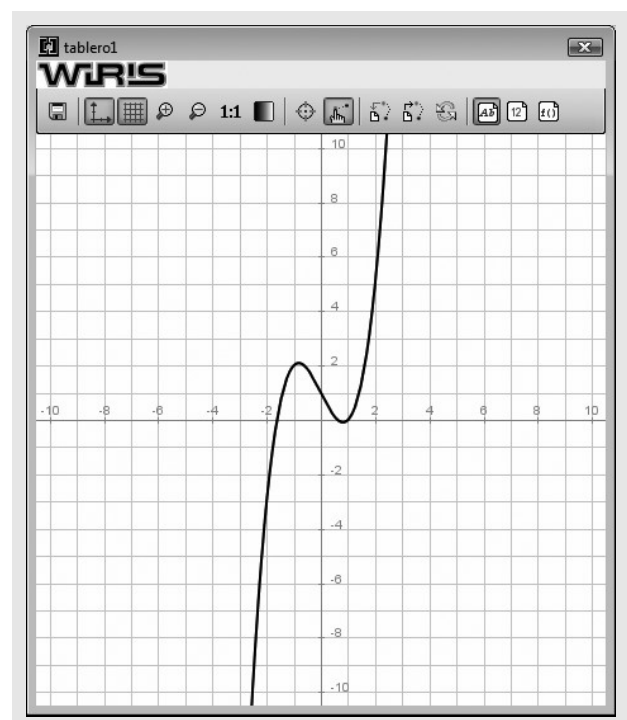
**Solución:****Ejercicio 65**

$$f(x) = x^3 - 2x + 1 \rightarrow x \mapsto x^3 - 2 \cdot x + 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \rightarrow 5$$

dibujar (f(x), {color = negro, anchura\_linea = 2})

Cuando  $x \rightarrow 2$ , se ve que  $y \rightarrow 5$





66.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^x}{x^2}$

**Solución:**

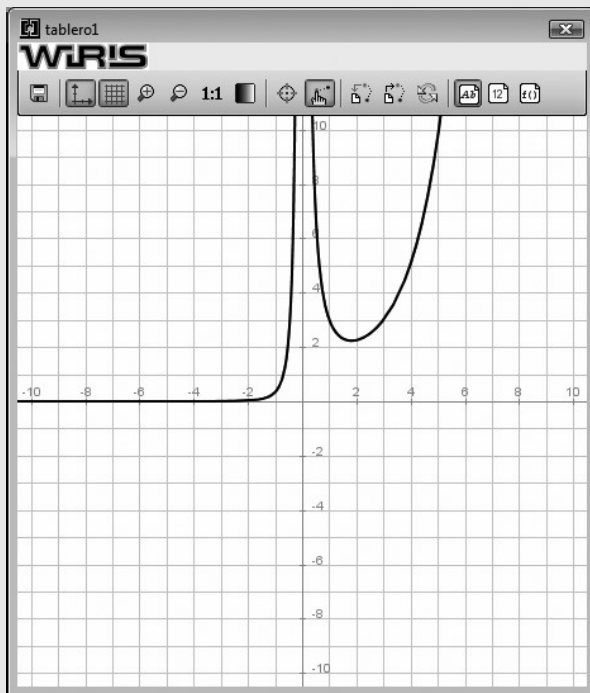
Ejercicio 66

$$f(x) = \frac{3^x}{x^2} \rightarrow x \mapsto \frac{1}{x^2} \cdot 3^x$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \rightarrow +\infty$$

dibujar (f(x), {color = negro, anchura\_linea = 2})

Cuando  $x \rightarrow +\infty$ , se ve que  $y \rightarrow 0$



67.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - x^2)$

**Solución:**

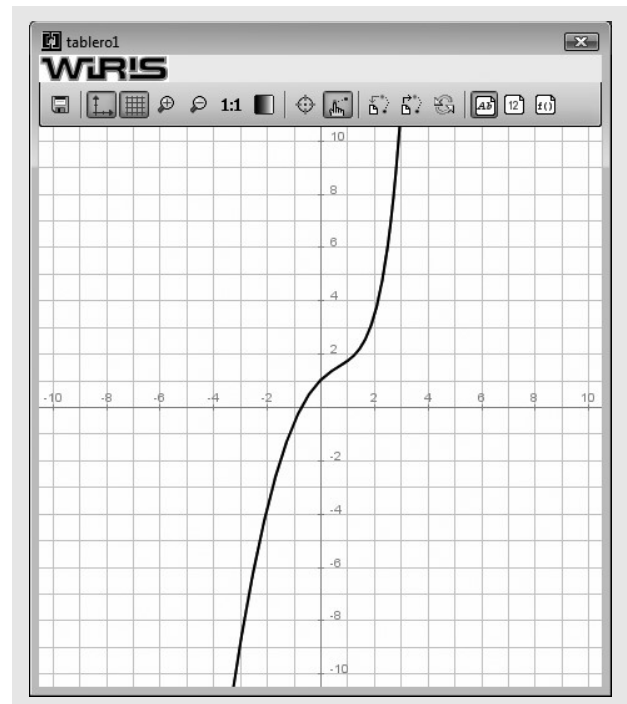
Ejercicio 67

$$f(x) = e^x - x^2 \rightarrow x \mapsto e^x - x^2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \rightarrow +\infty$$

dibujar (f(x), {color = negro, anchura\_linea = 2})

Cuando  $x \rightarrow +\infty$ , se ve que  $y \rightarrow +\infty$



68.  $\lim_{x \rightarrow 2} 5^{x-2}$

**Solución:**

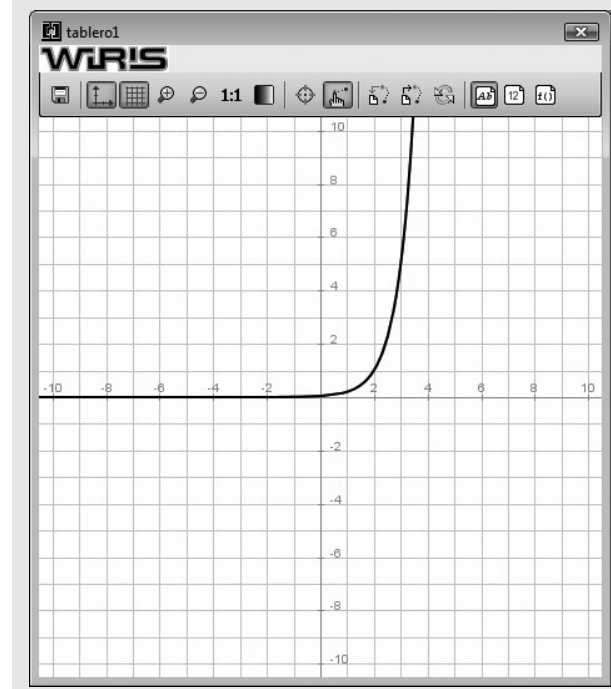
Ejercicio 68

$$f(x) = 5^{x-2} \rightarrow x \mapsto 5^{x-2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \rightarrow 1.$$

dibujar (f(x), {color = negro, anchura\_linea = 2})

Cuando  $x \rightarrow 2$ , se ve que  $y \rightarrow 1$



69.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^3 + x^2 + 3x - 1)$

**Solución:**

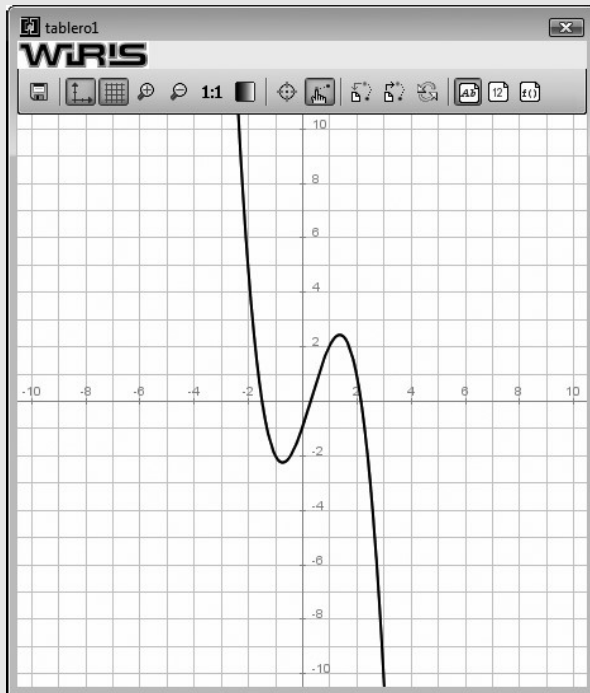
Ejercicio 69

$$f(x) = -x^3 + x^2 + 3x - 1 \Rightarrow x \mapsto -x^3 + x^2 + 3 \cdot x - 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \rightarrow +\infty$$

dibujar (f(x), {color = negro, anchura\_linea = 2})

Cuando  $x \rightarrow -\infty$ , se ve que  $y \rightarrow +\infty$



70.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^3 + x^2 + 3x - 1)$

**Solución:**

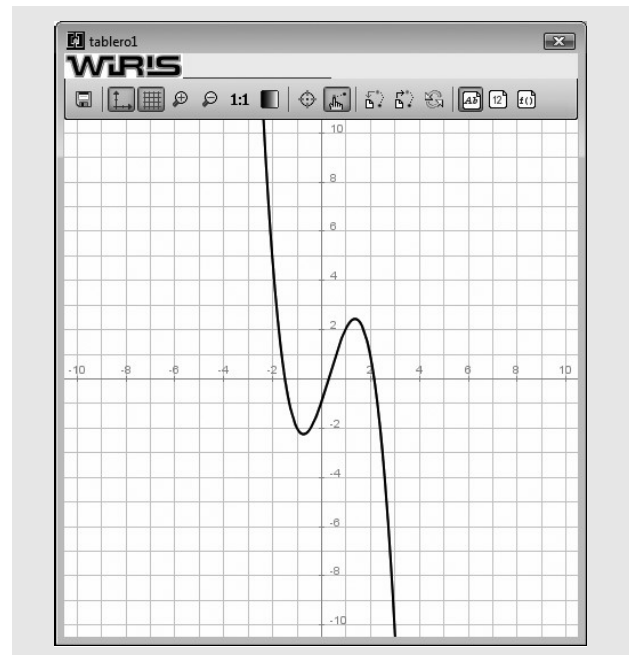
Ejercicio 70

$$f(x) = -x^3 + x^2 + 3x - 1 \Rightarrow x \mapsto -x^3 + x^2 + 3 \cdot x - 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \rightarrow -\infty$$

dibujar (f(x), {color = negro, anchura\_linea = 2})

Cuando  $x \rightarrow +\infty$ , se ve que  $y \rightarrow -\infty$



71.  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{x^2-3x}$

**Solución:**

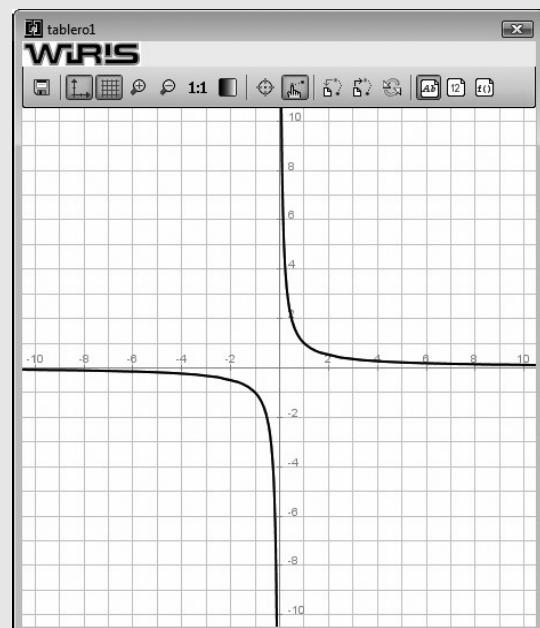
Ejercicio 71

$$f(x) = \frac{x-3}{x^2-3x} \Rightarrow x \mapsto \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) \rightarrow \frac{1}{3}$$

dibujar (f(x), {color = negro, anchura\_linea = 2})

Cuando  $x \rightarrow 3$ ,  $y \rightarrow \frac{1}{3}$



72.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x-5}{x-2}$

**Solución:**

Ejercicio 72

$$f(x) = \frac{3x-5}{x-2} \rightarrow x \mapsto \frac{3 \cdot x-5}{x-2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \rightarrow \pm\infty$$

Como da más y menos infinito, tenemos que hallar los dos límites laterales

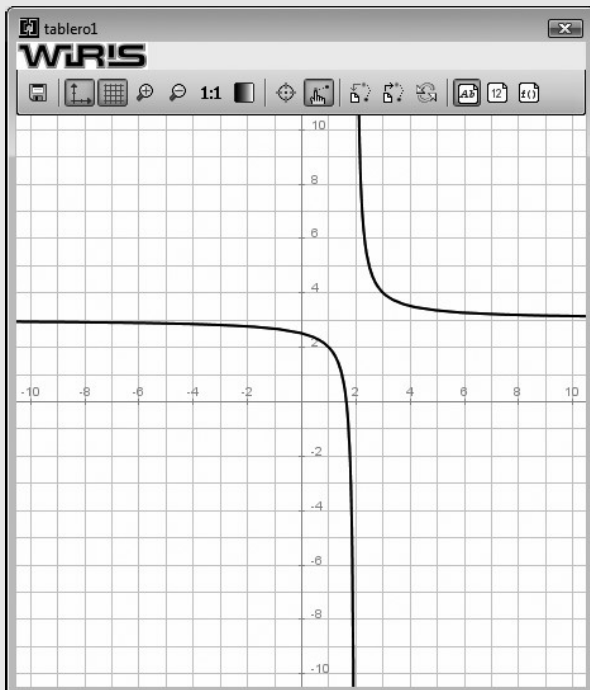
$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \rightarrow +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \rightarrow -\infty$$

dibujar (f(x), {color = negro, anchura\_linea = 2})

Cuando  $x \rightarrow 2^+$ , se ve que  $y \rightarrow +\infty$

Cuando  $x \rightarrow 2^-$ , se ve que  $y \rightarrow -\infty$



73.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( x + 1 - \frac{x^3}{x^2-9} \right)$

**Solución:**

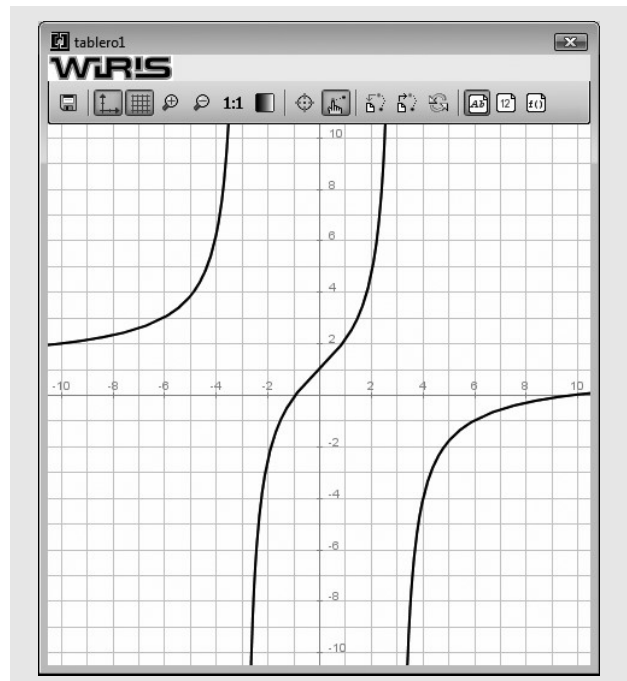
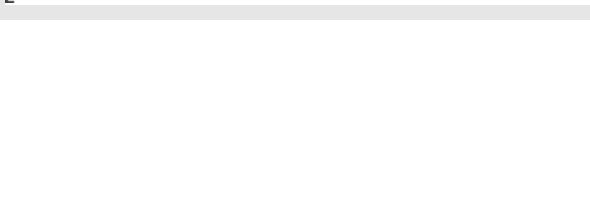
Ejercicio 73

$$f(x) = x + 1 - \frac{x^3}{x^2-9} \rightarrow x \mapsto \frac{x^2-9 \cdot x-9}{x^2-9}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \rightarrow 1$$

dibujar (f(x), {color = negro, anchura\_linea = 2})

Cuando  $x \rightarrow +\infty$ ,  $y \rightarrow 1$



74.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{3^x}$

**Solución:**

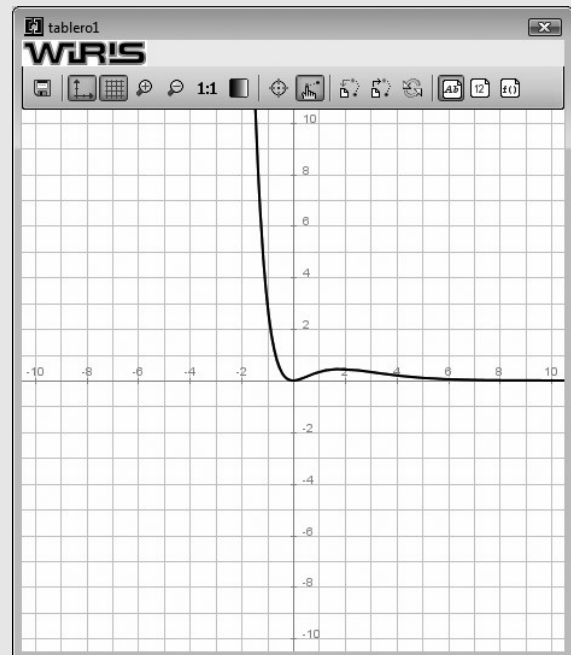
Ejercicio 74

$$f(x) = \frac{x^2}{3^x} \rightarrow x \mapsto \frac{x^2}{3^x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \rightarrow 0$$

dibujar (f(x), {color = negro, anchura\_linea = 2})

Cuando  $x \rightarrow +\infty$ ,  $y \rightarrow 0$



75.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7x^2}{3x^2}$

**Solución:**

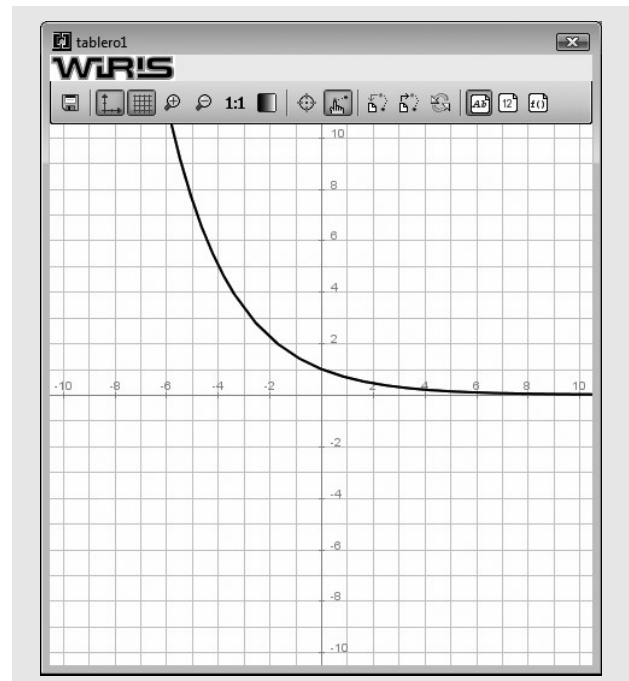
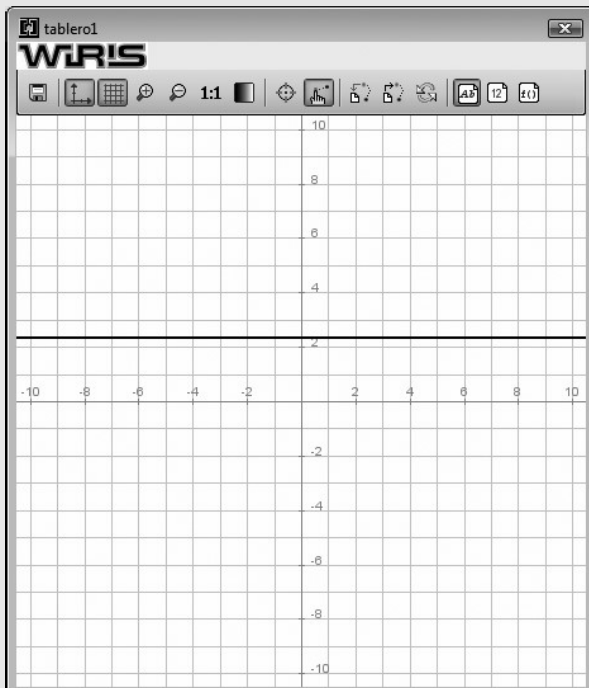
Ejercicio 75

$$f(x) = \frac{7x^2}{3x^2} \rightarrow x \mapsto \frac{7}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \rightarrow \frac{7}{3}$$

dibujar(f(x), {color = negro, anchura\_linea = 2})

Cuando  $x \rightarrow +\infty$ ,  $y \rightarrow \frac{7}{3}$



Representa las siguientes funciones y estudia sus conti-  
nuidades.

77.  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$

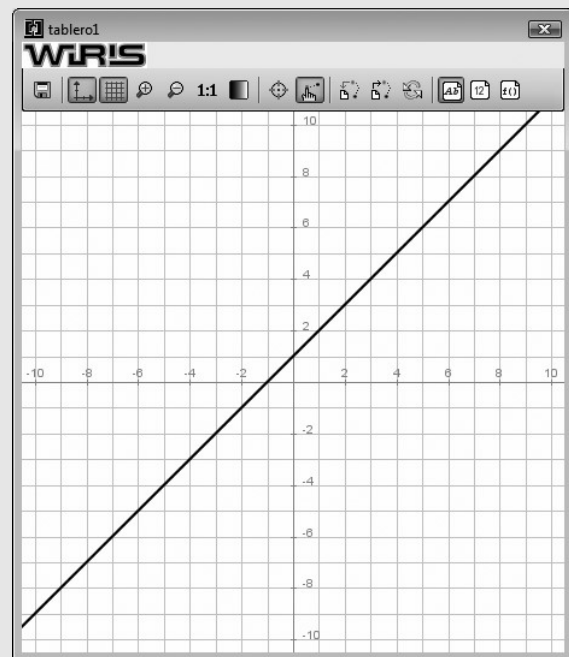
**Solución:**

Ejercicio 77

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} \rightarrow x \mapsto x + 1$$

dibujar(f(x), {color = negro, anchura\_linea = 2})

Es discontinua en  $x = 1$ , donde tiene una discontinuidad evitable.



76.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^x}{3^x}$

**Solución:**

Ejercicio 76

$$f(x) = \frac{2^x}{3^x} \rightarrow x \mapsto \frac{2^x}{3^x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \rightarrow 0$$

dibujar(f(x), {color = negro, anchura\_linea = 2})

Cuando  $x \rightarrow 1$ , se ve que  $y \rightarrow \frac{\sqrt[3]{e^2}}{e} = 0.71653$

78.  $f(x) = \frac{x-1}{x-2}$

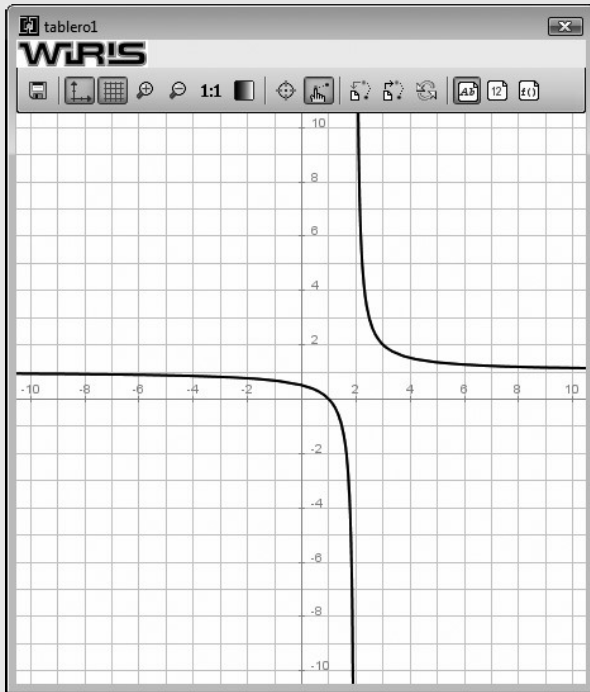
**Solución:**

Ejercicio 78

$$f(x) = \frac{x-1}{x-2} \rightarrow x \mapsto \frac{x-1}{x-2}$$

dibujar(f(x), {color = negro, anchura\_linea = 2})

Es discontinua en  $x = 2$ , donde tiene una discontinuidad de 1ª especie de salto infinito.



79.  $f(x) = \begin{cases} -2x & \text{si } x \leq 2 \\ x^2 - 2x + 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

**Solución:**

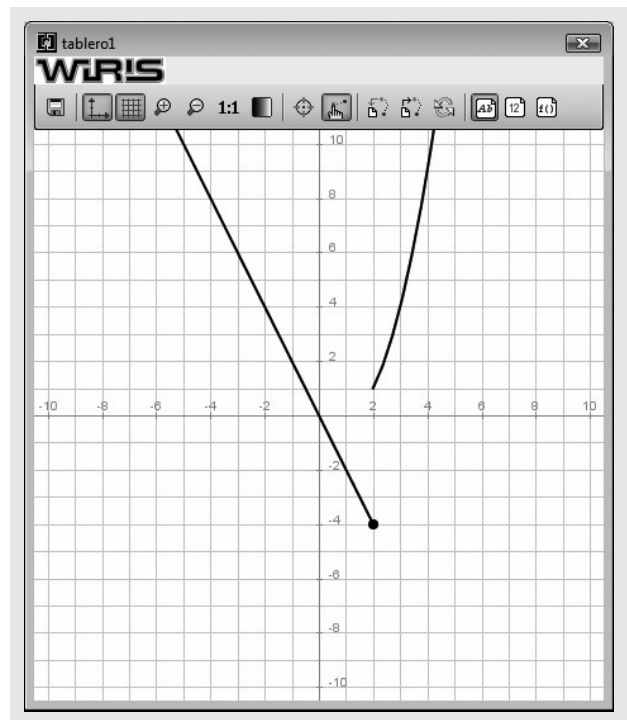
Ejercicio 79

dibujar(-2x, -∞..2, {color = negro, anchura\_linea = 2})

dibujar(punto(2, -4), {color = negro, tamaño\_punto = 8})

dibujar(x<sup>2</sup> - 2x + 1, 2..+∞, {color = negro, anchura\_linea = 2})

Es discontinua en  $x = 2$ , donde tiene una discontinuidad de 1ª especie de salto 5



80.  $f(x) = \begin{cases} 2^x - 2 & \text{si } x \leq 1 \\ L x & \text{si } x > 1 \end{cases}$

**Solución:**

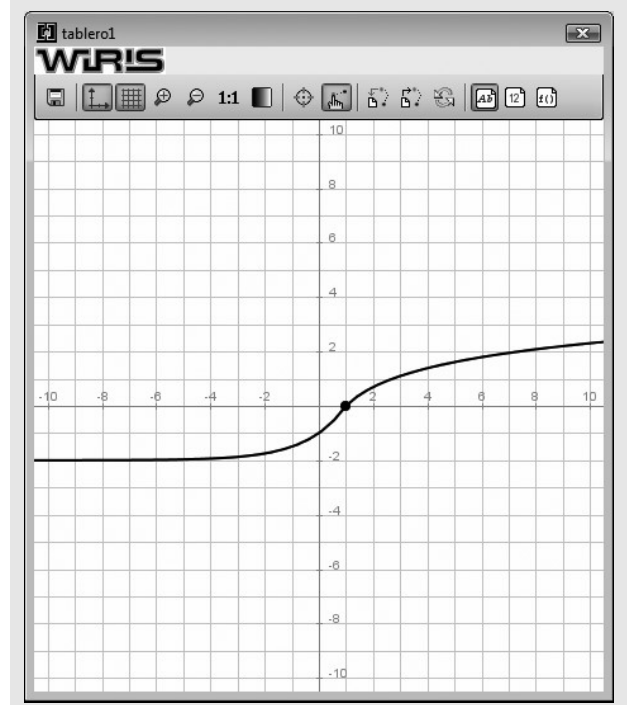
Ejercicio 80

dibujar(2<sup>x</sup> - 2, -∞..1, {color = negro, anchura\_linea = 2})

dibujar(punto(1, 0), {color = negro, tamaño\_punto = 8})

dibujar(ln(x), 1..+∞, {color = negro, anchura\_linea = 2})

Es continua en toda la recta real IR



81.  $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x \leq 2 \\ -x + 5 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

**Solución:**

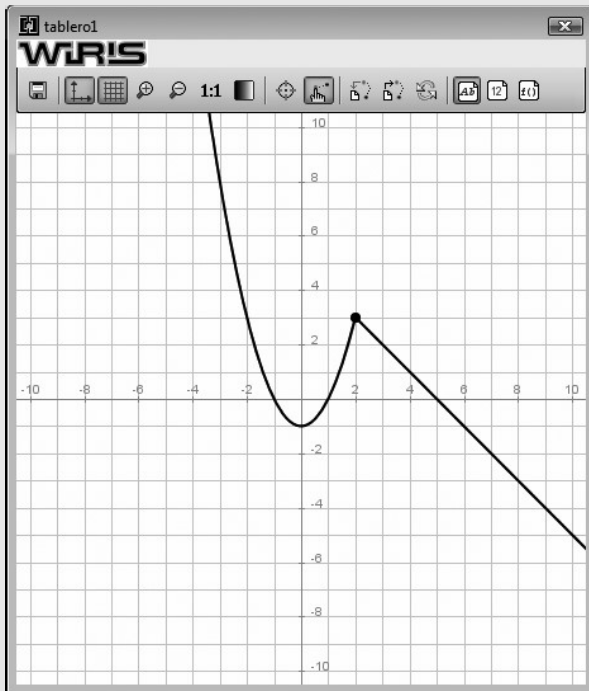
Ejercicio 81

dibujar( $x^2 - 1, -\infty..2, \{\text{color} = \text{negro}, \text{anchura\_linea} = 2\}$ )

dibujar(punto(2, 3),  $\{\text{color} = \text{negro}, \text{tamaño\_punto} = 8\}$ )

dibujar( $-x + 5, 2..+\infty, \{\text{color} = \text{negro}, \text{anchura\_linea} = 2\}$ )

Es continua en toda la recta real IR



Representa las siguientes funciones, halla sus asíntotas y representálas:

82.  $f(x) = \frac{x^2}{x + 2}$

**Solución:**

Ejercicio 82

dibujar( $\frac{x^2}{x + 2}, \{\text{color} = \text{negro}, \text{anchura\_linea} = 2\}$ )

La asíntota vertical es la raíz del denominador :  $x = -2$

dibujar( $x = -2, \{\text{color} = \text{negro}, \text{anchura\_linea} = 2\}$ )

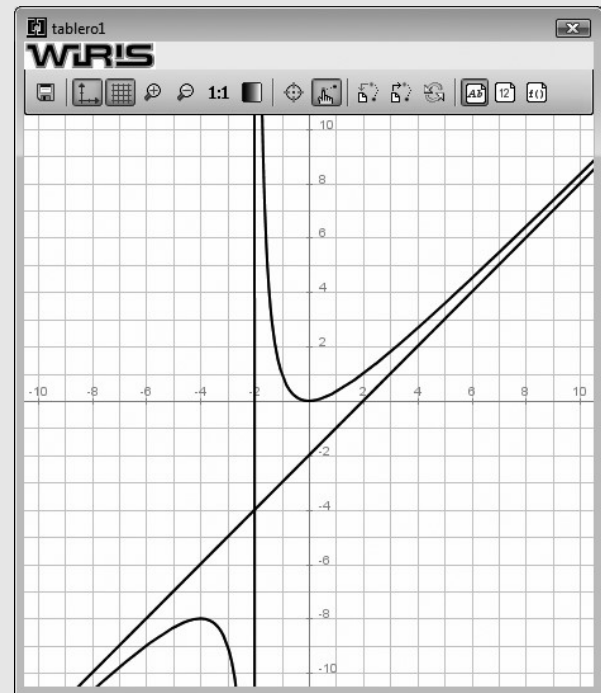
Asíntota horizontal : no tiene, porque los grados del numerador y denominador no son iguales.

Asíntota oblicua :

$$x^2 \overline{) x + 2} \rightarrow \begin{array}{r} x^2 \overline{) x + 2} \\ \underline{4x - 2} \\ \phantom{0} \end{array}$$

La asíntota oblicua es  $y = x - 2$

dibujar( $x - 2, \{\text{color} = \text{negro}, \text{anchura\_linea} = 2\}$ )



83.  $f(x) = \frac{x}{x-3}$

**Solución:**

Ejercicio 83

$$f(x) = \frac{x}{x-3} \rightarrow x \mapsto \frac{x}{x-3}$$

dibujar(f(x), {color = negro, anchura\_linea = 2})

La asíntota vertical es la raíz del denominador:  $x = 3$

dibujar(x = 3, {color = negro, anchura\_linea = 2})

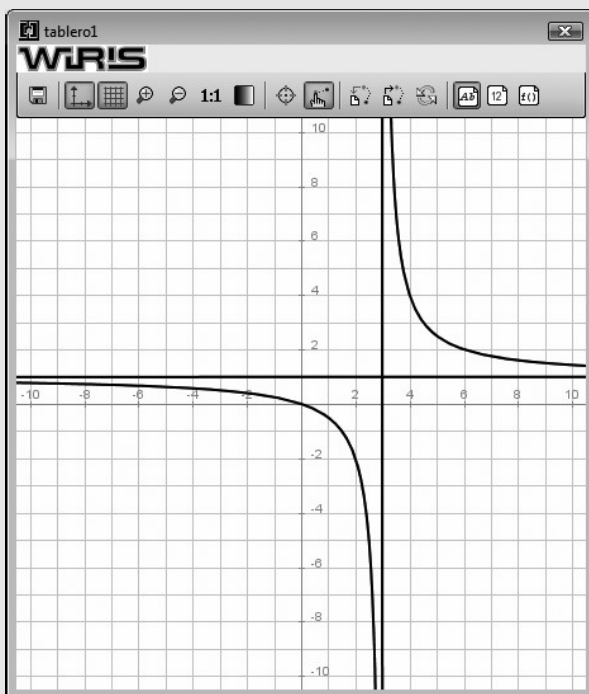
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \rightarrow 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \rightarrow 1$$

La asíntota horizontal es:  $y = 1$

dibujar(y = 1, {color = negro, anchura\_linea = 2})

Asíntota oblicua no hay porque el grado del numerador no es uno mayor que el del denominador.



84.  $f(x) = \frac{3x^2 + 2x + 3}{x^2 + 1}$

**Solución:**

Ejercicio 84

$$f(x) = \frac{3x^2 + 2x + 3}{x^2 + 1} \rightarrow x \mapsto \frac{3 \cdot x^2 + 2 \cdot x + 3}{x^2 + 1}$$

dibujar(f(x), {color = negro, anchura\_linea = 2})

Asíntota vertical no hay, porque el denominador nunca se anula.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \rightarrow 3$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \rightarrow 3$$

La asíntota horizontal es:  $y = 3$

dibujar(y = 3, {color = negro, anchura\_linea = 2})

Asíntota oblicua no hay porque el grado del numerador no es uno mayor que el del denominador.

