

5

Vectores en el espacio



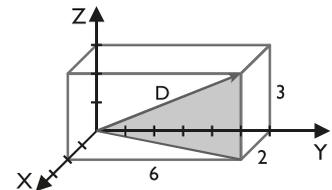
1. Operaciones con vectores

■ Piensa y calcula

Calcula mentalmente la longitud de la diagonal del ortoedro aplicando el teorema de Pitágoras en el espacio.

Solución:

$$L = \sqrt{6^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{49} = 7 \text{ unidades}$$



● Aplica la teoría

1. Calcula el módulo de los siguientes vectores:

- a) $\vec{v}(8, 4, 1)$ b) $\vec{v}(-2, 9, 6)$
 c) $\vec{v}(4, -2, 0)$ d) $\vec{v}(-3, -1, 4)$

Solución:

- a) $|\vec{v}| = \sqrt{8^2 + 4^2 + 1^2} = 9$
 b) $|\vec{v}| = \sqrt{(-2)^2 + 9^2 + 6^2} = 11$
 c) $|\vec{v}| = \sqrt{4^2 + (-2)^2 + 0^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$
 d) $|\vec{v}| = \sqrt{(-3)^2 + (-1)^2 + 4^2} = \sqrt{26}$

2. Se sabe que un vector del espacio es $\vec{v} = 4\mathbf{i} - 12\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Determina los valores posibles de la coordenada z sabiendo que el $|\vec{v}| = 13$

Solución:

$$|\vec{v}| = 13$$

$$\sqrt{4^2 + (-12)^2 + z^2} = 13$$

$$z^2 + 160 = 169$$

$$z = \sqrt{9} = \pm 3$$

3. Calcula un vector unitario en la dirección del vector \vec{v} en los siguientes casos:

- a) $\vec{v}(1, 2, 2)$ b) $\vec{v}(-3, 1, 2)$

Solución:

- a) $|\vec{v}| = 3$ b) $|\vec{v}| = \sqrt{14}$
- $$\vec{u}\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) \qquad \qquad \vec{u}\left(\frac{-3}{\sqrt{14}}, \frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}\right)$$

4. Dados los vectores $\vec{u}(3, -2, 5)$ y $\vec{v}(-1, 4, -6)$, calcula:

- a) $2\vec{u}$ b) $-\vec{v}$
 c) $\vec{u} + \vec{v}$ d) $\vec{u} - \vec{v}$

Solución:

- a) $2\vec{u} = 2(3, -2, 5) = (6, -4, 10)$
 b) $-\vec{v} = (1, -4, 6)$
 c) $\vec{u} + \vec{v} = (3, -2, 5) + (-1, 4, -6) = (2, 2, -1)$
 d) $\vec{u} - \vec{v} = (3, -2, 5) - (-1, 4, -6) = (4, -6, 11)$

5. Dados los vectores $\vec{u}(1, -4, -3)$, $\vec{v}(2, 5, -1)$ y $\vec{w}(-6, 0, 5)$, calcula:

- a) $\vec{u} + \vec{v} - \vec{w}$ b) $2\vec{u} - \vec{v} + \vec{w}$

Solución:

- a) $\vec{u} + \vec{v} - \vec{w} = (1, -4, -3) + (2, 5, -1) - (-6, 0, 5) = (9, 1, -9)$
 b) $2\vec{u} - \vec{v} + \vec{w} = 2(1, -4, -3) - (2, 5, -1) + (-6, 0, 5) = (-6, -13, 0)$

6. Dados los vectores $\vec{u}(1, 0, -2)$, $\vec{v}(3, 4, -1)$, $\vec{w}(1, -1, 3)$ y $\vec{x}(8, 5, 9)$, calcula el valor de a , b y c para que:

$$\vec{x} = a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w}$$

Solución:

$$(8, 5, 9) = a(1, 0, -2) + b(3, 4, -1) + c(1, -1, 3)$$

$$\left. \begin{array}{l} a + 3b + c = 8 \\ 4b - c = 5 \\ -2a - b + 3c = 9 \end{array} \right\} \Rightarrow a = -1, b = 2, c = 3$$

2. Problemas de vectores

■ Piensa y calcula

Expresa el vector $\vec{u}(1, 2, 3)$ como combinación lineal de los vectores $\vec{v}(2, -1, 5)$ y $\vec{w}(-1, 3, -2)$

Solución:

$$\vec{u} = \vec{v} + \vec{w}$$

$$(1, 2, 3) = (2, -1, 5) + (-1, 3, -2)$$

● Aplica la teoría

7. Dados los puntos $A(3, -1, 2)$ y $B(-1, 2, 1)$, calcula los vectores siguientes:

a) \vec{AB}

b) \vec{BA}

¿Qué relación hay entre los dos vectores?

Solución:

a) $\vec{AB}(-4, 3, -1)$

b) $\vec{BA}(4, -3, 1)$

Los vectores son opuestos.

8. Calcula el punto medio del segmento definido por los puntos siguientes:

$$A(6, -5, 3) \text{ y } B(4, -3, 7)$$

Solución:

$$M(5, -4, 5)$$

9. Calcula el baricentro del triángulo cuyos vértices son los puntos siguientes:

$$A(2, 1, -4), B(-5, 1, 3) \text{ y } C(6, 7, -5)$$

Solución:

$$G(1, 3, -2)$$

10. Calcula el centro de gravedad del tetraedro cuyos vértices son los puntos siguientes:

$$A(1, 2, -1), B(3, 1, 3), C(2, -3, 5) \text{ y } D(6, -4, 1)$$

Solución:

$$G(3, -1, 2)$$

11. Las coordenadas de tres vértices consecutivos de un paralelogramo son:

$$A(4, 7, -3), B(5, 1, -2) \text{ y } C(3, 2, -4)$$

Calcula las coordenadas del vértice D

Solución:

$$\text{El vector } \vec{OD} = \vec{OA} + \vec{BC}$$

$$\vec{BC}(-2, 1, -2)$$

$$\vec{OD} = (4, 7, -3) + (-2, 1, -2) = (2, 8, -5)$$

12. Estudia si el vector $\vec{a}(-6, 15, 9)$ se puede expresar como combinación lineal de $\vec{u}(3, -1, 2)$, $\vec{v}(4, 3, -1)$ y $\vec{w}(-2, 5, 1)$

Solución:

$$\vec{a} = x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w}$$

$$(-6, 15, 9) = x(3, -1, 2) + y(4, 3, -1) + z(-2, 5, 1)$$

$$\left. \begin{array}{l} 3x + 4y - 2z = -6 \\ -x + 3y + 5z = 15 \\ 2x - y + z = 9 \end{array} \right\} \Rightarrow x = 2, y = -1, z = 4$$

3. Producto escalar

■ Piensa y calcula

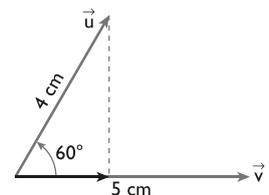
El módulo del vector \vec{u} mide 4 cm y el módulo del vector \vec{v} mide 5 cm. Si los vectores forman un ángulo de 60° , calcula la longitud de la proyección del vector \vec{u} sobre el vector \vec{v}

Solución:

$$\cos 60^\circ = \frac{\text{proy}_{\vec{v}} \vec{u}}{|\vec{u}|}$$

$$\text{proy}_{\vec{v}} \vec{u} = |\vec{u}| \cos 60^\circ$$

$$\text{proy}_{\vec{v}} \vec{u} = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2 \text{ unidades.}$$



● Aplica la teoría

19. Calcula el producto vectorial de los siguientes vectores:

a) $\vec{u}(1, -2, 4)$ y $\vec{v}(-2, 1, -3)$

b) $\vec{u}(4, 0, -1)$ y $\vec{v}(1, -1, 2)$

Solución:

$$\text{a) } \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = (2, -5, -3)$$

$$\text{b) } \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 4 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = (-1, -9, -4)$$

20. Dados los vectores $\vec{u}(2, -3, 1)$, $\vec{v}(3, 1, 2)$ y $\vec{w}(1, 2, 3)$, calcula:

a) $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w}$ b) $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$

Solución:

a) $\vec{u} \times \vec{v} = (-7, -1, 11)$

$(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} = (-25, 32, -13)$

b) $\vec{v} \times \vec{w} = (-1, -7, 5)$

$\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = (-8, -11, -17)$

21. Halla un vector perpendicular a los vectores siguientes:

$\vec{u}(2, -1, 0)$ y $\vec{v}(5, 1, -2)$

Solución:

$\vec{u} \times \vec{v} = (2, 4, 7)$

22. Sean dos vectores \vec{a} y \vec{b} perpendiculares entre sí. Si $|\vec{a}| = 3$ y $|\vec{b}| = 4$, calcula:

$(\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} - \vec{b})$

Solución:

$$\begin{aligned} (\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} - \vec{b}) &= \vec{a} \times \vec{a} - \vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{a} - \vec{b} \times \vec{b} = \\ &= 2\vec{b} \times \vec{a} = 2|\vec{b}| \cdot |\vec{a}| \operatorname{sen} 90^\circ = \\ &= 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 1 = 24 \end{aligned}$$

23. Dados los vectores $\vec{u}(3, -1, -2)$ y $\vec{v}(1, 2, -1)$, halla:

a) $\vec{u} \times \vec{v}$

b) $(2\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{v}$

Solución:

a) $\vec{u} \times \vec{v} = (5, 1, 7)$

b) $(2\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{v} = (7, 0, -5)$

$(2\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{v} = (10, 2, 14)$

24. Halla el área del paralelogramo definido por los vectores:

$\vec{AB}(2, -2, -3)$ y $\vec{AC}(2, 0, 3)$

Solución:

$\vec{AB} \times \vec{AD} = (-6, -12, 4)$

Área = $|\vec{AB} \times \vec{AD}| = 14$ unidades cuadradas.

25. Calcula el área del triángulo ABC tal que:

$A(1, 2, 1)$, $B(1, -1, 0)$ y $C(2, 1, 1)$

Solución:

$\vec{AB}(0, -3, -1)$

$\vec{AC}(1, -1, 0)$

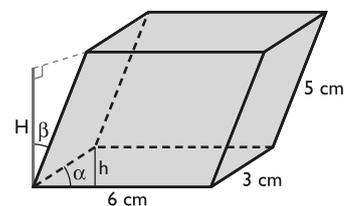
$\vec{AB} \times \vec{AC} = (-1, -1, 3)$

Área = $\frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}| = \frac{\sqrt{11}}{2} = 1,66$ unidades cuadradas.

5. Producto mixto

■ Piensa y calcula

Calcula el volumen del paralelepípedo de la figura en función de los ángulos α y β



Solución:

$V = A_B \cdot H$

$A_B = 6 \cdot 3 \operatorname{sen} \alpha$

$H = 5 \cos \beta$

$V = 6 \cdot 3 \cdot 5 \operatorname{sen} \alpha \cos \beta = 90 \operatorname{sen} \alpha \cos \beta$

● Aplica la teoría

26. Calcula el producto mixto de los vectores siguientes:

- a) $\vec{u}(1, -1, 3), \vec{v}(-2, 2, 1), \vec{w}(3, -2, 5)$
 b) $\vec{u}(-2, 5, -4), \vec{v}(-4, 1, -2), \vec{w}(1, 5, -1)$

Solución:

$$\text{a) } [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 5 \end{vmatrix} = -7$$

$$\text{b) } [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} -2 & 5 & -4 \\ -4 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & -1 \end{vmatrix} = 36$$

27. Determina si los vectores siguientes son linealmente dependientes o coplanarios:

- a) $\vec{u}(2, 3, -1), \vec{v}(1, -1, 3), \vec{w}(1, 9, -11)$
 b) $\vec{u}(3, -2, 1), \vec{v}(2, 1, 2), \vec{w}(3, -1, -2)$

Solución:

- a) $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 0 \Rightarrow \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ son linealmente dependientes.
 b) $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = -25 \Rightarrow \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ son linealmente independientes.

28. Calcula el volumen de un paralelepípedo que tenga cuatro de sus vértices en los puntos siguientes:

- a) $A(2, 3, 1), B(4, 1, -2), C(6, 3, 7)$ y $D(-5, -4, 8)$
 b) $A(2, -1, 1), B(5, 5, 4), C(3, 2, -1)$ y $D(4, 1, 3)$

Solución:

- a) $\vec{AB}(2, -2, -3), \vec{AC}(4, 0, 6), \vec{AD}(-7, -7, 7)$
 Volumen = $|\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}| = 308$ unidades cúbicas.
 b) $\vec{AB}(3, 6, 3), \vec{AC}(1, 3, -2), \vec{AD}(2, 2, 2)$
 Volumen = $|\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}| = 18$ unidades cúbicas.

29. Calcula el volumen del tetraedro determinado por los puntos:

$$A(1, 0, 0), B(1, 1, 0), C(1, 1, 1) \text{ y } D(2, 1, 3)$$

Solución:

$$\vec{AB}(0, 1, 0), \vec{AC}(0, 1, 1), \vec{AD}(1, 1, 3)$$

$$\text{Volumen} = \frac{1}{6} |\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}| = \frac{1}{6} = 0,17 \text{ unidades cúbicas.}$$

30. Calcula el valor de k para que el volumen del paralelepípedo definido por los siguientes vectores:

$$\vec{u}(1, -1, 1), \vec{v}(1, 1, 1) \text{ y } \vec{w}(2, 3, k)$$

sea igual a 12 unidades cúbicas.

Solución:

Volumen 12 unidades cúbicas.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & k \end{vmatrix} = 2k - 4$$

$$|2k - 4| = 12$$

De la igualdad del valor absoluto se obtienen dos igualdades:

$$2k - 4 = 12 \Rightarrow k = 8$$

$$2k - 4 = -12 \Rightarrow k = -4$$

31. El volumen de un tetraedro es de 5 unidades cúbicas.

Si tres de sus vértices se encuentran en los siguientes puntos:

$$A(2, 1, -1), B(3, 0, 1) \text{ y } C(2, -1, 3)$$

halla las coordenadas del vértice D sabiendo que está en el eje Y

Solución:

Volumen 5 unidades cúbicas.

El vértice D es de la forma $D(0, y, 0)$.

$$\vec{AB}(1, -1, 2)$$

$$\vec{AC}(0, -2, 4)$$

$$\vec{AD}(-2, y - 1, 1)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 4 \\ -2 & y - 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 4y$$

$$\frac{1}{6} |2 - 4y| = 5 \Rightarrow |2 - 4y| = 30$$

De la igualdad del valor absoluto se obtienen dos igualdades:

$$\bullet 2 - 4y = 30 \Rightarrow y = -7$$

El vértice es: $D(0, -7, 0)$

$$\bullet 2 - 4y = -30 \Rightarrow y = 8$$

El vértice es: $D(0, 8, 0)$

Preguntas tipo test

Contesta en tu cuaderno:

- 1** Dados los puntos $A(1, 1, 0)$, $B(1, 1, 2)$ y $C(1, -1, 1)$
- los tres puntos están alineados.
 - los tres puntos no están alineados.
 - En el espacio, tres puntos no pueden estar alineados.
 - Ninguna de las anteriores es cierta.
- 2** Dados los puntos $A(1, 1, 0)$, $B(1, 1, 2)$ y $C(1, -1, 1)$, el área del triángulo que determinan es:
- 4 unidades cuadradas.
 - 8 unidades cuadradas.
 - 2 unidades cuadradas.
 - No forman triángulo.
- 3** Los vectores $\vec{a} = (3, 1, 2)$, $\vec{b} = (0, 1, 1)$ y $\vec{c} = (0, 1, -1)$
- son linealmente dependientes.
 - son linealmente independientes.
 - son paralelos.
 - Ninguna de las anteriores es cierta.
- 4** Dados los puntos $A(1, 1, 1)$, $B(1 + \lambda, 2, 1 - \lambda)$ y $C(1 + \lambda, 1 + \lambda, 2 + \lambda)$, donde $\lambda \in \mathbb{R}$, los vectores \vec{AB} y \vec{AC} :
- son paralelos para $\lambda = 0$
 - son paralelos para $\lambda = 1$
 - forman un ángulo de 30° para todo valor de λ
 - forman un ángulo de 90° para todo valor de λ
- 5** Dados los puntos $A(1, 1, 1)$, $B(2, 2, 0)$ y $C(2, 2, 3)$, la hipotenusa del triángulo rectángulo de vértices A , B y C es igual a:
- 3
 - 1
 - Los puntos A , B y C no forman triángulo rectángulo
 - 6
- 6** Sabiendo que tres de los vértices de un paralelogramo son los puntos $A(1, 1, 2)$, $B(1, 1, 4)$ y $C(3, 3, 6)$, el área del mismo es:
- 4 unidades cuadradas.
 - $\sqrt{2}$ unidades cuadradas.
 - $4 + \sqrt{2}$ unidades cuadradas.
 - $4\sqrt{2}$ unidades cuadradas.
- 7** Sea A el punto medio del segmento de extremos $P(3, 2, 1)$ y $Q(-1, 0, 1)$. El volumen del tetraedro de vértices A , $B(2, 1, 3)$, $C(1, 2, 3)$ y $D(3, 4, 1)$ es:
- $\frac{3}{5}$ unidades cúbicas.
 - 10 unidades cúbicas.
 - $\frac{5}{3}$ unidades cúbicas.
 - $\frac{1}{3}$ unidades cúbicas.
- 8** Un vector \vec{a} que tiene la misma dirección que el vector $\vec{b} = (-1, 1, 1)$ y que forma con el vector $\vec{c} = (1, 1, -1)$ un paralelogramo de 4 unidades cuadradas de área es:
- $\vec{a}_1 = (-2, 2, 2)$, $\vec{a}_2 = (2, -2, -2)$
 - $\vec{a}_1 = (-\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2})$, $\vec{a}_2 = (\sqrt{2}, -\sqrt{2}, -\sqrt{2})$
 - $\vec{a} = (1, -1, -1)$
 - Ninguna de las anteriores.
- 9** El volumen del paralelepípedo definido por los vectores \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} es:
- 6 unidades cúbicas.
 - 3 unidades cúbicas.
 - 1 unidad cúbica.
 - no existe paralelepípedo.
- 10** Dados los vectores $\vec{u} = (2, -1, a)$, $\vec{v} = (b, -2, 2)$, los valores de \mathbf{a} y \mathbf{b} que hacen que los vectores \vec{u} y \vec{v} sean ortogonales y $|\vec{u}| = |\vec{v}|$ son:
- $a = 2, b = -1$
 - $a = -1, b = 2$
 - $a = 1, b = -2$
 - $a = -2, b = 1$

Ejercicios y problemas

1. Operaciones con vectores

32. Calcula el módulo de los siguientes vectores:

- a) $\vec{v}(3, -4, 12)$ b) $\vec{v}(-4, 5, 20)$
c) $\vec{v}(1, -5, 1)$ d) $\vec{v}(-3, -2, 5)$

Solución:

- a) $|\vec{v}| = 13$
b) $|\vec{v}| = 21$
c) $|\vec{v}| = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$
d) $|\vec{v}| = \sqrt{38}$

33. Se sabe que un vector del espacio es:

$$\vec{v} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

Determina los valores posibles de la coordenada z sabiendo que el $|\vec{v}| = 7$

Solución:

$$|\vec{v}| = 7$$
$$\sqrt{2^2 + (-3)^2 + z^2} = 7$$
$$z^2 + 13 = 49 \Rightarrow z = \sqrt{36} = \pm 6$$

34. Calcula un vector unitario en la dirección del vector \vec{v} en los siguientes casos:

- a) $\vec{v}(1, -2, 5)$ b) $\vec{v}(-3, 4, 0)$

Solución:

- a) $|\vec{v}| = \sqrt{30}$
 $\vec{u}\left(\frac{1}{\sqrt{30}}, -\frac{2}{\sqrt{30}}, \frac{5}{\sqrt{30}}\right)$
b) $|\vec{v}| = 5$
 $\vec{u}\left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 0\right)$

35. Dados los vectores $\vec{u}(-5, 1, 3)$ y $\vec{v}(2, -4, -1)$, calcula:

- a) $3\vec{u}$ b) $-2\vec{v}$
c) $2\vec{u} + 3\vec{v}$ d) $3\vec{u} - \vec{v}$

Solución:

- a) $3\vec{u} = 3(-5, 1, 3) = (-15, 3, 9)$
b) $-2\vec{v} = -2(2, -4, -1) = (-4, 8, 2)$
c) $2\vec{u} + 3\vec{v} = 2(-5, 1, 3) + 3(2, -4, -1) = (-4, -10, 3)$
d) $3\vec{u} - \vec{v} = 3(-5, 1, 3) - (2, -4, -1) = (-17, 7, 10)$

36. Dados los vectores $\vec{u}(2, -1, 1)$, $\vec{v}(2, 4, 3)$ y $\vec{w}(-2, 0, 1)$, calcula:

- a) $3\vec{u} + 2\vec{v} - \vec{w}$ b) $\vec{u} - 3\vec{v} + \vec{w}$

Solución:

- a) $3\vec{u} + 2\vec{v} - \vec{w} = 3(2, -1, 1) + 2(2, 4, 3) - (-2, 0, 1) = (12, 5, 8)$
b) $\vec{u} - 3\vec{v} + \vec{w} = (2, -1, 1) - 3(2, 4, 3) + (-2, 0, 1) = (-6, -13, -7)$

37. Dados los vectores $\vec{u}(2, 0, 1)$, $\vec{v}(-1, 3, 2)$, $\vec{w}(3, -1, 4)$ y $\vec{x}(4, 2, 17)$, calcula el valor de a , b y c para que:

$$\vec{x} = a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w}$$

Solución:

$$(4, 2, 17) = a(2, 0, 1) + b(-1, 3, 2) + c(3, -1, 4)$$
$$\left. \begin{array}{l} 2a - b + 3c = 4 \\ 3b - c = 2 \\ a + 2b + 4c = 17 \end{array} \right\} \Rightarrow a = -3, b = 2, c = 4$$

2. Problemas de vectores

38. Calcula el punto medio del segmento definido por los puntos siguientes:

$$A(4, -7, 5) \text{ y } B(6, -1, 1)$$

Solución:

$$M(5, -4, 3)$$

39. Calcula el baricentro del triángulo cuyos vértices son los puntos siguientes:

$$A(3, 1, -5), B(-1, 2, 3) \text{ y } C(1, 3, -7)$$

Solución:

$$G(1, 2, -3)$$

40. Calcula el centro de gravedad del tetraedro cuyos vértices son los puntos siguientes:

$$A(3, 2, -4), B(1, -1, 2), C(3, -2, 7) \text{ y } D(1, -3, 7)$$

Solución:

$$G(2, -1, 3)$$

41. Los puntos $A(1, 1, 1)$, $B(2, 2, 2)$ y $C(1, 3, 3)$ son tres vértices consecutivos de un paralelogramo. Halla las coordenadas del cuarto vértice.

Solución:

$$\text{El vector } \vec{OD} = \vec{OA} + \vec{BC}$$
$$\vec{BC}(-1, 1, 1)$$
$$\vec{OD} = (1, 1, 1) + (-1, 1, 1) = (0, 2, 2)$$

42. Comprueba que los vectores $\vec{u}(1, 1, 3)$, $\vec{v}(-1, 2, 0)$ y $\vec{w}(1, 3, 5)$ son linealmente dependientes.

Solución:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

Los vectores \vec{u} , \vec{v} y \vec{w} son linealmente dependientes.

3. Producto escalar

43. Dados los vectores $\vec{u}(-1, -1, 2)$ y $\vec{v}(2, -3, 1)$
- calcula el ángulo que forman \vec{u} y \vec{v}
 - calcula la proyección \vec{u} sobre \vec{v}

Solución:

$$\begin{aligned} \text{a) } \cos \alpha &= \frac{-1 \cdot 2 + (-1) \cdot (-3) + 2 \cdot 1}{\sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 2^2} \cdot \sqrt{2^2 + (-3)^2 + 1^2}} = \\ &= \frac{3}{\sqrt{84}} \Rightarrow \alpha = 70^\circ 53' 36'' \end{aligned}$$

$$\text{b) } \text{proy}_{\vec{v}} \vec{u} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|}$$

$$\begin{aligned} \text{proy}_{\vec{v}} \vec{u} &= \frac{-1 \cdot 2 + (-1) \cdot (-3) + 2 \cdot 1}{\sqrt{2^2 + (-3)^2 + 1^2}} = \frac{3}{\sqrt{14}} = \\ &= \frac{3\sqrt{14}}{14} = 0,80 \text{ unidades.} \end{aligned}$$

44. Sean los puntos $P(1, 0, 1)$, $Q(0, 1, -3)$ y $R(0, 3, 0)$. Halla la proyección ortogonal del vector \vec{PQ} sobre el vector \vec{PR}

Solución:

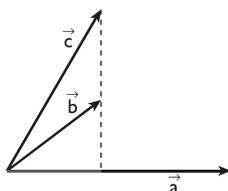
$$\vec{PQ}(-1, 1, -4)$$

$$\vec{PR}(-1, 3, -1)$$

$$\text{proy}_{\vec{PR}} \vec{PQ} = \frac{\vec{PQ} \cdot \vec{PR}}{|\vec{PR}|}$$

$$\begin{aligned} \text{proy}_{\vec{PR}} \vec{PQ} &= \frac{-1 \cdot (-1) + 1 \cdot 3 + (-4) \cdot (-1)}{\sqrt{(-1)^2 + 3^2 + (-1)^2}} = \frac{8}{\sqrt{11}} = \\ &= \frac{8\sqrt{11}}{11} = 2,41 \text{ unidades.} \end{aligned}$$

45. Sean los vectores \vec{a} , \vec{b} y \vec{c} de la figura. Deduce si son iguales los productos escalares $\vec{a} \cdot \vec{b}$ y $\vec{a} \cdot \vec{c}$



Solución:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \text{ proy}_{\vec{a}} \vec{b}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = |\vec{a}| \text{ proy}_{\vec{a}} \vec{c}$$

Como se observa en el dibujo, $\text{proy}_{\vec{a}} \vec{b} = \text{proy}_{\vec{a}} \vec{c}$. Por tanto:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c}$$

46. Prueba que si dos vectores \vec{a} y \vec{b} tienen el mismo módulo, entonces $|(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b})| = 0$

Solución:

$$|\vec{a}| = |\vec{b}|$$

Se tiene:

$$\begin{aligned} |(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b})| &= |\vec{a} \cdot \vec{a} - \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{a} - \vec{b} \cdot \vec{b}| = \\ &= ||\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2| = 0 \end{aligned}$$

47. Sean los puntos $A(1, -5, k)$, $B(3, k, 1)$ y $C(k, -5, 2)$ los tres vértices del triángulo ABC. Determina el valor de k para que el triángulo sea rectángulo en A

Solución:

$$\vec{AB}(2, k + 5, 1 - k)$$

$$\vec{AC}(k - 1, 0, 2 - k)$$

Si el triángulo es rectángulo en A:

$$\vec{AB} \perp \vec{AC} \Rightarrow \vec{AB} \cdot \vec{AC} = 0$$

$$2(k - 1) + (k + 5)(2 - k) = 0 \Rightarrow k^2 - k = 0$$

$$k = 0, k = 1$$

4. Producto vectorial

48. Dados los vectores $\vec{u}(1, 2, 0)$ y $\vec{v}(0, 1, 2)$, calcula:
- el producto vectorial de \vec{u} y \vec{v}
 - un vector unitario ortogonal a \vec{u} y \vec{v}
 - el área del paralelogramo que tiene por lados los vectores \vec{u} y \vec{v}

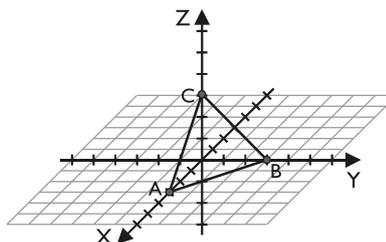
Solución:

$$\text{a) } \vec{w} = \vec{u} \times \vec{v} = (4, -2, 1)$$

$$\text{b) } \vec{w} = \sqrt{21} \Rightarrow \text{vector unitario: } \left(\frac{4}{\sqrt{21}}, -\frac{2}{\sqrt{21}}, \frac{1}{\sqrt{21}} \right)$$

$$\text{c) } \text{Área} = |\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{21} \text{ unidades cuadradas.}$$

49. Calcula el área del triángulo ABC del dibujo.



Ejercicios y problemas

Solución:

$$A(3, 0, 0), B(0, 3, 0) \text{ y } C(0, 0, 3)$$

$$\vec{AB}(-3, 3, 0), \vec{AC}(-3, 0, 3)$$

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = (9, 9, 9)$$

$$\text{Área} = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}| = \frac{9\sqrt{3}}{2} = 7,79 \text{ unidades cuadradas.}$$

50. Halla el área del triángulo ABC cuyos vértices son los puntos siguientes:

a) $A(1, -1, 3); B(1, 2, 1)$ y $C(1, 0, -1)$

b) $A(-1, 0, 0), B(1, 0, 1)$ y $C(0, 2, 3)$

Solución:

a) $\vec{AB}(0, 3, -2), \vec{AC}(0, 1, -4)$

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = (-10, 0, 0)$$

$$\text{Área} = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}| = 5 \text{ unidades cuadradas.}$$

b) $\vec{AB}(2, 0, 1), \vec{AC}(1, 2, 3)$

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = (-2, -5, 4)$$

$$\text{Área} = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}| = \frac{3\sqrt{5}}{2} = 3,35 \text{ unidades cuadradas.}$$

51. Resuelve la siguiente ecuación vectorial:

$$\vec{v} \times (2, 1, -1) = (1, 3, 5)$$

sabiendo que $|\vec{v}| = \sqrt{6}$

Solución:

Sea $\vec{x}(x, y, z)$

$$\vec{x} \times (2, 1, -1) = (1, 3, 5)$$

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (1, 3, 5)$$

Se obtiene el siguiente sistema:

$$\begin{cases} -y - z = 1 \\ x + 2z = 3 \\ x - 2y = 5 \end{cases}$$

que es equivalente a $\begin{cases} x + 2z = 3 \\ y + z = -1 \end{cases}$

Como $|\vec{x}| = \sqrt{6} \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 6$, se obtiene el sistema:

$$\begin{cases} x + 2z = 3 \\ y + z = -1 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 6 \end{cases}$$

Soluciones: $x = 1, y = -2, z = 1$

$$x = \frac{5}{3}, y = -\frac{5}{3}, z = \frac{2}{3}$$

52. Sea $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 4$ y el ángulo formado por los vectores \vec{a} y \vec{b} 30° . Calcula el área del triángulo construido sobre los vectores $\vec{a} - 2\vec{b}$ y $3\vec{a} + 2\vec{b}$

Solución:

$$\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot |(\vec{a} - 2\vec{b}) \times (3\vec{a} + 2\vec{b})|$$

$$(\vec{a} - 2\vec{b}) \times (3\vec{a} + 2\vec{b}) =$$

$$= 3\vec{a} \times \vec{a} + 2\vec{a} \times \vec{b} - 6\vec{b} \times \vec{a} - 4\vec{b} \times \vec{b} = 8\vec{a} \times \vec{b}$$

$$|8\vec{a} \times \vec{b}| = 8 \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin 30^\circ = 8 \cdot 4 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} = 64 u^2$$

$$\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot 64 = 32 u^2$$

5. Producto mixto

53. Determina si los vectores siguientes son linealmente dependientes o coplanarios:

$$\vec{u}(2, -1, 2), \vec{v}(1, 2, -3) \text{ y } \vec{w}(3, -4, 7)$$

Solución:

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & -4 & 7 \end{vmatrix} = 0$$

$\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ son linealmente dependientes o coplanarios.

54. Dados los vectores $\vec{u}(0, 1, 0), \vec{v}(0, 3, 0)$ y $\vec{w}(1, 0, 1)$, justifica si se cumple la igualdad $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = 0$. Interpreta el resultado.

Solución:

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Los tres vectores son coplanarios o linealmente dependientes.

55. Calcula el volumen de un paralelepípedo que tenga cuatro de sus vértices en los puntos $A(0, 0, 0), B(0, 1, 2), C(1, 5, 3)$ y $D(1, 0, 1)$

Solución:

$$\vec{AB}(0, 1, 2), \vec{AC}(1, 5, 3), \vec{AD}(1, 0, 1)$$

$$\text{Volumen} = |[\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}]| = 8 \text{ unidades cúbicas.}$$

56. Se consideran los puntos $A(1, 1, 1), B(0, -2, 2), C(-1, 0, 2)$ y $D(2, -1, -2)$. Calcula el volumen del tetraedro cuyos vértices son los puntos ABCD

Solución:

$$\vec{AB}(-1, -3, 1), \vec{AC}(-2, -1, 1), \vec{AD}(1, -2, -3)$$

$$\text{Volumen} = \frac{1}{6} |[\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}]| = \frac{15}{6} = \frac{5}{2} = 2,5 u^3$$

Para ampliar

57. Sean A, B y C tres puntos del espacio tridimensional que verifican la relación

$$\vec{CB} = -3\vec{CA}$$

- a) Calcula el valor que toma k en la expresión

$$\vec{AC} = k \cdot \vec{AB}$$

- b) Si $A(1, 2, -1)$ y $B(9, 6, 11)$, halla las coordenadas del punto C que cumple la relación de partida.

Solución:

a)



Si $\vec{CB} = -3\vec{CA}$, los dos vectores están en la misma dirección y en sentido opuesto.

$$\vec{AB} = \vec{AC} + \vec{CB} = -\vec{CA} - 3\vec{CA} = -4\vec{CA} = 4\vec{AC}$$

$$\vec{AC} = \frac{1}{4}\vec{AB} \Rightarrow k = \frac{1}{4}$$

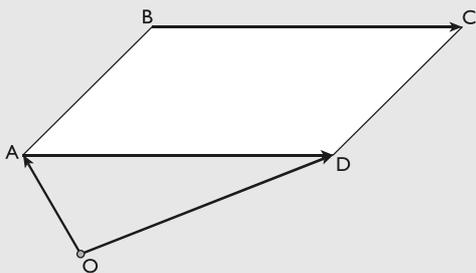
- b) $\vec{AB}(8, 4, 12)$

$$\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{AC} = \vec{OA} + \frac{1}{4}\vec{AB}$$

$$\vec{OC} = (1, 2, -1) + \frac{1}{4}(8, 4, 12) = (3, 3, 2)$$

58. Dados los puntos $A(3, 3, 5)$, $B(3, 3, 2)$ y $C(0, 6, -1)$, que son los vértices consecutivos de un paralelogramo, halla las coordenadas del vértice D

Solución:



El vector $\vec{OD} = \vec{OA} + \vec{BC}$

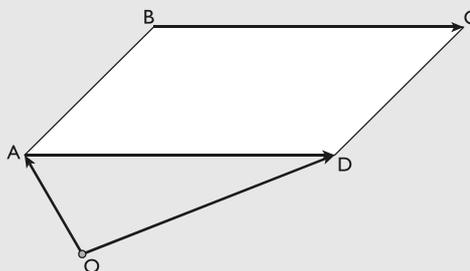
$$\vec{BC}(-3, 3, -3)$$

$$\vec{OD} = (3, 3, 5) + (-3, 3, -3) = (0, 6, 2)$$

$$D(0, 6, 2)$$

59. Dados los puntos $A(3, -4, 7)$, $B(-5, 3, -2)$ y $C(1, 2, -3)$, que son tres vértices del paralelogramo ABCD, halla el cuarto vértice, D, que es opuesto al vértice B

Solución:



El vector $\vec{OD} = \vec{OA} + \vec{BC}$

$$\vec{BC}(6, -1, -1)$$

$$\vec{OD} = (3, -4, 7) + (6, -1, -1) = (9, -5, 6)$$

$$D(9, -5, 6)$$

60. Sean los vectores $\vec{u}(-1, 2, 3)$, $\vec{v}(2, -5, -2)$, $\vec{w}(4, 1, 3)$ y $\vec{x}(4, 1, -48)$

- a) ¿Se puede expresar \vec{w} como combinación lineal de \vec{u} y \vec{v} ? Si es así, escribe dicha combinación lineal; y si no es así, explica por qué.
- b) ¿Se puede expresar \vec{x} como combinación lineal de \vec{u} y \vec{v} ? Si es así, escribe dicha combinación lineal; y si no es así, explica por qué.
- c) ¿Son \vec{u} , \vec{v} y \vec{x} linealmente independientes? Justifica la respuesta.

Solución:

a) $a\vec{u} + b\vec{v} = \vec{w}$

$$a(-1, 2, 3) + b(2, -5, -2) = (4, 1, 3)$$

$$\left. \begin{array}{l} -a + 2b = 4 \\ 2a - 5b = 1 \\ 3a - 2b = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{El sistema es incompatible.}$$

El vector \vec{w} es linealmente independiente de los vectores \vec{u} y \vec{v}

b) $a\vec{u} + b\vec{v} = \vec{x}$

$$a(-1, 2, 3) + b(2, -5, -2) = (4, 1, -48)$$

$$\left. \begin{array}{l} -a + 2b = 4 \\ 2a - 5b = 1 \\ 3a - 2b = 48 \end{array} \right\} \Rightarrow a = -22, b = -9$$

El vector \vec{x} es una combinación lineal de los vectores \vec{u} y \vec{v}

$$\vec{x} = -22\vec{u} - 9\vec{v}$$

- c) Los tres vectores son linealmente dependientes, como se ha demostrado en el apartado anterior.

61. Escribe el vector \vec{b} como combinación lineal de los vectores \vec{u} , \vec{v} y \vec{w} , siendo:

$$\vec{u}(1, -1, 2), \vec{v}(0, 2, 6), \vec{w}(-1, -1, 3) \text{ y } \vec{b}(-1, -7, 7)$$

Ejercicios y problemas

Solución:

$$\begin{aligned} x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w} &= \vec{b} \\ x(1, -1, 2) + y(0, 2, 6) + z(-1, -1, 3) &= (-1, -7, 7) \\ \left. \begin{aligned} x - z &= -1 \\ -x + 2y - z &= -7 \\ 2x + 6y + 3z &= 7 \end{aligned} \right\} &\Rightarrow x = 2, y = -1, z = 3 \end{aligned}$$

62. Expresa el vector $\vec{a}(2, -5, -5)$ como combinación lineal de los vectores $\vec{u}(3, 2, 5)$, $\vec{v}(2, 4, 7)$ y $\vec{w}(1, -3, -3)$

Solución:

$$\begin{aligned} x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w} &= \vec{a} \\ x(3, 2, 5) + y(2, 4, 7) + z(1, -3, -3) &= (2, -5, -5) \\ \left. \begin{aligned} 3x + 2y + z &= 2 \\ 2x + 4y - 3z &= -5 \\ 5x + 7y - 3z &= -5 \end{aligned} \right\} &\Rightarrow x = 1, y = -1, z = 1 \end{aligned}$$

63. Dados los vectores $\vec{u}(2, 3, 4)$, $\vec{v}(2, 1, 2)$ y $\vec{w}(1, 2, 1)$, estudia si el vector $\vec{x}(3, 3, 0)$ depende linealmente de los vectores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$

Solución:

$$\begin{aligned} a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} &= \vec{x} \\ a(2, 3, 4) + b(2, 1, 2) + c(1, 2, 1) &= (3, 3, 0) \\ \left. \begin{aligned} 2a + 2b + c &= 3 \\ 3a + b + 2c &= 3 \\ 4a + 2b + c &= 0 \end{aligned} \right\} &\Rightarrow a = -\frac{3}{2}, b = \frac{3}{2}, c = 3 \end{aligned}$$

El vector \vec{x} sí se puede poner como combinación lineal de \vec{u}, \vec{v} y \vec{w}

64. Determina los valores del parámetro k para los que los siguientes vectores de \mathbb{R}^3 :

$$(1, 1, k), (k, 3, 2) \text{ y } (0, 0, k)$$

son linealmente independientes. Justifica la respuesta.

Solución:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & k \\ k & 3 & 2 \\ 0 & 0 & k \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow k^2 - 3k = 0 \Rightarrow k = 0, k = 3$$

Para los valores $k = 0$ y $k = 3$, el determinante es cero. Por tanto, los vectores son linealmente dependientes.

Para los valores $k \neq 0$ y $k \neq 3$, los vectores son linealmente independientes.

65. Encuentra un vector \vec{w} cuya primera componente sea 2, y que sea perpendicular a los vectores $\vec{u}(1, -1, 3)$ y $\vec{v}(0, 1, -2)$

Solución:

$$\begin{aligned} \text{Sea } \vec{w}(2, y, z) \\ \vec{w} \perp \vec{u} &\Rightarrow \vec{w} \cdot \vec{u} = 0 \Rightarrow 2 - y + 3z = 0 \\ \vec{w} \perp \vec{v} &\Rightarrow \vec{w} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow y - 2z = 0 \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema, se tiene:

$$y = -4, z = -2$$

El vector es:

$$\vec{w}(2, -4, -2)$$

66. Calcula un vector unitario que sea ortogonal a los vectores $\vec{u}(1, 0, 2)$ y $\vec{v}(2, 1, 0)$

Solución:

$$\begin{aligned} \vec{w} &= \vec{u} \times \vec{v} \\ \vec{w} &= \vec{u} \times \vec{v} = (-2, 4, 1) \\ |\vec{w}| &= \sqrt{21} \end{aligned}$$

$$\text{Un vector unitario es: } \left(-\frac{2}{\sqrt{21}}, \frac{4}{\sqrt{21}}, \frac{1}{\sqrt{21}} \right)$$

67. Calcula el área del triángulo ABC en los siguientes casos:

- a) $A(1, 3, -4)$, $B(2, 0, -1)$ y $C(1, 3, 0)$
b) $A(1, -1, 3)$, $B(0, -2, 1)$ y $C(1, 1, 1)$

Solución:

$$\begin{aligned} \text{a) } \vec{AB}(1, -3, 3), \vec{AC}(0, 0, 4) \\ \vec{AB} \times \vec{AC} &= (-12, -4, 0) \\ \text{Área} &= \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}| = \frac{4\sqrt{10}}{2} = 2\sqrt{10} = 6,32 \text{ u}^2 \\ \text{b) } \vec{AB}(-1, -1, -2), \vec{AC}(0, 2, -2) \\ \vec{AB} \times \vec{AC} &= (6, -2, -2) \\ \text{Área} &= \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}| = \frac{2\sqrt{11}}{2} = \sqrt{11} = 3,32 \text{ u}^2 \end{aligned}$$

68. Calcula el volumen del tetraedro cuyos vértices son:

- a) $O(0, 0, 0)$, $A(-1, 0, 3)$, $B(2, 1, -1)$ y $C(-3, 2, 0)$
b) $A(3, 2, 1)$, $B(1, 2, 4)$, $C(4, 0, 3)$ y $D(1, 1, 7)$

Solución:

$$\begin{aligned} \text{a) } \vec{OA}(-1, 0, 3), \vec{OB}(2, 1, -1), \vec{OC}(-3, 2, 0) \\ \text{Volumen} &= \frac{1}{6} |[\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}]| = \frac{19}{6} = 3,17 \text{ u}^3 \\ \text{b) } \vec{AB}(-2, 0, 3), \vec{AC}(1, -2, 2), \vec{AD}(-2, -1, 6) \\ \text{Volumen} &= \frac{1}{6} |[\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}]| = \frac{5}{6} = 0,83 \text{ u}^3 \end{aligned}$$

Problemas

69. Determina un vector \vec{v} de \mathbb{R}^3 sabiendo que cumple las tres condiciones siguientes:
- La suma de sus coordenadas es 3
 - \vec{v} es combinación lineal de los vectores $(2, 2, 2)$ y $(-1, 1, 0)$
 - Los vectores $(1, 0, 1)$, $(0, 1, 0)$ y \vec{v} son linealmente dependientes.

Solución:

$$\vec{v}(x, y, z)$$

a) $x + y + z = 3$

b) $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2x + 2y - 4z = 0$

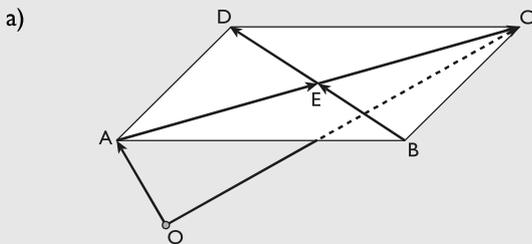
c) $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x - z = 0$

Resolviendo el sistema de las tres ecuaciones:

$$x = 1, y = 1, z = 1$$

70. Dos vértices consecutivos de un paralelogramo son $A(1, 1, 1)$ y $B(0, 2, 0)$. Si el centro del paralelogramo es $E(0, 0, 1)$, se pide:
- las coordenadas de los otros vértices.
 - el área del paralelogramo.

Solución:



Los puntos C y D deben ser simétricos de A y B con respecto al centro E, respectivamente. Se debe cumplir:

$$\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{AC}$$

$$\vec{AE}(-1, -1, 0)$$

$$\vec{AC} = 2 \vec{AE} = (-2, -2, 0)$$

$$\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{AC} = (1, 1, 1) + (-2, -2, 0) = (-1, -1, 1)$$

$$\vec{OD} = \vec{OB} + \vec{BD}$$

$$\vec{BD} = 2 \vec{BE} = (0, -4, 2)$$

$$\vec{OD} = \vec{OB} + \vec{BD} = (0, 2, 0) + (0, -4, 2) = (0, -2, 2)$$

b) $\vec{AB}(-1, 1, -1)$, $\vec{AD}(-1, -3, 1)$

$$\vec{AB} \times \vec{AD} = (-2, 2, 4)$$

$$\text{Área} = |\vec{AB} \times \vec{AD}| = 2\sqrt{6} = 4,90 \text{ u}^2$$

71. Sabiendo que $|\vec{u}| = 3$ y $|\vec{v}| = 5$, halla los posibles valores del parámetro real a para que los vectores $\vec{u} + a\vec{v}$ y $\vec{u} - a\vec{v}$ sean ortogonales.

Solución:

$$(\vec{u} + a\vec{v}) \cdot (\vec{u} - a\vec{v}) = 0$$

$$\vec{u} \cdot \vec{u} - a\vec{u} \cdot \vec{v} + a\vec{v} \cdot \vec{u} - a^2\vec{v} \cdot \vec{v} = 0$$

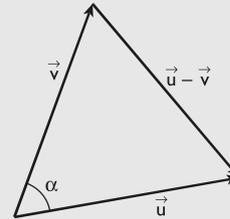
$$|\vec{u}|^2 - a^2|\vec{v}|^2 = 0$$

$$9 - 25a^2 = 0$$

$$a = \pm 3/5$$

72. ¿Qué ángulo deben formar dos vectores no nulos \vec{u} y \vec{v} para que ambos tengan el mismo módulo que su diferencia, $\vec{u} - \vec{v}$?

Solución:



Si $|\vec{u}| = |\vec{v}| = |\vec{u} - \vec{v}|$, el triángulo formado por dichos vectores es equilátero. Luego el ángulo $\alpha = 60^\circ$

73. Calcula los valores de x e y para que el vector $(x, y, 1)$ sea ortogonal a los vectores $(3, 2, 0)$ y $(2, 0, -1)$

Solución:

$$(x, y, 1) \cdot (3, 2, 0) = 0 \Rightarrow 3x + 2y = 0$$

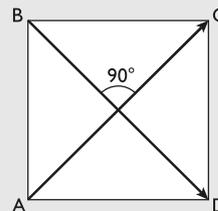
$$(x, y, 1) \cdot (2, 0, -1) = 0 \Rightarrow 2x - 1 = 0$$

Resolviendo el sistema de las dos ecuaciones:

$$x = \frac{1}{2}, y = -\frac{3}{4}$$

74. Demuestra que el cuadrilátero con los vértices en los puntos $A(-3, 5, 6)$, $B(1, -5, 7)$, $C(8, -3, -1)$ y $D(4, 7, -2)$ es un cuadrado.

Solución:



$$\vec{AC}(11, -8, -7)$$

$$\vec{BD}(3, 12, -9)$$

Ejercicios y problemas

Se tiene que cumplir que $|\vec{AC}| = |\vec{BD}|$ y que el ángulo que forman sea 90°

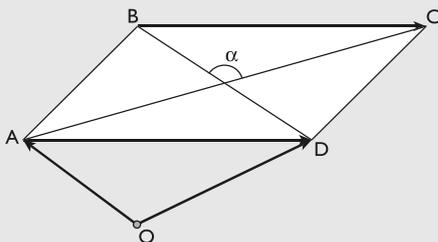
$$|\vec{AC}| = 3\sqrt{26}$$

$$|\vec{BD}| = 3\sqrt{26}$$

$$\vec{AC} \cdot \vec{BD} = 33 - 96 + 63 = 0 \Rightarrow \vec{AC} \perp \vec{BD}$$

75. Halla el ángulo α que forman las diagonales AC y BD de un paralelogramo si tres vértices están en los puntos A(2, 1, 3), B(5, 2, -1) y C(-3, 3, -3)

Solución:



Se calcula el vértice D:

$$\text{El vector } \vec{OD} = \vec{OA} + \vec{BC}$$

$$\vec{BC}(-8, 1, -2)$$

$$\vec{OD} = (2, 1, 3) + (-8, 1, -2) = (-6, 2, 1)$$

$$D(-6, 2, 1)$$

$$\vec{AC}(-5, 2, -6)$$

$$\vec{BD}(-11, 0, 2)$$

$$\cos \alpha = \frac{-5 \cdot (-11) + 2 \cdot 0 - 6 \cdot 2}{\sqrt{(-5)^2 + 2^2 + (-6)^2} \cdot \sqrt{(-11)^2 + 0^2 + 2^2}} =$$

$$= \frac{43}{\sqrt{65} \cdot \sqrt{125}} = \frac{43}{\sqrt{8125}}$$

$$\alpha = 61^\circ 30' 27''$$

76. Halla las coordenadas del vector $\vec{a}(x, y, z)$, que es perpendicular a los vectores $\vec{u}(2, 3, -1)$ y $\vec{v}(1, -2, 3)$ y que $\vec{a} \cdot \vec{w} = -6$, siendo $\vec{w}(2, -1, 1)$

Solución:

$$\vec{a}(x, y, z)$$

$$\vec{a} \cdot \vec{u} = 0 \Rightarrow 2x + 3y - z = 0$$

$$\vec{a} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow x - 2y + 3z = 0$$

$$\vec{a} \cdot \vec{w} = -6 \Rightarrow 2x - y + z = -6$$

Resolviendo el sistema:

$$x = -3, y = 3, z = 3$$

77. Un cuadrilátero tiene los vértices en los puntos A(1, -2, 2), B(1, 4, 0), C(-4, 1, 1) y D(-5, -5, 3). Demuestra que sus diagonales AC y BD son perpendiculares entre sí.

Solución:

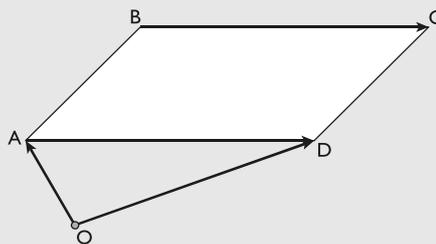
$$\vec{AC}(-5, 3, -1)$$

$$\vec{BD}(-6, -9, 3)$$

$$\vec{AC} \cdot \vec{BD} = 30 - 27 - 3 = 0 \Rightarrow \vec{AC} \perp \vec{BD}$$

78. Los puntos A(1, 1, 1), B(2, 2, 2) y C(1, 3, 3) son tres vértices consecutivos de un paralelogramo. Halla las coordenadas del cuarto vértice y calcula el área del paralelogramo.

Solución:



Se calcula el vértice D:

$$\text{El vector } \vec{OD} = \vec{OA} + \vec{BC}$$

$$\vec{BC}(-1, 1, 1)$$

$$\vec{OD} = (1, 1, 1) + (-1, 1, 1) = (0, 2, 2)$$

$$D(0, 2, 2)$$

$$\vec{AB}(1, 1, 1)$$

$$\vec{AD}(-1, 1, 1)$$

$$\text{Área} = |\vec{AB} \times \vec{AD}| = 2\sqrt{2} \text{ u}^2$$

Para profundizar

79. Dados los vectores \vec{a} , \vec{b} y \vec{c} tales que $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 1$ y $|\vec{c}| = 4$ y $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$, calcula la siguiente suma de productos escalares: $\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{a} \cdot \vec{c}$

Solución:

Si se multiplica $(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$, se tiene:

$$a) (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = 0, \text{ ya que } \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$$

$$b) (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) =$$

$$= \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a} + \vec{c} \cdot \vec{b} + \vec{c} \cdot \vec{c} =$$

$$= \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} + \vec{c} \cdot \vec{c} + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 2\vec{a} \cdot \vec{c} + 2\vec{b} \cdot \vec{c} =$$

$$= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 + 2(\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}) =$$

$$= 9 + 1 + 16 + 2(\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c})$$

Se tiene:

$$9 + 1 + 16 + 2(\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}) = 0$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c} = -13$$

80. Sean \vec{u} y \vec{v} vectores ortogonales y de módulo 1. Halla los posibles valores del parámetro real a para que los vectores $\vec{u} + a\vec{v}$ y $\vec{u} - a\vec{v}$ formen un ángulo de 60°

Solución:

$$\cos 60^\circ = \frac{(\vec{u} + a\vec{v})(\vec{u} - a\vec{v})}{|\vec{u} + a\vec{v}| \cdot |\vec{u} - a\vec{v}|}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot (-a\vec{v}) + (a\vec{v}) \cdot \vec{u} - a^2(\vec{v} \cdot \vec{v})}{\sqrt{(\vec{u} + a\vec{v}) \cdot (\vec{u} + a\vec{v})} \sqrt{(\vec{u} - a\vec{v}) \cdot (\vec{u} - a\vec{v})}}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{|\vec{u}|^2 - a(\vec{u} \cdot \vec{v}) + a(\vec{v} \cdot \vec{u}) - a^2|\vec{v}|^2}{\sqrt{|\vec{u}|^2 + a(\vec{u} \cdot \vec{v}) + a(\vec{v} \cdot \vec{u}) + a^2|\vec{v}|^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{|\vec{u}|^2 - a(\vec{u} \cdot \vec{v}) - a(\vec{v} \cdot \vec{u}) + a^2|\vec{v}|^2}}}$$

Teniendo en cuenta que:

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}|^2 = 1$$

$$\vec{v} \cdot \vec{v} = |\vec{v}|^2 = 1$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u} = 0$$

se tiene:

$$\frac{1}{2} = \frac{1 - a^2}{\sqrt{1 + a^2} \cdot \sqrt{1 + a^2}}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1 - a^2}{1 + a^2}$$

$$1 + a^2 = 2 - 2a^2$$

$$a^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow a = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$$

81. Sean los puntos $A(1, k, 0)$; $B(1, 1, k - 2)$ y $C(1, -1, k)$
- Comprueba que los tres puntos no están alineados, cualquiera que sea el valor que tome k
 - Halla el área del triángulo determinada por los tres puntos.

Solución:



- a) Si los tres puntos estuvieran alineados, los vectores \vec{AB} y \vec{BC} estarían en la misma dirección, es decir, sus coordenadas serían proporcionales:

$$\vec{AB}(0, 1 - k, k - 2)$$

$$\vec{BC}(0, -2, 2)$$

$$\frac{1 - k}{-2} = \frac{k - 2}{2}$$

$$2 - 2k = -2k + 4 \Rightarrow 2 = 4$$

Es una contradicción.

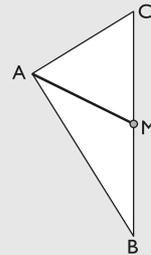
Luego los puntos no están alineados.

b) $\vec{AB} \times \vec{BC} = (-2, 0, 0)$

$$\text{Área} = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{BC}| = 1 \text{ unidad cuadrada.}$$

82. En el triángulo formado por los vértices $A(3, -1, 5)$, $B(4, 2, -5)$ y $C(-4, 0, 3)$, calcula la longitud de la mediana trazada desde el vértice A

Solución:



La longitud de la mediana es el módulo del vector \vec{AM} , siendo M el punto medio del lado BC

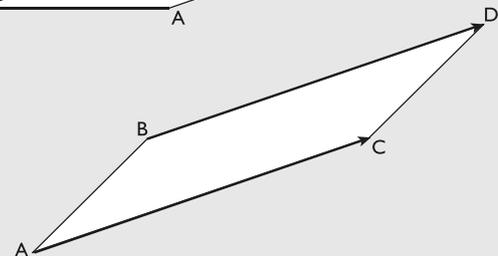
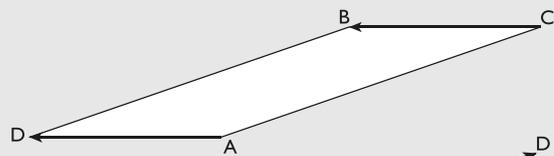
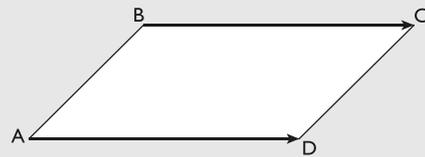
$$M(0, 1, -1)$$

$$\vec{AM}(-3, 2, -6)$$

$$|\vec{AM}| = 7 \text{ unidades.}$$

83. Dados los puntos $A(1, -1, 3)$, $B(1, 2, 1)$ y $C(1, 0, -1)$, halla las coordenadas de todos los puntos posibles D para que ABCD formen un paralelogramo.

Solución:



$$\vec{OD} = \vec{OA} + \vec{BC} = (1, -1, 3) + (0, -2, -2) = (1, -3, 1)$$

$$\vec{OD} = \vec{OA} + \vec{CB} = (1, -1, 3) + (0, 2, 2) = (1, 1, 5)$$

$$\vec{OD} = \vec{OB} + \vec{AC} = (1, 2, 1) + (0, 1, -4) = (1, 3, -3)$$

Ejercicios y problemas

84. Se considera el tetraedro cuyos vértices son los puntos $A(1, 0, 0)$, $B(1, 1, 1)$, $C(-2, 1, 0)$ y $D(0, 1, 3)$.

- Calcula el área del triángulo ABC
- Calcula el volumen del tetraedro ABCD

Solución:

a) $\vec{AB}(0, 1, 1)$

$\vec{AC}(-3, 1, 0)$

$$\text{Área} = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{19} \text{ u}^2$$

b) $\vec{AD}(-1, 1, 3)$

$$\text{Volumen} = \frac{1}{6} \cdot |[\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}]| = \frac{7}{6} = 1,17 \text{ u}^3$$

85. Calcula el volumen de una pirámide que tiene por base el triángulo ABC y por vértice el punto $D(3, -1, 1)$, siendo $A(5, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$ y $C(0, 0, -5)$

Solución:

$\vec{AB}(-5, 1, 0)$

$\vec{AC}(-5, 0, -5)$

$\vec{AD}(-2, -1, 1)$

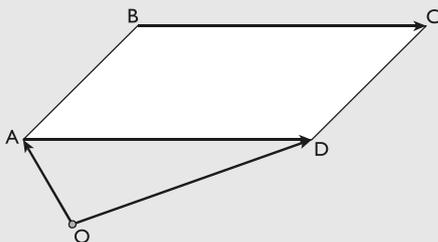
$$\text{Volumen} = \frac{1}{6} \cdot |[\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}]| = 20/3 = 6,67 \text{ u}^3$$

86. Los puntos $A(1, 0, -1)$, $B(3, 2, 1)$ y $C(-7, 1, 5)$ son los vértices consecutivos de un paralelogramo ABCD

- Halla las coordenadas del vértice D
- Halla el área del paralelogramo.

Solución:

$A(1, 0, -1)$, $B(3, 2, 1)$ y $C(-7, 1, 5)$



a) Se calcula el vértice D:

El vector $\vec{OD} = \vec{OA} + \vec{BC}$

$\vec{BC}(-10, -1, 4)$

$\vec{OD} = (1, 0, -1) + (-10, -1, 4) = (-9, -1, 3)$

$D(-9, -1, 3)$

b) $\vec{AB}(2, 2, 2)$

$\vec{AD}(-10, -1, 4)$

$\text{Área} = |\vec{AB} \times \vec{AD}| = 2\sqrt{302} = 34,76 \text{ u}^2$

87. Se consideran los puntos $A(0, 0, 0)$, $B(1, 2, 1)$, $C(2, 3, 1)$ y $D(5, 8, 3)$. Calcula el volumen del tetraedro cuyos vértices son los puntos ABCD. Interpreta el resultado. (No hay errores en los datos).

Solución:

$\vec{AB}(1, 2, 1)$

$\vec{AC}(2, 3, 1)$

$\vec{AD}(5, 8, 3)$

$$\text{Área} = \frac{1}{6} |[\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}]| = 0$$

Los vectores \vec{AB} , \vec{AC} y \vec{AD} son linealmente dependientes, es decir, los cuatro puntos, A, B, C y D, están en el mismo plano.

88. Se consideran los puntos $A(1, -3, 1)$; $B(2, 3, 1)$; $C(1, 3, -1)$ y $D(0, 0, 0)$. Calcula el volumen del tetraedro cuyos vértices son los puntos ABCD

Solución:

$\vec{AB}(1, 6, 0)$

$\vec{AC}(0, 6, -2)$

$\vec{AD}(-1, 3, -1)$

$$\text{Área} = \frac{1}{6} |[\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}]| = 2 \text{ unidades cúbicas.}$$

Paso a paso

89. Halla el módulo del vector $\vec{v}(3, -2, 5)$ y representa el vector.

Solución:

Resuelto en el libro del alumnado.

90. Halla el baricentro del triángulo cuyos vértices son los puntos $A(3, 2, 5)$, $B(-5, 1, 3)$ y $C(-1, 6, 4)$. Representa el triángulo y el baricentro.

Solución:

Resuelto en el libro del alumnado.

91. Calcula el valor de k para que el vector $(7, 4, k)$ sea perpendicular al vector $(-2, -1, 6)$. Representálos.

Solución:

Resuelto en el libro del alumnado.

92. Calcula el producto vectorial de los vectores $\vec{u}(3, -1, 2)$ y $\vec{v}(4, 2, 5)$. Representa los vectores y el producto vectorial.

Solución:

Resuelto en el libro del alumnado.

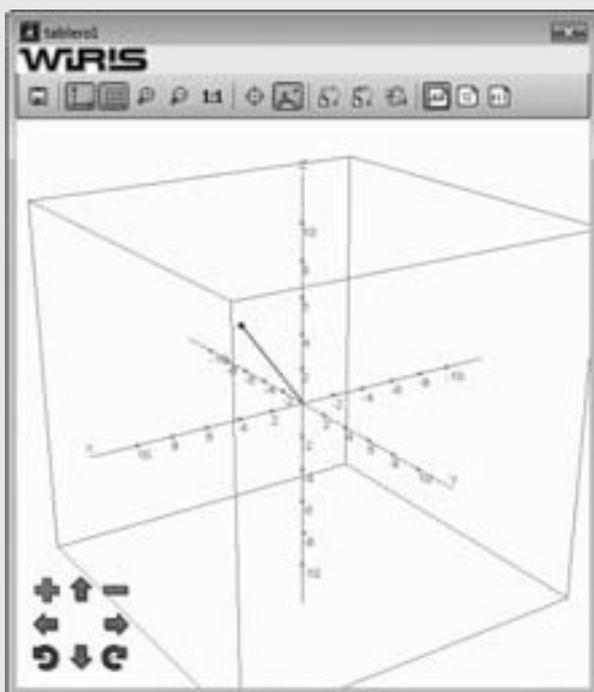
93. **Internet.** Abre: www.editorial-bruno.es y elige **Matemáticas, curso y tema.**

Practica

94. Dibuja el vector de posición del punto $P(2, -3, 4)$

Solución:

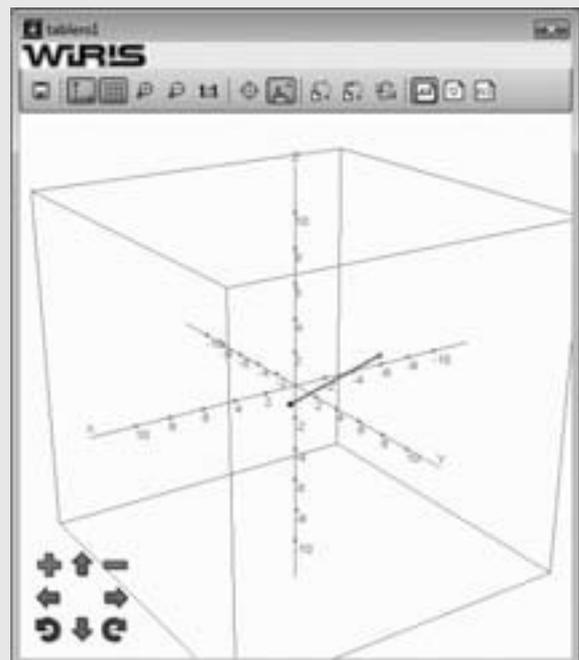
```
Ejercicio 94
O := punto(0, 0, 0) → punto(0,0,0)
P := punto(2, -3, 4) → punto(2,-3,4)
dibujar3d(P, {color = azul}) → tablero1
dibujar3d(segmento(O, P), {color = rojo, anchura_linea = 2})
```



95. Dados los puntos $A(3, 4, 1)$ y $B(-2, 5, 3)$, representa el vector \vec{AB}

Solución:

```
Ejercicio 95
A := punto(3, 4, 1) → (3,4,1)
B := punto(-2, 5, 3) → (-2,5,3)
dibujar3d(A, {color = azul}) → tablero1
dibujar3d(B, {color = verde}) → tablero1
dibujar3d(segmento(A, B), {color = rojo, anchura_linea = 2})
```

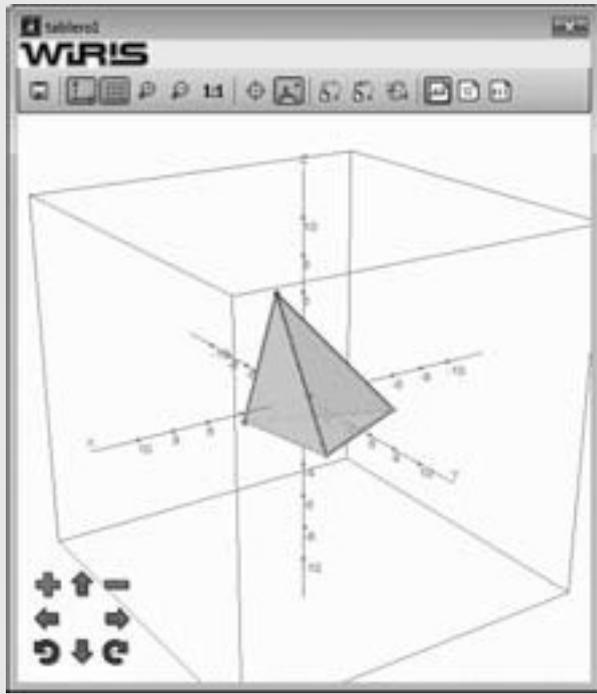


96. Calcula el centro de gravedad del tetraedro cuyos vértices son los puntos $A(2, -3, -2)$, $B(2, 5, -1)$, $C(-3, 4, 0)$ y $D(3, 2, 7)$. Dibuja el tetraedro y el centro de gravedad.

Solución:

```
Ejercicio 96
A := punto(2, -3, -2) → punto(2, -3, -2)
B := punto(2, 5, -1) → punto(2, 5, -1)
C := punto(-3, 4, 0) → punto(-3, 4, 0)
D := punto(3, 2, 7) → punto(3, 2, 7)
G := (A + B + C + D) / 4 → (A + B + C + D) / 4

dibujar3d(A, {color = verde}) → tablero1
dibujar3d(B, {color = cian}) → tablero1
dibujar3d(C, {color = rosa}) → tablero1
dibujar3d(D, {color = magenta}) → tablero1
dibujar3d(G, {color = rojo}) → tablero1
dibujar3d(segmento(A, B), {color = azul, anchura_linea = 2})
dibujar3d(segmento(A, C), {color = azul, anchura_linea = 2})
dibujar3d(segmento(A, D), {color = azul, anchura_linea = 2})
dibujar3d(segmento(B, C), {color = azul, anchura_linea = 2})
dibujar3d(segmento(B, D), {color = azul, anchura_linea = 2})
dibujar3d(segmento(C, D), {color = azul, anchura_linea = 2})
dibujar3d(poligono(A, B, C), {color = amarillo, llenar = cierto})
dibujar3d(poligono(A, B, D), {color = cian, llenar = cierto})
dibujar3d(poligono(A, C, D), {color = naranja, llenar = cierto})
dibujar3d(poligono(B, C, D), {color = rosa, llenar = cierto})
```



97. Halla el producto escalar de los vectores $\vec{u}(5, -3, 2)$ y $\vec{v}(2, 1, 4)$

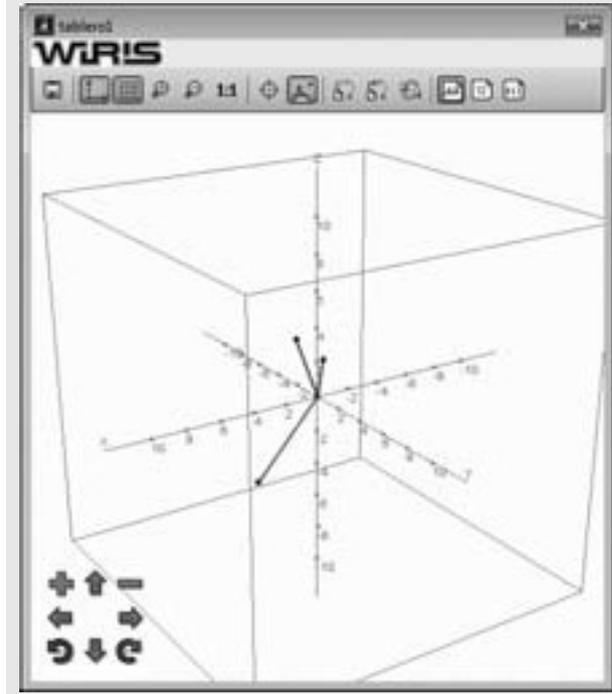
Solución:

```
Ejercicio 97
[5, -3, 2] · [2, 1, 4] → 15
```

98. Halla un vector perpendicular a los vectores $\vec{u}(1, 2, 3)$ y $\vec{v}(2, 1, 4)$. Representa los tres vectores.

Solución:

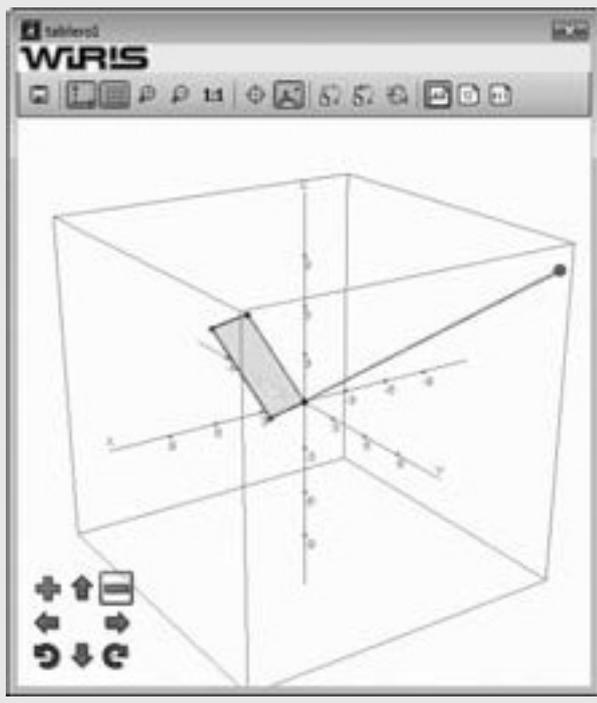
```
Ejercicio 98
[1, 2, 3] × [2, 1, 4] → [5, 2, -3]
O := punto(0, 0, 0) → punto(0, 0, 0)
A := punto(1, 2, 3) → punto(1, 2, 3)
B := punto(2, 1, 4) → punto(2, 1, 4)
C := punto(5, 2, -3) → punto(5, 2, -3)
dibujar3d(O, {color = azul}) → tablero1
dibujar3d(A, {color = azul}) → tablero1
dibujar3d(B, {color = azul}) → tablero1
dibujar3d(C, {color = azul}) → tablero1
dibujar3d(segmento(O, A), {color = azul, anchura_linea = 2})
dibujar3d(segmento(O, B), {color = azul, anchura_linea = 2})
dibujar3d(segmento(O, C), {color = rojo, anchura_linea = 2})
```



99. Halla y dibuja el área del paralelogramo definido por los vectores $\vec{AB}(2, -3, 5)$ y $\vec{AC}(3, 1, 0)$.

Solución:

```
Ejercicio 99
[2, -3, 5] * [3, 1, 0] => [-5, 15, 11]
|[-5, 15, 11]| => sqrt(371)
sqrt(371) => 19.261
Área = 19,26 u²
A := punto(0, 0, 0) => punto(0,0,0)
B := punto(2, -3, 5) => punto(2,-3,5)
C := punto(3, 1, 0) => punto(3,1,0)
D := B + C => B+C
E := punto(-5, 15, 11) => punto(-5,15,11)
dibujar3d(A, {color = negro}) => tablero1
dibujar3d(B, {color = azul}) => tablero1
dibujar3d(C, {color = rojo}) => tablero1
dibujar3d(D, {color = magenta}) => tablero1
dibujar3d(E, {color = rojo, tamaño_punto = 10}) => tablero1
dibujar3d(segmento(A, B), {color = azul, anchura_linea = 2})
dibujar3d(segmento(A, C), {color = azul, anchura_linea = 2})
dibujar3d(segmento(B, D), {color = azul, anchura_linea = 2})
dibujar3d(segmento(C, D), {color = azul, anchura_linea = 2})
dibujar3d(poligono(A, B, D, C), {color = amarillo, llenar = cierto})
dibujar3d(segmento(A, E), {color = rojo, anchura_linea = 2})
```



100. Calcula el producto mixto de los vectores $\vec{u}(1, 2, -3)$, $\vec{v}(4, 1, 1)$ y $w(5, -2, 6)$

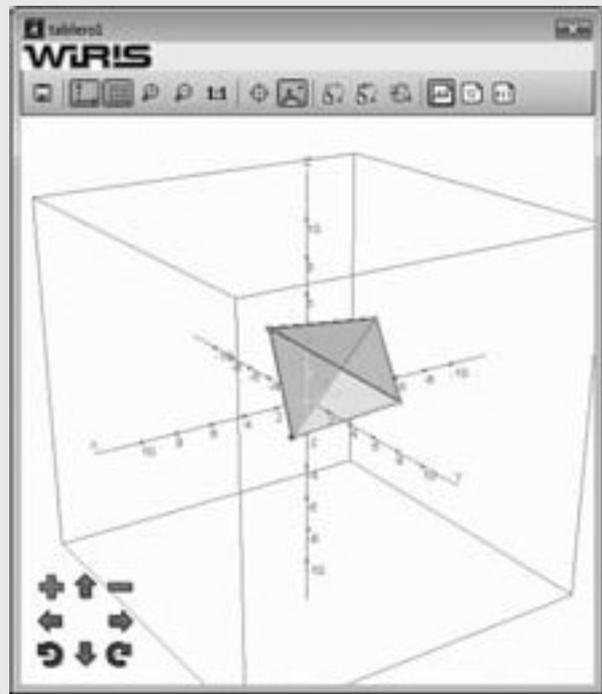
Solución:

```
Ejercicio 100
| 1 2 -3 |
| 4 1 1  | => 9
| 5 -2 6  |
```

101. Halla el volumen del tetraedro definido por los puntos $A(1, 0, -2)$, $B(3, 1, 5)$, $C(-4, 3, 0)$, $D(-6, -2, 3)$. Dibuja el tetraedro.

Solución:

```
Ejercicio 101
A := punto(1, 0, -2) => punto(1,0,-2)
B := punto(3, 1, 5) => punto(3,1,5)
C := punto(-4, 3, 0) => punto(-4,3,0)
D := punto(-6, -2, 3) => punto(-6,-2,3)
AB = vector(A, B) => [2,1,7]
AC = vector(A, C) => [-5,3,2]
AD = vector(A, D) => [-7,-2,5]
| 2 1 7 |
| -5 3 2 | => 266
| -7 -2 5 |
266.
6 => 44.333
Volumen = 44,33 u³
dibujar3d(A, {color = rojo}) => tablero1
dibujar3d(B, {color = verde}) => tablero1
dibujar3d(C, {color = cian}) => tablero1
dibujar3d(D, {color = rosa}) => tablero1
dibujar3d(segmento(A, B), {color = azul, anchura_linea = 2})
dibujar3d(segmento(A, C), {color = azul, anchura_linea = 2})
dibujar3d(segmento(A, D), {color = azul, anchura_linea = 2})
dibujar3d(segmento(B, C), {color = azul, anchura_linea = 2})
dibujar3d(segmento(B, D), {color = azul, anchura_linea = 2})
dibujar3d(segmento(C, D), {color = azul, anchura_linea = 2})
dibujar3d(poligono(A, B, C), {color = amarillo, llenar = cierto})
dibujar3d(poligono(A, B, D), {color = cian, llenar = cierto})
dibujar3d(poligono(A, C, D), {color = naranja, llenar = cierto})
dibujar3d(poligono(B, C, D), {color = rosa, llenar = cierto})
```



102. Considera los vectores $\vec{u}(1, 1, 1)$, $\vec{v}(2, 2, a)$ y $\vec{w}(2, 0, 0)$. Determina los valores de **a** para que los vectores $\vec{u} + \vec{v}$ y $\vec{u} - \vec{w}$ sean ortogonales.

Solución:

Ejercicio 102

$$\mathbf{u} = [1, 1, 1] \Rightarrow [1, 1, 1]$$

$$\mathbf{v} = [2, 2, \mathbf{a}] \Rightarrow [2, 2, \mathbf{a}]$$

$$\mathbf{w} = [2, 0, 0] \Rightarrow [2, 0, 0]$$

$$(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{w}) \Rightarrow \mathbf{a} + 1$$

$$\text{resolver}(\mathbf{a} + 1 = 0) \Rightarrow \{\{\mathbf{a} = -1\}\}$$

103. Dados los vectores $\vec{u}(2, 1, -1)$, $\vec{v}(-3, 5, 1)$ y $\vec{w}(4, k, 2)$, calcula el valor de **k** para que el volumen del paralelepípedo definido por dichos vectores sea igual a 26 unidades cúbicas.

Solución:

Ejercicio 103

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & 5 & 1 \\ 4 & k & 2 \end{vmatrix} \Rightarrow k + 50$$

$$\text{resolver}(|k + 50| = 26) \Rightarrow \{\{k = -76\}, \{k = -24\}\}$$