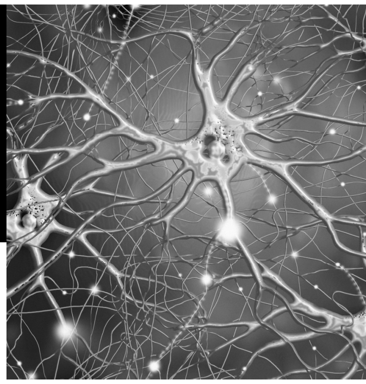
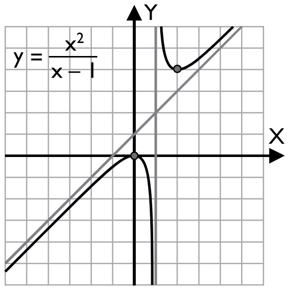
8 Aplicaciones de las derivadas



1. Máximos, mínimos y monotonía

Piensa y calcula

Dada la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$ representada en el margen, halla los máximos y los mínimos relativos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento.



Solución:

Máximo relativo: O(0, 0)

Mínimo relativo: B(2, 4)

Creciente (↗): $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$

Decreciente (↘): $(0, 1) \cup (1, 2)$

Aplica la teoría

1. Calcula los máximos y los mínimos relativos y determina la monotonía de las siguientes funciones:

a) $y = x^3 - 3x^2 + 3$ b) $y = 3x^4 - 4x^3$

Solución:

a) $y' = 3x^2 - 6x$

$y' = 0 \Rightarrow x = 0, x = 2$

Máximo relativo: A(0, 3)

Mínimo relativo: B(2, –1)

Creciente (↗): $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$

Decreciente (↘): $(0, 2)$

b) $y' = 12x^3 - 12x^2$

$y' = 0 \Rightarrow x = 0, x = 1$

Máximo relativo: no tiene.

Mínimo relativo: A(1, –1)

Creciente (↗): $(1, +\infty)$

Decreciente (↘): $(-\infty, 1)$

2. Calcula los máximos y los mínimos relativos y determina la monotonía de la siguiente función:

$$y = \frac{x^2 + 1}{x}$$

Solución:

$$y' = \frac{x^2 - 1}{x^2}$$

$y' = 0 \Rightarrow x = -1, x = 1$

Máximo relativo: A(–1, –2)

Mínimo relativo: B(1, 2)

Creciente (↗): $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

Decreciente (↘): $(-1, 0) \cup (0, 1)$

3. Calcula los máximos y los mínimos relativos y determina la monotonía de la siguiente función:

$$y = \frac{3}{x^2 + 1}$$

Solución:

$$y' = -\frac{6x}{(x^2 + 1)^2}$$

$y' = 0 \Rightarrow x = 0$

Máximo relativo: A(0, 3)

Mínimo relativo: no tiene.

Creciente (↗): $(-\infty, 0)$

Decreciente (↘): $(0, +\infty)$

4. Calcula los máximos y los mínimos relativos y determina la monotonía de la siguiente función: $y = \sqrt{x^2 + 4}$

Solución:

$$y' = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}}$$

$y' = 0 \Rightarrow x = 0$

Máximo relativo: no tiene.
Mínimo relativo: A(0, 2)
Creciente (↗): $(0, +\infty)$
Decreciente (↘): $(-\infty, 0)$

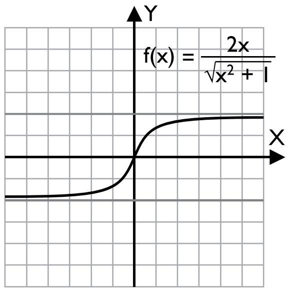
5. Calcula los máximos y los mínimos relativos y determina la monotonía de la siguiente función: $y = (2 - x)e^x$

Solución:
$y' = (1 - x)e^x$ $\quad y' = 0 \Rightarrow x = 1$
Máximo relativo: A(1, e)
Mínimo relativo: no tiene.
Creciente (↗): $(-\infty, 1)$
Decreciente (↘): $(1, +\infty)$

2. Puntos de inflexión y curvatura

Piensa y calcula

Dada $y = \dfrac{2x}{\sqrt{x^2 + 1}}$ representada en el margen, halla los puntos de inflexión y los intervalos de concavidad y convexidad.



Solución:
Punto de inflexión: O(0, 0)
Convexa (∪): $(-\infty, 0)$
Cóncava (∩): $(0, +\infty)$

Aplica la teoría

6. Calcula los puntos de inflexión y determina la curvatura de las siguientes funciones:

a) $y = x^3 - 9x^2 + 27x - 26$ $\quad$ b) $y = -x^3 + 3x^2 - 2$

Solución:
a) $y' = 3x^2 - 18x + 27$
$y'' = 6x - 18$
$y'' = 0 \Rightarrow x = 3$
$y''' = 6$
$y'''(3) = 6 \neq 0$
Punto de inflexión: A(3, 1)
Convexa (∪): $(3, +\infty)$
Cóncava (∩): $(-\infty, 3)$

b) $y' = -3x^2 + 6x$
$y'' = -6x + 6$
$y'' = 0 \Rightarrow x = 1$
$y''' = -6$
$y'''(1) = -6 \neq 0$
Punto de inflexión: A(1, 0)
Convexa (∪): $(-\infty, 1)$
Cóncava (∩): $(1, +\infty)$

7. Calcula los puntos de inflexión y determina la curvatura de la siguiente función:

$$y = \frac{x}{x^2 - 1}$$

Solución:
$$y' = -\frac{x^2 + 1}{(x^2 - 1)^2}$$
$$y'' = \frac{2x(x^2 + 3)}{(x^2 - 1)^3}$$
$y'' = 0 \Rightarrow x = 0$
$$y''' = -\frac{6(x^4 + 6x^2 + 1)}{(x^2 - 1)^4}$$
$y'''(0) = -6 \neq 0$
Punto de inflexión: O(0, 0)
Convexa (∪): $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$
Cóncava (∩): $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$

8. Calcula los puntos de inflexión y determina la curvatura de la siguiente función:

$$y = \frac{3x}{x^2 + 1}$$

Solución:

$$y' = \frac{3(1 - x^2)}{(x^2 + 1)^2}$$

$$y'' = \frac{6x(x^2 - 3)}{(x^2 + 1)^3}$$

$y'' = 0 \Rightarrow x = -\sqrt{3}, x = 0, x = \sqrt{3}$

$$y''' = -\frac{18(x^4 - 6x^2 + 1)}{(x^2 + 1)^4}$$

$y'''(-\sqrt{3}) = 9/16 \neq 0$

$y'''(0) = -18 \neq 0$

$y'''(\sqrt{3}) = 9/16 \neq 0$

Puntos de inflexión:

$A(-\sqrt{3}, -3\sqrt{3}/4), O(0, 0), B(\sqrt{3}, 3\sqrt{3}/4)$

Convexa ($\cup$): $(-\sqrt{3}, 0) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$

Cóncava ($\cap$): $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (0, \sqrt{3})$

9. Calcula los puntos de inflexión y determina la curvatura de la función $y = xe^x$

Solución:

$y' = (x + 1)e^x$

$y'' = (x + 2)e^x$

$y'' = 0 \Rightarrow x = -2$

$y''' = (x + 3)e^x$

$y'''(-2) = 1/e^2 \neq 0$

Punto de inflexión: $A(-2, -2/e^2)$

Convexa ($\cup$): $(-2, +\infty)$

Cóncava ($\cap$): $(-\infty, -2)$

10. Calcula los puntos de inflexión y determina la curvatura de la función $y = L(x^2 + 4)$

Solución:

$$y' = \frac{2x}{x^2 + 4}$$

$$y'' = -\frac{2(x^2 - 4)}{(x^2 + 4)^2}$$

$y'' = 0 \Rightarrow x = -2, x = 2$

$$y''' = \frac{4x(x^2 - 12)}{(x^2 + 4)^3}$$

$y'''(-2) = 1/8 \neq 0$

$y'''(2) = -1/8 \neq 0$

Puntos de inflexión: $A(-2, 3\,L\,2), B(2, 3\,L\,2)$

Convexa ($\cup$): $(-2, 2)$

Cóncava ($\cap$): $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$

3. Problemas de derivadas

Piensa y calcula

La función $f(x) = x^2 + ax + b$ pasa por el punto $A(0, 4)$ y tiene un mínimo en el punto $B(2, 0)$. Calcula mentalmente el valor de **a** y **b**

Solución:

$f(x) = x^2 - 4x + 4$

Aplica la teoría

11. Obtén los valores de los parámetros **a, b** y **c** para que la función $f(x) = ax^3 + bx + c$ pase por el punto $O(0, 0)$ y tenga un mínimo local en $A(1, -1)$

Solución:

a) Pasa por $O(0,0)$

$f(0) = 0 \Rightarrow c = 0$

b) Pasa por $A(1, -1)$

$f(1) = -1 \Rightarrow a + b + c = -1$

c) Tiene un mínimo local en $A(1, -1)$

$f'(x) = 3ax^2 + b$

$f'(1) = 0 \Rightarrow 3a + b = 0$

Se resuelve el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} c = 0 \\ 3a + b \quad = 0 \\ a + b + c = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow a = 1/2, b = -3/2, c = 0$$

La función es $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x$

12. Calcula dos números cuya suma sea 100 y de forma que su producto sea máximo.

Solución:

a) Incógnitas y datos.

x = primer número.

y = segundo número.

$x + y = 100$

b) Función que hay que maximizar.

$f(x, y) = xy$

Sujeto a: $x + y = 100 \Rightarrow y = 100 - x$

c) Se escribe la función con una sola variable.

$f(x) = x(100 - x)$

$f(x) = 100x - x^2$

d) Se calculan los máximos y mínimos relativos.

$f'(x) = 100 - 2x$

$100 - 2x = 0 \Rightarrow x = 50$

Si $x = 50 \Rightarrow y = 50$

e) Se comprueba en la segunda derivada.

$f''(x) = -2 < 0\ (-) \Rightarrow$ máximo relativo.

f) El primer número es x = 50; el segundo, y = 50

13. Calcula las dimensiones de un rectángulo cuyo perímetro mida 64 m y su área sea máxima.

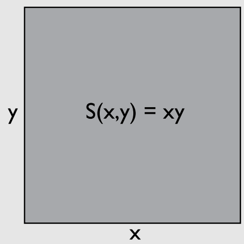
Solución:

a) Incógnitas, datos y dibujo.

x = longitud de la base.

y = altura.

Perímetro = 64 m



b) Función que hay que maximizar.

$S(x, y) = xy$

Sujeta a las condiciones:

Perímetro = 64 m $\Rightarrow x + y = 32$

c) Se escribe la ecuación con una sola variable.

$x + y = 32 \Rightarrow y = 32 - x$

$S(x) = x(32 - x)$

$S(x) = 32x - x^2$

d) Se calculan los máximos y mínimos relativos derivando.

$S'(x) = 32 - 2x$

$32 - 2x = 0 \Rightarrow x = 16$

Si $x = 16 \Rightarrow y = 16$

e) Se comprueba en la segunda derivada.

$S''(x) = -2 < 0\ (-) \Rightarrow$ máximo relativo.

f) El recinto mide 16 m por 16 m

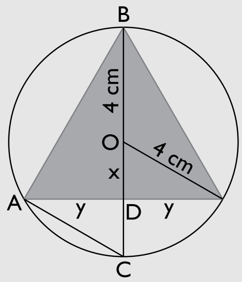
14. Calcula el área del mayor triángulo isósceles inscrito en un círculo de radio 4 cm

Solución:

a) Incógnitas, datos y dibujo.

2y = base del triángulo.

h = altura del triángulo = BD



Sea x = OD

El triángulo ABC es rectángulo en A

Por el teorema de la altura:

$y^2 = BD \cdot DC = (4 + x) \cdot (4 - x) = 16 - x^2$

b) Función que hay que minimizar.

$A(y, h) = \frac{1}{2} 2yh$

Sujeta a las condiciones:

$y^2 = 16 - x^2 \Rightarrow y = \sqrt{16 - x^2}$

$h = 4 + x$

c) Se escribe la ecuación con una sola variable.

$A(x) = \sqrt{16 - x^2}\,(4 + x)$

$A(x) = (4 + x)\sqrt{16 - x^2}$

d) Se calculan los máximos y mínimos relativos derivando.

$$A'(x) = \sqrt{16 - x^2} - (4 + x)\frac{x}{\sqrt{16 - x^2}}$$

$$A'(x) = \sqrt{16 - x^2} - \frac{4x + x^2}{\sqrt{16 - x^2}}$$

$$\sqrt{16 - x^2} - \frac{4x + x^2}{\sqrt{16 - x^2}} = 0 \Rightarrow x = -4, x = 2$$

Si x = –4, no tiene sentido en el problema.

Si $x = 2$ cm $\Rightarrow y = \sqrt{12}$ cm ; h = 6 cm

e) Se comprueba en la segunda derivada.

$$A''(x) = -\frac{x}{\sqrt{16 - x^2}} + \frac{x^3 - 32x - 64}{(16 - x^2)\sqrt{16 - x^2}}$$

$A''(2) = -2\sqrt{3} < 0\ (-) \Rightarrow$ máximo relativo.

f) El triángulo tiene un área de

$$\frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{12} \cdot 6 = 6\sqrt{12} = 12\sqrt{3}\ \text{cm}^2$$

15. Calcula la altura y el radio que debe tener un bote cilíndrico cuya área total, incluyendo las dos tapas, es de 150 cm^2 para que su volumen sea máximo.

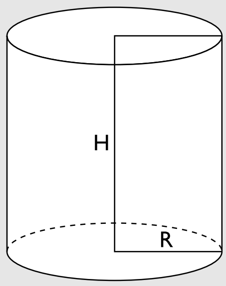
Solución:

a) Incógnitas, datos y dibujo.

R = radio del cilindro.

H = altura del cilindro.

Superficie = 150 cm^2



b) Función que hay que maximizar.

$V(R, H) = \pi R^2 H$

Sujeta a las condiciones:

Superficie = 150 $cm^2 \Rightarrow 2\pi R^2 + 2\pi RH = 150$

c) Se escribe la ecuación con una sola variable.

$$2\pi R^2 + 2\pi RH = 150 \Rightarrow H = \frac{150 - 2\pi R^2}{2\pi R} = \frac{75}{\pi R} - R$$

$$V(R) = \pi R^2\left(\frac{75}{\pi R} - R\right)$$

$V(R) = 75R - \pi R^3$

d) Se calculan los máximos y mínimos relativos derivando.

$V'(R) = 75 - 3\pi R^2$

$$75 - 3\pi R^2 = 0 \Rightarrow R = \frac{5}{\sqrt{\pi}} = \frac{5\sqrt{\pi}}{\pi}$$

$$\text{Si } R = \frac{5\sqrt{\pi}}{\pi} \Rightarrow H = \frac{10\sqrt{\pi}}{\pi}$$

e) Se comprueba en la segunda derivada.

$$V''(R) = -6\pi R \Rightarrow V''\left(\frac{5\sqrt{\pi}}{\pi}\right) < 0\ (-) \Rightarrow \text{máximo relativo.}$$

f) El cilindro mide $\frac{5\sqrt{\pi}}{\pi}$ cm de radio y $\frac{10\sqrt{\pi}}{\pi}$ cm de altura.

Preguntas tipo test

Contesta en tu cuaderno:

1 La gráfica de la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$ pasa por el punto (0, 0) y tiene un máximo local en el punto (1, 2). Obtén los valores de los coeficientes **a, b** y **c**

- ☐ $a = 2, b = -2, c = 0$
- ☐ $a = 4, b = -6, c = 0$
- ☒ $a = -4, b = 6, c = 0$
- ☐ $a = -4, b = 0, c = 6$

2 Halla los valores de **a** y **b** para que la función

$$f(x) = ax + \frac{b}{x}$$

tenga un extremo relativo en el punto (1, 2)

- ☐ $a = -1, b = -1$
- ☒ $a = 1, b = 1$
- ☐ $a = 0, b = 1$
- ☐ $a = 2, b = -2$

3 Descompón el número 25 en dos sumandos tales que el doble del cuadrado del primero más el triple del cuadrado del segundo sea mínimo.

- ☐ 12 y 13
- ☒ 15 y 10
- ☐ 14 y 11
- ☐ El problema no tiene solución.

4 Se ha determinado que el coste total (en euros) que le supone a cierta empresa la producción de **n** unidades de un determinado artículo varía según la función:

$$c(n) = 2n^3 + 270n + 2\,048$$

Calcula el número de unidades que debe producirse para hacer mínimo el coste por unidad.

- ☐ 7 ☒ 8
- ☐ 45 ☐ 2

5 Calcula los puntos de inflexión de la función

$$f(x) = \frac{2x - 2}{x + 1}$$

- ☐ (0, –2)
- ☐ (–1, 0)
- ☐ (3, 1)
- ☒ No tiene puntos de inflexión

6 Calcula los intervalos de concavidad y convexidad de la función f (x) del ejercicio anterior.

- ☐ Convexa (∪): $(-1, +\infty)$
  Cóncava (∩): $(-\infty, -1)$
- ☒ Convexa (∪): $(-\infty, -1)$
  Cóncava (∩): $(-1, +\infty)$
- ☐ Convexa (∪): $(-\infty, 0)$
  Cóncava (∩): $(0, +\infty)$
- ☐ Convexa (∪): $\mathbb{R}$
  Cóncava (∩): $\varnothing$

7 Encuentra el valor de $b \in \mathbb{R}$ para que la función

$$f(x) = x^2 + \frac{b}{x}$$

tenga un mínimo cuando x = 1

- ☐ –2 ☐ 1
- ☐ –1 ☒ 2

8 Una institución de beneficencia estatal quiere determinar cuántos analistas debe contratar para el procesamiento de solicitudes de la Seguridad Social. Se estima que el coste (en euros) C(x) de procesar una solicitud es una función del número de analistas **x** dada por:

$$C(x) = 0{,}003x^2 - 0{,}216\, L\, x + 5$$

siendo x > 0 (L = logaritmo neperiano).

Si el objetivo es minimizar el coste por solicitud C(x), determina el número de analistas que deberían contratarse.

- ☐ 5 analistas ☒ 6 analistas
- ☐ 7 analistas ☐ 8 analistas

9 Un comerciante ha estado vendiendo plumas estilográficas a 20 € la unidad y las ventas mensuales han sido de 35 unidades. Quiere subir el precio y calcula que por cada euro de aumento en el precio, venderá dos unidades menos. Por otro lado, cada pluma le cuesta a la tienda 10 €. ¿A qué precio debe vender las plumas para que el beneficio sea máximo?

- ☐ 24 € ☐ 30 €
- ☐ 21,25 € ☒ 23,75 €

10 Una parábola tiene la forma

$$f(x) = ax^2 + bx + 2$$

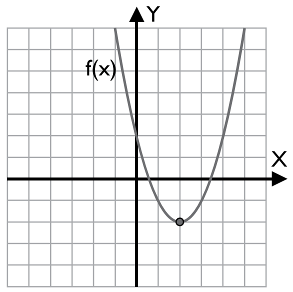
Se sabe que en el punto (1,3) tiene un máximo o un mínimo. Calcula el valor de **a** y **b.** Determina si el punto (1,3) corresponde a un máximo o a un mínimo.

- ☒ $a = -1, b = 2$. El punto es un máximo.
- ☐ $a = -1, b = 2$. El punto es un mínimo.
- ☐ $a = 2, b = 1$. El punto es un máximo.
- ☐ $a = -2, b = 1$. El punto es un máximo.

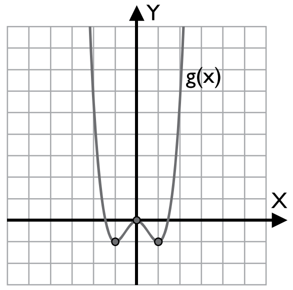
1. Máximos, mínimos y monotonía

16. Identifica en las siguientes gráficas los máximos y los mínimos relativos y los intervalos donde la función es creciente y decreciente:

a)



b)



Solución:

a) Máximo relativo: no tiene.
Mínimo relativo: A(2, –2)
Creciente (↗): $(2, +\infty)$
Decreciente (↘): $(-\infty, 2)$

b) Máximo relativo: O(0, 0)
Mínimo relativo: A(–1, –1), B(1, –1)
Creciente (↗): $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$
Decreciente (↘): $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$

17. Calcula los máximos y los mínimos relativos y determina la monotonía de las siguientes funciones:

a) $y = \dfrac{1}{5}x^5 - x$ b) $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x$

Solución:

a) $y' = x^4 - 1$
$y' = 0 \Rightarrow x = -1, x = 1$
Máximo relativo: A(–1, 4/5)
Mínimo relativo: B(1, –4/5)
Creciente (↗): $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
Decreciente (↘): $(-1, 1)$

b) $y' = 6x^2 + 6x - 12$
$y' = 0 \Rightarrow x = -2, x = 1$
Máximo relativo: A(–2, 20)
Mínimo relativo: B(1, –7)
Creciente (↗): $(-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$
Decreciente (↘): $(-2, 1)$

18. Calcula los máximos y los mínimos relativos y determina la monotonía de las siguientes funciones:

a) $y = \dfrac{x^4 + 1}{x^2}$ b) $y = \dfrac{x^2}{x^2 - 9}$

Solución:

a) $y' = \dfrac{2(x^4 - 1)}{x^3}$
$y' = 0 \Rightarrow x = -1, x = 1$
Máximo relativo: no tiene.
Mínimo relativo: A(–1, 2), B(1, 2)
Creciente (↗): $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$
Decreciente (↘): $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$

b) $y' = -\dfrac{18x}{(x^2 - 9)^2}$
$y' = 0 \Rightarrow x = 0$
Máximo relativo: O(0, 0)
Mínimo relativo: no tiene.
Creciente (↗): $(-\infty, -3) \cup (-3, 0)$
Decreciente (↘): $(0, 3) \cup (3, +\infty)$

19. Calcula los máximos y los mínimos relativos y determina la monotonía de la siguiente función:

$$y = \frac{e^x}{x}$$

Solución:

$y' = \dfrac{e^x(x - 1)}{x^2}$
$y' = 0 \Rightarrow x = 1$
Máximo relativo: no tiene.
Mínimo relativo: A(1, e)
Creciente (↗): $(1, +\infty)$
Decreciente (↘): $(-\infty, 0) \cup (0, 1)$

20. Calcula los máximos y los mínimos relativos y determina la monotonía de la siguiente función:

$$y = L\,(x^2 + 1)$$

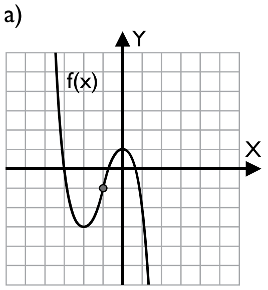
Solución:

$y' = \dfrac{2x}{x^2 + 1}$
$y' = 0 \Rightarrow x = 0$
Máximo relativo: no tiene.
Mínimo relativo: O(0, 0)
Creciente (↗): $(0, +\infty)$
Decreciente (↘): $(-\infty, 0)$

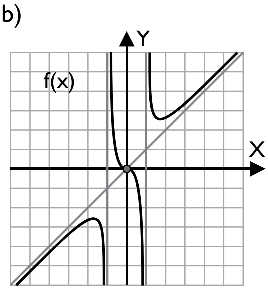
2. Puntos de inflexión y curvatura

21. Identifica en las siguientes gráficas los puntos de inflexión y los intervalos de concavidad y convexidad:

a)



b)



Solución:

a) Punto de inflexión: $A(1, -1)$

Convexa ($\cup$): $(-\infty, -1)$

Cóncava ($\cap$): $(-1, +\infty)$

b) Punto de inflexión: $O(0, 0)$

Convexa ($\cup$): $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$

Cóncava ($\cap$): $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$

22. Calcula los puntos de inflexión y determina la curvatura de las siguientes funciones:

a) $y = 3x^5 - 5x^3$ b) $y = \dfrac{1}{4}x^4 - x^3 - 2$

Solución:

a) $y' = 15x^4 - 15x^2$

$y'' = 60x^3 - 30x$

$y'' = 0 \Rightarrow x = -\sqrt{2}/2, x = 0, x = \sqrt{2}/2$

$y''' = 180x^2 - 30$

$y'''(-\sqrt{2}/2) = 60 \neq 0$

$y'''(0) = -30 \neq 0$

$y'''(\sqrt{2}/2) = 60 \neq 0$

Puntos de inflexión:

$A(-\sqrt{2}/2, 7\sqrt{2}/8), O(0, 0), B(\sqrt{2}/2, -7\sqrt{2}/8)$

Convexa ($\cup$): $(-\sqrt{2}/2, 0) \cup (\sqrt{2}/2, +\infty)$

Cóncava ($\cap$): $(-\infty, -\sqrt{2}/2) \cup (0, \sqrt{2}/2)$

b) $y' = x^3 - 3x^2$

$y'' = 3x^2 - 6x$

$y'' = 0 \Rightarrow x = 0, x = 2$

$y''' = 6x - 6$

$y'''(0) = -6 \neq 0$

$y'''(2) = 6 \neq 0$

Puntos de inflexión: $A(0, -2), B(2, -6)$

Convexa ($\cup$): $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$

Cóncava ($\cap$): $(0, 2)$

23. Calcula los puntos de inflexión y determina la curvatura de la siguiente función:

$$y = \frac{x^2}{x^2 + 1}$$

Solución:

$$y' = \frac{2x}{(x^2 + 1)^2}$$

$$y'' = -\frac{2(3x^2 - 1)}{(x^2 + 1)^3}$$

$y'' = 0 \Rightarrow x = -\sqrt{3}/3, x = \sqrt{3}/3$

$$y''' = \frac{24x(x^2 - 1)}{(x^2 + 1)^4}$$

$y'''(-\sqrt{3}/3) = 27\sqrt{3}/16 \neq 0$

$y'''(\sqrt{3}/3) = -27\sqrt{3}/16 \neq 0$

Puntos de inflexión:

$A(-\sqrt{3}/3, 1/4), B(\sqrt{3}/3, 1/4)$

Convexa ($\cup$): $(-\sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3)$

Cóncava ($\cap$): $(-\infty, -\sqrt{3}/3) \cup (\sqrt{3}/3, +\infty)$

24. Calcula los puntos de inflexión y determina la curvatura de la siguiente función:

$$y = \frac{x^2 - 2}{x^2 - 1}$$

Solución:

$$y' = \frac{2x}{(x^2 - 1)^2}$$

$$y'' = -\frac{2(3x^2 + 1)}{(x^2 - 1)^3}$$

$y'' \neq 0$

Puntos de inflexión: no tiene.

Convexa ($\cup$): $(-1, 1)$

Cóncava ($\cap$): $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

25. Calcula los puntos de inflexión y determina la curvatura de la siguiente función:

$$y = \sqrt{4 - x^2}$$

Solución:

$$y' = -\frac{x}{\sqrt{4 - x^2}}$$

$$y'' = -\frac{4}{(4 - x^2)\sqrt{4 - x^2}}$$

$y'' \neq 0$

Puntos de inflexión: no tiene.

Convexa ($\cup$): $\varnothing$

Cóncava ($\cap$): $(-2, 2)$

26. Calcula los puntos de inflexión y determina la curvatura de la siguiente función:

$$y = e^{-x^2}$$

Solución:

$y' = -2x\, e^{-x^2}$

$y'' = (4x^2 - 2)\, e^{-x^2}$

$y'' = 0 \Rightarrow x = -\sqrt{2}/2, x = \sqrt{2}/2$

$y''' = 4x(3 - 2x^2)\, e^{-x^2}$

$y'''(-\sqrt{2}/2) = 4\sqrt{2}/\sqrt{e} \neq 0$

$y'''(\sqrt{2}/2) = -4\sqrt{2}/\sqrt{e} \neq 0$

Puntos de inflexión: $A(-\sqrt{2}/2, 1/\sqrt{e}), B(\sqrt{2}/2, 1/\sqrt{e})$

Convexa ($\cup$): $(-\infty, -\sqrt{2}/2) \cup (\sqrt{2}/2, +\infty)$

Cóncava ($\cap$): $(-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$

27. Calcula los puntos de inflexión y determina la curvatura de la siguiente función:

$$y = \frac{x}{L\,x}$$

Solución:

$y' = \dfrac{-1 + L\,x}{L^2\,x}$

$y'' = \dfrac{2 - L\,x}{x\,L^3\,x}$

$y'' = 0 \Rightarrow x = e^2$

$y''' = \dfrac{-6 + L^2\,x}{x^2\,L^4\,x}$

$y'''(e^2) = -\dfrac{1}{8e^4} \neq 0$

Puntos de inflexión: $A(e^2, e^2/2)$

Convexa ($\cup$): $(1, e^2)$

Cóncava ($\cap$): $(0, 1) \cup (e^2, +\infty)$

3. Problemas de derivadas

28. Para cada valor de **a,** se considera la función:

$$f(x) = \frac{3x^2 - ax}{x + 2}$$

Calcula el valor de **a** para que f(x) tenga un mínimo relativo en x = 2

Solución:

$f'(x) = \dfrac{3x^2 + 12x - 2a}{(x + 2)^2}$

Si ha de tener un mínimo en x = 2

$f'(2) = 0$

$\dfrac{18 - a}{8} = 0 \Rightarrow a = 18$

$f''(x) = \dfrac{4(a + 6)}{(x + 2)^3}$

$f''(2) = \dfrac{a + 6}{16} > 0$ para a = 18

Efectivamente, es un mínimo.

29. Expresa el número 60 como suma de tres enteros positivos, de forma que el segundo sea el doble del primero y su producto sea máximo. Determina el valor de dicho producto.

Solución:

a) Incógnitas y datos.

x = primer número

y = segundo número

z = tercer número

$\left.\begin{array}{l} x + y + z = 60 \\ y = 2x \end{array}\right\} \Rightarrow z = 60 - 3x$

b) Función que hay que maximizar.

$f(x, y, z) = xyz$

Sujeto a:

$\left.\begin{array}{l} x + y + z = 60 \\ y = 2x \end{array}\right\}$

c) Se escribe la función con una sola variable.

$f(x) = x \cdot 2x \cdot (60 - 3x)$

$f(x) = 120x^2 - 6x^3$

d) Se calculan los máximos y mínimos relativos.

$f'(x) = 240x - 18x^2$

$240x - 18x^2 = 0 \Rightarrow x = 0, x = 40/3$

Si $x = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow z = 60$

Si $x = 40/3 \Rightarrow y = 80/3 \Rightarrow z = 20$

e) Se comprueba en la segunda derivada.

$f''(x) = 240 - 36x$

$f''(0) = 240 > 0\ (+) \Rightarrow$ mínimo relativo.

$f''(40/3) = -240 < 0\ (-) \Rightarrow$ máximo relativo.

f) El máximo se alcanza en x = 40/3, pero el enunciado del problema pide que los números sean enteros positivos. Como $40/3 \in [13, 14]$, se debe buscar la solución en los extremos del intervalo cerrado:

$f(x) = 120x^2 - 6x^3$

$f(13) = 120 \cdot 13^2 - 6 \cdot 13^3 = 7\,098$

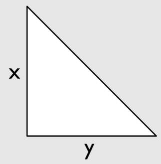
$f(14) = 120 \cdot 14^2 - 6 \cdot 14^3 = 7\,056$

La solución entonces es x = 13, y = 26, z = 21

30. Calcula el área máxima que puede tener un triángulo rectángulo tal que la suma de las longitudes de sus catetos valga 4 cm

Solución:

a) Incógnitas, datos y dibujo.



x = longitud de un cateto.

y = longitud de otro cateto.

$x + y = 4$

b) Función que hay que maximizar.

$f(x, y) = \dfrac{xy}{2}$

Sujeto a:

$x + y = 4 \Rightarrow y = 4 - x$

c) Se escribe la función con una sola variable.

$f(x) = \dfrac{x(4 - x)}{2} = 2x - \dfrac{x^2}{2}$

d) Se calculan los máximos y mínimos relativos.

$f'(x) = 2 - x$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 2$

Si $x = 2 \Rightarrow y = 2$

e) Se comprueba en la segunda derivada.

$f''(x) = -1$

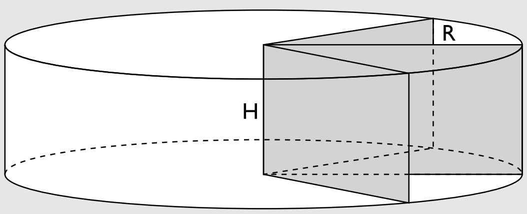
$f''(2) = -1 < 0\ (-) \Rightarrow$ máximo relativo.

f) El máximo se alcanza en $x = 2$ cm, $y = 2$ cm, que es un triángulo rectángulo isósceles cuya área es 2 cm^2

31. Halla la base **x** y la altura **y** de una cartulina rectangular de 60 cm de perímetro, que, al dar una vuelta completa alrededor de un lado vertical, genera un cilindro de volumen máximo.

Solución:

a) Incógnitas, datos y dibujo.



R = radio del cilindro.

H = altura del cilindro.

$R + H = 30$ cm

b) Función que hay que maximizar.

$V(R, H) = \pi R^2 H$

Sujeta a las condiciones:

$R + H = 30$

c) Se escribe la ecuación con una sola variable.

$H = 30 - R$

$V(R) = \pi R^2(30 - R)$

$V(R) = 30\ R^2 - \pi R^3$

d) Se calculan los máximos y mínimos relativos derivando.

$V'(R) = 60\pi R - 3\pi R^2$

$60\pi R - 3\pi R^2 = 0 \Rightarrow R = 0, R = 20$

Si $R = 20 \Rightarrow H = 10$

La solución $R = 0$ no tiene sentido.

e) Se comprueba en la segunda derivada.

$V''(R) = 60\pi - 6\pi R$

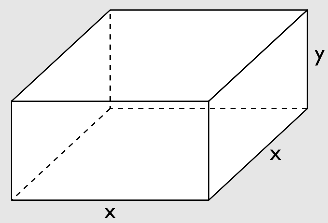
$V''(20) = -60\pi < 0\ (-) \Rightarrow$ máximo relativo.

f) El cilindro mide 20 cm de radio y 10 cm de altura.

32. Una empresa fabrica cajas de latón sin tapa de 500 cm^3 de volumen, para almacenar un líquido colorante. Las cajas tienen la base cuadrada. Halla la altura y el lado de la base de cada caja para que la cantidad de latón empleada en fabricarlas sea la menor posible.

Solución:

a) Incógnitas, datos y dibujo.



x = longitud de la arista de la base.

y = altura de la caja.

Volumen $= x^2y = 500$

b) Función que hay que minimizar.

$A(x, y) = x^2 + 4xy$

Sujeta a las condiciones:

$x^2y = 500$

c) Se escribe la función con una sola variable.

$A(x, y) = x^2 + 4xy$

$y = \dfrac{500}{x^2}$

$A(x) = x^2 + 4x\dfrac{500}{x^2}$

$A(x) = x^2 + \dfrac{2\,000}{x}$

d) Se calculan los máximos y mínimos derivando.

$$A'(x) = 2x - \frac{2\,000}{x^2}$$

$A'(x) = 0 \Rightarrow x = 10$

Si $x = 10 \Rightarrow y = 5$

e) Se comprueba en la segunda derivada.

$$A''(x) = \frac{4\,000}{x^3} + 2$$

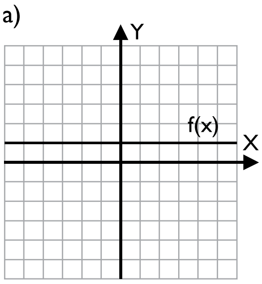
$A''(10) = 6 > 0\ (+) \Rightarrow$ mínimo relativo.

f) La caja mide 10 cm de arista de la base y 5 cm de alto. El área es $A = 300\ cm^2$

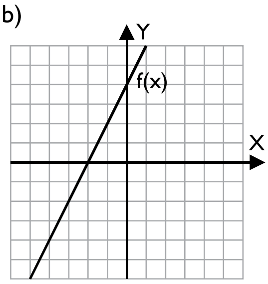
Para ampliar

33. Dada la gráfica de la función f(x), haz en cada caso un dibujo aproximado de la gráfica de la función derivada f'(x):

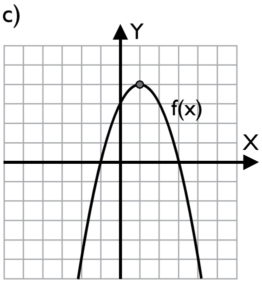
a)



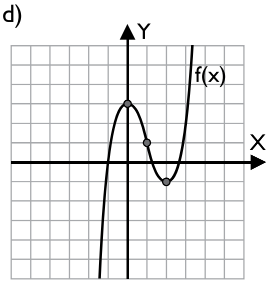
b)



c)

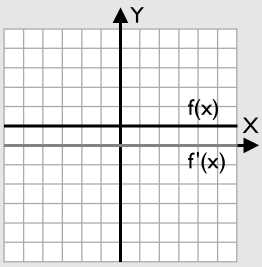


d)

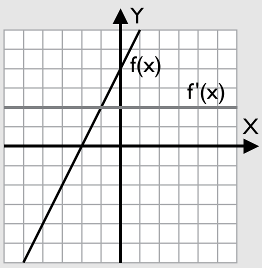


Solución:

a) La derivada de una función constante es cero.

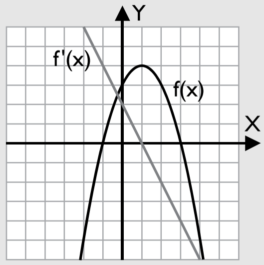


b) La derivada de una función de primer grado es una constante que coincide con la pendiente de la recta.

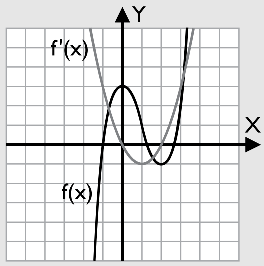


c) La derivada de una parábola es una recta.

La función tiene en x = 1 un máximo. Luego f'(1) = 0. Así, a la izquierda del máximo f es creciente (f' > 0), y a la derecha, f es decreciente (f' < 0)



d) La derivada de una cúbica es una parábola.



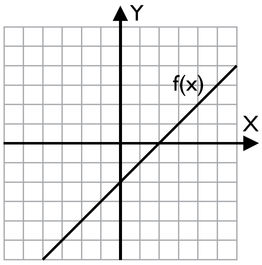
En x = 0 hay un máximo, f'(0) = 0, f' > 0 a la izquierda de x = 0, y f' < 0 a la derecha de x = 0

En x = 2 hay un mínimo, f'(2) = 0, f' < 0 a la izquierda de x = 2, y f' > 0 a la derecha de x = 2

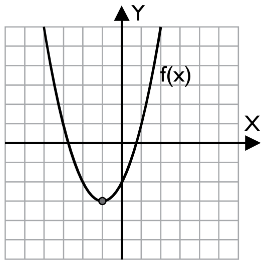
En x = 1 hay un punto de inflexión. La función f' pasa de decreciente a creciente, es decir, f' tiene un mínimo.

34. Dada la gráfica de la función f(x), haz en cada caso un dibujo aproximado de la gráfica de la función derivada f'(x) y de la gráfica de la segunda derivada f''(x):

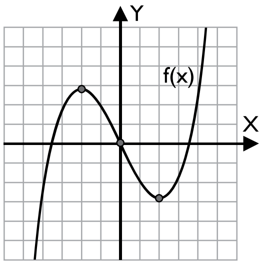
a)



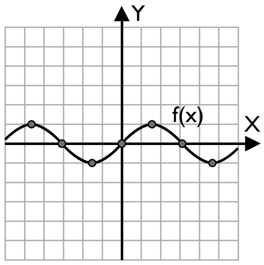
b)



c)



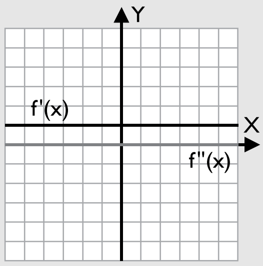
d)



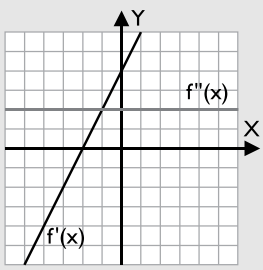
Solución:

a) f': La derivada de una función de primer grado es una constante que coincide con la pendiente de la recta.

f'': La derivada de una constante es cero.



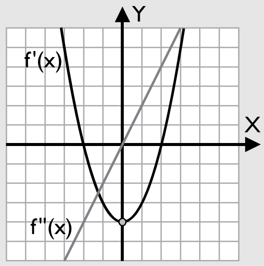
b) La derivada de una parábola es una recta.



f': La función tiene en x = – 1 un mínimo. Luego f'(– 1) = 0. Entonces, a la izquierda del mínimo, f es decreciente (f' < 0), y a la derecha, f es creciente (f' > 0)

f'': La derivada de una función de primer grado es una constante que coincide con la pendiente de la recta. Como f es cóncava, f'' > 0

c) La derivada de una cúbica es una parábola.



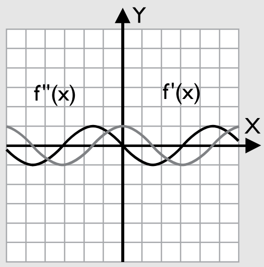
f': En x = –2 hay un máximo, f'(–2) = 0, f' > 0 a la izquierda de x = –2 y f' < 0 a la derecha de x = –2

En x = 2 hay un mínimo, f'(2) = 0, f' < 0 a la izquierda de x = 2 y f' > 0 a la derecha de x = 2

En x = 0 hay un punto de inflexión. La función f' pasa de decreciente a creciente, es decir, f' tiene un mínimo.

f'': En x = 0, f''(0) = 0, y a la derecha de cero la función es cóncava (f'' > 0) y a la izquierda de cero la función es convexa (f'' < 0)

d) La derivada del seno es el coseno.



f: En los puntos de máximo relativo, f' = 0, y a la izquierda del valor f' > 0, y a la derecha del valor f' < 0

f'': En los puntos de inflexión, f'' = 0, y en los intervalos de concavidad f'' > 0, y en los intervalos de convexidad f'' < 0

35. Se considera la curva de ecuación $y = x^3 - 6x$

Halla, si existen, las coordenadas de sus máximos y mínimos relativos.

Solución:

$y' = 3x^2 - 6$

$y'' = 6x$

$y' = 0 \Rightarrow x = -\sqrt{2}, x = \sqrt{2}$

Máximo relativo: $A(-\sqrt{2}, 4\sqrt{2})$

Mínimo relativo: $B(\sqrt{2}, -4\sqrt{2})$

36. Dada la función $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$

a) determina sus máximos y sus mínimos relativos.

b) calcula sus puntos de inflexión.

Solución:

$f'(x) = x^2 + x - 2$

a) $f'(x) = 0 \Rightarrow x = -2, x = 1$

Máximo relativo: $A(-2, 13/3)$

Mínimo relativo: $B(1, -1/6)$

b) $f''(x) = 2x + 1$

$f''(x) = 0 \Rightarrow x = -1/2$

$f'''(x) = 2$

Punto de inflexión: $C(-1/2, 25/12)$

37. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función siguiente:

$$f(x) = 2x + \frac{1}{2x}$$

Solución:

$f'(x) = 2 - \dfrac{1}{2x^2}$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = -1/2, x = 1/2$

Creciente (↗): $(-\infty, -1/2) \cup (1/2, +\infty)$

Decreciente (↘): $(-1/2, 0) \cup (0, 1/2)$

38. Dada la curva siguiente:

$$y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

calcula los máximos y mínimos relativos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.

Solución:

$f'(x) = \dfrac{4x}{(x^2 + 1)^2}$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$

Máximo relativo: no tiene.

Mínimo relativo: $A(0, -1)$

Creciente (↗): $(0, +\infty)$

Decreciente (↘): $(-\infty, 0)$

39. Dada la función siguiente:

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$$

determina sus máximos y mínimos relativos.

Solución:

$f'(x) = \dfrac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = -1, x = 1$

Máximo relativo: $A(1, 1/2)$

Mínimo relativo: $B(-1, -1/2)$

40. Sea la función $f(x) = 2x^2 - \dfrac{1}{3}x^3$

Calcula:

a) las coordenadas de sus máximos y mínimos relativos.

b) los intervalos donde es creciente y decreciente.

Solución:

$f'(x) = 4x - x^2$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 4$

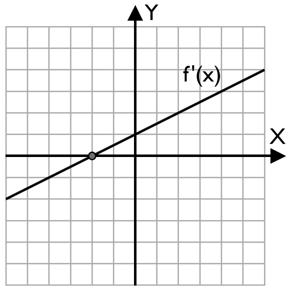
Máximo relativo: $A(4, 32/3)$

Mínimo relativo: $O(0, 0)$

Creciente (↗): $(0, 4)$

Decreciente (↘): $(-\infty, 0) \cup (4, +\infty)$

41. La gráfica siguiente corresponde a la función $f'(x)$, primera derivada de una cierta función $f(x)$



a) Estudia el crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$ interpretando la gráfica de $f'(x)$

b) Estudia la concavidad, convexidad y puntos de inflexión de la función $f(x)$ utilizando solo la gráfica de $f'(x)$

Solución:

a) La función derivada se hace cero en $x = -2$

A la izquierda de $x = -2$, $f'(x) < 0$; luego $f(x)$ es decreciente en $(-\infty, -2)$

A la derecha de $x = -2$, $f'(x) > 0$; luego $f(x)$ es creciente en $(-2, +\infty)$

En $x = -2$ la función $f(x)$ tiene un mínimo.

b) $f'(x)$ es creciente en $\mathbb{R}$. Por lo tanto, la función $f(x)$ es convexa en $\mathbb{R}$; luego no tiene puntos de inflexión.

42. Calcula dos números positivos tales que su producto es 192 y la suma de tres veces el primero más el segundo es mínima.

Solución:

a) Incógnitas y datos.

x = primer número.

y = segundo número.

$xy = 192$

b) Función que hay que minimizar.

$f(x, y) = 3x + y$

Sujeto a: $xy = 192 \Rightarrow y = \dfrac{192}{x}$

c) Se escribe la función con una sola variable.

$f(x) = 3x + \dfrac{192}{x}$

d) Se calculan los máximos y mínimos relativos derivando.

$f'(x) = 3 - \dfrac{192}{x^2}$

$3 - \dfrac{192}{x^2} = 0 \Rightarrow x = -8, x = 8$

Si $x = 8 \Rightarrow y = 24$

El valor $x = -8$ no es válido, ya que piden números positivos.

e) Se comprueba en la segunda derivada.

$f''(x) = \dfrac{384}{x^3}$

$f''(8) = 3/4 > 0\ (+) \Rightarrow$ mínimo relativo.

f) El primer número es $x = 8$; el segundo, $y = 24$, y la suma pedida, $f(x) = 48$

43. Sea $P(x)$ un polinomio de grado cuatro tal que verifica las tres condiciones siguientes:

- $P(x)$ es una función par.
- Dos de sus raíces son $x = 1$, $x = -\sqrt{5}$
- $P(0) = 5$

Halla sus puntos de inflexión.

Solución:

a) Si es función par:

$P(x) = ax^4 + bx^2 + c$

b) Si $x = 1$ es raíz y $x = -\sqrt{5}$ es raíz:

$P(1) = 0 \Rightarrow a + b + c = 0$

$P(-\sqrt{5}) = 0 \Rightarrow 25a + 5b + c = 0$

c) Si $P(0) = 5$:

$c = 5$

Se resuelve el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} a + b + c = 0 \\ 25a + 5b + c = 0 \\ c = 5 \end{array}\right\}$$

$a = 1, b = -6, c = 5$

La función es:

$P(x) = x^4 - 6x^2 + 5$

Sus puntos de inflexión serán:

$P'(x) = 4x^3 - 12x$

$P''(x) = 12x^2 - 12$

$P''(x) = 0 \Rightarrow x = -1, x = 1$

$P'''(x) = 24x$

$P'''(-1) = -24 \neq 0$

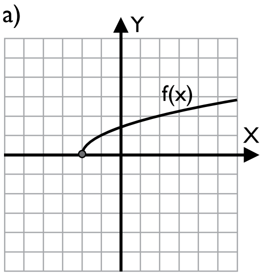
$P'''(1) = 24 \neq 0$

Puntos de inflexión: $A(-1, 0)$, $B(1, 0)$

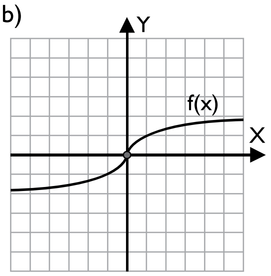
Problemas

44. Dada la gráfica de la función $f(x)$, haz, en cada caso, un dibujo aproximado de la gráfica de la función derivada $f'(x)$:

a)

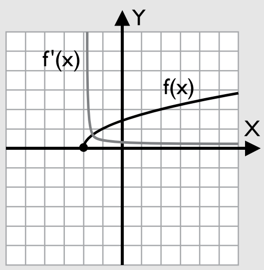


b)



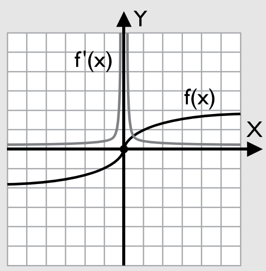
Solución:

a)



Como $f(x)$ es creciente, $f'(x) > 0$. Como $f(x)$ es cóncava, $f'(x)$ es decreciente, y cuando x tiende a -2 por la derecha, $f'(x)$ debe tender a infinito, es decir, la recta tangente debe ser una recta vertical.

b)



Como $f(x)$ es creciente, $f'(x) > 0$. En $(-\infty, 0)$ la función es convexa, por lo que $f'(x)$ debe ser creciente, y en $(0, +\infty)$ la función $f(x)$ es cóncava, luego $f'(x)$ es decreciente. En $x = 0$ la tangente a la gráfica sería vertical y las derivadas laterales tenderían a infinito.

Ejercicios y problemas

45. Sea la función $f(x) = x + \frac{1}{x}$ con $x \neq 0$

a) Halla las coordenadas de sus máximos y mínimos relativos. Estudia la monotonía.

b) Determina los intervalos de concavidad y convexidad.

Solución:

a) $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = -1, x = 1$

Máximo relativo: $A(-1, -2)$

Mínimo relativo: $B(1, 2)$

Creciente (↗): $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

Decreciente (↘): $(-1, 0) \cup (0, 1)$

b) $f''(x) = \frac{2}{x^3}$

$f''(x) \neq 0$ para todo x

Punto de inflexión: no tiene.

Convexa ($\cup$): $(0, +\infty)$

Cóncava ($\cap$): $(-\infty, 0)$

46. Dada la función

$$f(x) = \frac{9x - 3}{x^2 - 2x} \text{ para } x \neq 0 \text{ y } x \neq 2,$$

determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.

Solución:

$f'(x) = -\frac{3(3x^2 - 2x + 2)}{x^2(x - 2)^2}$

$f'(x) \neq 0$ para todo x

Máximo relativo: no tiene.

Mínimo relativo: no tiene.

Creciente (↗): $\varnothing$

Decreciente (↘): $(-\infty, 0) \cup (0, 2) \cup (2, +\infty)$

47. Dada la función $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^3}$, calcula:

a) los máximos y los mínimos relativos.

b) los puntos de inflexión.

Solución:

a) $f'(x) = \frac{3 - x^2}{x^4}$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = -\sqrt{3}, x = \sqrt{3}$

Máximo relativo: $A(\sqrt{3}, 2\sqrt{3}/9)$

Mínimo relativo: $B(-\sqrt{3}, -2\sqrt{3}/9)$

b) $f''(x) = \frac{2(x^2 - 6)}{x^5}$

$f''(x) = 0 \Rightarrow x = -\sqrt{6}, x = \sqrt{6}$

$f'''(x) = \frac{6(10 - x^2)}{x^6}$

$f'''(-\sqrt{6}) = 1/9 \neq 0$

$f'''(\sqrt{6}) = 1/9 \neq 0$

Puntos de inflexión:

$C(-\sqrt{6}, -5\sqrt{6}/36), D(\sqrt{6}, 5\sqrt{6}/36)$

48. Calcula los máximos y mínimos relativos de:

$$f(x) = -x \operatorname{L} x$$

Solución:

$f'(x) = -1 - \operatorname{L} x$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 1/e$

Máximo relativo: $A(1/e, 1/e)$

Mínimo relativo: no tiene.

49. Dada la función $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + x - 2}$

halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.

Solución:

$f'(x) = -\frac{x(x - 4)}{(x^2 + x - 2)^2}$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 4$

Máximo relativo: $O(0, 0)$

Mínimo relativo: $A(4, 8/9)$

Creciente (↗): $(-\infty, -2) \cup (-2, 0) \cup (4, +\infty)$

Decreciente (↘): $(0, 1) \cup (1, 4)$

50. Sea $f(x) = e^{-x}(x^2 + 6x + 9)$. Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

Solución:

$f'(x) = -(x^2 + 4x + 3)e^{-x}$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = -3, x = -1$

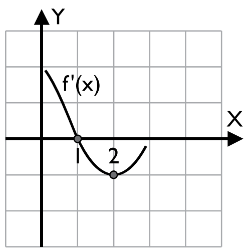
Máximo relativo: $A(-1, 4e)$

Mínimo relativo: $B(-3, 0)$

Creciente (↗): $(-3, 1)$

Decreciente (↘): $(-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$

51. La gráfica siguiente corresponde a la derivada f'(x) de una cierta función f(x). Determina a partir de la gráfica si existen máximos relativos, mínimos relativos o puntos de inflexión en los puntos de abscisa x = 1 y x = 2

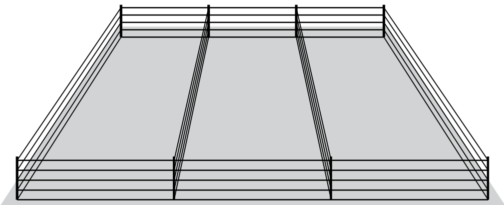


Solución:

En $x = 1$, $f'(x) = 0$. A la izquierda de $x = 1$, $f'(x) > 0$ y la función $f(x)$ es creciente; y a la derecha de $x = 1$, $f'(x) < 0$ y la función $f(x)$ es decreciente. Luego $f(x)$ en $x = 1$ tiene un máximo relativo.

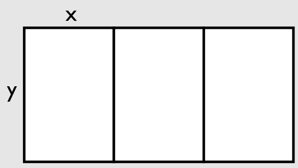
En $x = 2$, $f'(x)$ tiene un mínimo relativo. Luego a la izquierda de $x = 2$ la función derivada, $f'(x)$, es decreciente y, por lo tanto, la función $f(x)$ es cóncava; y a la derecha de $x = 2$, $f'(x)$ es creciente, con lo que $f(x)$ es convexa. Por lo tanto, la función $f(x)$ tiene un punto de inflexión en $x = 2$

52. Un solar rectangular de 11 250 m^2 se divide en tres zonas rectangulares para venderlo como muestra la figura. Se valla el borde del campo y la separación entre las zonas. Calcula las dimensiones del solar para que la longitud de la valla utilizada sea mínima.



Solución:

a) Incógnitas, datos y dibujo.



y = largo del solar.

x = ancho de una parcela.

b) Función que hay que maximizar.

$L(x, y) = 6x + 4y$

Sujeta a las condiciones:

$3xy = 11\,250 \Rightarrow y = \dfrac{3\,750}{x}$

c) Se escribe la función con una sola variable.

$L(x) = 6x + 4 \cdot \dfrac{3\,750}{x}$

$L(x) = 6x + \dfrac{15\,000}{x}$

d) Se calculan los máximos y mínimos derivando.

$L'(x) = 6 - \dfrac{15\,000}{x^2}$

$L'(x) = 0 \Rightarrow x = -50, x = 50$

Si $x = 50 \Rightarrow y = 75$

El valor negativo no tiene sentido.

e) Se comprueba en la segunda derivada.

$L''(x) = \dfrac{30\,000}{x^3}$

$L''(50) = 6/25 > 0\ (+) \Rightarrow$ mínimo relativo.

f) La longitud se hace mínima para $x = 50$ m, $y = 75$ m

53. Se ha de construir un gran depósito cilíndrico de $81\pi\ m^3$ de volumen. La superficie lateral ha de ser construida con un material que cuesta 30 €/m^2, y las dos bases con un material que cuesta 45 €/m^2

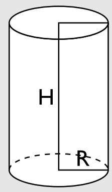
a) Determina la relación que hay entre el radio, R, de las bases circulares y la altura, H, del cilindro, y da el coste, C(R), del material necesario para construir el depósito en función de R

b) ¿Qué dimensiones ha de tener el depósito para que el coste de los materiales necesarios sea el mínimo posible?

c) ¿Cuál será, en este caso, el coste del material?

Solución:

a)



R = radio del cilindro.

H = altura del cilindro.

Volumen = $R^2H = 81\pi\ m^3$

$C(R) = 30 \cdot 2\ RH + 2 \cdot 45 \cdot \pi R^2$

$C(R) = 60\ R \dfrac{81}{R^2} + 90\ R^2$

$C(R) = \dfrac{4\,860\pi}{R} + 90\pi R^2$

b) Para calcular el coste mínimo, se deriva:

$C'(R) = -\dfrac{4\,860\pi}{R^2} + 180\pi R$

$-\dfrac{4\,860\pi}{R^2} + 180\pi R = 0 \Rightarrow R = 3$

Si $R = 3$ m $\Rightarrow H = 9$ m

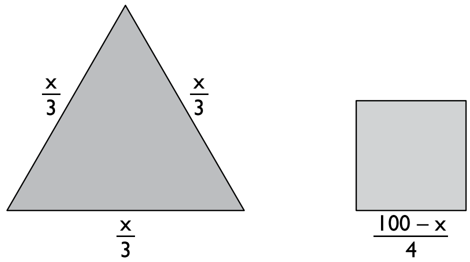
Se comprueba en la segunda derivada:

$C''(R) = \dfrac{9\,720\pi}{R^3} + 180$

$C''(3) = 540\pi > 0\ (+) \Rightarrow$ mínimo relativo.

c) $C(3) = 2\,430\pi$ € = 7 634,07 €

54. Se divide un alambre de 100 m de longitud en dos segmentos de longitud **x** y 100 – x. Con el de longitud **x** se forma un triángulo equilátero y con el otro segmento se forma un cuadrado. Sea f(x) la suma de las áreas del triángulo y del cuadrado.



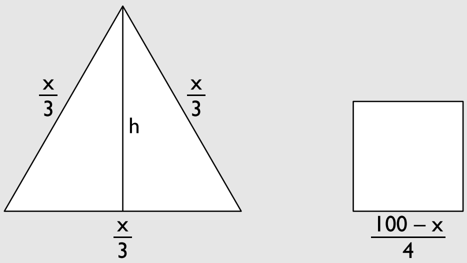
a) Determina el dominio de la función **f,** es decir, los valores que puede tomar **x**

b) Con el estudio de la derivada de **f** obtén cuándo **f** es creciente y cuándo es decreciente.

c) Obtén de forma razonada para qué valor de **x** se obtiene que las sumas de las áreas del triángulo y el cuadrado es mínima.

Solución:

a)



$$f(x, h) = \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{3} \cdot h + \left(\frac{100 - x}{4}\right)^2$$

La altura del triángulo:

$$h = \sqrt{\left(\frac{x}{3}\right)^2 - \left(\frac{x}{6}\right)^2} = \frac{x\sqrt{3}}{6}$$

$$f(x) = \frac{x^2\sqrt{3}}{36} + \left(\frac{100 - x}{4}\right)^2$$

Dom (f) = (0, 100)

b) $f'(x) = \dfrac{x\sqrt{3}}{18} + \dfrac{x - 100}{8}$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{900}{9 + 4\sqrt{3}}$$

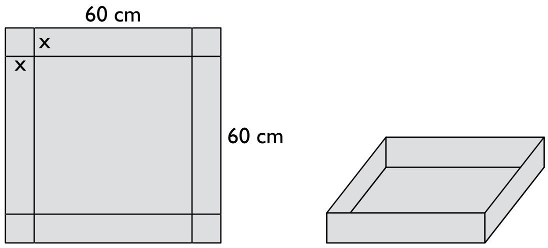
Creciente (↗): $\left(\dfrac{900}{9 + 4\sqrt{3}}, 100\right)$

Decreciente (↘): $\left(0, \dfrac{900}{9 + 4\sqrt{3}}\right)$

c) $f''(x) = \dfrac{4\sqrt{3} + 9}{72} > 0$ para todo **x** del dominio.

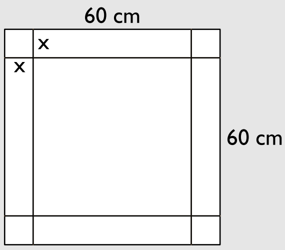
Luego el área será mínima.

55. A partir de una cartulina cuadrada de 60 cm de lado se va a construir una caja de base cuadrada, sin tapa, a base de recortar cuatro cuadrados iguales en las esquinas de la cartulina y doblando después de la manera adecuada. Un observador indica que la caja de más capacidad se obtendrá si los cuadrados eliminados tienen 10 cm de lado. Decide si la observación es correcta o no.



Solución:

a) Incógnitas, datos y dibujo.



b) Función que hay que maximizar.

$V(x) = (60 - 2x)^2x$

$V(x) = 4x^3 - 240x^2 + 3\,600x$

c) Se calculan los máximos y mínimos derivando.

$V'(x) = 12x^2 - 480x + 3\,600$

$V'(x) = 0 \Rightarrow x = 10, x = 30$

d) Se comprueba en la segunda derivada.

$V''(x) = 24x - 480$

$V''(10) = -240 < 0$ (–) ⇒ máximo relativo.

$V''(30) = 240 > 0$ (+) ⇒ mínimo relativo.

e) Como el máximo se obtiene para x = 10, la observación es correcta.

56. Se considera la función real de variable real definida por

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 3}$$

Halla la ecuación cartesiana de la recta tangente en el punto de inflexión de abscisa positiva.

Solución:

$f'(x) = -\dfrac{2x}{(x^2+3)^2}$

$f''(x) = \dfrac{6(x^2-1)}{(x^2+3)^3}$

$f''(x) = 0 \Rightarrow x = -1, x = 1$

$f'''(x) = \dfrac{24x(3-x^2)}{(x^2+3)^4}$

$f'''(1) = 3/16 \neq 0$

Punto de inflexión: A(1, 1/4)

Recta tangente en A:

$y - 1/4 = f'(1)(x-1)$

$y - 1/4 = -\dfrac{1}{8}(x-1)$

$y = \dfrac{3-x}{8}$

57. Se considera la función siguiente:

$$f(x) = \frac{1}{4-x^2}$$

a) Halla los extremos relativos de la función f(x) y sus intervalos de concavidad y convexidad.

b) Halla el máximo y el mínimo absolutos en el intervalo [– 1, 1]

Solución:

a) $f'(x) = \dfrac{2x}{(4-x^2)^2}$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$

$f''(x) = \dfrac{2(3x^2+4)}{(4-x^2)^3} \Rightarrow f''(0) = \dfrac{1}{8} > 0$

Máximo relativo: no tiene.

Mínimo relativo: A(0, 1/4)

Punto de inflexión: no tiene.

Convexa ($\cup$): $(-2, 2)$

Cóncava ($\cap$): $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$

b) Para calcular los máximos y mínimos absolutos, se observa que la función es continua en [– 1, 1], es decreciente en (– 1, 0) y es creciente en (0, 1)

Como:

$f(-1) = 1/3$

$f(1) = 1/3$

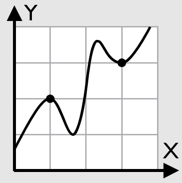
se tiene:

el mínimo absoluto es A(0, 1/4), que coincide con el mínimo relativo, y el máximo absoluto se alcanza en los extremos del intervalo.

Para profundizar

58. Si es posible, dibuja de forma clara la gráfica de una función continua en el intervalo [0, 4] que tenga al menos un máximo relativo en el punto (1, 2) y un mínimo relativo en el punto (3, 3). Si la función fuese polinómica, ¿cuál habría de ser como mínimo su grado?

Solución:



Se observa que f tiene al menos 4 extremos. Por lo tanto, f' se anula 4 veces, es decir, es de grado cuatro. Si la función es polinómica, para que f' sea de grado cuatro, f debe ser de grado 5

59. Para cada valor de **a** se considera la función

$$f(x) = 2x + ax^2 - 4\,L\,x$$

a) Calcula el valor del parámetro real **a,** sabiendo que la función tiene un extremo relativo en el punto de abscisa x = 1. Clasifica el extremo.

b) Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento para a = 3

Solución:

a) $f'(x) = 2 + 2ax - \dfrac{4}{x}$

Si tiene un extremo en $x = 1 \Rightarrow f'(1) = 0$

$2 + 2a - 4 = 0$

$2a - 2 = 0$

$a = 1$

$f''(x) = 2a + \dfrac{4}{x^2}$

Para $a = 1 \Rightarrow f''(x) = 2 + \dfrac{4}{x^2}$

$f''(1) = 6 > 0\ (+) \Rightarrow$ mínimo relativo.

Para x = 1 se tiene un mínimo relativo.

b) $f'(x) = 2 + 6x - \dfrac{4}{x}$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 2/3, x = -1$

$x = -1$ no pertenece al dominio de f(x)

Si $x = 2/3$, $f(2/3) = 8/3 - 4\,L(2/3)$

Máximo relativo: no tiene.

Mínimo relativo: $(2/3, 8/3 - 4\,L(2/3))$

Creciente ($\nearrow$): $(2/3, +\infty)$

Decreciente ($\searrow$): $(0, 2/3)$

60. Se sabe que la función $f(x) = x^3 + ax + b$ corta a su función derivada en $x = 1$ y que además, en dicho punto, **f** tiene un extremo.

a) Determina los valores de **a** y **b**

b) Determina la naturaleza del extremo que **f** tiene en $x = 1$

c) ¿Tiene **f** algún otro extremo?

Solución:

a) Si f y f'se cortan en $x = 1$:

$f'(x) = 3x^2 + a$

$3 + a = 1 + a + b$

Si en $x = 1$ hay un extremo, $f'(1) = 0$

$3 + a = 0$

Resolviendo el sistema: $\left.\begin{array}{l} 3 + a = 0 \\ 3 + a = 1 + a + b \end{array}\right\}$

$a = -3, b = 2$

b) $f''(x) = 6x$

$f''(1) = 6 > 0\ (+) \Rightarrow$ mínimo relativo.

c) $f'(x) = 3x^2 - 3$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = -1, x = 1$

$f''(-1) = -6 < 0\ (-) \Rightarrow$ máximo relativo.

61. Dada la función $f(x) = ax^4 + 3bx^3 - 3x^2 - ax$, calcula los valores de **a** y **b** sabiendo que la función tiene dos puntos de inflexión, uno en $x = 1$ y otro en $x = \frac{1}{2}$

Solución:

$f'(x) = 4ax^3 + 9bx^2 - 6x - a$

$f''(x) = 12ax^2 + 18bx - 6$

$f''(1) = 0 \Rightarrow 12a + 18b - 6 = 0 \Rightarrow 2a + 3b = 1$

$f''(1/2) = 0 \Rightarrow 3a + 9b - 6 = 0 \Rightarrow a + 3b = 2$

Resolviendo el sistema: $a = -1, b = 1$

62. De la función $f(x) = ax^3 + bx$ se sabe que tiene una gráfica que pasa por (1, 1) y que en ese punto tiene una tangente paralela a $3x + y = 0$. Halla **a** y **b**

Solución:

Si pasa por $(1, 1) \Rightarrow f(1) = 1$

$a + b = 1$

Si en (1, 1) la tangente es paralela a $y = -3x$, $f'(1) = -3$

$f'(x) = 3ax^2 + b$

$3a + b = -3$

Resolviendo el sistema:

$\left.\begin{array}{r} a + b = 1 \\ 3a + b = -3 \end{array}\right\}$

$a = -2, b = 3$

63. La función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ verifica que $f(1) = 1$, $f'(1) = 0$ y $f(x)$ no tiene un extremo relativo en $x = 1$. Calcula **a, b** y **c**

Solución:

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$

$f''(x) = 6x + 2a$

$f(1) = 1 \Rightarrow 1 + a + b + c = 1 \Rightarrow a + b + c = 0$

$f'(1) = 0 \Rightarrow 3 + 2a + b = 0 \Rightarrow 2a + b = -3$

Si no hay extremo relativo y $f'(1) = -3$, hay un punto de inflexión:

$f''(1) = 0 \Rightarrow 6 + 2a = 0$

Resolviendo el sistema de las tres ecuaciones:

$a = -3, b = 3, c = 0$

64. El número total de bacterias (en miles) presentes en un cultivo después de **t** horas viene dado por:

$$N(t) = 2t(t - 10)^2 + 50$$

a) Calcula la función derivada.

b) Durante las 10 primeras horas, ¿en qué instante se alcanza la población máxima y la mínima?

Solución:

$N'(t) = 2(3t^2 - 40t + 100)$

$N'(t) = 0 \Rightarrow t = 10/3, t = 10$

Máximo relativo: A(10/3, 9 350/27)

Mínimo relativo: B(10, 50)

Se comprueban los extremos del intervalo [0, 10]

$f(0) = 50$

El mínimo se alcanza en los extremos, es decir, en $t = 0$ y $t = 10$ con 50 000 bacterias, y el máximo se alcanza en $t = 10/3$ con 9 350/27 = 346 296 bacterias.

65. La capacidad de concentración de una saltadora de altura en una reunión atlética de tres horas de duración viene dada por la función $f(t) = 300t(3 - t)$, donde **t** mide el tiempo en horas.

a) Calcula los intervalos en los cuales la capacidad de concentración aumenta y los intervalos en los que disminuye. ¿Cuándo es nula?

b) ¿Cuál es el mejor momento, en términos de su capacidad de concentración, para que la saltadora pueda batir su propia marca?

Solución:

a) $f'(t) = -600\,t + 900$

$f'(t) = 0 \Rightarrow t = 3/2$

Máximo relativo: A(3/2, 675)

Mínimo relativo: no tiene.

Creciente (↗): (0, 3/2)

Decreciente (↘): (3/2, 3)

Es nula en: $f(t) = 0 \Rightarrow t = 0$ y $t = 3$

b) Cuando se alcanza el máximo de concentración en $t = 3/2$

66. Sea la función $f(x) = x^2 - 4x + 2$

a) Determina los extremos relativos de la función.

b) Halla las ecuaciones de las rectas tangentes a la gráfica de f(x) que pasan por el punto (3, –5)

Solución:

a) $f'(x) = 2x - 4$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 2$

Máximo relativo: no tiene.

Mínimo relativo: A(2, –2)

b) Una recta que pasa por el punto (3, –5) es:

$y + 5 = m(x - 3) \Rightarrow y = mx - 3m - 5$

Para que la recta sea tangente a la parábola, ésta y la recta solo deben tener un punto en común, es decir, el sistema formado por la ecuación de la función y la recta debe tener solución única.

Se observa que el punto (3, –5) no está en la parábola.

$$\left.\begin{array}{l} y = x^2 - 4x + 2 \\ y = mx - 3m - 5 \end{array}\right\}$$

$x^2 - (4 + m)x + 3m + 7 = 0$

Para que tenga una solución, el discriminante debe ser cero:

$(4 + m)^2 - 4(3m + 7) = 0$

$m^2 - 4m - 12 = 0$

$m = -2, m = 6$

Las rectas tangentes son:

$y = -2x + 1$

$y = 6x - 23$

Paso a paso

67. Dada la función:

$$y = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$$

a) dibuja la función.
b) calcula los máximos y los mínimos relativos.
c) determina la monotonía.
d) calcula los puntos de inflexión.
e) halla la curvatura.

Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

68. Calcula el valor de los coeficientes **a, b** y **c** para que la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ corte al eje X en el punto A(1, 0) y tenga un punto de inflexión en el punto B(3, 2)

Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

Plantea el siguiente problema y resuélvelo con ayuda de Wiris y Derive.

69. Se desea fabricar una caja abierta con base cuadrada y con un área de 300 dm^2. ¿Qué dimensiones debe tener la caja para que el volumen sea máximo?

Solución:
Resuelto en el libro del alumnado.

70. **Internet.** Abre: **www.editorial-bruno.es** y elige **Matemáticas, curso** y **tema.**

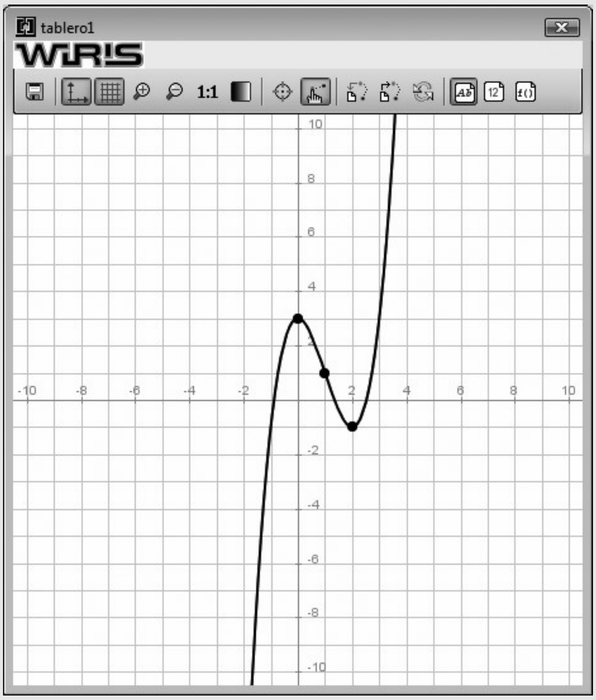
Practica

Dadas las siguientes funciones:
a) dibuja la función.
b) calcula los máximos y los mínimos relativos.
c) determina la monotonía.
d) calcula los puntos de inflexión.
e) halla la curvatura.

71. $y = x^3 - 3x^2 + 3$

Solución:

```
Ejercicio 71
f(x) = x³ − 3x² + 3  ➔  x↦x³−3·x²+3
dibujar(f(x), {color = negro, anchura_línea = 2})
a) Máximos y mínimos relativos :
f'(x)  ➔  3·x²−6·x
resolver(f'(x) = 0)  ➔  {{x=0}, {x=2}}
A = punto(0, f(0))  ➔  (0,3)
B = punto(2, f(2))  ➔  (2,−1)
f''(x)  ➔  6·x−6
f''(0)  ➔  −6
A(0, 3) Máximo relativo.
dibujar(A, {color = negro, tamaño_punto = 8})
f''(2)  ➔  6
B(2,  −1)  mínimo relativo.
dibujar(B, {color = negro, tamaño_punto = 8})
b) Monotonía :
Creciente = (−∞, 0) ∪ (2, +∞)
Decreciente = (0, 2)
c) Puntos de inflexión :
resolver(f''(x) = 0)  ➔  {{x=1}}
C = punto(1, f(1))  ➔  (1,1)
f'''(x)  ➔  6
f'''(1)  ➔  6
C(2, 3) Punto de inflexión.
dibujar(C, {color = negro, tamaño_punto = 8})
d) Curvatura :
Convexa(∪) = (1, +∞)
Cóncava(∩) = (−∞, 1)
```



72. $y = \dfrac{x}{x^2 - 1}$

Solución:

Ejercicio 72

$f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1} \;\rightarrow\; x \mapsto \dfrac{x}{x^2-1}$

dibujar(f(x), {color = negro, anchura_línea = 2})

a) Máximos y mínimos relativos :

$f'(x) \;\rightarrow\; \dfrac{-x^2-1}{x^4-2\cdot x^2+1}$

resolver(f'(x) = 0) $\rightarrow$ {□}

No tiene máximos, ni mínimos relativos.

b) Monotonía :

Discontinuidades : $x = -1,\ x = 1$

Creciente = Nunca.

Decreciente = $\mathbb{R} - \{-1, 1\} = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$

c) Puntos de inflexión :

$f''(x) \;\rightarrow\; \dfrac{2\cdot x^3+6\cdot x}{x^6-3\cdot x^4+3\cdot x^2-1}$

resolver(f''(x) = 0) $\rightarrow$ {{x=0}}

A = punto(0, f(0)) $\rightarrow$ (0,0)

$f'''(x) \;\rightarrow\; \dfrac{-6\cdot x^4-36\cdot x^2-6}{x^8-4\cdot x^6+6\cdot x^4-4\cdot x^2+1}$

$f'''(0) \;\rightarrow\; -6$

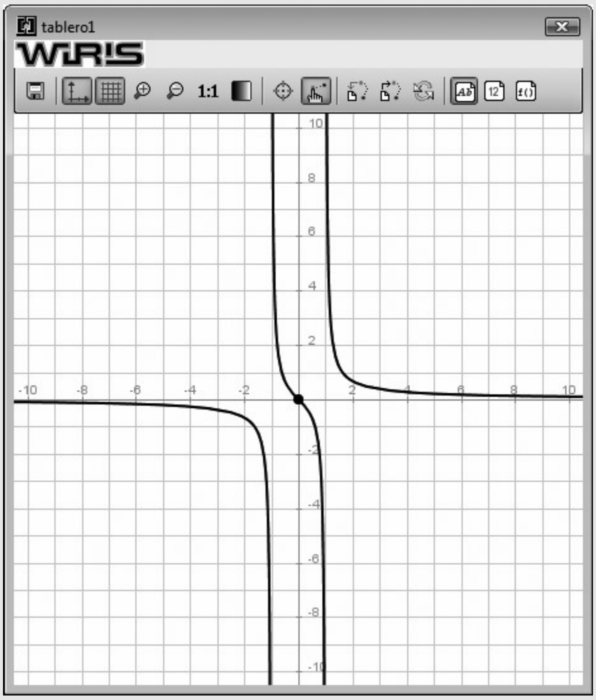
A(0, 0) Punto de inflexión.

dibujar(A, {color = negro, tamaño_punto = 8})

d) Curvatura :

Convexa(∪) = $(-1, 0) \cup (1 +\infty)$

Cóncava(∩) = $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$



73. Halla los puntos singulares de la función:

$$f(x) = x^5 + 2$$

Solución:

Ejercicio 73

$f(x) = x^5 + 2 \;\rightarrow\; x \mapsto x^5+2$

dibujar(f(x), {color = negro, anchura_línea = 2})

$f'(x) \;\rightarrow\; 5\cdot x^4$

resolver(f'(x) = 0) $\rightarrow$ {{x=0}}

A = punto(0, f(0)) $\rightarrow$ (0,2)

$f''(x) \;\rightarrow\; 20\cdot x^3$

$f''(0) \;\rightarrow\; 0$

$f'''(x) \;\rightarrow\; 60\cdot x^2$

$f'''(0) \;\rightarrow\; 0$

$f''''(x) \;\rightarrow\; 120\cdot x$

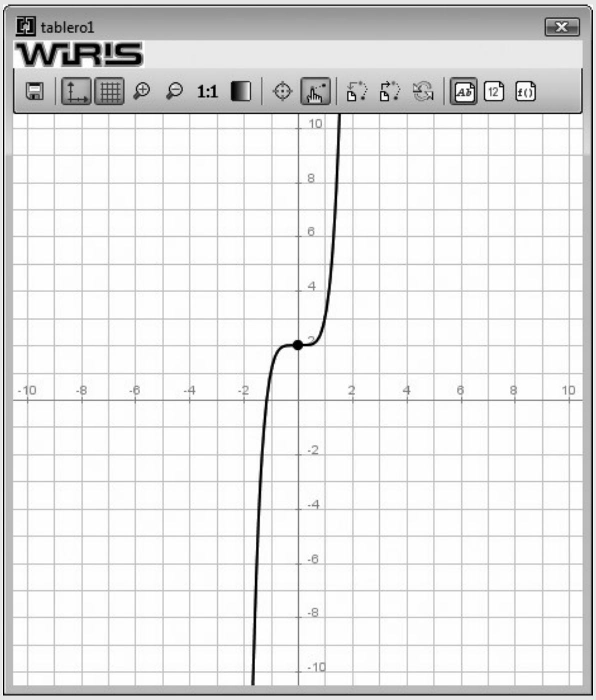
$f''''(0) \;\rightarrow\; 0$

$f'''''(x) \;\rightarrow\; 120$

$f'''''(0) \;\rightarrow\; 120$

A(0, 0) Punto de inflexión

dibujar(A, {color = negro, tamaño_punto = 8})



74. Para la función f: ℝ → ℝ definida de la forma

$$f(x) = 8x^3 - 84x^2 + 240x$$

determina su monotonía y sus extremos relativos.

Solución:

Problema 74

$f(x) = 8x^3 - 84x^2 + 240x \rightarrow x \mapsto 8\cdot x^3 - 84\cdot x^2 + 240\cdot x$

tablero({centro = punto(3, 150), anchura = 10, altura = 400})

dibujar(f(x), {color = negro, anchura_línea = 2})

a) Máximos y mínimos realtivos

resolver(f'(x) =0) → {{x=2}, {x=5}}

f(2) → 208

A = punto(2, 208) → (2,208)

f''(x) → 48 · x − 168

f''(2) → −72

· Máximo relativo A(2, 208)

f(5) → 100

B = punto(5, 100) → (5,100)

f''(5) → 72

· Mínimo relativo B(5, 100)

b) Monotonía

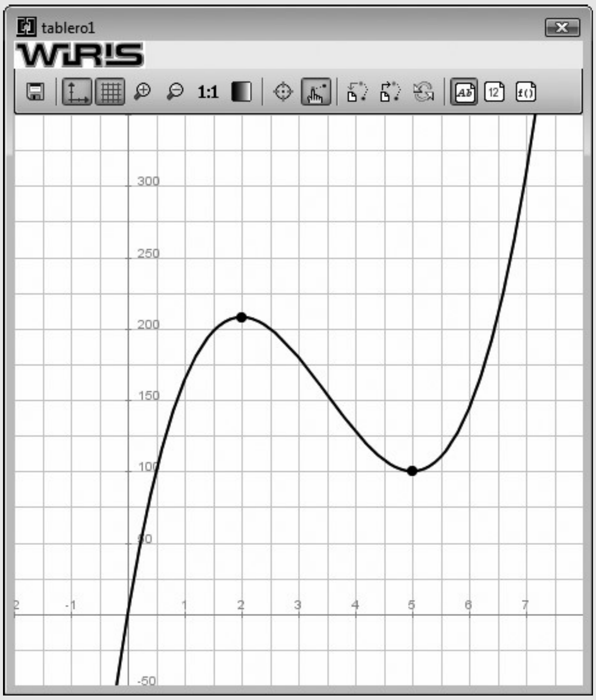
f'(0) → 240

Creciente : (−∞, 2) ∪ (5, +∞)

Decreciente : (2, 5)

dibujar(A, {color = negro, tamaño_punto = 8})

dibujar(B, {color = negro, tamaño_punto = 8})



75. Dada la función:

$$f(x) = \frac{x}{6} - 8x^2 + \frac{1}{x}$$

calcula los intervalos de concavidad y convexidad y los puntos de inflexión de dicha función.

Solución:

Ejercicio 75

$f(x) = \frac{x}{6} - 8x^2 + \frac{1}{x} \rightarrow x \mapsto \frac{48\cdot x^3 - x^2 - 6}{-6\cdot x}$

dibujar(f(x), {color = negro, anchura_línea = 2})

a) Puntos de inflexión

resolver(f''(x) =0) → $\left\{\left[x=\frac{1}{2}\right]\right\}$

f(1/2) → $\frac{1}{12}$

A = punto$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{12}\right)$ → $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{12}\right)$

f'''(1/2) → −96

Punto de inflexión A$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{12}\right)$

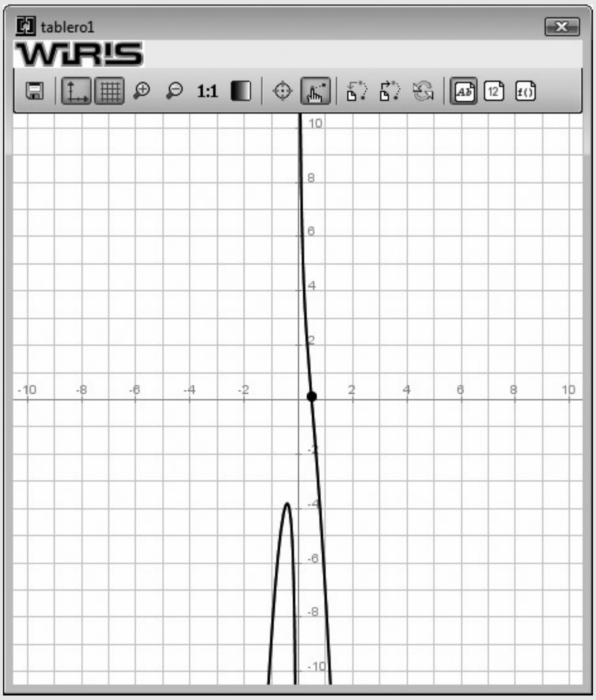
dibujar(A, {color = negro, tamaño_punto = 8})

Curvatura

f''(1) → −14

Convexa (∪) : $\left(0, \frac{1}{2}\right)$

Cóncava (∩) : (−∞, 0) ∪ $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$



76. Se ha determinado que el coste total (en euros) que le supone a cierta empresa la producción de n unidades de determinado artículo varía según la función:

$$c(n) = 2n^3 + 270n + 2\,048$$

Calcula el número de unidades que debe producirse para hacer mínimo el coste por unidad.

Solución:

Problema 76

$c(n) = 2n^3 + 270n + 2048 \Rightarrow n \mapsto 2 \cdot n^3 + 270 \cdot n + 2048$

$f(n) = \dfrac{c(n)}{n} \Rightarrow n \mapsto \dfrac{2 \cdot n^3 + 270 \cdot n + 2048}{n}$

resolver(f'(n) = 0) $\Rightarrow$ {{n=8}}

f''(8) $\Rightarrow$ 12

Debe producir 8 unidades

77. Calcula los puntos de inflexión de la función:

$$f(x) = \frac{2x - 2}{x + 1}$$

y los intervalos de concavidad y convexidad.

Solución:

Ejercicio 77

$f(x) = \dfrac{2x - 2}{x + 1} \Rightarrow x \mapsto \dfrac{2 \cdot x - 2}{x + 1}$

dibujar(f(x), {color = negro, anchura_línea = 2})

$2x - 2 \; \lfloor x + 1 \Rightarrow 2 \cdot x - 2 \; \lfloor x + 1$

$\quad -4 \quad 2$

dibujar(x = −1, {color = negro, anchura_línea = 2})

dibujar(y = 2, {color = negro, anchura_línea = 2})

a) Puntos de inflexión:

resolver(f''(x) = 0) $\Rightarrow$ {□}

No tiene puntos de inflexión.

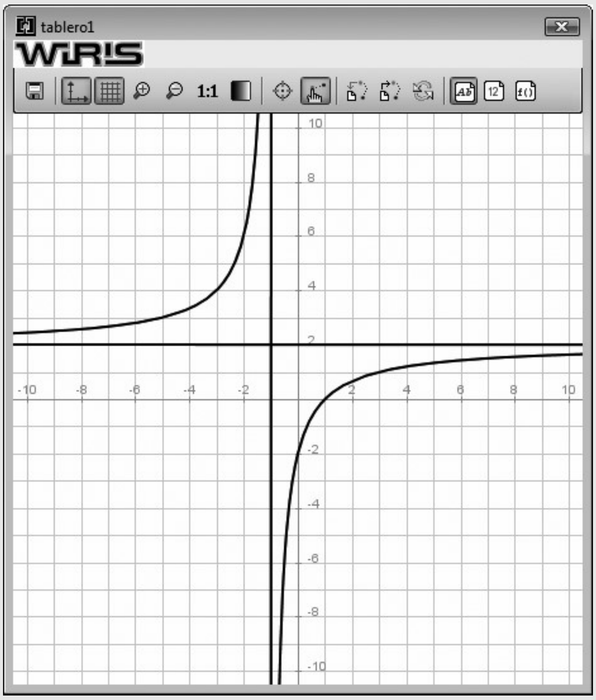
b) Curvatura:

factorizar(f''(x)) $\Rightarrow (-1)^{-1} \cdot 8 \cdot (x+1)^{-3}$

f''(0) $\Rightarrow$ −8

Convexa(∪) = (−∞, −1)

Cóncava(∩) = (−1, +∞)



78. Halla el máximo y el mínimo absolutos de la función:

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$$

en el intervalo [1, 2]

Solución:

Problema 78

$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 1 \Rightarrow x \mapsto x^3 - 6 \cdot x^2 + 9 \cdot x - 1$

dibujar(f(x)) $\Rightarrow$ tablero1

dibujar(f(x),0..2, {color = negro, anchura_línea = 2})

A = punto(0, f(0)) $\Rightarrow$ (0, −1)

dibujar(A, {color = negro, tamaño_punto = 8})

B = punto(2, f(2)) $\Rightarrow$ (2,1)

dibujar(B, {color = negro, tamaño_punto = 8})

Aplicación del teomera de Weiertrass

$f'(x) \Rightarrow 3 \cdot x^2 - 12 \cdot x + 9$

resolver(f'(x) = 0) $\Rightarrow$ {{x=1}, {x=3}}

C = punto(1, f(1)) $\Rightarrow$ (1,3)

$f''(x) \Rightarrow 6 \cdot x - 12$

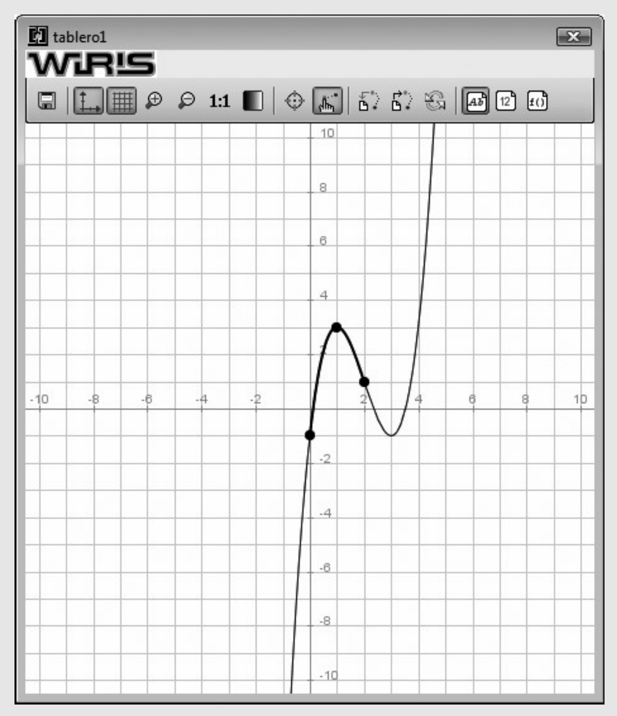
f''(1) $\Rightarrow$ −6

C(1, 3) Máximo relativo de f(x) en [0, 2]

dibujar(C, {color = negro, tamaño_punto = 8})

El máximo absoluto es C(1, 3)

El mínimo relativo es A(0, −1)



79. Obtén los parámetros **r, s** y **t** para que la función

$$f(x) = x^3 + rx^2 - sx + t$$

tenga un máximo en $x = -2$, un mínimo en $x = 0$ y pase por el punto $(1, -1)$

Solución:

Problema 79

$f(x) = x^3 + r \cdot x^2 - s \cdot x + t \Rightarrow x \mapsto r \cdot x^2 - s \cdot x + t + x^3$

$\text{resolver}\left\{\begin{matrix} f'(-2) = 0 \\ f'(0) = 0 \\ f(1) = -1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \{\{r=3, s=0, t=-5\}\}$

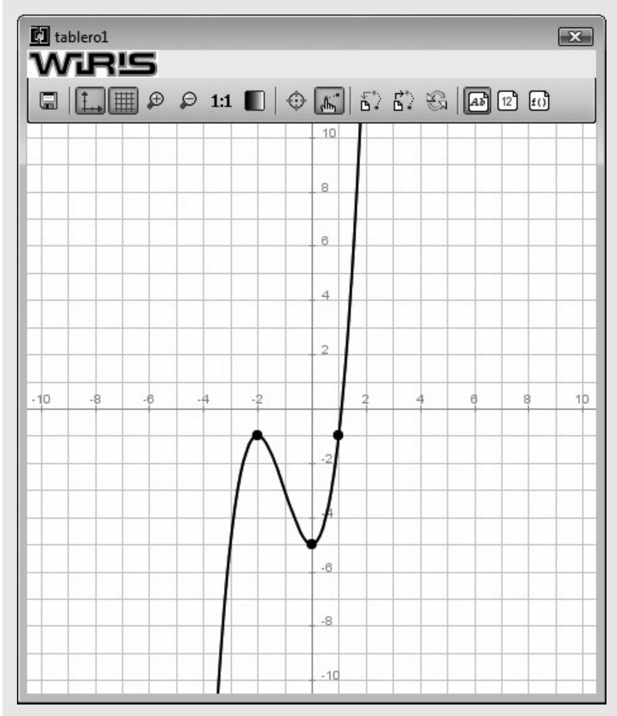
$f(x) = x^3 + 3x^2 - 5 \Rightarrow x \mapsto x^3 + 3 \cdot x^2 - 5$

dibujar(f(x), {color = negro, anchura_línea = 2})

dibujar(punto(−2, f(−2)), {color = negro, tamaño_punto = 8})

dibujar(punto(0, f(0)), {color = negro, tamaño_punto = 8})

dibujar(punto(1, f(1)), {color = negro, tamaño_punto = 8})



80. La gráfica de la función

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + c$$

pasa por el punto $(0, 0)$ y tiene un máximo local en el punto $(1, 2)$. Obtén los valores de los coeficientes **a, b** y **c**

Solución:

Problema 80

$f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \Rightarrow x \mapsto a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c$

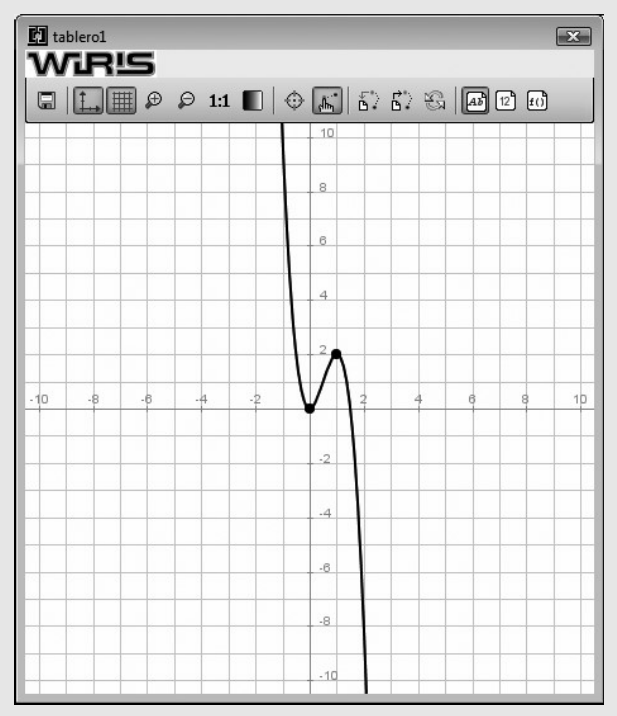
$\text{resolver}\left\{\begin{matrix} f(0) = 0 \\ f(1) = 2 \\ f'(1) = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \{\{a=-4, b=6, c=0\}\}$

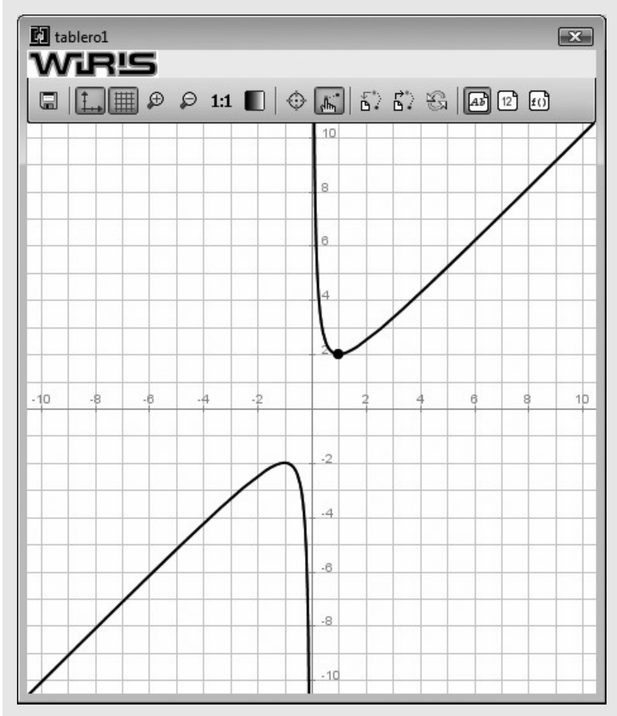
$f(x) = -4x^3 + 6x^2 \Rightarrow x \mapsto -4 \cdot x^3 + 6 \cdot x^2$

dibujar(f(x), {color = negro, anchura_línea = 2})

dibujar(punto(0, f(0)), {color = negro, tamaño_punto = 8})

dibujar(punto(1, f(1)), {color = negro, tamaño_punto = 8})





81. Halla los valores de **a** y **b** para que la función

$$f(x) = ax + \frac{b}{x}$$

tenga un extremo relativo en el punto (1, 2)

Solución:

Problema 81

$f(x) = a \cdot x + \frac{b}{x} \rightarrow x \mapsto \frac{a \cdot x^2 + b}{x}$

$\text{resolver}\left\{\begin{matrix} f(1) = 2 \\ f'(1) = 0 \end{matrix}\right\} \rightarrow \{\{a=1, b=1\}\}$

$f(x) = x + \frac{1}{x} \rightarrow x \mapsto \frac{x^2+1}{x}$

dibujar(f(x), {color = negro, anchura_línea = 2})

dibujar(punto(1, f(1)), {color = negro, tamaño_punto = 8})

82. Encuentra el valor de **b** $\in \mathbb{R}$ para que la función

$$f(x) = x^2 + \frac{b}{x}$$

tenga un mínimo cuando x = 1

Solución:

Problema 82

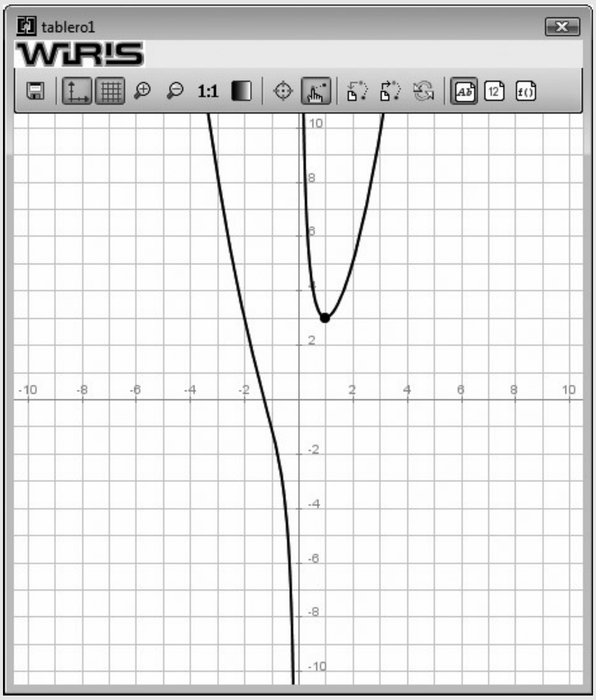
$f(x) = x^2 + \frac{b}{x} \rightarrow x \mapsto \frac{b + x^3}{x}$

$\text{resolver}(f'(1) = 0) \rightarrow \{\{b=2\}\}$

$f(x) = x^2 + \frac{2}{x} \rightarrow x \mapsto \frac{x^3+2}{x}$

dibujar(f(x), {color = negro, anchura_línea = 2})

dibujar(punto(1, f(1)), {color = negro, tamaño_punto = 8})



83. Calcula las dimensiones de un rectángulo cuyo perímetro mida 64 m y su área sea máxima.

Solución:

Problema 83
Planteamiento : $A(x, y) = xy$
Condiciones : $P(x, y) = 2x + 2y$
resolver({$2x + 2y = 64$}, {y}) $\Rightarrow$ {{$y=-x+32$}}
$A(x) = x \cdot (-x+32) \Rightarrow x \mapsto -x^2+32 \cdot x$
resolver($A'(x) = 0$) $\Rightarrow$ {{$x=16$}}
$f(x) = -x+32 \Rightarrow x \mapsto -x+32$
$f(16) \Rightarrow 16$
Dimensiones del rectángulo : largo = ancho = 16 cm

84. Se desea fabricar un acuario con base cuadrada y sin tapa, de capacidad 500 dm^3. La base y las paredes del acuario han de estar realizadas en cristal. ¿Cuáles deben ser sus medidas para minimizar la superficie total del cristal empleado?

Solución:

Problema 84
Planteamiento : $A(x, h) = x^2 + 4xh$
Condiciones : $x^2h = 500$
resolver({$x^2 \cdot h = 500$}, {h}) $\Rightarrow \left\{\left\{h=\dfrac{500}{x^2}\right\}\right\}$
$A(x) = x^2 + 4x \cdot \dfrac{500}{x^2} \Rightarrow x \mapsto \dfrac{x^3+2000}{x}$
resolver($A'(x) = 0$) $\Rightarrow$ {{$x=10$}}
$h(x) = \dfrac{500}{x^2} \Rightarrow x \mapsto \dfrac{500}{x^2}$
$h(10) \Rightarrow 5$
Dimensiones de la caja : arista de la base 10 dm y altura 5 dm

85. Descompón el número 25 en dos sumandos tales que el doble del cuadrado del primero más el triple del cuadrado del segundo sea mínimo.

Solución:

Problema 85
Planteamiento : $f(x) = 2x^2 + 3y^2$
Condiciones : $x + y = 25$
resolver({$x + y = 25$}, {y}) $\Rightarrow$ {{$y=-x+25$}}
$f(x) = 2x^2 + 3(25 - x)^2 \Rightarrow x \mapsto 5 \cdot x^2 - 150 \cdot x + 1875$
resolver($f'(x) = 0$) $\Rightarrow$ {{$x=15$}}
$f''(15) \Rightarrow 10$
Los números son 15 y 10