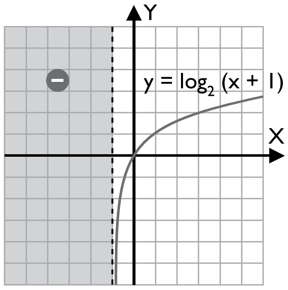
9 Análisis de funciones y representación de curvas

1. Análisis gráfico de una función

Aplica la teoría

1. Dada la siguiente gráfica, analiza todas sus características, es decir, completa el formulario de los 10 apartados.



Solución:

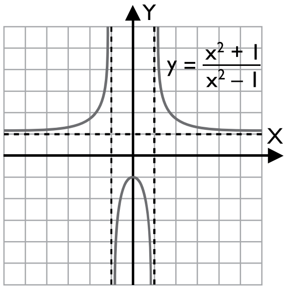
1. Tipo de función: logarítmica.
2. Dominio: Dom(f) = (– 1, + ∞)
3. Continuidad: es continua en todo el dominio.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: no es simétrica respecto del eje Y, ni respecto del origen O(0, 0)
6. Asíntotas:
   - Verticales: x = – 1
   - Horizontales: no tiene.
   - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
   - Eje X: O(0, 0)
   - Eje Y: O(0, 0)

   Signo:
   - Positiva (+): (0, + ∞)
   - Negativa (–): (– 1, 0)
8. Máximos y mínimos relativos:
   - Máximo relativo: no tiene.
   - Mínimo relativo: no tiene.

   Monotonía:
   - Creciente (↗): (– 1, + ∞)
   - Decreciente (↘): ∅
9. Puntos de inflexión: no tiene.

   Curvatura:
   - Convexa (∪): ∅
   - Cóncava (∩): (– 1, + ∞)
10. Recorrido o imagen:
    Im(f) = ℝ = (–∞, + ∞)

2. Dada la siguiente gráfica, analiza todas sus características, es decir, completa el formulario de los 10 apartados.



Solución:

1. Tipo de función: racional.
2. Dominio: Dom(f) = ℝ = (–∞, – 1) ∪ (– 1, 1) ∪ (1, + ∞)
3. Continuidad: es continua en todo el dominio.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: es simétrica respecto del eje Y
6. Asíntotas:
   - Verticales: x = – 1, x = 1
   - Horizontales: y = 1
   - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
   - Eje X: no lo corta.
   - Eje Y: A(0, – 1)

   Signo:
   - Positiva (+): (–∞, – 1) ∪ (1, + ∞)
   - Negativa (–): (– 1, 1)
8. Máximos y mínimos relativos:
   - Máximo relativo: A(0, – 1)
   - Mínimo relativo: no tiene.

   Monotonía:
   - Creciente (↗): (–∞, – 1) ∪ (– 1, 0)
   - Decreciente (↘): (0, 1) ∪ (1, + ∞)
9. Puntos de inflexión: no tiene.

   Curvatura:
   - Convexa (∪): (–∞, – 1) ∪ (1, + ∞)
   - Cóncava (∩): (– 1, 1)
10. Recorrido o imagen:
    Im(f) = (–∞, – 1] ∪ (1, + ∞)

2. Análisis de funciones polinómicas

Piensa y calcula

Halla los puntos de corte con el eje X de la función $y = 2x^2 - \dfrac{x^4}{4}$ y estudia su multiplicidad.

Solución:

$$2x^2 - \frac{x^4}{4} = 0 \Rightarrow 8x^2 - x^4 = 0 \Rightarrow (8 - x^2)x^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ doble.} \\ x = 2\sqrt{2} \text{ simple.} \\ x = -2\sqrt{2} \text{ simple.} \end{cases}$$

Aplica la teoría

Analiza y representa las siguientes funciones completando el formulario de los 10 apartados.

3. $y = x^3 - 4x$

Solución:

$y' = 3x^2 - 4$

$y'' = 6x$

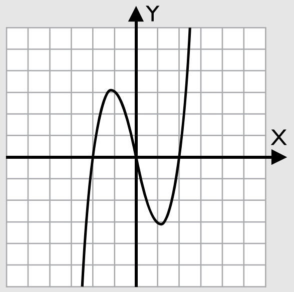
$y''' = 6$

1. Tipo de función: polinómica.
2. Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en todo el dominio.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: es simétrica respecto del origen $O(0, 0)$
6. Asíntotas:
   - Verticales: no tiene.
   - Horizontales: no tiene.
   - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
   - Eje X: $A(-2, 0), O(0, 0), B(2, 0)$
   - Eje Y: $O(0, 0)$

   Signo:
   - Positiva (+): $(-2, 0) \cup (2, +\infty)$
   - Negativa (–): $(-\infty, -2) \cup (0, 2)$
8. Máximos y mínimos relativos:
   - Máximo relativo: $A(-2\sqrt{3}/3, 16\sqrt{3}/9)$
   - Mínimo relativo: $B(2\sqrt{3}/3, -16\sqrt{3}/9)$

   Monotonía:
   - Creciente (↗): $(-\infty, -2\sqrt{3}/3) \cup (2\sqrt{3}/3, +\infty)$
   - Decreciente (↘): $(-2\sqrt{3}/3, 2\sqrt{3}/3)$
9. Punto de inflexión: $O(0, 0)$

   Curvatura:
   - Convexa (∪): $(0, +\infty)$
   - Cóncava (∩): $(-\infty, 0)$



10. Recorrido o imagen:

    $\text{Im}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

4. $y = 3x - x^3$

Solución:

$y' = 3 - 3x^2$

$y'' = -6x$

$y''' = -6$

1. Tipo de función: polinómica.
2. Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en todo el dominio.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: es simétrica respecto del origen $O(0, 0)$
6. Asíntotas:
   - Verticales: no tiene.
   - Horizontales: no tiene.
   - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
   - Eje X: $A(-\sqrt{3}, 0), O(0, 0), B(\sqrt{3}, 0)$
   - Eje Y: $O(0, 0)$

   Signo:
   - Positiva (+): $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (0, \sqrt{3})$
   - Negativa (–): $(-\sqrt{3}, 0) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$
8. Máximos y mínimos relativos:
   - Máximo relativo: $A(1, 2)$
   - Mínimo relativo: $B(-1, -2)$

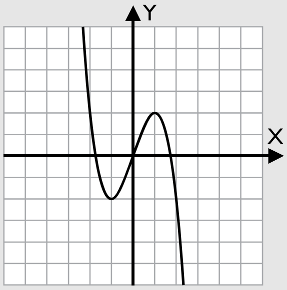
Monotonía:

- Creciente (↗): $(-1, 1)$
- Decreciente (↘): $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

9. Punto de inflexión: $O(0, 0)$

Curvatura:

- Convexa (∪): $(-\infty, 0)$
- Cóncava (∩): $(0, +\infty)$



10. Recorrido o imagen:
$\text{Im}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

5. $y = x^3$

Solución:

$y' = 3x^2$

$y'' = 6x$

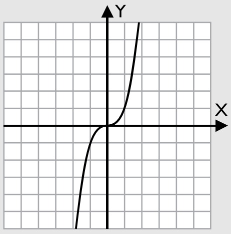
$y''' = 6$

1. Tipo de función: polinómica.
2. Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en todo el dominio.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: es simétrica respecto del origen $O(0, 0)$
6. Asíntotas:
   - Verticales: no tiene.
   - Horizontales: no tiene.
   - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
   - Eje X: $O(0, 0)$
   - Eje Y: $O(0, 0)$

   Signo:
   - Positiva (+): $(0, +\infty)$
   - Negativa (–): $(-\infty, 0)$
8. Máximos y mínimos relativos:
   - Máximo relativo: no tiene.
   - Mínimo relativo: no tiene.

   Monotonía:
   - Creciente (↗): $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
   - Decreciente (↘): $\varnothing$
9. Punto de inflexión: $O(0, 0)$

   Curvatura:
   - Convexa (∪): $(0, +\infty)$
   - Cóncava (∩): $(-\infty, 0)$



10. Recorrido o imagen:
$\text{Im}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

6. $y = 4x^2 - x^4$

Solución:

$y' = 8x - 4x^3$

$y'' = 8 - 12x^2$

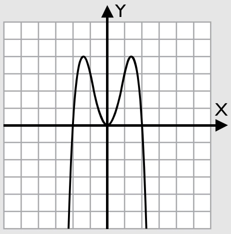
$y''' = -24x$

1. Tipo de función: polinómica.
2. Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en todo el dominio.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: es simétrica respecto del eje Y
6. Asíntotas:
   - Verticales: no tiene.
   - Horizontales: no tiene.
   - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
   - Eje X: $A(-2, 0), O(0, 0), B(2, 0)$
   - Eje Y: $O(0, 0)$

   Signo:
   - Positiva (+): $(-2, 0) \cup (0, 2)$
   - Negativa (–): $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$
8. Máximos y mínimos relativos:
   - Máximo relativo: $C(-\sqrt{2}, 4), D(\sqrt{2}, 4)$
   - Mínimo relativo: $O(0, 0)$

   Monotonía:
   - Creciente (↗): $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (0, \sqrt{2})$
   - Decreciente (↘): $(-\sqrt{2}, 0) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$
9. Puntos de inflexión: $E(-\sqrt{6}/3, 20/9), F(\sqrt{6}/3, 20/9)$

   Curvatura:
   - Convexa (∪): $(-\sqrt{6}/3, \sqrt{6}/3)$
   - Cóncava (∩): $(-\infty, -\sqrt{6}) \cup (\sqrt{6}, +\infty)$



10. Recorrido o imagen:
$\text{Im}(f) = (-\infty, 4]$

7. $y = x^4 - 2x^3$

Solución:

$y' = 4x^3 - 6x^2$

$y'' = 12x^2 - 12x$

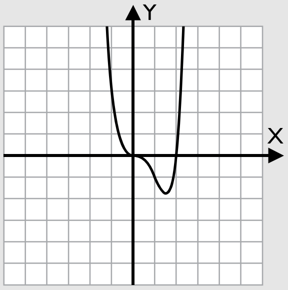
$y''' = 24x - 12$

1. Tipo de función: polinómica.
2. Dominio: Dom(f) = $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en todo el dominio.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: no es simétrica ni respecto del eje Y, ni respecto del origen O(0, 0)
6. Asíntotas:
   - Verticales: no tiene.
   - Horizontales: no tiene.
   - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
   - Eje X: O(0, 0), A(2, 0)
   - Eje Y: O(0, 0)

   Signo:
   - Positiva (+): $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$
   - Negativa (–): (0, 2)
8. Máximos y mínimos relativos:
   - Máximo relativo: no tiene.
   - Mínimo relativo: B(3/2, –27/16)

   Monotonía:
   - Creciente (↗): $(3/2, +\infty)$
   - Decreciente (↘): $(-\infty, 3/2)$
9. Puntos de inflexión: C(0, 0), D(1, –1)

   Curvatura:
   - Convexa (∪): $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$
   - Cóncava (∩): (0, 1)



10. Recorrido o imagen:

    Im(f) = $[-27/16, +\infty)$

8. $y = \dfrac{x^3}{3} - 4x$

Solución:

$y' = x^2 - 4$

$y'' = 2x$

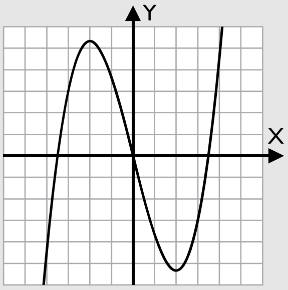
$y''' = 2$

1. Tipo de función: polinómica.
2. Dominio: Dom(f) = $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en todo el dominio.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: es simétrica respecto del origen O(0, 0)
6. Asíntotas:
   - Verticales: no tiene.
   - Horizontales: no tiene.
   - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
   - Eje X: A($-2\sqrt{3}$, 0), O(0, 0), B($2\sqrt{3}$, 0)
   - Eje Y: O(0, 0)

   Signo:
   - Positiva (+): $(-2\sqrt{3}, 0) \cup (2\sqrt{3}, +\infty)$
   - Negativa (–): $(-\infty, -2\sqrt{3}) \cup (0, 2\sqrt{3})$
8. Máximos y mínimos relativos:
   - Máximo relativo: A(–2, 16/3)
   - Mínimo relativo: B(2, –16/3)

   Monotonía:
   - Creciente (↗): $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$
   - Decreciente (↘): (–2, 2)
9. Punto de inflexión: O(0, 0)

   Curvatura:
   - Convexa (∪): $(0, +\infty)$
   - Cóncava (∩): $(-\infty, 0)$



10. Recorrido o imagen:

    Im(f) = $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

3. Análisis de funciones racionales

Piensa y calcula

Halla mentalmente las raíces del denominador de la función $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$

Solución:

$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = -1, x = 1$

Aplica la teoría

9. $y = \dfrac{x^2 + 1}{x}$

Solución:

$y' = \dfrac{x^2 - 1}{x^2}$

$y'' = \dfrac{2}{x^3}$

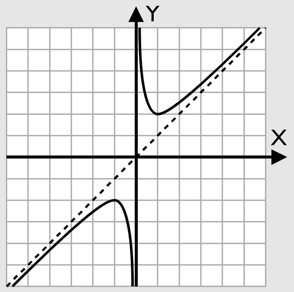
$y''' = -\dfrac{6}{x^4}$

1. Tipo de función: racional.
2. Dominio: Dom(f) = $\mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
3. Continuidad: es discontinua en $x = 0$, donde tiene una discontinuidad de 1ª especie de salto infinito.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: es simétrica respecto del origen O(0, 0)
6. Asíntotas:
   - Verticales: $x = 0$
   - Horizontales: no tiene.
   - Oblicuas: $y = x$
7. Corte con los ejes:
   - Eje X: no lo corta.
   - Eje Y: no lo corta.

   Signo:
   - Positiva (+): $(0, +\infty)$
   - Negativa (–): $(-\infty, 0)$
8. Máximos y mínimos relativos:
   - Máximo relativo: A(–1, –2)
   - Mínimo relativo: B(1, 2)

   Monotonía:
   - Creciente (↗): $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
   - Decreciente (↘): $(-1, 0) \cup (0, 1)$
9. Puntos de inflexión: no tiene.

   Curvatura:
   - Convexa (∪): $(0, +\infty)$
   - Cóncava (∩): $(-\infty, 0)$



10. Recorrido o imagen:

    Im(f) = $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$

10. $y = \dfrac{x^2 - 1}{x}$

Solución:

$y' = \dfrac{x^2 + 1}{x^2}$

$y'' = -\dfrac{2}{x^3}$

$y''' = \dfrac{6}{x^4}$

1. Tipo de función: racional.
2. Dominio: Dom(f) = $\mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
3. Continuidad: es discontinua en $x = 0$, donde tiene una discontinuidad de 1ª especie de salto infinito.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: es simétrica respecto del origen O(0, 0)
6. Asíntotas:
   - Verticales: $x = 0$
   - Horizontales: no tiene.
   - Oblicuas: $y = x$
7. Corte con los ejes:
   - Eje X: A(–1, 0), B(1, 0)
   - Eje Y: no lo corta.

   Signo:
   - Positiva (+): $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$
   - Negativa (–): $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$
8. Máximos y mínimos relativos:
   - Máximo relativo: no tiene.
   - Mínimo relativo: no tiene.

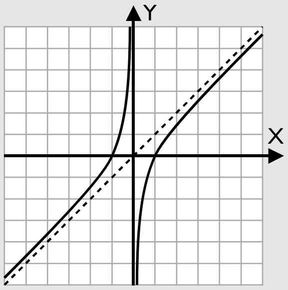
Monotonía:

- Creciente (↗): $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
- Decreciente (↘): $\varnothing$

9. Puntos de inflexión: no tiene.

Curvatura:

- Convexa (∪): $(-\infty, 0)$
- Cóncava (∩): $(0, +\infty)$



10. Recorrido o imagen:

$\text{Im}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

11. $y = \dfrac{1}{x^2 - 1}$

Solución:

$$y' = -\frac{2x}{(x^2-1)^2}$$

$$y'' = \frac{6x^2+2}{(x^2-1)^3}$$

$$y''' = -\frac{24x^3+24x}{(x^2-1)^4}$$

1. Tipo de función: racional.
2. Dominio:

   $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-1, 1\} = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$
3. Continuidad: es discontinua en $x = -1$, $x = 1$, donde tiene una discontinuidad de 1ª especie de salto infinito.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: es simétrica respecto del eje Y
6. Asíntotas:
   - Verticales: $x = -1$, $x = 1$
   - Horizontales: $y = 0$
   - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
   - Eje X: no lo corta.
   - Eje Y: $A(0, -1)$

   Signo:
   - Positiva (+): $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
   - Negativa (–): $(-1, 1)$
8. Máximos y mínimos relativos:
   - Máximo relativo: $A(0, -1)$
   - Mínimo relativo: no tiene.

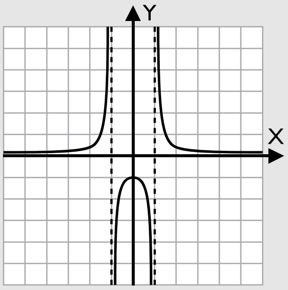
Monotonía:

- Creciente (↗): $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$
- Decreciente (↘): $(0, 1) \cup (1, +\infty)$

9. Puntos de inflexión: no tiene.

Curvatura:

- Convexa (∪): $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
- Cóncava (∩): $(-1, 1)$



10. Recorrido o imagen:

$\text{Im}(f) = (-\infty, -1] \cup (0, +\infty)$

12. $y = \dfrac{x-1}{x^2}$

Solución:

$$y' = -\frac{x-2}{x^3}$$

$$y'' = \frac{2x-6}{x^4}$$

$$y''' = -\frac{6x-24}{x^5}$$

1. Tipo de función: racional.
2. Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
3. Continuidad: es discontinua en $x = 0$, donde tiene una discontinuidad de 1ª especie de salto infinito.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: no es simétrica respecto del eje Y, ni respecto del origen $O(0, 0)$
6. Asíntotas:
   - Verticales: $x = 0$
   - Horizontales: $y = 0$
   - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
   - Eje X: $A(1, 0)$
   - Eje Y: no lo corta.

   Signo:
   - Positiva (+): $(1, +\infty)$
   - Negativa (–): $(-\infty, 0) \cup (0, 1)$
8. Máximos y mínimos relativos:
   - Máximo relativo: $A(2, 1/4)$
   - Mínimo relativo: no tiene.

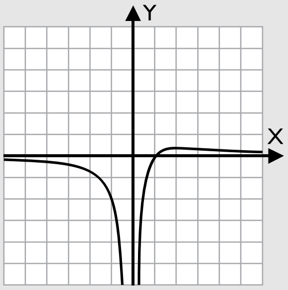
Monotonía:

- Creciente (↗): (0, 2)
- Decreciente (↘): (–∞, 0) ∪ (2, +∞)

9. Punto de inflexión: B(3, 2/9)

Curvatura:

- Convexa (∪): (3, +∞)
- Cóncava (∩): (–∞, 0) ∪ (0, 3)



10. Recorrido o imagen:

Im(f) = (–∞, 1/4]

13. $y = \dfrac{3x}{x^2 + 1}$

Solución:

$$y' = -\frac{3x^2 - 3}{(x^2 + 1)^2}$$

$$y'' = \frac{6x^3 - 18x}{(x^2 + 1)^3}$$

$$y''' = -\frac{18x^4 - 108x^2 + 18x}{(x^2 + 1)^4}$$

1. Tipo de función: racional.
2. Dominio: Dom(f) = ℝ = (–∞, +∞)
3. Continuidad: es continua en toda la recta real ℝ
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: es simétrica respecto del origen O(0, 0)
6. Asíntotas:
   - Verticales: no tiene.
   - Horizontales: y = 0
   - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
   - Eje X: O(0, 0)
   - Eje Y: O(0, 0)

   Signo:
   - Positiva (+): (0, +∞)
   - Negativa (–): (–∞, 0)
8. Máximos y mínimos relativos:
   - Máximo relativo: A(1, 3/2)
   - Mínimo relativo: B(–1, –3/2)

Monotonía:

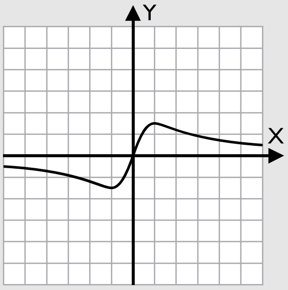
- Creciente (↗): (–1, 1)
- Decreciente (↘): (–∞, –1) ∪ (1, +∞)

9. Puntos de inflexión:

O(0, 0), C($-\sqrt{3}$, $-3\sqrt{3}/4$), D($\sqrt{3}$, $3\sqrt{3}/4$)

Curvatura:

- Convexa (∪): ($-\sqrt{3}$, 0) ∪ ($\sqrt{3}$, +∞)
- Cóncava (∩): (–∞, $-\sqrt{3}$) ∪ (0, $\sqrt{3}$)



10. Recorrido o imagen:

Im(f) = [–3/2, 3/2]

14. $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 - 4}$

Solución:

$$y' = -\frac{6x}{(x^2 - 4)^2}$$

$$y'' = \frac{18x^2 + 24}{(x^2 - 4)^3}$$

$$y''' = -\frac{72x^3 + 288x}{(x^2 - 4)^4}$$

1. Tipo de función: racional.
2. Dominio:

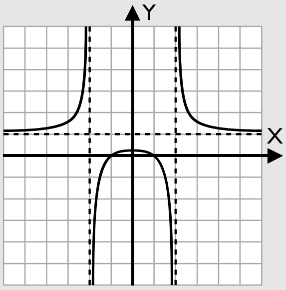
   Dom(f) = ℝ – {–2, 2} = (–∞, –2) ∪ (–2, 2) ∪ (2, +∞)
3. Continuidad: es discontinua en x = –2, x = 2, donde tiene una discontinuidad de 1ª especie de salto infinito.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: es simétrica respecto del eje Y
6. Asíntotas:
   - Verticales: x = –2, x = 2
   - Horizontales: y = 1
   - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
   - Eje X: A(–1, 0), B(1, 0)
   - Eje Y: C(0, 1/4)

   Signo:
   - Positiva (+): (–∞, –2) ∪ (–1, 1) ∪ (2, +∞)
   - Negativa (–): (–2, –1) ∪ (1, 2)

8. Máximos y mínimos relativos:
   - Máximo relativo: C(0, 1/4)
   - Mínimo relativo: no tiene.

   Monotonía:
   - Creciente (↗): (–∞, –2) ∪ (–2, 0)
   - Decreciente (↘): (0, 2) ∪ (2, +∞)
9. Puntos de inflexión: no tiene.

   Curvatura:
   - Convexa (∪): (–∞, –2) ∪ (2, +∞)
   - Cóncava (∩): (–2, 2)



10. Recorrido o imagen:

    Im(f) = (–∞, 1/4] ∪ (1, +∞)

Preguntas tipo test

Contesta en tu cuaderno:

1 Dada la función

$$f(x) = -x^3 - 2x^2 + 3x$$

halla el dominio de definición y los puntos de corte con los ejes.

☐ $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{1\}, A(3, 0), B(0, -3)$

☒ $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}, O(0, 0), A(1, 0), B(-3, 0)$

☐ $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{3\}, A(1, 0), B(0, -1)$

☐ $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0, 1\}, A(-3, 0)$

2 En la función del ejercicio 1, halla los valores de x para los cuales alcanza un máximo o un mínimo relativo.

☒ $x_1 = \dfrac{-2 + \sqrt{13}}{3}, x_2 = \dfrac{-2 - \sqrt{13}}{2}$

☐ $x_1 = -2, x_2 = 3$

☐ $x_1 = -2, x_2 = 3, x_3 = 5$

☐ $x = -1$

3 En la función del ejercicio 1, halla los puntos de inflexión.

☐ $C(1, 0)$

☐ $C(2, 3), D(-2, -3)$

☐ $C(3, 2), D(-3, -2)$

☒ $C(-2/3, -70/27)$

4 En la construcción de un túnel, el porcentaje de roca fragmentada o de mala calidad viene dado por el siguiente modelo matemático. R(x) representa dicho porcentaje cuando la distancia a la boca del túnel es x (en kilómetros). Si en algún tramo de la perforación el porcentaje supera el 40%, se deberán reforzar las medidas de sostenimiento y seguridad de la estructura.

$$R(x) = \frac{x^3}{3} - 4{,}5x^2 + 18x + 15; 0 \le x \le 7$$

Indica en qué tramos de la perforación el porcentaje crece y en cuáles decrece.

☒ $(\nearrow): (0, 3) \cup (6, 7); (\searrow): (3, 6)$

☐ $(\nearrow): (0, 2) \cup (5, 7); (\searrow): (2, 5)$

☐ $(\nearrow): (3, 6); (\searrow): (0, 3) \cup (6, 7)$

☐ $(\nearrow): (4, 6); (\searrow): (0, 4) \cup (6, 7)$

5 En la función del ejercicio 4, ¿será necesario reforzar las medidas mencionadas?

☐ Sí, en el intervalo [2, 4]

☐ Sí, en el intervalo [6, 7]

☐ Sí, en los intervalos [3, 4] y [6, 7]

☒ No, porque en [0, 7] nunca supera el 40%

6 Los beneficios (en millones de euros) generados por el funcionamiento de una industria vienen dados en función del tiempo (en años) por:

$$b(t) = \frac{2t}{1 + t^2}$$

¿Cuándo los beneficios son de un millón de euros?

☒ En el año 1

☐ En el año 5

☐ En el año 7

☐ En el año 23

7 En la función del ejercicio 6, ¿cuándo los beneficios son máximos?

☐ En el año 5

☐ En el año 23

☒ En el año 1

☐ En el año 7

8 Sea la función del ejercicio 6. ¿Qué ocurre cuando pasan muchos años?

☒ Los beneficios tienden a cero.

☐ Los beneficios tienden a 2 millones de euros.

☐ Los beneficios tienden a 7,2 millones de euros.

☐ Los beneficios tienden a 10 millones de euros.

9 Dada la función

$$f(x) = \frac{5}{x^2 - 4x + 5}$$

halla el dominio y las asíntotas.

☐ $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{2, 3\}$. Asíntota: $x = 0$

☐ $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$. Asíntota: $x = 1, x = 5$

☐ $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{3\}$. Asíntota: $y = 2$

☒ $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$. Asíntota: $y = 0$

10 En la función del ejercicio 9, halla los máximos y mínimos relativos.

☐ A(0,0) mínimo relativo.

☐ A(5, 7) máximo relativo.

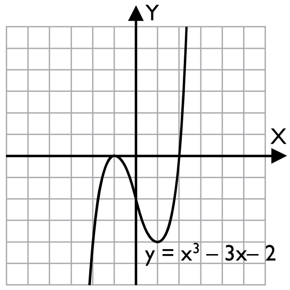
☒ A(2, 5) máximo relativo.

☐ A(1, 2) mínimo relativo.

Ejercicios y problemas

1. Análisis gráfico de una función

15. Dada la siguiente gráfica, analiza todas sus características, es decir, completa el formulario de los 10 apartados.



Solución:

1. Tipo de función: polinómica.
2. Dominio: Dom(f) = $\mathbb{R}$ = $(-\infty, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en todo el dominio.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: no es simétrica respecto del eje Y, ni respecto del origen O(0, 0)
6. Asíntotas:
   - Verticales: no tiene.
   - Horizontales: no tiene.
   - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
   - Eje X: A(– 1, 0), B(2, 0)
   - Eje Y: C(0, –2)

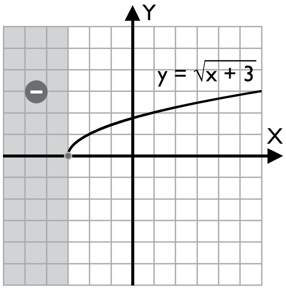
   Signo:
   - Positiva (+): $(2, +\infty)$
   - Negativa (–): $(-\infty, -1) \cup (-1, 2)$
8. Máximos y mínimos relativos:
   - Máximo relativo: A(– 1, 0)
   - Mínimo relativo: D(1, –4)

   Monotonía:
   - Creciente (↗): $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
   - Decreciente (↘): $(-1, 1)$
9. Punto de inflexión: C(0, –2)

   Curvatura:
   - Convexa (∪): $(0, +\infty)$
   - Cóncava (∩): $(-\infty, 0)$
10. Recorrido o imagen:

    Im(f) = $\mathbb{R}$ = $(-\infty, +\infty)$

16. Dada la siguiente gráfica, analiza todas sus características, es decir, completa el formulario de los 10 apartados.



Solución:

1. Tipo de función: irracional.
2. Dominio: Dom(f) = $[-3, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en todo el dominio; en x = –3 tiene una discontinuidad de 2ª especie.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: no es simétrica respecto del eje Y, ni respecto del origen O(0, 0)
6. Asíntotas:
   - Verticales: no tiene.
   - Horizontales: no tiene.
   - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
   - Eje X: A(–3, 0)
   - Eje Y: C(0, $\sqrt{3}$)

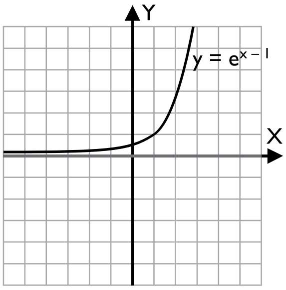
   Signo:
   - Positiva (+): $(-3, +\infty)$
   - Negativa (–): ∅
8. Máximos y mínimos relativos:
   - Máximo relativo: no tiene.
   - Mínimo relativo: no tiene.

   Monotonía:
   - Creciente (↗): $(-3, +\infty)$
   - Decreciente (↘): ∅
9. Puntos de inflexión: no tiene.

   Curvatura:
   - Convexa (∪): ∅
   - Cóncava (∩): $(-3, +\infty)$
10. Recorrido o imagen:

    Im(f) = $[0, +\infty)$

17. Dada la siguiente gráfica, analiza todas sus características, es decir, completa el formulario de los 10 apartados.



Solución:

1. Tipo de función: exponencial.
2. Dominio: Dom(f) = $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en todo el dominio.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: no es simétrica respecto del eje Y, ni respecto del origen O(0, 0)
6. Asíntotas:
   - Verticales: no tiene.
   - Horizontales: $y = 0$
   - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
   - Eje X: no lo corta.
   - Eje Y: A(e^{-1}, 0)

   Signo:
   - Positiva (+): $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
   - Negativa (–): O
8. Máximos y mínimos relativos:
   - Máximo relativo: no tiene.
   - Mínimo relativo: no tiene.

   Monotonía:
   - Creciente (↗): $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
   - Decreciente (↘): $\varnothing$
9. Puntos de inflexión: no tiene.

   Curvatura:
   - Convexa (∪): $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
   - Cóncava (∩): $\varnothing$
10. Recorrido o imagen:

    Im(f) = $(0, +\infty)$

2. Análisis de funciones polinómicas

Analiza y representa las siguientes funciones completando el formulario de los 10 apartados.

18. $y = 4x - x^3$

Solución:

$y' = 4 - 3x^2$

$y'' = -6x$

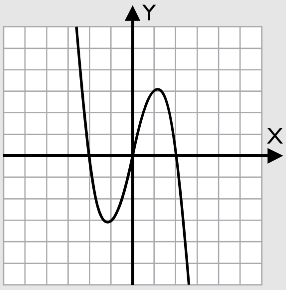
$y''' = -6$

1. Tipo de función: polinómica.
2. Dominio: Dom(f) = $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en todo el dominio.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: es simétrica respecto del origen O(0, 0)
6. Asíntotas:
   - Verticales: no tiene.
   - Horizontales: no tiene.
   - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
   - Eje X: A(–2, 0), O(0, 0), B(2, 0)
   - Eje Y: O(0, 0)

   Signo:
   - Positiva (+): $(-\infty, -2) \cup (0, 2)$
   - Negativa (–): $(-2, 0) \cup (2, +\infty)$
8. Máximos y mínimos relativos:
   - Máximo relativo: A$(2\sqrt{3}/3, 16\sqrt{3}/9)$
   - Mínimo relativo: B$(-2\sqrt{3}/3, -16\sqrt{3}/9)$

   Monotonía:
   - Creciente (↗): $(-2\sqrt{3}/3, 2\sqrt{3}/3)$
   - Decreciente (↘): $(-\infty, -2\sqrt{3}/3) \cup (2\sqrt{3}/3, +\infty)$
9. Punto de inflexión: O(0, 0)

   Curvatura:
   - Convexa (∪): $(-\infty, 0)$
   - Cóncava (∩): $(0, +\infty)$



10. Recorrido o imagen:

    Im(f) = $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

19. $y = -x^3 - 3x^2$

Solución:

$y' = -3x^2 - 6x$

$y'' = -6x - 6$

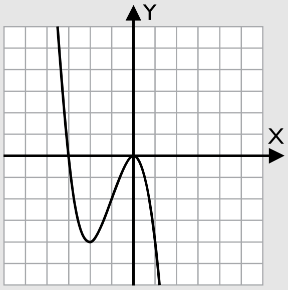
$y''' = -6$

1. Tipo de función: polinómica.
2. Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en todo el dominio.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: no es simétrica ni respecto del eje Y, ni respecto del origen O(0, 0)
6. Asíntotas:
   - Verticales: no tiene.
   - Horizontales: no tiene.
   - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
   - Eje X: A(–3, 0), O(0, 0)
   - Eje Y: O(0, 0)

   Signo:
   - Positiva (+): $(-\infty, -3)$
   - Negativa (–): $(-3, 0) \cup (0, +\infty)$
8. Máximos y mínimos relativos:
   - Máximo relativo: O(0, 0)
   - Mínimo relativo: B(–2, –4)

   Monotonía:
   - Creciente (↗): $(-2, 0)$
   - Decreciente (↘): $(-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$
9. Punto de inflexión: C(–1, –2)

   Curvatura:
   - Convexa (∪): $(-\infty, -1)$
   - Cóncava (∩): $(-1, +\infty)$



10. Recorrido o imagen:

    $\text{Im}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

20. $y = x^3 + x$

Solución:

$y' = 3x^2 + 1$

$y'' = 6x$

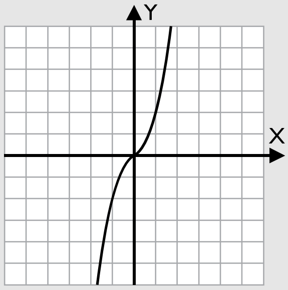
$y''' = 6$

1. Tipo de función: polinómica.
2. Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en todo el dominio.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: es simétrica respecto del origen O(0, 0)
6. Asíntotas:
   - Verticales: no tiene.
   - Horizontales: no tiene.
   - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
   - Eje X: O(0, 0)
   - Eje Y: O(0, 0)

   Signo:
   - Positiva (+): $(0, +\infty)$
   - Negativa (–): $(-\infty, 0)$
8. Máximos y mínimos relativos:
   - Máximo relativo: no tiene.
   - Mínimo relativo: no tiene.

   Monotonía:
   - Creciente (↗): $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
   - Decreciente (↘): $\varnothing$
9. Punto de inflexión: O(0, 0)

   Curvatura:
   - Convexa (∪): $(0, +\infty)$
   - Cóncava (∩): $(-\infty, 0)$



10. Recorrido o imagen:

    $\text{Im}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

21. $y = x^4 - 4x^2$

Solución:

$y' = 4x^3 - 8x$

$y'' = 12x^2 - 8$

$y''' = 24x$

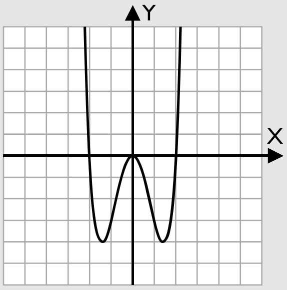
1. Tipo de función: polinómica.
2. Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en todo el dominio.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: es simétrica respecto del eje Y
6. Asíntotas:
   - Verticales: no tiene.
   - Horizontales: no tiene.
   - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
   - Eje X: $A(-2, 0)$, $O(0, 0)$, $B(2, 0)$
   - Eje Y: $O(0, 0)$

   Signo:
   - Positiva (+): $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$
   - Negativa (–): $(-2, 0) \cup (0, 2)$
8. Máximos y mínimos relativos:
   - Máximo relativo: $O(0, 0)$
   - Mínimo relativo: $C(-\sqrt{2}, -4)$, $D(\sqrt{2}, -4)$

   Monotonía:
   - Creciente (↗): $(-\sqrt{2}, 0) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$
   - Decreciente (↘): $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (0, \sqrt{2})$
9. Puntos de inflexión:

   $E(-\sqrt{6}/3, -20/9)$, $F(\sqrt{6}/3, -20/9)$

   Curvatura:
   - Convexa (∪): $(-\infty, -\sqrt{6}/3) \cup (\sqrt{6}/3, +\infty)$
   - Cóncava (∩): $(-\sqrt{6}/3, \sqrt{6}/3)$



10. Recorrido o imagen:

    $\text{Im}(f) = [-4, +\infty)$

22. $y = 2x^3 - x^4$

Solución:

$y' = 6x^2 - 4x^3$

$y'' = 12x - 12x^2$

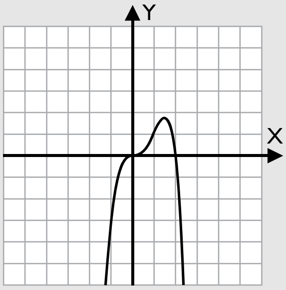
$y''' = 12 - 24x$

1. Tipo de función: polinómica.
2. Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en todo el dominio.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: no es simétrica ni respecto del eje Y, ni respecto del origen $O(0, 0)$
6. Asíntotas:
   - Verticales: no tiene.
   - Horizontales: no tiene.
   - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
   - Eje X: $O(0, 0)$, $A(2, 0)$
   - Eje Y: $O(0, 0)$

   Signo:
   - Positiva (+): $(0, 2)$
   - Negativa (–): $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$
8. Máximos y mínimos relativos:
   - Máximo relativo: $B(3/2, 27/16)$
   - Mínimo relativo: no tiene.

   Monotonía:
   - Creciente (↗): $(-\infty, 3/2)$
   - Decreciente (↘): $(3/2, +\infty)$
9. Puntos de inflexión: $C(0, 0)$, $D(1, 1)$

   Curvatura:
   - Convexa (∪): $(0, 1)$
   - Cóncava (∩): $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$



10. Recorrido o imagen:

    $\text{Im}(f) = (-\infty, 27/16]$

23. $y = x^3 - 9x^2 + 24x - 16$

Solución:

$y' = 3x^2 - 18x + 24$

$y'' = 6x - 18$

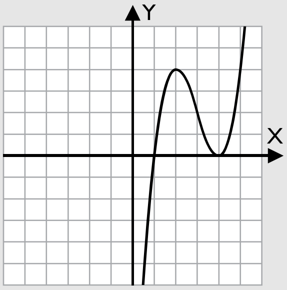
$y''' = 6$

1. Tipo de función: polinómica.
2. Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en todo el dominio.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: no es simétrica ni respecto del eje Y, ni respecto del origen $O(0, 0)$
6. Asíntotas:
   - Verticales: no tiene.
   - Horizontales: no tiene.
   - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
   - Eje X: $A(1, 0)$, $B(4, 0)$
   - Eje Y: $O(0, -16)$

   Signo:
   - Positiva (+): $(1, 4) \cup (4, +\infty)$
   - Negativa (–): $(-\infty, 1)$
8. Máximos y mínimos relativos:
   - Máximo relativo: $C(2, 4)$
   - Mínimo relativo: $D(4, 0)$

   Monotonía:
   - Creciente (↗): $(-\infty, 2) \cup (4, +\infty)$
   - Decreciente (↘): $(2, 4)$
9. Punto de inflexión: $O(3, 2)$

   Curvatura:
   - Convexa (∪): $(3, +\infty)$
   - Cóncava (∩): $(-\infty, 3)$



10. Recorrido o imagen:

    $\text{Im}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

3. Análisis de funciones racionales

Analiza y representa las siguientes funciones completando el formulario de los 10 apartados.

24. $y = \dfrac{x^2}{x - 1}$

Solución:

$y' = \dfrac{x^2 - 2x}{(x - 1)^2}$

$y'' = \dfrac{2}{(x - 1)^3}$

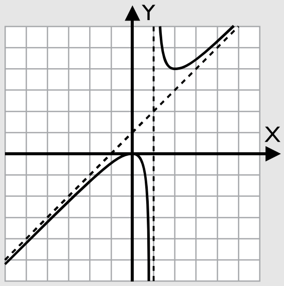
$y''' = -\dfrac{6}{(x - 1)^4}$

1. Tipo de función: racional.
2. Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{1\} = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$
3. Continuidad: es discontinua en $x = 1$, donde tiene una discontinuidad de 1ª especie de salto infinito.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: no es simétrica ni respecto del eje Y, ni respecto del origen $O(0, 0)$
6. Asíntotas:
   - Verticales: $x = 1$
   - Horizontales: no tiene.
   - Oblicuas: $y = x + 1$
7. Corte con los ejes:
   - Eje X: $O(0, 0)$
   - Eje Y: $O(0, 0)$

   Signo:
   - Positiva (+): $(1, +\infty)$
   - Negativa (–): $(-\infty, 0) \cup (0, 1)$
8. Máximos y mínimos relativos:
   - Máximo relativo: $O(0, 0)$
   - Mínimo relativo: $A(2, 4)$

   Monotonía:
   - Creciente (↗): $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$
   - Decreciente (↘): $(0, 1) \cup (1, 2)$
9. Puntos de inflexión: no tiene.

   Curvatura:
   - Convexa (∪): $(1, +\infty)$
   - Cóncava (∩): $(-\infty, 1)$



10. Recorrido o imagen:

    $\text{Im}(f) = (-\infty, 0] \cup [4, +\infty)$

25. $y = \dfrac{x^2 - 4}{x}$

Solución:

$y' = \dfrac{x^2 + 4}{x^2}$

$y'' = -\dfrac{8}{x^3}$

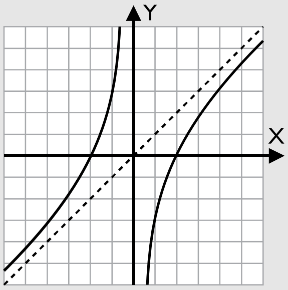
$y''' = \dfrac{24}{x^4}$

1. Tipo de función: racional.
2. Dominio: Dom(f) = $\mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
3. Continuidad: es discontinua en $x = 0$, donde tiene una discontinuidad de 1ª especie de salto infinito.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: es simétrica respecto del origen O(0, 0)
6. Asíntotas:
   - Verticales: $x = 0$
   - Horizontales: no tiene.
   - Oblicuas: $y = x$
7. Corte con los ejes:
   - Eje X: A(–2, 0), B(2, 0)
   - Eje Y: no lo corta.

   Signo:
   - Positiva (+): $(-2, 0) \cup (2, +\infty)$
   - Negativa (–): $(-\infty, -2) \cup (0, 2)$
8. Máximos y mínimos relativos:
   - Máximo relativo: no tiene.
   - Mínimo relativo: no tiene.

   Monotonía:
   - Creciente (↗): $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
   - Decreciente (↘): ∅
9. Puntos de inflexión: no tiene.

   Curvatura:
   - Convexa (∪): $(-\infty, 0)$
   - Cóncava (∩): $(0, +\infty)$



10. Recorrido o imagen:

    Im(f) = $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

26. $y = \dfrac{3}{x^2 + 1}$

Solución:

$y' = -\dfrac{6x}{(x^2 + 1)^2}$

$y'' = \dfrac{18x^2 - 6}{(x^2 + 1)^3}$

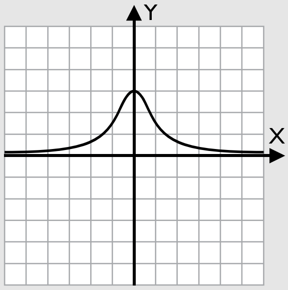
$y''' = -\dfrac{72x^3 - 72x}{(x^2 + 1)^4}$

1. Tipo de función: racional.
2. Dominio: Dom(f) = $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
3. Continuidad: es continua en toda la recta real $\mathbb{R}$
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: es simétrica respecto del eje Y
6. Asíntotas:
   - Verticales: no tiene.
   - Horizontales: $y = 0$
   - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
   - Eje X: no lo corta.
   - Eje Y: A(0, 3)

   Signo:
   - Positiva (+): $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
   - Negativa (–): ∅
8. Máximos y mínimos relativos:
   - Máximo relativo: A(0, 3)
   - Mínimo relativo: no tiene.

   Monotonía:
   - Creciente (↗): $(-\infty, 0)$
   - Decreciente (↘): $(0, +\infty)$
9. Puntos de inflexión: B($-\sqrt{3}/3$, 9/4), C($\sqrt{3}/3$, 9/4)

   Curvatura:
   - Convexa (∪): $(-\infty, -\sqrt{3}/3) \cup (\sqrt{3}/3, +\infty)$
   - Cóncava (∩): $(-\sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3)$



10. Recorrido o imagen:

    Im(f) = (0, 3]

27. $y = \dfrac{x}{x^2 - 1}$

Solución:

$y' = -\dfrac{x^2 + 1}{(x^2 - 1)^2}$

$y'' = \dfrac{2x^3 + 6x}{(x^2 - 1)^3}$

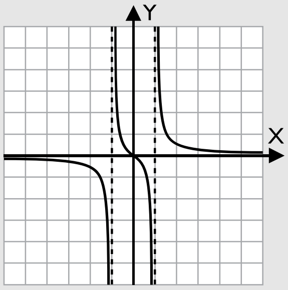
$y''' = -\dfrac{6x^4 + 36x^2 + 6}{(x^2 - 1)^4}$

1. Tipo de función: racional.
2. Dominio:
   $Dom(f) = \mathbb{R} - \{-1, 1\} = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$
3. Continuidad: es discontinua en $x = -1$, $x = 1$, donde tiene una discontinuidad de 1ª especie de salto infinito.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: es simétrica respecto del origen O(0, 0)
6. Asíntotas:
   - Verticales: $x = -1$, $x = 1$
   - Horizontales: $y = 0$
   - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
   - Eje X: O(0, 0)
   - Eje Y: no lo corta.

   Signo:
   - Positiva (+): $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$
   - Negativa (–): $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$
8. Máximos y mínimos relativos:
   - Máximo relativo: no tiene.
   - Mínimo relativo: no tiene.

   Monotonía:
   - Creciente (↗): ∅
   - Decreciente (↘): $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$
9. Punto de inflexión: O(0, 0)

   Curvatura:
   - Convexa (∪): $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$
   - Cóncava (∩): $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$



10. Recorrido o imagen:
    $Im(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

28. $y = \dfrac{x^3 + 1}{x^2}$

Solución:

$y' = \dfrac{x^3 - 2}{x^3}$

$y'' = \dfrac{6}{x^4}$

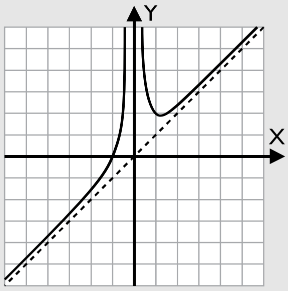
$y''' = -\dfrac{24}{x^5}$

1. Tipo de función: racional.
2. Dominio: $Dom(f) = \mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
3. Continuidad: es discontinua en $x = 0$, donde tiene una discontinuidad de 1ª especie de salto infinito.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: no es simétrica respecto del eje Y, ni respecto del origen O(0, 0)
6. Asíntotas:
   - Verticales: $x = 0$
   - Horizontales: no tiene.
   - Oblicuas: $y = x$
7. Corte con los ejes:
   - Eje X: A(–1, 0)
   - Eje Y: no lo corta.

   Signo:
   - Positiva (+): $(-1, 0) \cup (0, +\infty)$
   - Negativa (–): $(-\infty, -1)$
8. Máximos y mínimos relativos:
   - Máximo relativo: no tiene.
   - Mínimo relativo: $B(\sqrt[3]{2}, 3\sqrt[3]{2}/2)$

   Monotonía:
   - Creciente (↗): $(-\infty, 0) \cup (\sqrt[3]{2}, +\infty)$
   - Decreciente (↘): $(0, \sqrt[3]{2})$
9. Puntos de inflexión: no tiene.

   Curvatura:
   - Convexa (∪): $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
   - Cóncava (∩): ∅



10. Recorrido o imagen:
    $Im(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

29. $y = \dfrac{x^2 - 2}{x^2 - 1}$

Solución:

$y' = \dfrac{2x}{(x^2 - 1)^2}$

$y'' = -\dfrac{6x^2 + 2}{(x^2 - 1)^3}$

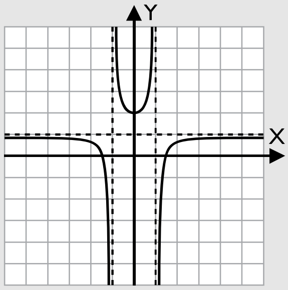
$y''' = \dfrac{24x^3 + 24x}{(x^2 - 1)^4}$

1. Tipo de función: racional.
2. Dominio:
   $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-1, 1\} = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$
3. Continuidad: es discontinua en $x = -1$, $x = 1$, donde tiene una discontinuidad de 1ª especie de salto infinito.
4. Periodicidad: no es periódica.
5. Simetrías: es simétrica respecto del eje Y
6. Asíntotas:
   - Verticales: $x = -1$, $x = 1$
   - Horizontales: $y = 1$
   - Oblicuas: no tiene.
7. Corte con los ejes:
   - Eje X: $A(-\sqrt{2}, 0)$, $B(\sqrt{2}, 0)$
   - Eje Y: $C(0, 2)$

   Signo:
   - Positiva (+): $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (-1, 1) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$
   - Negativa (–): $(-\sqrt{2}, -1) \cup (1, \sqrt{2})$
8. Máximos y mínimos relativos:
   - Máximo relativo: no tiene.
   - Mínimo relativo: $C(0, 2)$

   Monotonía:
   - Creciente (↗): $(0, 1) \cup (1, +\infty)$
   - Decreciente (↘): $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$
9. Puntos de inflexión: no tiene.

   Curvatura:
   - Convexa (∪): $(-1, 1)$
   - Cóncava (∩): $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$



10. Recorrido o imagen:
    $\text{Im}(f) = (-\infty, 1) \cup [2, +\infty)$

Para ampliar

30. Dada la función $y = x^3 + 2x$

a) halla los puntos de inflexión.

b) esboza la gráfica.

Solución:

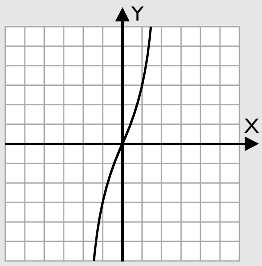
$y' = 3x^2 + 2$

$y'' = 6x$

$y''' = 6 \neq 0$

a) $A(0, 0)$

b) Gráfica:



31. Dada la función $y = x^4$

a) halla y clasifica los puntos singulares.

b) esboza la gráfica.

Solución:

$y' = 4x^3$

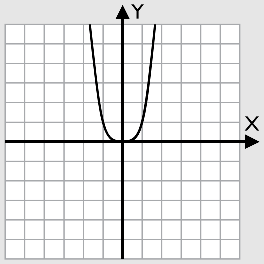
$y'' = 12x^2$

$y''' = 24x$

$y^{IV} = 24 > 0\ (+)$

a) $A(0, 0)$ mínimo relativo.

b) Gráfica:



32. Dada la función $y = \frac{1}{x^2}$

a) calcula el dominio.

b) determina las asíntotas.

c) esboza la gráfica.

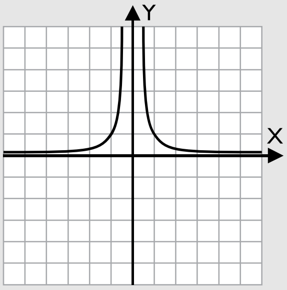
Solución:

a) Dom (f) = $\mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

b) Asíntotas:

- Verticales: $x = 0$
- Horizontales: $y = 0$

c) Gráfica:



33. Dada la función $y = x^4 - 6x^2 + 5$

a) halla los máximos y mínimos relativos.

b) halla los puntos de inflexión.

c) esboza la gráfica.

Solución:

$y' = 4x^3 - 12x$

$y'' = 12x^2 - 12$

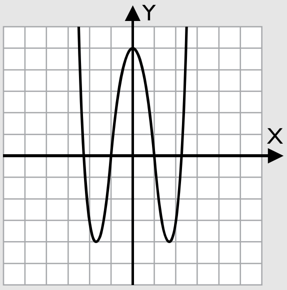
$y''' = 24x$

a) Máximos y mínimos relativos:

- Máximo relativo: $A(0, 5)$
- Mínimo relativo: $B(-\sqrt{3}, -4)$; $C(\sqrt{3}, -4)$

b) Puntos de inflexión: $D(-1, 0)$; $E(1, 0)$

c) Gráfica:



34. Sea la función $f(x) = x^3 - 6x^2 + 20$

a) Determina los máximos y mínimos relativos.

b) Halla los puntos de inflexión.

c) Con los datos obtenidos haz un esbozo de la función.

Solución:

$y' = 3x^2 - 12x$

$y'' = 6x - 12$

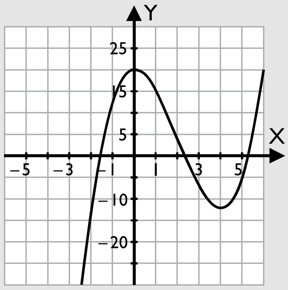
$y''' = 6$

a) Máximos y mínimos relativos:

- Máximo relativo: $A(0, 20)$
- Mínimo relativo: $B(4, -12)$

b) Punto de inflexión: $C(2, 4)$

c) Gráfica:



35. Dada la función $y = x^4 - 2x^2$

a) halla los máximos y mínimos relativos.

b) halla los puntos de inflexión.

c) esboza la gráfica.

Solución:

$y' = 4x^3 - 4x$

$y'' = 12x^2 - 4$

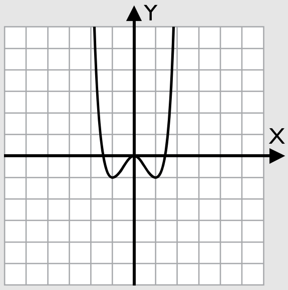
$y''' = 24x$

a) Máximos y mínimos relativos:

- Máximo relativo: $O(0, 0)$
- Mínimo relativo: $A(-1, -1)$; $B(1, -1)$

b) Puntos de inflexión: $C(-\sqrt{3}/3, -5/9)$; $D(\sqrt{3}/3, -5/9)$

c) Gráfica:



36. Dada la función $y = \frac{x^2 + 1}{x^2}$

a) calcula el dominio.

b) determina las asíntotas.

c) esboza la gráfica.

Solución:

$y' = -\dfrac{2}{x^3}$

$y'' = \dfrac{6}{x^4}$

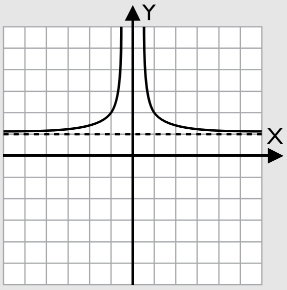
$y''' = -\dfrac{24}{x^5}$

a) Dom (f) = R – {0} = $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

b) Asíntotas:

- Verticales: $x = 0$
- Horizontales: $y = 1$

c) Gráfica:



37. Dada la función $y = x^3 - 3x^2 + 2$

a) halla los máximos y mínimos relativos.

b) halla los puntos de inflexión.

c) esboza la gráfica.

Solución:

$y' = 3x^2 - 6x$

$y'' = 6x - 6$

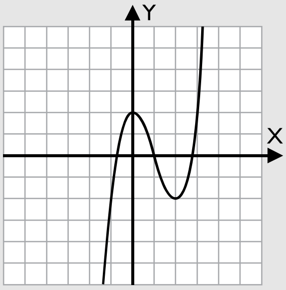
$y''' = 6$

a) Máximos y mínimos relativos:

- Máximo relativo: A(0, 2)
- Mínimo relativo: B(2, –2)

b) Punto de inflexión: C(1, 0)

c) Gráfica:



38. Dada la función $y = 6x^2 - 3x^4$

a) halla los máximos y mínimos relativos.

b) halla los puntos de inflexión.

c) esboza la gráfica.

Solución:

$y' = 12x - 12x^3$

$y'' = 12 - 36x^2$

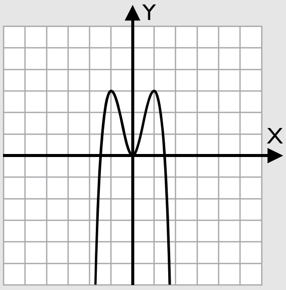
$y''' = -72x$

a) Máximos y mínimos relativos:

- Máximo relativo: A(– 1, 3); B(1, 3)
- Mínimo relativo: O(0, 0)

b) Puntos de inflexión: $C(-\sqrt{3}/3, 5/3)$; $D(\sqrt{3}/3, 5/3)$

c) Gráfica:



Problemas

39. Dada la función $y = x^3 + 3x^2$

a) halla los máximos y mínimos relativos.

b) halla los puntos de inflexión.

c) esboza la gráfica.

Solución:

$y' = 3x^2 + 6x$

$y'' = 6x + 6$

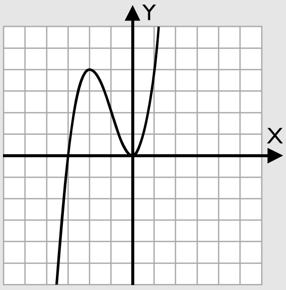
$y''' = 6$

a) Máximos y mínimos relativos:

- Máximo relativo: A(–2, 4)
- Mínimo relativo: O(0, 0)

b) Punto de inflexión: C(– 1, 2)

c) Gráfica:



40. Dada la función $y = \dfrac{x^2}{(x-1)^2}$

a) calcula el dominio.

b) determina las asíntotas.

c) halla los máximos y mínimos relativos.

d) determina los puntos de inflexión.

e) esboza la gráfica.

Solución:

$$y' = -\frac{2x}{(x-1)^3}$$

$$y'' = \frac{4x+2}{(x-1)^4}$$

$$y''' = -\frac{12x+12}{(x-1)^5}$$

a) Dom (f) = $\mathbb{R} - \{1\} = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$

b) Asíntotas:

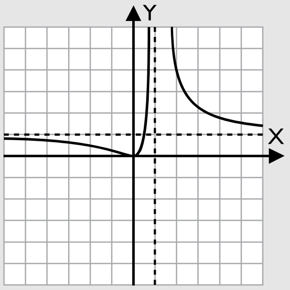
- Verticales: $x = 1$
- Horizontales: $y = 1$

c) Máximos y mínimos relativos:

- Máximo relativo: no tiene.
- Mínimo relativo: O(0, 0)

d) Punto de inflexión: A(–1/2, 1/9)

e) Gráfica:



41. Sea **f :** $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por:

$$f(x) = -2x^3 - 9x^2 - 12x$$

a) Determina los puntos de corte con los ejes.

b) Halla los máximos y mínimos relativos.

c) Calcula los puntos de inflexión.

d) Esboza la gráfica de la función.

Solución:

$y' = -6x^2 - 18x - 12$

$y'' = -12x - 18$

$y''' = -12$

a) Puntos de corte con los ejes:

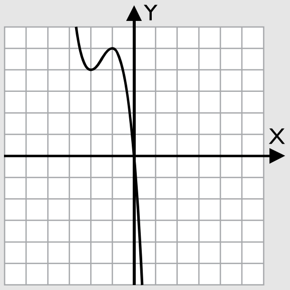
- Eje X: O(0, 0)
- Eje Y: O(0, 0)

b) Máximos y mínimos relativos:

- Máximo relativo: A(–1, 5)
- Mínimo relativo: B(–2, 4)

c) Punto de inflexión: C(–3/2, 9/2)

d) Gráfica:



42. Dada la siguiente función, definida en los números reales salvo en $x = 0$;

$$f(x) = 3 - x - \frac{2}{x}$$

a) determina el dominio.

b) halla las asíntotas.

c) calcula las coordenadas de sus máximos y mínimos relativos.

d) esboza la gráfica de la función

Solución:

$$y' = \frac{2}{x^2} - 1$$

$$y'' = -\frac{4}{x^3}$$

$$y''' = \frac{12}{x^4}$$

a) Dom (f) = $\mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

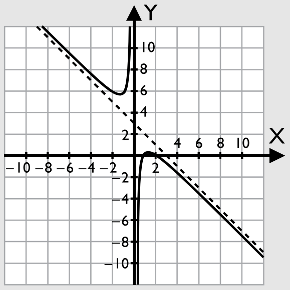
b) Asíntotas:

- Verticales: $x = 0$
- Oblicuas: $y = 3 - x$

c) Máximos y mínimos relativos:

- Máximo relativo: A($\sqrt{2}$, 3 – 2$\sqrt{2}$)
- Mínimo relativo: B(–$\sqrt{2}$, 3 + 2$\sqrt{2}$)

d) Gráfica:



43. Sea la función $V(t) = 60\left(\frac{t^3}{3} - 5t^2 + 16t\right)$

a) Calcula los máximos y mínimos relativos.

b) Determina los puntos de inflexión.

c) Esboza la gráfica de la función.

Solución:

$v'(t) = 60(t^2 - 10t + 16)$

$v''(t) = 60(2t - 10)$

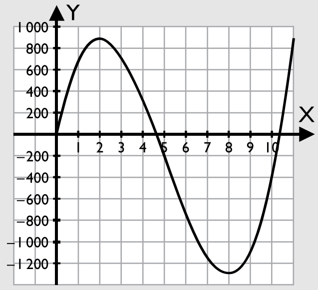
$v'''(t) = 120$

a) Máximos y mínimos relativos:

- Máximo relativo: A(2, 880)
- Mínimo relativo: B(8, –1 280)

b) Punto de inflexión: C(5, –200)

c) Gráfica:



44. Dada la función $y = 2x^2 - x^4$

a) halla los máximos y mínimos relativos.

b) halla los puntos de inflexión.

c) esboza la gráfica.

Solución:

$y' = 4x - 4x^3$

$y'' = 4 - 12x^2$

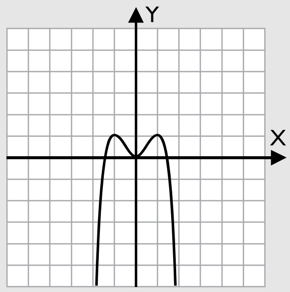
$y''' = -24x$

a) Máximos y mínimos relativos:

- Máximo relativo: A(– 1, 1), B(1, 1)
- Mínimo relativo: O(0, 0)

b) Puntos de inflexión: $C(-\sqrt{3}/3, 5/9)$, $D(\sqrt{3}/3, 5/9)$

c) Gráfica:



45. Sea **f** la función definida para $x \neq -2$ por:

$$f(x) = \frac{x^2}{x + 2}$$

a) Halla las asíntotas de la gráfica de **f**

b) Calcula los extremos locales de **f**

c) Determina los puntos de inflexión.

d) Teniendo en cuenta los resultados de los apartados anteriores, haz un esbozo de la gráfica.

Solución:

$$y' = \frac{x^2 + 4x}{(x + 2)^2}$$

$$y'' = \frac{8}{(x + 2)^3}$$

$$y''' = -\frac{24}{(x + 2)^4}$$

$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-2\} = (-\infty, -2) \cup (-2, +\infty)$

a) Asíntotas:

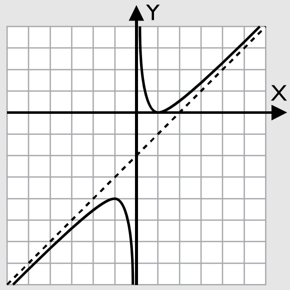
- Verticales: x = –2
- Oblicuas: y = x – 2

b) Máximos y mínimos relativos:

- Máximo relativo: A(–4, –8)
- Mínimo relativo: O(0, 0)

c) $y'' \neq 0$. No hay puntos de inflexión.

d) Gráfica:



46. Halla y clasifica los puntos singulares de la función:

$$y = x^4 + x^2$$

Esboza la gráfica.

Solución:

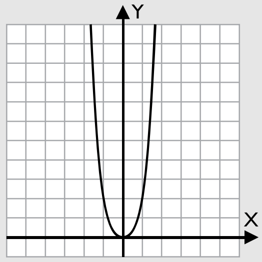
$y' = 4x^3 + 2x$

$y'' = 12x^2 + 2$

$y''' = 24x$

a) Punto singular: A(0, 0) es un mínimo relativo.

b) Gráfica:



47. Dada la curva $y = \dfrac{x^2 + 3}{x^2 - 4}$

a) determina el dominio de definición.
b) halla las simetrías.
c) halla los puntos de corte con los ejes.
d) calcula las asíntotas.
e) halla los máximos y mínimos relativos.
f) haz una representación aproximada.

Solución:

$y' = -\dfrac{14x}{(x^2 - 4)^2}$

$y'' = \dfrac{42x^2 + 56}{(x^2 - 4)^3}$

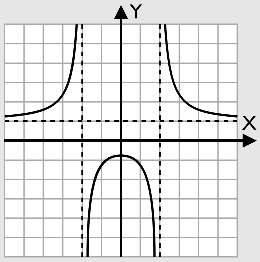
$y''' = -\dfrac{168x^3 + 672x}{(x^2 - 4)^4}$

a) Dom (f) = $\mathbb{R} - \{-2, 2\} = (-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (-2, +\infty)$
b) Simetrías: es simétrica respecto del eje Y
c) Corte con los ejes:
- Eje X: no lo corta.
- Eje Y: A(0, –3/4)

d) Asíntotas:
- Verticales: $x = -2$, $x = 2$
- Horizontales: $y = 1$

e) Máximos y mínimos relativos:
- Máximo relativo: A(0, –3/4)
- Mínimo relativo: no tiene.

f) Gráfica:



48. Dada la función $y = x^4 + 4x$

a) halla y clasifica los puntos singulares.
b) calcula los puntos de inflexión.
c) esboza la gráfica.

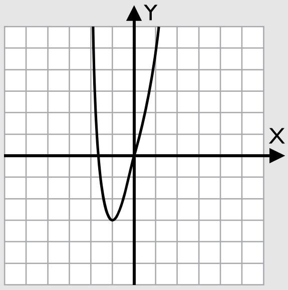
Solución:

$y' = 4x^3 + 4$
$y'' = 12x^2$
$y''' = 24x$

a) Máximos y mínimos relativos:
- Máximo relativo: no tiene.
- Mínimo relativo: A(–1, –3)

b) Puntos de inflexión: no tiene.

c) Gráfica:



49. Dada la función $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^2}$

a) calcula el dominio.
b) halla las simetrías.
c) determina las asíntotas.
d) halla los puntos de corte con los ejes.
e) esboza la gráfica.

Solución:

$y' = \dfrac{2}{x^3}$

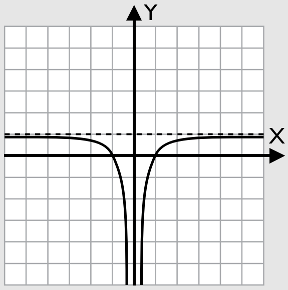
$y'' = -\dfrac{6}{x^4}$

$y''' = \dfrac{24}{x^5}$

a) Dom (f) = $\mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
b) Simetrías: es simétrica respecto del eje Y
c) Asíntotas:
- Verticales: $x = 0$
- Horizontales: $y = 1$

d) Corte con los ejes:
- Eje X: A(–1, 0); B(1, 0)
- Eje Y: no lo corta.

e) Gráfica:



50. Dada la función $y = \dfrac{x(x + 2)}{x^2 - 1}$

a) calcula el dominio.
b) determina las asíntotas.
c) halla los puntos de corte con los ejes.
d) esboza la gráfica.

Solución:

$$y' = -\frac{2x^2 + 2x + 2}{(x^2 - 1)^2}$$

$$y'' = \frac{4x^3 + 6x^2 + 12x + 2}{(x^2 - 1)^3}$$

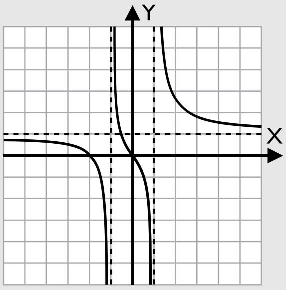
$$y''' = -\frac{12x^4 + 24x^3 + 72x^2 + 24x + 12}{(x^2 - 1)^4}$$

a) Dom (f) = $\mathbb{R} - \{-1, 1\} = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$

b) Asíntotas:
- Verticales: $x = -1$, $x = 1$
- Horizontales: $y = 1$

c) Corte con los ejes:
- Eje X: A(–2, 0); O(0, 0)
- Eje Y: O(0, 0)

d) Gráfica:



51. Dada la función $y = 3x^5 - 5x^3$
- a) determina las simetrías.
- b) calcula los puntos de corte con los ejes.
- c) halla los máximos y mínimos relativos.
- d) halla los puntos de inflexión.
- e) esboza la gráfica.

Solución:

$y' = 15x^4 - 15x^2$

$y'' = 60x^3 - 30x$

$y''' = 180x^2 - 30$

a) Simetrías: es simétrica respecto del origen O(0, 0)

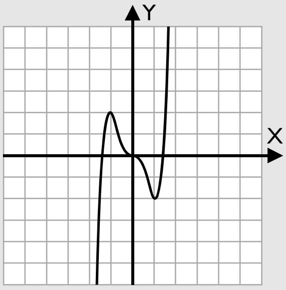
b) Corte con los ejes:
- Eje X: A($-\sqrt{15}/3$, 0); O(0, 0); B($\sqrt{15}/3$, 0)
- Eje Y: O(0, 0)

c) Máximos y mínimos relativos:
- Máximo relativo: A(–1, 2)
- Mínimo relativo: B(1, –2)

d) Puntos de inflexión:

C($-\sqrt{2}/2, 7\sqrt{2}/8$); O(0, 0); D($\sqrt{2}/2, -7\sqrt{2}/8$)

e) Gráfica:



Para profundizar

52. Dada la función $y = x^3 + 3x$
- a) halla los puntos de corte con los ejes.
- b) calcula los máximos y mínimos relativos.
- c) determina los puntos de inflexión.
- d) esboza la gráfica.

Solución:

$y' = 3x^2 + 3$

$y'' = 6x$

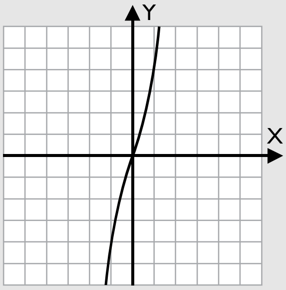
$y''' = 6$

a) Corte con los ejes:
- Eje X: O(0, 0)
- Eje Y: O(0, 0)

b) Máximos y mínimos relativos:
- Máximo relativo: no tiene.
- Mínimo relativo: no tiene.

c) Punto de inflexión: O(0, 0)

d) Gráfica:



53. Dada la función $y = x^4 + 2x^2$
- a) halla los puntos de corte con los ejes.
- b) calcula los máximos y mínimos relativos.
- c) determina los puntos de inflexión.
- d) esboza la gráfica.

Solución:

$y' = 4x^3 + 4x$

$y'' = 12x^2 + 4$

$y''' = 24x$

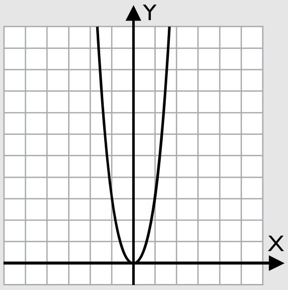
$y^{IV} = 24$

a) Corte con los ejes:
  - Eje X: O(0, 0)
  - Eje Y: O(0, 0)

b) Máximos y mínimos relativos:
  - Máximo relativo: no tiene.
  - Mínimo relativo: O(0, 0)

c) Puntos de inflexión: no tiene.

d) Gráfica:



54. Dada la función $y = \dfrac{x^2 - 1}{(x - 2)^2}$

a) calcula el dominio.

b) determina las asíntotas.

c) calcula los puntos de corte con los ejes.

d) halla los máximos y mínimos relativos.

e) determina los puntos de inflexión.

f) esboza la gráfica.

Solución:

$y' = -\dfrac{4x - 2}{(x - 2)^3}$

$y'' = \dfrac{8x + 2}{(x - 2)^4}$

$y''' = -\dfrac{24x + 24}{(x - 2)^5}$

a) Dom (f) = $\mathbb{R} - \{2\} = (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$

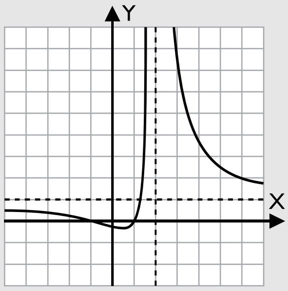
b) Asíntotas:
  - Verticales: $x = 2$
  - Horizontales: $y = 1$

c) Corte con los ejes:
  - Eje X: A(– 1, 0); B(1, 0)
  - Eje Y: C(0, – 1/4)

d) Máximos y mínimos relativos:
  - Máximo relativo: no tiene.
  - Mínimo relativo: D(1/2, – 1/3)

e) Punto de inflexión: O(– 1/4, –5/27)

f) Gráfica:



55. Se considera la siguiente función:

$$f(x) = 2x^3 - 21x^2 + 60x - 32$$

a) Calcula los máximos y mínimos relativos.

b) Determina los intervalos de concavidad y convexidad.

c) Represéntala gráficamente.

Solución:

$y' = 6x^2 - 42x + 60$

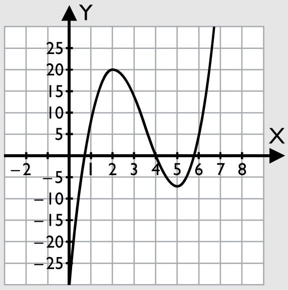
$y'' = 12x - 42$

$y''' = 12$

a) Máximos y mínimos relativos:
  - Máximo relativo: A(2, 20)
  - Mínimo relativo: B(5, –7)

b) Punto de inflexión: C(7/2, 13/2)

c) Gráfica:



56. Dada la función $y = 3x^2 - x^3$

a) calcula los puntos de corte con los ejes.

b) halla los máximos y mínimos relativos.

c) halla los puntos de inflexión.

d) esboza la gráfica.

Solución:

$y' = 6x - 3x^2$

$y'' = 6 - 6x$

$y''' = -6$

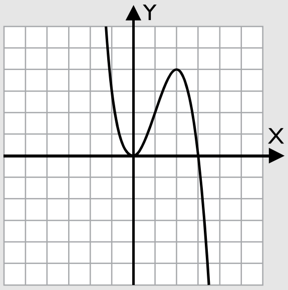
a) Corte con los ejes:
  - Eje X: O(0, 0); A(3, 0)
  - Eje Y: O(0, 0)

b) Máximos y mínimos relativos:

- Máximo relativo: B(2, 4)
- Mínimo relativo: O(0, 0)

c) Punto de inflexión: C(1, 2)

d) Gráfica:



57. Dada la función $y = e^x - e^{-x}$

a) determina las simetrías.
b) calcula los puntos de corte con los ejes.
c) halla los máximos y mínimos relativos.
d) halla los puntos de inflexión.
e) esboza la gráfica.

Solución:

$y' = e^x + e^{-x}$

$y'' = e^x - e^{-x}$

$y''' = e^x + e^{-x}$

a) Simetrías: es simétrica respecto del origen O(0, 0)

b) Corte con los ejes:

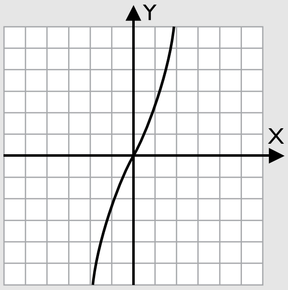
- Eje X: O(0, 0)
- Eje Y: O(0, 0)

c) Máximos y mínimos relativos:

- Máximo relativo: no tiene.
- Mínimo relativo: no tiene.

d) Punto de inflexión: O(0, 0)

e) Gráfica:



58. Dada la función $y = 5x^3 - 3x^5$

a) determina las simetrías.
b) calcula los puntos de corte con los ejes.
c) halla los máximos y mínimos relativos.
d) halla los puntos de inflexión.
e) esboza la gráfica.

Solución:

$y' = 15x^2 - 15x^4$

$y'' = 30x - 60x^3$

$y''' = 30 - 180x^2$

a) Simetrías: es simétrica respecto del origen O(0, 0)

b) Corte con los ejes:

- Eje X: $A(-\sqrt{15}/3, 0)$; O(0, 0); $B(\sqrt{15}/3, 0)$
- Eje Y: O(0, 0)

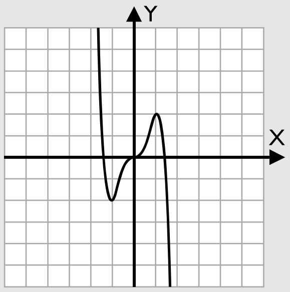
c) Máximos y mínimos relativos:

- Máximo relativo: A(1, 2)
- Mínimo relativo: B(–1, –2)

d) Puntos de inflexión:

$C(-\sqrt{2}/2, -7\sqrt{2}/8)$; O(0, 0); $D(\sqrt{2}/2, 7\sqrt{2}/8)$

e) Gráfica:



59. Dada la función $y = x^4 - 4x$

a) halla los máximos y mínimos relativos.
b) halla los puntos de inflexión.
c) esboza la gráfica.

Solución:

$y' = 4x^3 - 4$

$y'' = 12x^2$

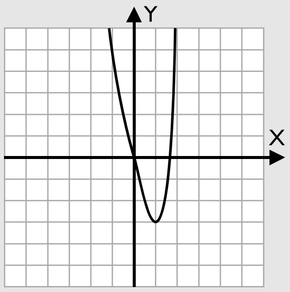
$y''' = 24x$

a) Máximos y mínimos relativos:

- Máximo relativo: no tiene.
- Mínimo relativo: A(1, –3)

b) Puntos de inflexión: no tiene.

c) Gráfica:



60. Dada la función $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x$

a) halla los máximos y mínimos relativos.

b) halla los puntos de inflexión.

c) esboza la gráfica.

Solución:

$y' = 6x^2 - 18x + 12$

$y'' = 12x - 18$

$y''' = 12$

a) Corte con los ejes:

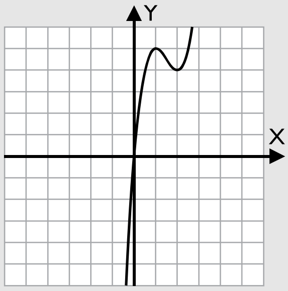
- Eje X: O(0, 0)
- Eje Y: O(0, 0)

b) Máximos y mínimos relativos:

- Máximo relativo: A(1, 5)
- Mínimo relativo: B(2, 4)

c) Punto de inflexión: C(3/2, 9/2)

d) Gráfica:



Linux/Windows WIRIS

Paso a paso

61. Representa y analiza la función:

$$y = \frac{x^3}{x^2 - 1}$$

Solución:

Resuelto en el libro del alumnado.

62. **Internet.** Abre: **www.editorial-bruno.es** y elige **Matemáticas, curso** y **tema.**

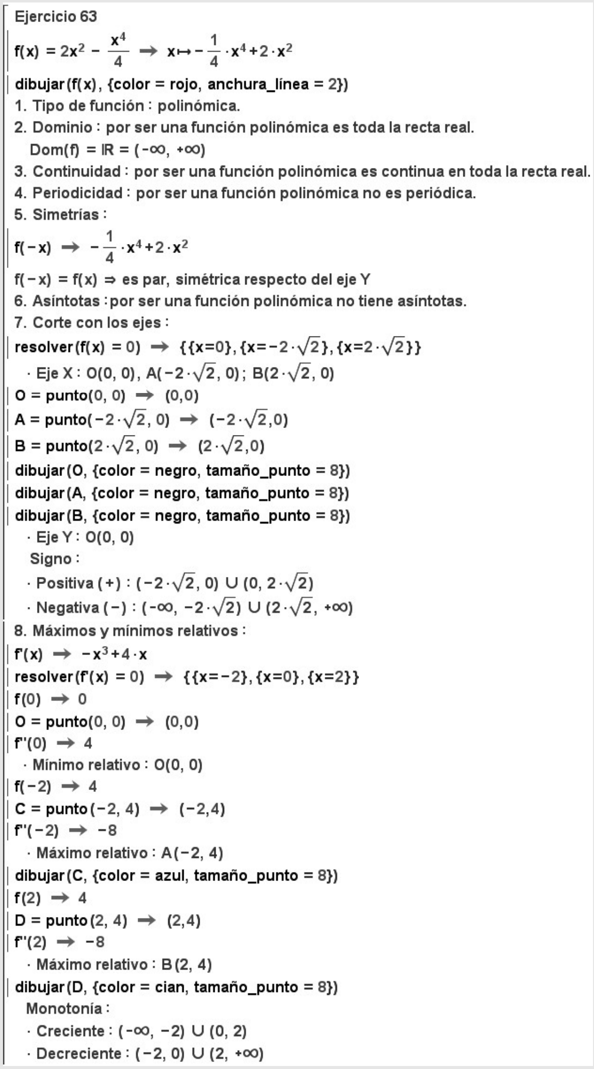
Practica

Representa las siguientes funciones completando para cada una de ellas el formulario de los 10 apartados:

63. Representa y analiza la función:

$$y = 2x^2 - \frac{x^4}{4}$$

Solución:



Ejercicio 63

$f(x) = 2x^2 - \frac{x^4}{4} \rightarrow x \mapsto -\frac{1}{4} \cdot x^4 + 2 \cdot x^2$

dibujar(f(x), {color = rojo, anchura_línea = 2})

1. Tipo de función : polinómica.

2. Dominio : por ser una función polinómica es toda la recta real.

$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

3. Continuidad : por ser una función polinómica es continua en toda la recta real.

4. Periodicidad : por ser una función polinómica no es periódica.

5. Simetrías :

$f(-x) \rightarrow -\frac{1}{4} \cdot x^4 + 2 \cdot x^2$

$f(-x) = f(x) \Rightarrow$ es par, simétrica respecto del eje Y

6. Asíntotas :por ser una función polinómica no tiene asíntotas.

7. Corte con los ejes :

resolver(f(x) = 0) $\rightarrow \{\{x=0\}, \{x=-2 \cdot \sqrt{2}\}, \{x=2 \cdot \sqrt{2}\}\}$

· Eje X : $O(0, 0)$, $A(-2 \cdot \sqrt{2}, 0)$; $B(2 \cdot \sqrt{2}, 0)$

O = punto(0, 0) $\rightarrow (0,0)$

A = punto($-2 \cdot \sqrt{2}$, 0) $\rightarrow (-2 \cdot \sqrt{2},0)$

B = punto($2 \cdot \sqrt{2}$, 0) $\rightarrow (2 \cdot \sqrt{2},0)$

dibujar(O, {color = negro, tamaño_punto = 8})

dibujar(A, {color = negro, tamaño_punto = 8})

dibujar(B, {color = negro, tamaño_punto = 8})

· Eje Y : $O(0, 0)$

Signo :

· Positiva (+) : $(-2 \cdot \sqrt{2}, 0) \cup (0, 2 \cdot \sqrt{2})$

· Negativa (−) : $(-\infty, -2 \cdot \sqrt{2}) \cup (2 \cdot \sqrt{2}, +\infty)$

8. Máximos y mínimos relativos :

$f'(x) \rightarrow -x^3 + 4 \cdot x$

resolver(f'(x) = 0) $\rightarrow \{\{x=-2\}, \{x=0\}, \{x=2\}\}$

$f(0) \rightarrow 0$

O = punto(0, 0) $\rightarrow (0,0)$

$f''(0) \rightarrow 4$

· Mínimo relativo : $O(0, 0)$

$f(-2) \rightarrow 4$

C = punto(−2, 4) $\rightarrow (-2,4)$

$f''(-2) \rightarrow -8$

· Máximo relativo : $A(-2, 4)$

dibujar(C, {color = azul, tamaño_punto = 8})

$f(2) \rightarrow 4$

D = punto(2, 4) $\rightarrow (2,4)$

$f''(2) \rightarrow -8$

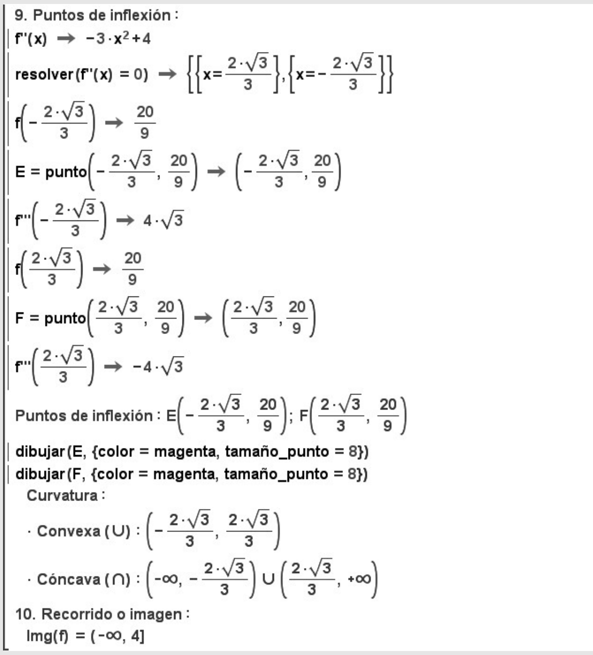
· Máximo relativo : $B(2, 4)$

dibujar(D, {color = cian, tamaño_punto = 8})

Monotonía :

· Creciente : $(-\infty, -2) \cup (0, 2)$

· Decreciente : $(-2, 0) \cup (2, +\infty)$



9. Puntos de inflexión :

$f''(x) \rightarrow -3 \cdot x^2 + 4$

resolver(f''(x) = 0) $\rightarrow \left[\left\{x=\frac{2 \cdot \sqrt{3}}{3}\right\}, \left\{x=-\frac{2 \cdot \sqrt{3}}{3}\right\}\right]$

$f\left(-\frac{2 \cdot \sqrt{3}}{3}\right) \rightarrow \frac{20}{9}$

E = punto$\left(-\frac{2 \cdot \sqrt{3}}{3}, \frac{20}{9}\right) \rightarrow \left(-\frac{2 \cdot \sqrt{3}}{3}, \frac{20}{9}\right)$

$f'''\left(-\frac{2 \cdot \sqrt{3}}{3}\right) \rightarrow 4 \cdot \sqrt{3}$

$f\left(\frac{2 \cdot \sqrt{3}}{3}\right) \rightarrow \frac{20}{9}$

F = punto$\left(\frac{2 \cdot \sqrt{3}}{3}, \frac{20}{9}\right) \rightarrow \left(\frac{2 \cdot \sqrt{3}}{3}, \frac{20}{9}\right)$

$f'''\left(\frac{2 \cdot \sqrt{3}}{3}\right) \rightarrow -4 \cdot \sqrt{3}$

Puntos de inflexión : $E\left(-\frac{2 \cdot \sqrt{3}}{3}, \frac{20}{9}\right)$; $F\left(\frac{2 \cdot \sqrt{3}}{3}, \frac{20}{9}\right)$

dibujar(E, {color = magenta, tamaño_punto = 8})

dibujar(F, {color = magenta, tamaño_punto = 8})

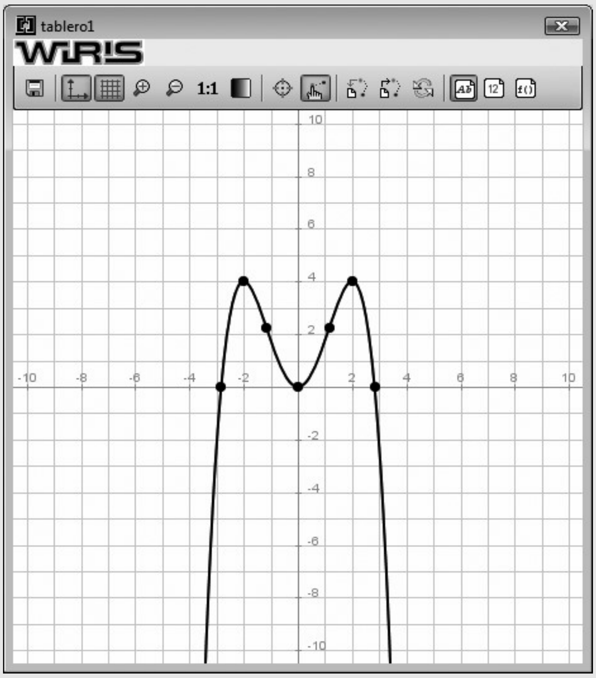
Curvatura :

· Convexa (∪) : $\left(-\frac{2 \cdot \sqrt{3}}{3}, \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{3}\right)$

· Cóncava (∩) : $\left(-\infty, -\frac{2 \cdot \sqrt{3}}{3}\right) \cup \left(\frac{2 \cdot \sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$

10. Recorrido o imagen :

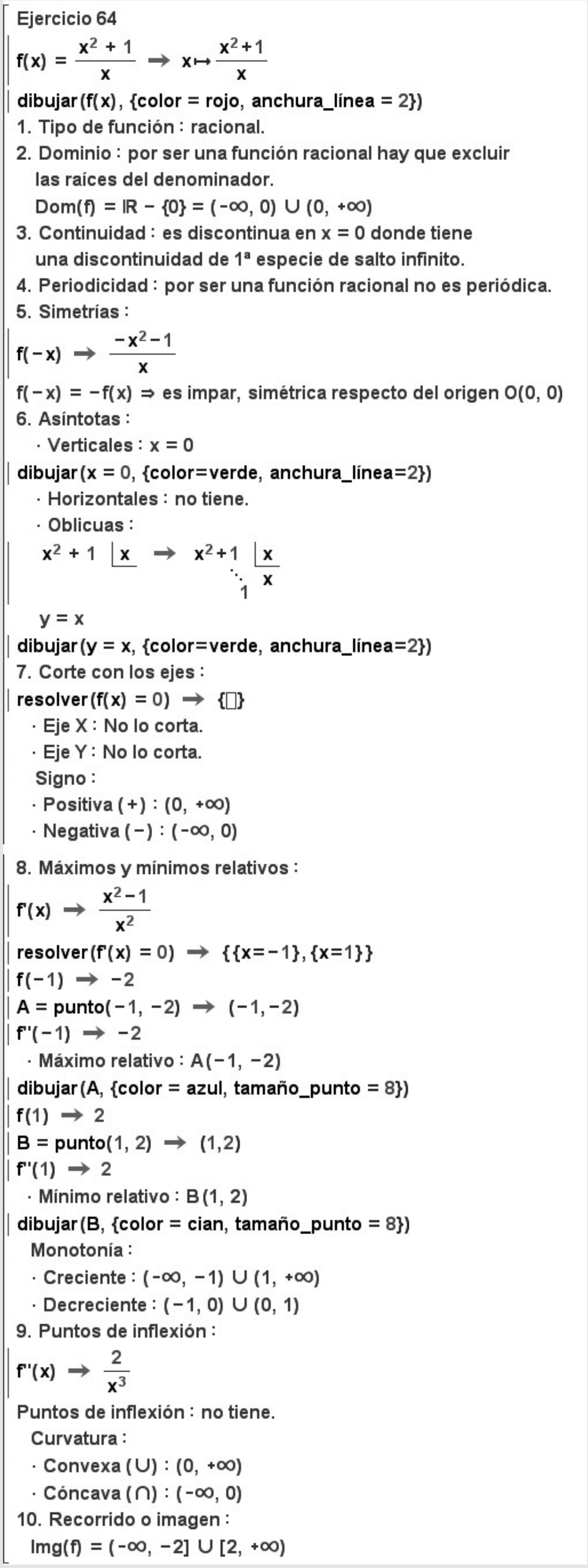
$\mathrm{Img}(f) = (-\infty, 4]$



64. Representa y analiza la función:

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$$

Solución:



Ejercicio 64

$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x} \rightarrow x \mapsto \frac{x^2+1}{x}$

dibujar(f(x), {color = rojo, anchura_línea = 2})

1. Tipo de función : racional.

2. Dominio : por ser una función racional hay que excluir las raíces del denominador.

$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

3. Continuidad : es discontinua en $x = 0$ donde tiene una discontinuidad de 1ª especie de salto infinito.

4. Periodicidad : por ser una función racional no es periódica.

5. Simetrías :

$f(-x) \rightarrow \frac{-x^2-1}{x}$

$f(-x) = -f(x) \Rightarrow$ es impar, simétrica respecto del origen O(0, 0)

6. Asíntotas :

· Verticales : $x = 0$

dibujar(x = 0, {color=verde, anchura_línea=2})

· Horizontales : no tiene.

· Oblicuas :

$x^2 + 1 \,\underline{|\, x} \rightarrow x^2+1 \,\underline{|\, x}$, cociente x, resto 1

$y = x$

dibujar(y = x, {color=verde, anchura_línea=2})

7. Corte con los ejes :

resolver(f(x) = 0) $\rightarrow$ {□}

· Eje X : No lo corta.

· Eje Y : No lo corta.

Signo :

· Positiva (+) : $(0, +\infty)$

· Negativa (−) : $(-\infty, 0)$

8. Máximos y mínimos relativos :

$f'(x) \rightarrow \frac{x^2-1}{x^2}$

resolver(f'(x) = 0) $\rightarrow$ {{x=−1}, {x=1}}

$f(-1) \rightarrow -2$

A = punto(−1, −2) $\rightarrow$ (−1,−2)

$f''(-1) \rightarrow -2$

· Máximo relativo : A(−1, −2)

dibujar(A, {color = azul, tamaño_punto = 8})

$f(1) \rightarrow 2$

B = punto(1, 2) $\rightarrow$ (1,2)

$f''(1) \rightarrow 2$

· Mínimo relativo : B(1, 2)

dibujar(B, {color = cian, tamaño_punto = 8})

Monotonía :

· Creciente : $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

· Decreciente : $(-1, 0) \cup (0, 1)$

9. Puntos de inflexión :

$f''(x) \rightarrow \frac{2}{x^3}$

Puntos de inflexión : no tiene.

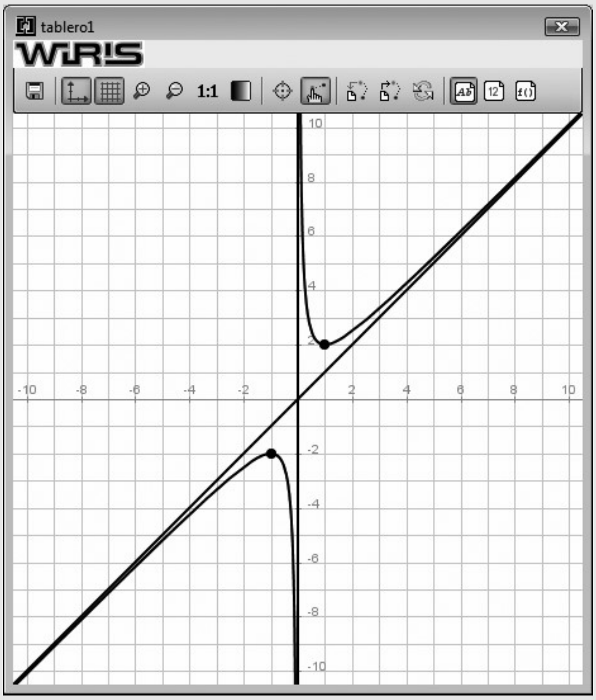
Curvatura :

· Convexa (∪) : $(0, +\infty)$

· Cóncava (∩) : $(-\infty, 0)$

10. Recorrido o imagen :

$\text{Img}(f) = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$



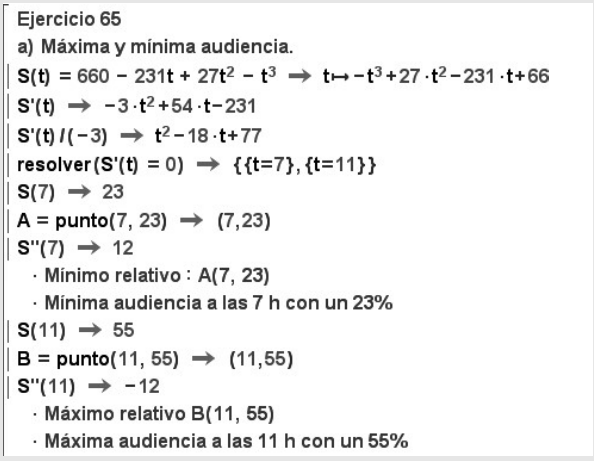
65. Una cadena local de TV ha determinado, por medio de encuestas, que el porcentaje de ciudadanos que la ven entre las 6 de la tarde y las 12 de la noche viene dado por la función:

$$S(t) = 660 - 231t + 27t^2 - t^3$$

donde **t** indica las horas transcurridas desde las 12 en punto de la mañana.

a) ¿A qué hora tiene máxima y mínima audiencia la cadena entre las 6 de la tarde y las 12 de la noche? ¿Qué porcentaje de ciudadanos ven la cadena de TV a esas horas de máxima y mínima audiencia?

b) Dibuja la gráfica de la función S(t) para **t** comprendido entre las 6 de la tarde y las 12 de la noche.



Ejercicio 65

a) Máxima y mínima audiencia.

$S(t) = 660 - 231t + 27t^2 - t^3 \rightarrow t \mapsto -t^3 + 27 \cdot t^2 - 231 \cdot t + 66$

$S'(t) \rightarrow -3 \cdot t^2 + 54 \cdot t - 231$

$S'(t)/(-3) \rightarrow t^2 - 18 \cdot t + 77$

resolver(S'(t) = 0) $\rightarrow$ {{t=7}, {t=11}}

$S(7) \rightarrow 23$

A = punto(7, 23) $\rightarrow$ (7,23)

$S''(7) \rightarrow 12$

· Mínimo relativo : A(7, 23)

· Mínima audiencia a las 7 h con un 23%

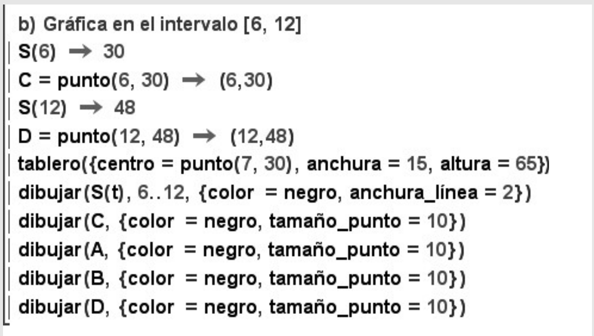
$S(11) \rightarrow 55$

B = punto(11, 55) $\rightarrow$ (11,55)

$S''(11) \rightarrow -12$

· Máximo relativo B(11, 55)

· Máxima audiencia a las 11 h con un 55%



b) Gráfica en el intervalo [6, 12]

S(6) → 30

C = punto(6, 30) → (6,30)

S(12) → 48

D = punto(12, 48) → (12,48)

tablero({centro = punto(7, 30), anchura = 15, altura = 65})

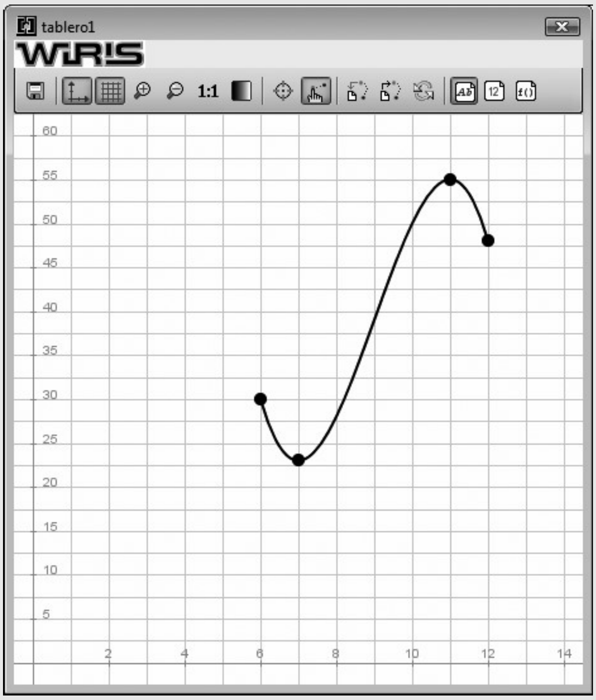
dibujar(S(t), 6..12, {color = negro, anchura_línea = 2})

dibujar(C, {color = negro, tamaño_punto = 10})

dibujar(A, {color = negro, tamaño_punto = 10})

dibujar(B, {color = negro, tamaño_punto = 10})

dibujar(D, {color = negro, tamaño_punto = 10})

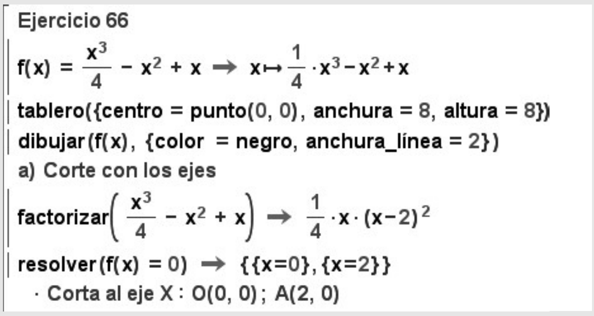


66. En una región, un río tiene la forma de la curva

$$y = \frac{1}{4}x^3 - x^2 + x$$

y es cortada por un camino según el eje X.

Hacer un esquema de la posición del río y del camino, calculando para la curva el corte con los ejes de coordenadas, extremos relativos e intervalos de crecimiento.



Ejercicio 66

$f(x) = \frac{x^3}{4} - x^2 + x \rightarrow x \mapsto \frac{1}{4} \cdot x^3 - x^2 + x$

tablero({centro = punto(0, 0), anchura = 8, altura = 8})

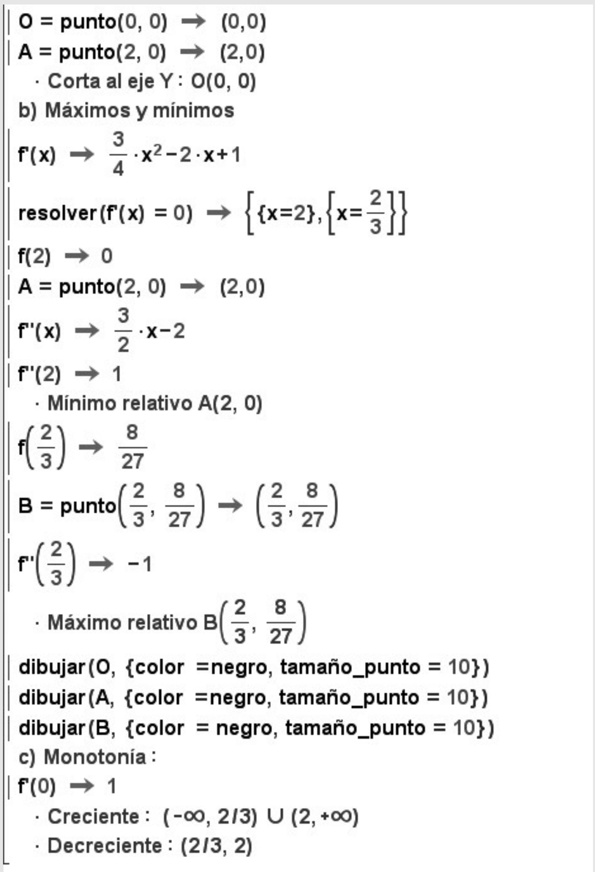
dibujar(f(x), {color = negro, anchura_línea = 2})

a) Corte con los ejes

$\text{factorizar}\left(\frac{x^3}{4} - x^2 + x\right) \rightarrow \frac{1}{4} \cdot x \cdot (x-2)^2$

resolver(f(x) = 0) → {{x=0}, {x=2}}

· Corta al eje X : O(0, 0) ; A(2, 0)



O = punto(0, 0) → (0,0)

A = punto(2, 0) → (2,0)

· Corta al eje Y : O(0, 0)

b) Máximos y mínimos

$f'(x) \rightarrow \frac{3}{4} \cdot x^2 - 2 \cdot x + 1$

$\text{resolver}(f'(x) = 0) \rightarrow \left\{\{x=2\}, \left\{x = \frac{2}{3}\right\}\right\}$

f(2) → 0

A = punto(2, 0) → (2,0)

$f''(x) \rightarrow \frac{3}{2} \cdot x - 2$

f''(2) → 1

· Mínimo relativo A(2, 0)

$f\left(\frac{2}{3}\right) \rightarrow \frac{8}{27}$

$B = \text{punto}\left(\frac{2}{3}, \frac{8}{27}\right) \rightarrow \left(\frac{2}{3}, \frac{8}{27}\right)$

$f''\left(\frac{2}{3}\right) \rightarrow -1$

· Máximo relativo $B\left(\frac{2}{3}, \frac{8}{27}\right)$

dibujar(O, {color =negro, tamaño_punto = 10})

dibujar(A, {color =negro, tamaño_punto = 10})

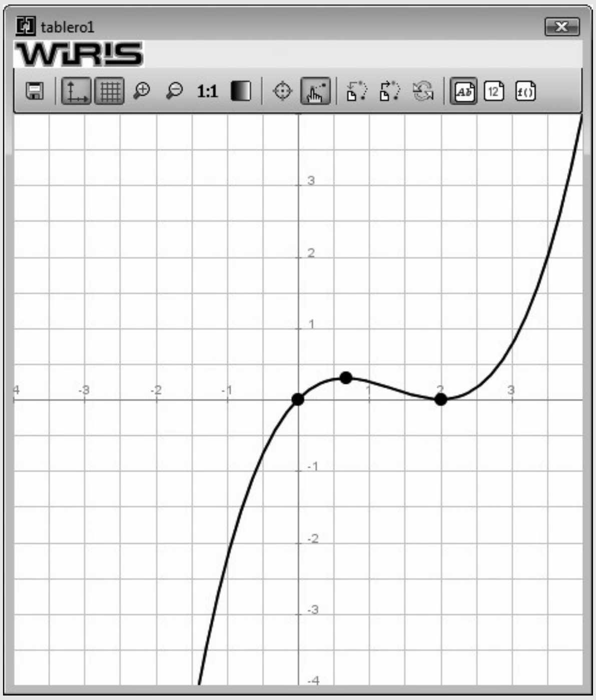
dibujar(B, {color = negro, tamaño_punto = 10})

c) Monotonía :

f'(0) → 1

· Creciente : (–∞, 2/3) ∪ (2, +∞)

· Decreciente : (2/3, 2)



67. Dada la función:

$$f(x) = \frac{8x}{x^2 + 4}$$

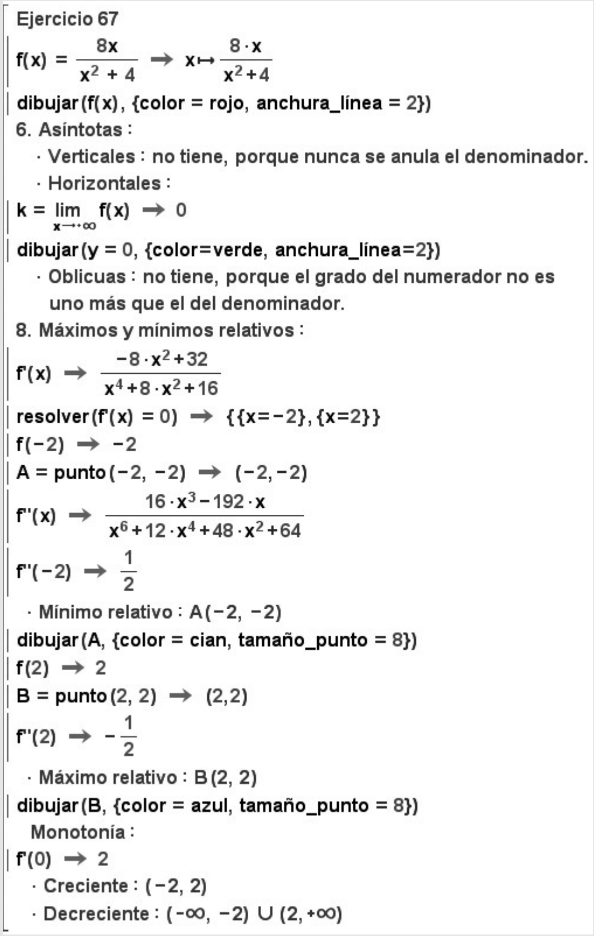
se pide:

a) asíntotas.

b) máximos y mínimos relativos, intervalos de crecimiento y decrecimiento.

c) dibujar su gráfica.

Solución:



Ejercicio 67

$f(x) = \frac{8x}{x^2+4} \Rightarrow x \mapsto \frac{8 \cdot x}{x^2+4}$

dibujar(f(x), {color = rojo, anchura_línea = 2})

6. Asíntotas:

· Verticales: no tiene, porque nunca se anula el denominador.

· Horizontales:

$k = \lim_{x \to +\infty} f(x) \Rightarrow 0$

dibujar(y = 0, {color=verde, anchura_línea=2})

· Oblicuas: no tiene, porque el grado del numerador no es uno más que el del denominador.

8. Máximos y mínimos relativos:

$f'(x) \Rightarrow \frac{-8 \cdot x^2+32}{x^4+8 \cdot x^2+16}$

resolver(f'(x) = 0) $\Rightarrow \{\{x=-2\},\{x=2\}\}$

$f(-2) \Rightarrow -2$

A = punto(−2, −2) $\Rightarrow (-2,-2)$

$f''(x) \Rightarrow \frac{16 \cdot x^3-192 \cdot x}{x^6+12 \cdot x^4+48 \cdot x^2+64}$

$f''(-2) \Rightarrow \frac{1}{2}$

· Mínimo relativo: A(−2, −2)

dibujar(A, {color = cian, tamaño_punto = 8})

$f(2) \Rightarrow 2$

B = punto(2, 2) $\Rightarrow (2,2)$

$f''(2) \Rightarrow -\frac{1}{2}$

· Máximo relativo: B(2, 2)

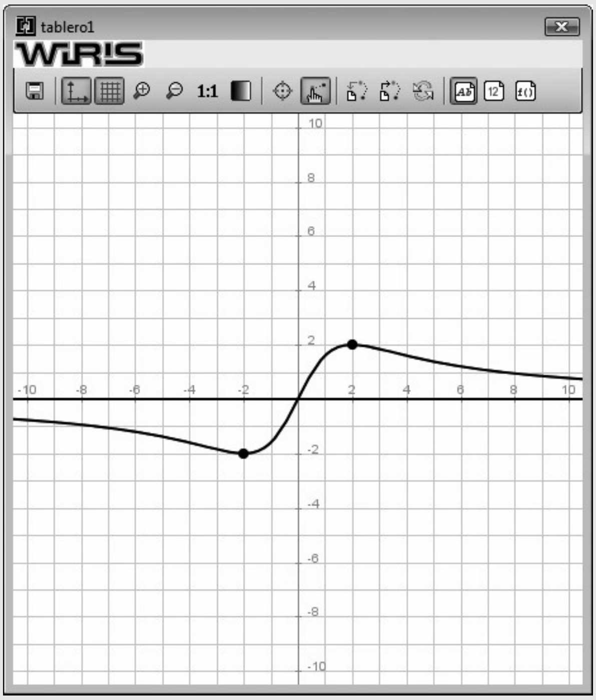
dibujar(B, {color = azul, tamaño_punto = 8})

Monotonía:

$f'(0) \Rightarrow 2$

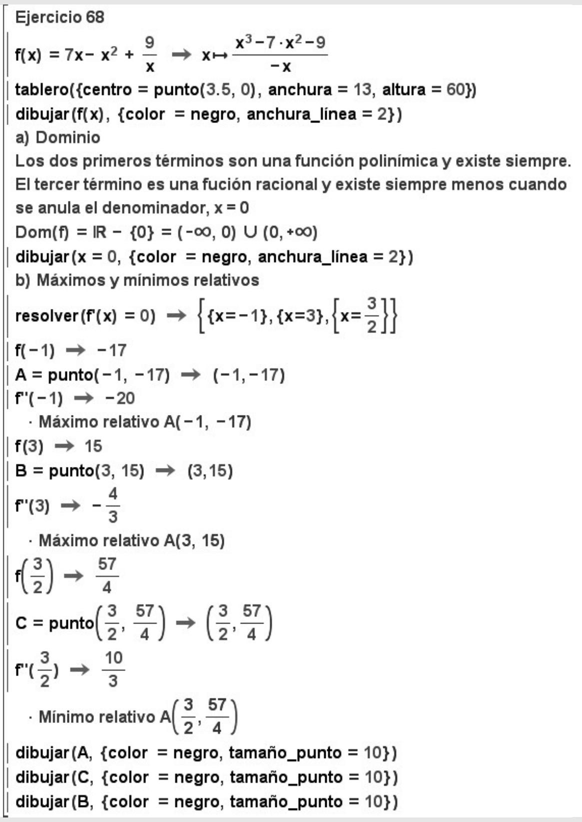
· Creciente: (−2, 2)

· Decreciente: (−∞, −2) ∪ (2, +∞)



68. Dada la función: $f(x) = 7x - x^2 + \frac{9}{x}$

razona a qué es igual el dominio de la función f(x) y di los puntos en los que alcanza máximo o mínimo relativo.



Ejercicio 68

$f(x) = 7x - x^2 + \frac{9}{x} \Rightarrow x \mapsto \frac{x^3-7 \cdot x^2-9}{-x}$

tablero({centro = punto(3.5, 0), anchura = 13, altura = 60})

dibujar(f(x), {color = negro, anchura_línea = 2})

a) Dominio

Los dos primeros términos son una función polinímica y existe siempre.
El tercer término es una fución racional y existe siempre menos cuando se anula el denominador, x = 0

Dom(f) = ℝ − {0} = (−∞, 0) ∪ (0, +∞)

dibujar(x = 0, {color = negro, anchura_línea = 2})

b) Máximos y mínimos relativos

resolver(f'(x) = 0) $\Rightarrow \left\{\{x=-1\},\{x=3\},\left\{x=\frac{3}{2}\right\}\right\}$

$f(-1) \Rightarrow -17$

A = punto(−1, −17) $\Rightarrow (-1,-17)$

$f''(-1) \Rightarrow -20$

· Máximo relativo A(−1, −17)

$f(3) \Rightarrow 15$

B = punto(3, 15) $\Rightarrow (3,15)$

$f''(3) \Rightarrow -\frac{4}{3}$

· Máximo relativo A(3, 15)

$f\left(\frac{3}{2}\right) \Rightarrow \frac{57}{4}$

C = punto$\left(\frac{3}{2}, \frac{57}{4}\right) \Rightarrow \left(\frac{3}{2}, \frac{57}{4}\right)$

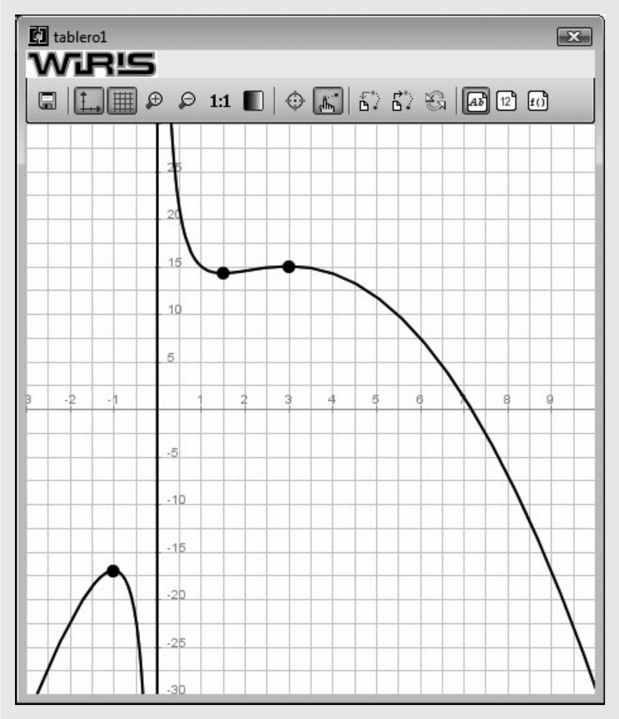
$f''\left(\frac{3}{2}\right) \Rightarrow \frac{10}{3}$

· Mínimo relativo A$\left(\frac{3}{2}, \frac{57}{4}\right)$

dibujar(A, {color = negro, tamaño_punto = 10})

dibujar(C, {color = negro, tamaño_punto = 10})

dibujar(B, {color = negro, tamaño_punto = 10})



69. Dada la función: $f(x) = \dfrac{x^2}{4 - x^2}$

dibuja la gráfica estudiando:

a) Dominio y puntos de corte con los ejes de coordenadas.

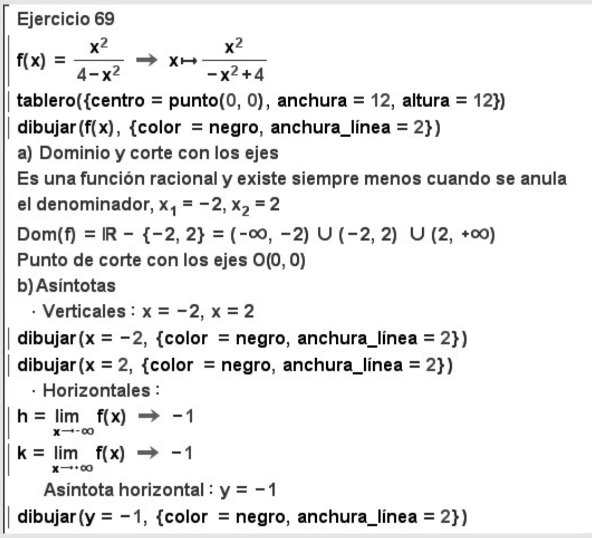
b) Ecuación de sus asíntotas.

c) Máximos y mínimos relativos.

d) Intervalos de crecimiento y decrecimiento.

e) Utiliza la información anterior para representarla gráficamente.

Solución:



Ejercicio 69

$f(x) = \dfrac{x^2}{4-x^2} \rightarrow x \mapsto \dfrac{x^2}{-x^2+4}$

tablero({centro = punto(0, 0), anchura = 12, altura = 12})

dibujar(f(x), {color = negro, anchura_línea = 2})

a) Dominio y corte con los ejes

Es una función racional y existe siempre menos cuando se anula el denominador, $x_1 = -2, x_2 = 2$

Dom(f) = $\mathbb{R} - \{-2, 2\} = (-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, +\infty)$

Punto de corte con los ejes O(0, 0)

b) Asíntotas

· Verticales : x = −2, x = 2

dibujar(x = −2, {color = negro, anchura_línea = 2})

dibujar(x = 2, {color = negro, anchura_línea = 2})

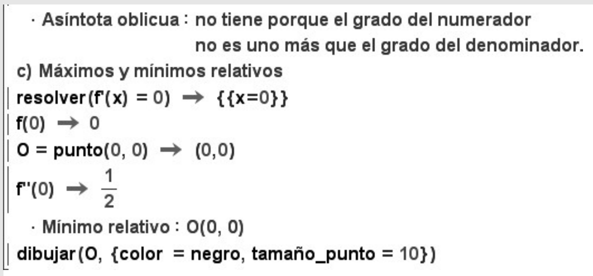
· Horizontales :

$h = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) \rightarrow -1$

$k = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) \rightarrow -1$

Asíntota horizontal : y = −1

dibujar(y = −1, {color = negro, anchura_línea = 2})



· Asíntota oblicua : no tiene porque el grado del numerador no es uno más que el grado del denominador.

c) Máximos y mínimos relativos

resolver(f'(x) = 0) → {{x=0}}

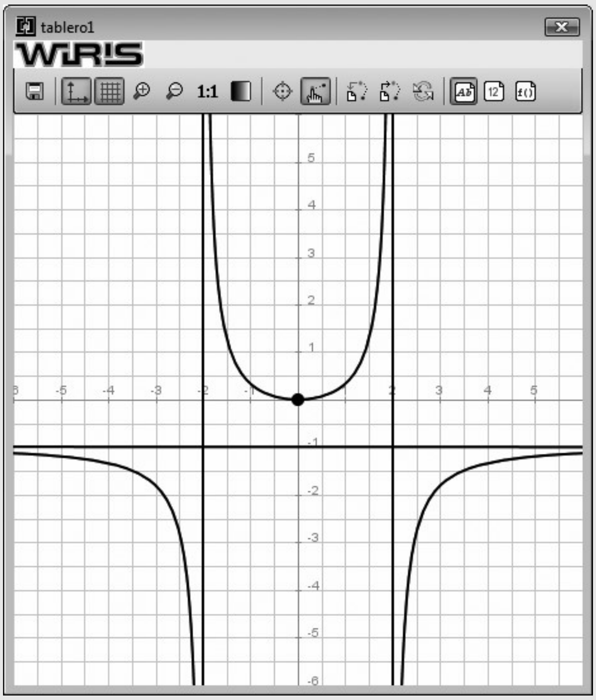
f(0) → 0

O = punto(0, 0) → (0,0)

$f''(0) \rightarrow \dfrac{1}{2}$

· Mínimo relativo : O(0, 0)

dibujar(O, {color = negro, tamaño_punto = 10})

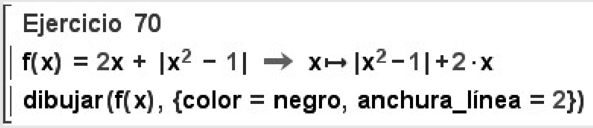


70. Dada la función:

$$f(x) = 2x + |x^2 - 1|$$

dibuja la gráfica de f(x)

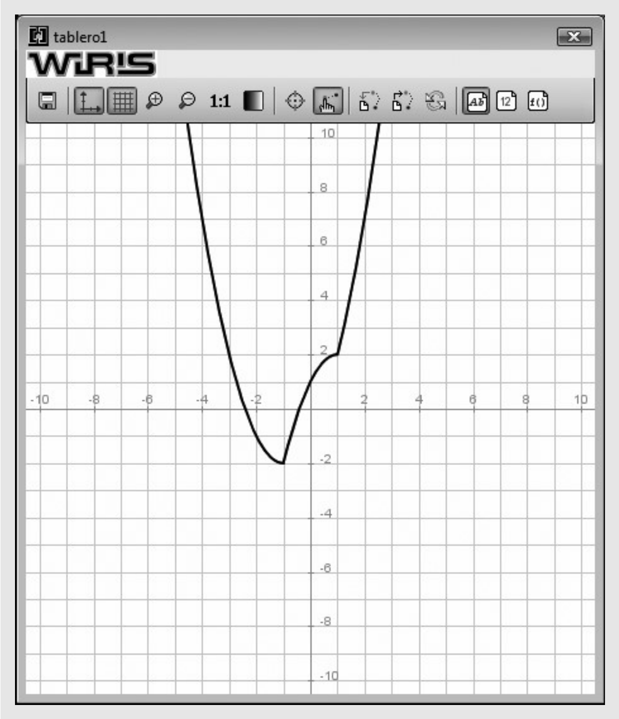
Solución:

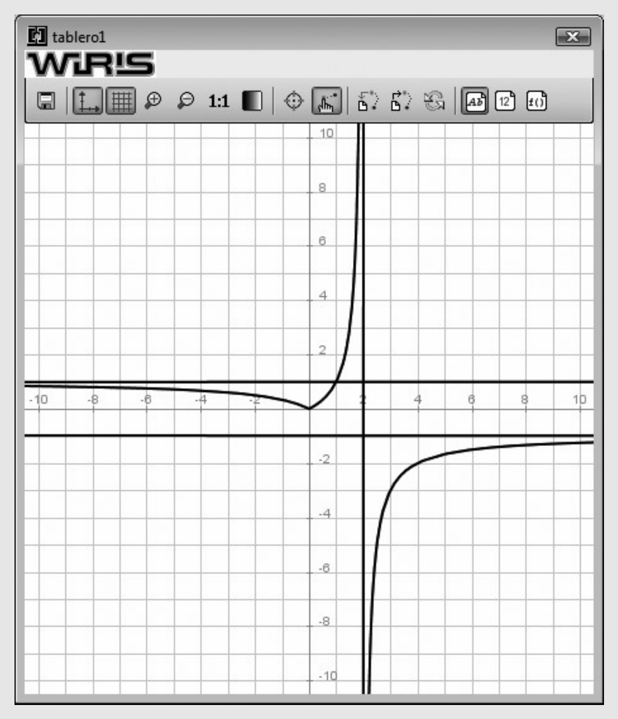


Ejercicio 70

$f(x) = 2x + |x^2 - 1| \rightarrow x \mapsto |x^2-1| + 2\cdot x$

dibujar(f(x), {color = negro, anchura_línea = 2})



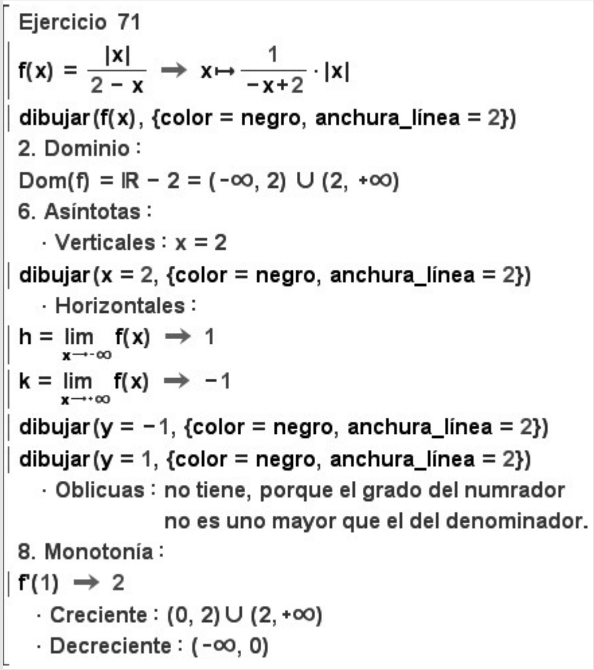


71. Dibuja la gráfica de la función:

$$f(x) = \frac{|x|}{2 - x}$$

e indica su dominio, asíntotas e intervalos de crecimiento y decrecimiento.

Solución:



Ejercicio 71

$f(x) = \dfrac{|x|}{2-x} \rightarrow x \mapsto \dfrac{1}{-x+2} \cdot |x|$

dibujar(f(x), {color = negro, anchura_línea = 2})

2. Dominio:

$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - 2 = (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$

6. Asíntotas:

· Verticales: $x = 2$

dibujar(x = 2, {color = negro, anchura_línea = 2})

· Horizontales:

$h = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) \rightarrow 1$

$k = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) \rightarrow -1$

dibujar(y = −1, {color = negro, anchura_línea = 2})

dibujar(y = 1, {color = negro, anchura_línea = 2})

· Oblicuas: no tiene, porque el grado del numrador no es uno mayor que el del denominador.

8. Monotonía:

$f'(1) \rightarrow 2$

· Creciente: $(0, 2) \cup (2, +\infty)$

· Decreciente: $(-\infty, 0)$