Universidad de Oviedo

Prueba de acceso a la Universidad (PAU)
Curso 2024-2025

3. MODELO DE EXAMEN **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**

- Responde en el pliego en blanco a una opción (A o B) de cuatro de las cinco preguntas cualesquiera que se proponen. Todas las preguntas se calificarán con un máximo de **2,5 puntos**.
- Agrupaciones de preguntas que sumen más de 10 puntos o que no coincidan con las indicadas conllevarán la **anulación** de la(s) última(s) pregunta(s) seleccionada(s) y/o respondida(s).

Pregunta 1. Opción A. Tras ingerir cierta cantidad de alcohol en ayunas, el nivel de etanol en sangre (medido en mg/dl) de una persona se ajusta aproximadamente, durante las 5 horas siguientes a la ingesta, a la función:

$$f(x)=\begin{cases} -60x^2+160x & si\ 0\le x\le 2 \\ \dfrac{10}{3}\left(x^2-14x+48\right) & si\ 2<x\le 5 \end{cases}$$

donde x representa el tiempo (en horas) transcurrido desde la ingesta.

a) Entre las 0 y las 5 horas ¿el nivel de etanol en sangre se comporta de manera continua? ¿En algún momento el nivel de etanol es nulo? ¿El nivel de etanol aumenta siempre en ese intervalo? ¿En qué momento se alcanza el nivel máximo de etanol? ¿Y el nivel mínimo? **(2 puntos)**

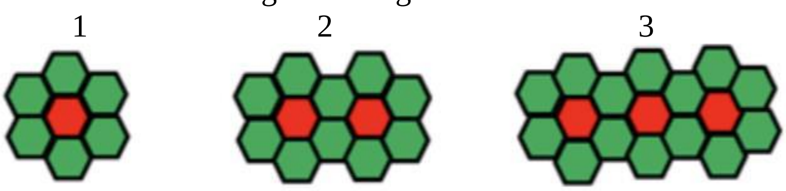
b) Si la persona es un conductor novel y el límite de alcohol en sangre permitido a un conductor novel es de 30 mg/dl, ¿podría esta persona conducir 1 hora después de la ingesta? ¿Y a las 5 horas? Razona tu respuesta. **(0.5 puntos)**

Pregunta 1. Opción B. Dada la función $f(x)=x^3-2x^2-3x$:

a) Encuentra la primitiva F de f para la que se cumple que pasa por el punto (2, 0). **(0.5 puntos)**

b) Entre los puntos $x=0$ y $x=1$ la función f ¿toma siempre valores positivos, siempre negativos o valores tanto positivos como negativos? Si la función toma siempre valores del mismo signo entre $x=0$ y $x=1$, calcula el área delimitada por la función f y el eje X en ese intervalo. **(2 puntos)**

Pregunta 2. Opción A. Observa las siguientes figuras:



a) ¿Cuántos hexágonos rojos y cuántos verdes habrá en la figura número 10? Encuentra una fórmula que permita determinar el número de hexágonos de cada color a partir del número de la figura. **(2 puntos)**

b) ¿Puede existir una figura con 152 hexágonos verdes? En caso afirmativo, ¿qué número de figura sería? Si no es posible, explica por qué. **(0.5 puntos)**

Pregunta 2. Opción B. Un artesano teje gorros y bufandas. Cada gorro lleva 50 metros de lana de color blanco y 40 m de color negro. Cada bufanda lleva 100 m de color blanco y 100 m de color negro. Dispone de 2200 m de lana de color blanco y 2000 m de color negro y el número de gorros debe ser, a lo sumo, el doble que el de bufandas.

a) Explica cuál de las dos siguientes figuras sirve para representar el conjunto de posibles soluciones de a la pregunta ¿Cuántos gorros y bufandas puede tejer? ¿Es válido como solución al problema cualquier punto dentro de la región factible? ¿Por qué? **(1 punto)**

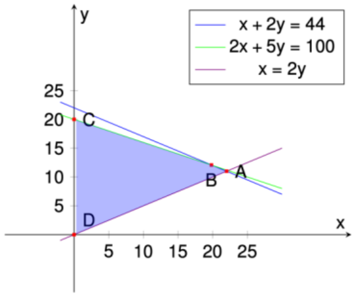


Figura 1: Región factible.

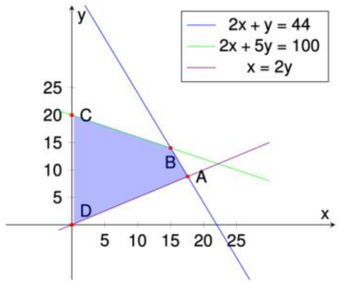


Figura 2: Región factible.

b) ¿Puede tejer 12 gorros y 8 bufandas? Si vende cada gorro a 12 euros y cada bufanda a 18 euros, ¿cuántos gorros y bufandas debe tejer para maximizar los ingresos? **(1.5 puntos)**

Pregunta 3. Opción A. Dado el sistema: $\begin{cases} (m-1)x+(m-4)y=6 \\ 2x-y=2m \end{cases}$

a) Selecciona un valor de *m* para el que el sistema tenga solución única y encuentra la solución en ese caso. **(1.5 puntos)**

b) Para $m=3$, ¿pueden ser (x,y) = (3,0) y (x,y) = (2,−2) soluciones de ese sistema? ¿Podría tener otras soluciones para $m=3$? ¿Cuántas? Explica tu respuesta. **(1 punto)**

Pregunta 3. Opción B. Sean las matrices

$$A=\begin{pmatrix} -m & m-2 \\ 2m & 2 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2m \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} m & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ y } E=\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}.$$

a) Si $\frac{1}{3}(A+B\cdot C)\cdot D=E$, plantea un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas (representadas por *x* e *y*) en función del parámetro *m*. **(1.5 puntos)**

b) Encuentra un valor de *m* para el cual el sistema tenga infinitas soluciones. **(1 punto)**

Pregunta 4. Opción A. Una empresa comercializa cromos de unos dibujos animados. El 60% de los cromos son de personajes del <<Reino Rosa>> y el resto de personajes del <<Reino Gris>>. Por otro lado, uno de cada tres cromos del <<Reino Rosa>> y uno de cada cinco del <<Reino Gris>> tienen el borde dorado.

a) Elegido un cromo al azar, ¿cuál es la probabilidad de que tenga el borde dorado? **(1.25 puntos)**

b) Si se elige al azar un cromo entre los que no tienen el borde dorado, ¿cuál es la probabilidad de que sea del <<Reino Rosa>>? **(1.25 puntos)**

Pregunta 4. Opción B. Una marca de bolsos comercializó tres modelos la pasada primavera. El 3 % del total de bolsos fabricados salieron defectuosos. Por otra parte, el 30 % de todos los bolsos fabricados eran de tipo A; el 35 %, de tipo B y el resto, de tipo C. Además, se sabe que el 3 % de los de tipo A y el 5 % de los de tipo C salieron defectuosos.

a) Elegido al azar un bolso entre los de tipo B, ¿cuál es la probabilidad de que sea defectuoso? **(1.25 puntos)**

b) Elegido un bolso al azar entre los defectuosos, ¿cuál es la probabilidad de que sea de tipo B? **(1.25 puntos)**

Pregunta 5. Opción A. Una fábrica hace un control de calidad para determinar la proporción de tabletas de chocolate que realmente contienen la cantidad de leche que indican en el envoltorio.

a) ¿Cuál debería ser el tamaño muestral mínimo para determinar la verdadera proporción de tabletas con el contenido en leche indicado a partir de la proporción muestral con un error de estimación máximo de 0.05 y un nivel de confianza del 95%? **(1 punto)**

b) Finalmente, se decidió analizar 300 tabletas. Si la proporción muestral y el nivel de confianza son los mismos, ¿se obtendrá un intervalo más amplio con 300 tabletas o con el número de tabletas obtenido en el apartado anterior? **(1 punto)**

c) Si a partir de la misma muestra de tamaño 300 se quisiera obtener un intervalo de confianza al 99 % de confianza, ¿este último intervalo sería más amplio o menos? ¿Por qué? **(0.5 puntos)**

Pregunta 5. Opción B. El nivel de cierta hormona en sangre sigue distribución normal con desviación típica 1.2 UI/l. Para una muestra de 200 personas se obtuvo, con un nivel de confianza al 90 %, el intervalo de confianza (8.5608, 8.8392) para estimar el nivel medio de esa hormona en la sangre de las personas en la muestra.

a) ¿Cuál fue el nivel medio de la hormona en la sangre en esas 200 personas? **(1 punto)**

b) En el intervalo anterior, ¿cuánto vale el error de estimación? **(0.75 puntos)**

c) Uno de los dos intervalos siguientes: (8.5681,8.8319) y (8.5514,8.8486) se obtuvo a partir de la misma muestra al 88 % de confianza. Razona adecuadamente cuál de los dos corresponde al nivel de confianza del 88 %. **(0.75 puntos)**

Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1 (en el caso de que el valor buscado no coincida con ninguno, utiliza el más próximo):

F(1.28) = 0.90, F(1.64) = 0.95, F(1.96) = 0.975, F(2.33) = 0.99 y F(2.58) = 0.995.

Expresión del intervalo de confianza, al nivel de confianza 1– α, para la media de una población con distribución normal de varianza conocida, a partir de una muestra de tamaño n:

$$\left(\bar{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

Expresión del intervalo de confianza, al nivel de confianza 1– α, para la proporción poblacional, a partir de una muestra de tamaño n suficientemente grande (habitualmente se considera $n \geq 100$):

$$\left(p - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}, p + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right)$$

donde $z_{\alpha/2}$ representa el valor que cumple que $P\left(|Z| < z_{\alpha/2}\right) = 1 - \alpha$ para una variable Z con distribución N(0,1), es decir, el valor que cumple que

$P\left(|Z| < z_{\alpha/2}\right) = P\left(-z_{\alpha/2} < Z < z_{\alpha/2}\right) = 1 - \alpha$

SOLUCIONES

Pregunta 1. Opción A. Tras ingerir cierta cantidad de alcohol en ayunas, el nivel de etanol en sangre (medido en mg/dl) de una persona se ajusta aproximadamente, durante las 5 horas siguientes a la ingesta, a la función:

$$f(x)=\begin{cases} -60x^2+160x & si\ 0\le x\le 2 \\ \dfrac{10}{3}\left(x^2-14x+48\right) & si\ 2<x\le 5 \end{cases}$$

donde x representa el tiempo (en horas) transcurrido desde la ingesta.

a) Entre las 0 y las 5 horas ¿el nivel de etanol en sangre se comporta de manera continua? ¿En algún momento el nivel de etanol es nulo? ¿El nivel de etanol aumenta siempre en ese intervalo? ¿En qué momento se alcanza el nivel máximo de etanol? ¿Y el nivel mínimo? **(2 puntos)**

b) Si la persona es un conductor novel y el límite de alcohol en sangre permitido a un conductor novel es de 30 mg/dl, ¿podría esta persona conducir 1 hora después de la ingesta? ¿Y a las 5 horas? Razona tu respuesta. **(0.5 puntos)**

a) **¿el nivel de etanol en sangre se comporta de manera continua?**

Es una función a trozos donde cada trozo es una parábola.
El dominio de la función es [0, 5].
La función es continua en cada intervalo. Estudiamos la continuidad en $x=2$.

- Existe $f(2)=-60\cdot 2^2+160\cdot 2=80$.
- Existe $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-} -60x^2+160x=80$.
- Existe $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{10}{3}\left(x^2-14x+48\right)=\dfrac{10}{3}\left(2^2-14\cdot 2+48\right)=80$.
- Los tres valores son iguales.

Se cumple todo y la función es continua en $x = 2$.
La función es continua en todo su dominio.

¿En algún momento el nivel de etanol es nulo?

$$f(x)=0\Rightarrow\begin{cases} -60x^2+160x=0\to -20x(3x-8)=0\to\begin{cases}\boxed{x=0}\\ 3x-8=0\to x=\dfrac{8}{3}\simeq 2.6\notin[0,2]\end{cases} \\ \dfrac{10}{3}\left(x^2-14x+48\right)=0\to x^2-14x+48=0\to x=\dfrac{14\pm\sqrt{(-14)^2-192}}{2}= \\ =\dfrac{14\pm 2}{2}=\begin{cases}\dfrac{14+2}{2}=8\notin(2,5]\\ \dfrac{14-2}{2}=6\notin(2,5]\end{cases}\end{cases}$$

El nivel de etanol es nulo solo al comienzo de la ingesta.

¿El nivel de etanol aumenta siempre en ese intervalo?
¿En qué momento se alcanza el nivel máximo de etanol? ¿Y el nivel mínimo?

Hallamos los puntos críticos de cada trozo.

$$f'(x)=\begin{cases}-120x+160 & si \quad 0\le x<2\\ \frac{10}{3}(2x-14) & si \quad 2<x\le 5\end{cases} \left. \begin{matrix} \\ \\ f'(x)=0\end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases}-120x+160=0\rightarrow x=\frac{160}{120}=\frac{4}{3}\in[0,2)\\ \frac{10}{3}(2x-14)=0\rightarrow x=\frac{14}{2}=7\notin(2,5]\end{cases}$$

Estudiamos el crecimiento o decrecimiento de la función.

- En el intervalo $\left[0,\frac{4}{3}\right)$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale $f'(1)=-120\cdot 1+160=40>0$. La función crece en $\left[0,\frac{4}{3}\right)$.
- En el intervalo $\left(\frac{4}{3},2\right)$ tomamos $x = 1.5$ y la derivada vale $f'(1.5)=-120\cdot 1.5+160=-20<0$. La función decrece en $\left(\frac{4}{3},2\right)$.
- En el intervalo $(2,5]$ tomamos $x = 3$ y la derivada vale $f'(x)=\frac{10}{3}(2\cdot 3-14)=\frac{-80}{3}<0$. La función decrece en $(2,5]$.

La función tiene un máximo relativo en $x=\frac{4}{3}$.

Valoramos el nivel de etanol en los extremos del intervalo de definición y en el máximo relativo.

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=0 \text{ ¡Mínimo!}\\ f\left(\frac{4}{3}\right)=-60\left(\frac{4}{3}\right)^2+160\left(\frac{4}{3}\right)=\frac{320}{3}\simeq 106.6 \text{ ¡Máximo!}\\ f(5)=\frac{10}{3}\left(5^2-14\cdot 5+48\right)=10\end{array}\right\}$$

El nivel mínimo de etanol es 0 y se tiene en el momento de la ingesta. El nivel máximo de etanol es 106.6 y se tiene en $x=\frac{4}{3}$ (a la hora y 20 minutos de la ingesta).

El nivel de etanol crece en el intervalo $\left[0,\frac{4}{3}\right)$ y decrece en $\left(\frac{4}{3},2\right)$.

b) Calculamos $f(1)$ y $f(5)$.

$$\left.\begin{array}{l} f(1)=-60\cdot 1^2+160\cdot 1=100\\ f(5)=10\end{array}\right\}$$

El nivel de etanol 1 hora después de la ingesta es de 100 mg/dl (mayor que 30) por lo que no podría conducir.
El nivel de etanol 5 horas después de la ingesta es de 10 mg/dl (menor que 30) por lo que si podría conducir.

Pregunta 1. Opción B. Dada la función $f(x) = x^3 - 2x^2 - 3x$:

a) Encuentra la primitiva *F* de *f* para la que se cumple que pasa por el punto (2, 0). **(0.5 puntos)**

b) Entre los puntos $x = 0$ y $x = 1$ la función f ¿toma siempre valores positivos, siempre negativos o valores tanto positivos como negativos? Si la función toma siempre valores del mismo signo entre $x = 0$ y $x = 1$, calcula el área delimitada por la función f y el eje X en ese intervalo. **(2 puntos)**

a) Calculamos la integral indefinida de la función.

$$F(x) = \int f(x)dx = \int x^3 - 2x^2 - 3xdx = \frac{x^4}{4} - 2\frac{x^3}{3} - 3\frac{x^2}{2} + K$$

Como debe ser *F(2) = 0.*

$$\left.\begin{array}{l} F(x) = \frac{x^4}{4} - 2\frac{x^3}{3} - 3\frac{x^2}{2} + K \\ F(2) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{2^4}{4} - 2\frac{2^3}{3} - 3\frac{2^2}{2} + K = 0 \Rightarrow 4 - \frac{16}{3} - 6 + K = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow K = \frac{16}{3} + 2 = \frac{22}{3} \Rightarrow \boxed{F(x) = \frac{x^4}{4} - 2\frac{x^3}{3} - 3\frac{x^2}{2} + \frac{22}{3}}$$

La primitiva buscada es $F(x) = \frac{x^4}{4} - 2\frac{x^3}{3} - 3\frac{x^2}{2} + \frac{22}{3}$.

b) El dominio de la función es $\mathbb{R}$. La función es continua.
Hallamos los puntos de corte con el eje OX.

$$Eje\,OX \rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow x^3 - 2x^2 - 3x = 0 \Rightarrow x\left(x^2 - 2x - 3\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \boxed{x = 0} \\ x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(-3)}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} = \begin{cases} \frac{2+4}{2} = \boxed{3 = x} \\ \frac{2-4}{2} = \boxed{-1 = x} \end{cases} \end{cases}$$

Comprobamos si la función es positiva o negativa antes, entre y después de estos tres valores.

- En el intervalo $(-\infty, -1)$ tomamos $x = -2$ y la función vale $f(-2) = (-2)^3 - 2(-2)^2 - 3(-2) = -10 < 0$. La función es negativa en el intervalo $(-\infty, -1)$.
- En el intervalo $(-1, 0)$ tomamos $x = -0.5$ y la función vale $f(-0.5) = (-0.5)^3 - 2(-0.5)^2 - 3(-0.5) = 0.875 > 0$. La función es positiva en el intervalo $(-1, 0)$.

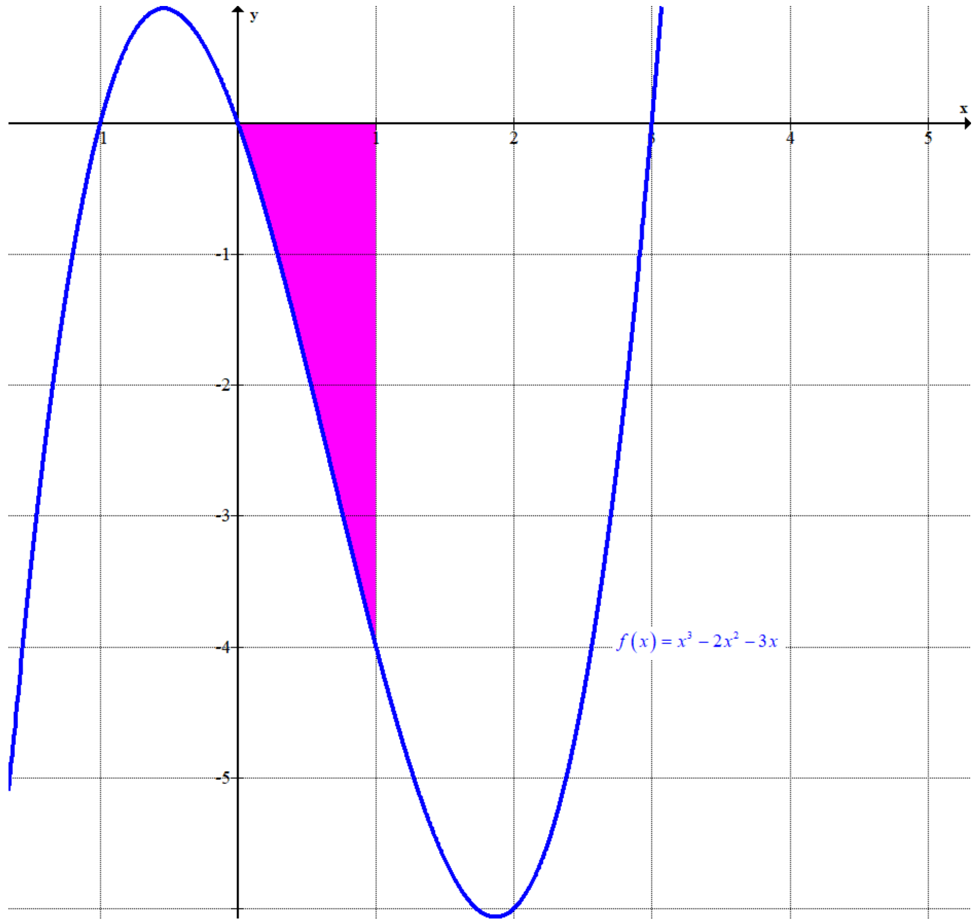
- En el intervalo $(0,3)$ tomamos $x=2$ y la función vale
  $f(2)=2^3-2(2)^2-3(2)=-6<0$. La función es negativa en el intervalo $(0,3)$.
- En el intervalo $(3,+\infty)$ tomamos $x=4$ y la función vale
  $f(4)=4^3-2(4)^2-3(4)=20>0$. La función es positiva en el intervalo $(3,+\infty)$.

Entre los puntos $x=0$ y $x=1$ la función es negativa.
Calculamos el área delimitada por la función f y el eje X en ese intervalo como el valor absoluto de la integral definida entre 0 y 1 de la función.

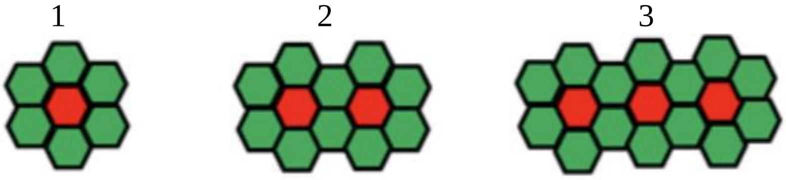
$$Área=\left|\int_0^1 x^3-2x^2-3x dx\right|=\left|\left[\frac{x^4}{4}-2\frac{x^3}{3}-3\frac{x^2}{2}\right]_0^1\right|=$$

$$=\left|\left[\frac{1^4}{4}-2\frac{1^3}{3}-3\frac{1^2}{2}\right]-\left[\frac{0^4}{4}-2\frac{0^3}{3}-3\frac{0^2}{2}\right]\right|=\left|\frac{1}{4}-\frac{2}{3}-\frac{3}{2}\right|=\boxed{\frac{23}{12}\simeq 1.9167\,u^2}$$

El área tiene un valor aproximado de 1.9167 unidades cuadradas.



Pregunta 2. Opción A. Observa las siguientes figuras:



a) ¿Cuántos hexágonos rojos y cuántos verdes habrá en la figura número 10? Encuentra una fórmula que permita determinar el número de hexágonos de cada color a partir del número de la figura. **(2 puntos)**

b) ¿Puede existir una figura con 152 hexágonos verdes? En caso afirmativo, ¿qué número de figura sería? Si no es posible, explica por qué. **(0.5 puntos)**

a) La secuencia de hexágonos rojos es 1, 2, 3, … Por lo que en la figura número 10 habrá 10 hexágonos rojos.

La secuencia de hexágonos verdes es 6, 10, 14, … Cada nueva figura incorpora 4 hexágonos verdes más. En la figura **1** hay 2 + 4 = 2 + **1** · 4, en la figura **2** hay 2 + **2** ·4, en la figura **3** hay 2 + **3** · 4, en la figura **4** deben de haber 2 + **4** · 4 y en la figura **10** habrá 2 + **10** · 4 = 42 hexágonos verdes.

b) Nos planteamos la posibilidad de que en algún momento $2+4n$ sea igual a 152, siendo n el número de figura. Lo investigamos.

$$2+4n=152 \Rightarrow 4n=150 \Rightarrow n=\frac{150}{4}=37.5$$

Esto no es posible pues el número de figura es siempre un número natural.

Pregunta 2. Opción B. Un artesano teje gorros y bufandas. Cada gorro lleva 50 metros de lana de color blanco y 40 m de color negro. Cada bufanda lleva 100 m de color blanco y 100 m de color negro. Dispone de 2200 m de lana de color blanco y 2000 m de color negro y el número de gorros debe ser, a lo sumo, el doble que el de bufandas.

a) Explica cuál de las dos siguientes figuras sirve para representar el conjunto de posibles soluciones de a la pregunta ¿Cuántos gorros y bufandas puede tejer? ¿Es válido como solución al problema cualquier punto dentro de la región factible? ¿Por qué? **(1 punto)**

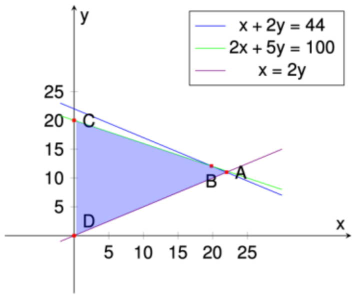


Figura 1: Región factible.

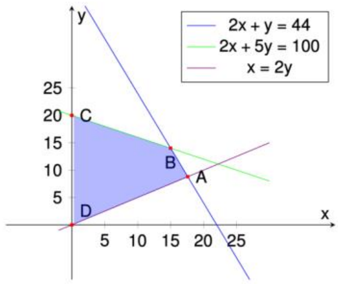


Figura 2: Región factible.

b) ¿Puede tejer 12 gorros y 8 bufandas? Si vende cada gorro a 12 euros y cada bufanda a 18 euros, ¿cuántos gorros y bufandas debe tejer para maximizar los ingresos? **(1.5 puntos)**

a) Llamamos “x” al número de gorros e “y” al número de bufandas.
Hacemos una tabla con los datos del problema.

	Metros de lana blanca	Metros de lana negra
Número de gorros (x)	50x	40x
Número de bufandas (y)	100y	100y
	$50x+100y$	$40x+100y$

“Dispone de 2200 m de lana de color blanco y 2000 m de color negro” → $50x+100y \le 2200;\ 40x+100y \le 2000$

“El número de gorros debe ser, a lo sumo, el doble que el de bufandas” → $x \le 2y$

Las cantidades deben ser positivas → $x \ge 0;\ \ y \ge 0$

Reunimos las restricciones en un sistema de inecuaciones.

$$\left.\begin{array}{l} 50x+100y \le 2200 \\ 40x+100y \le 2000 \\ x \le 2y \\ x \ge 0;\ \ y \ge 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+2y \le 44 \\ 2x+5y \le 100 \\ x \le 2y \\ x \ge 0;\ \ y \ge 0 \end{array}\right\}$$

Dibujamos la región factible que es la región del plano que contiene los puntos que cumplen todas las restricciones.
Dibujamos las rectas asociadas a cada inecuación.

$x+2y=44$

x	$y=\dfrac{44-x}{2}$
0	22
44	0

$2x+5y=100$

x	$y=\dfrac{100-2x}{5}$
0	20
50	0

$x=2y$

x	$y=\dfrac{x}{2}$
0	0
20	10

$x \ge 0;\ \ y \ge 0$

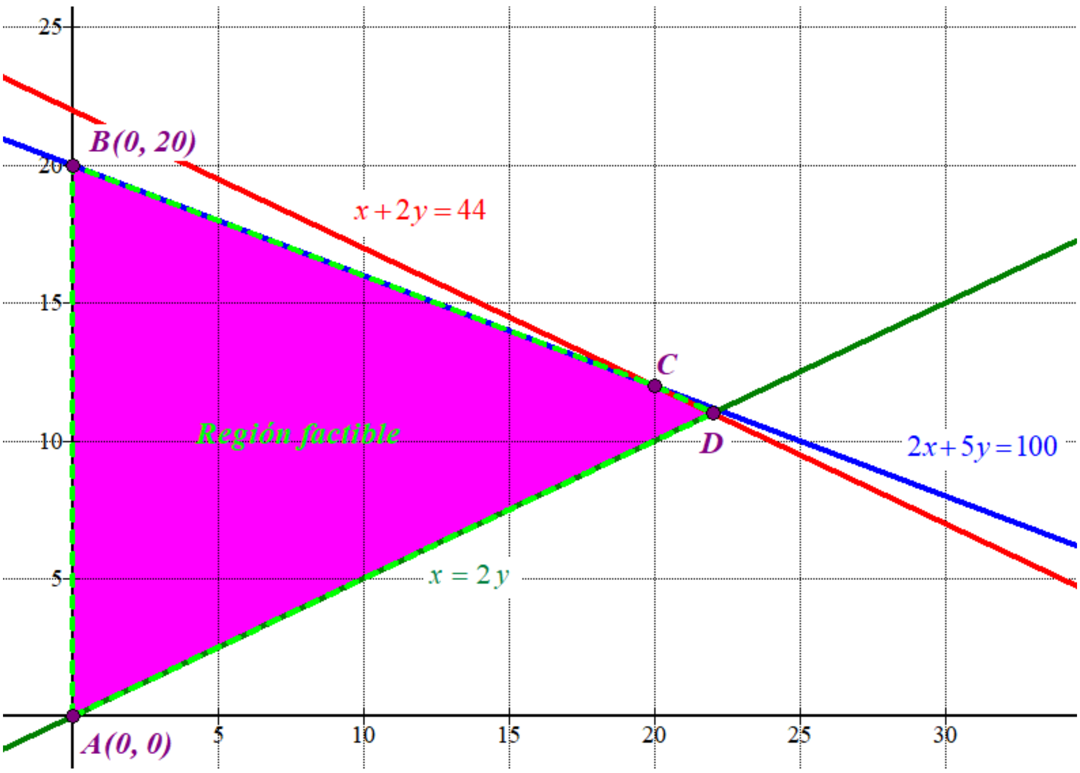
Primer cuadrante

Como las restricciones son $\left.\begin{array}{l} x+2y\leq 44 \\ 2x+5y\leq 100 \\ x\leq 2y \\ x\geq 0;\ \ y\geq 0 \end{array}\right\}$ la región que contiene las soluciones del sistema es la región del primer cuadrante situada por debajo de las rectas roja y azul, y por encima de la recta verde.

Comprobamos que el punto P(10, 10) perteneciente a esta región cumple las restricciones:

$$\left.\begin{array}{l} 10+20\leq 44 \\ 20+50\leq 100 \\ 10\leq 20 \\ 10\geq 0;\ 10\geq 0 \end{array}\right\} \text{¡Se cumplen todas!}$$

La coloreamos de rosa en el siguiente dibujo.



El conjunto de posibles soluciones se representa en la figura 1.

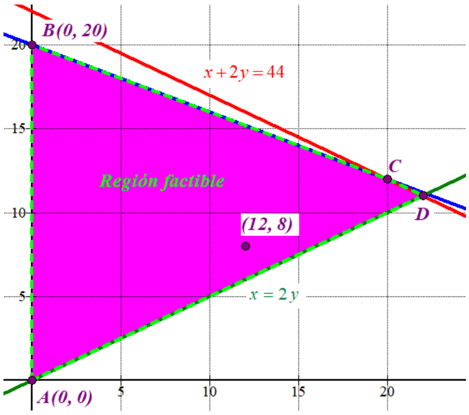
¿Cuántos gorros y bufandas puede tejer?

Existen muchas combinaciones posibles. Cualquier par de valores naturales que pertenezcan a la región factible dibujada.

¿Es válido como solución al problema cualquier punto dentro de la región factible? ¿Por qué?

Solo los que tengan coordenadas enteras. El número de unidades de gorros y bufandas no puede ser decimal. Si se desea optimizar una función la solución al problema estará situado en los bordes de la región factible.

b) **¿Puede tejer 12 gorros y 8 bufandas?** El punto (12, 8) pertenece a la región factible y si se puede tejer 12 gorros y 8 bufandas.



También se puede comprobar viendo si estos valores satisfacen las inecuaciones que representan las restricciones.

$$\left.\begin{array}{l} 12+2\cdot 8\le 44 \\ 2\cdot 12+5\cdot 8\le 100 \\ 12\le 2\cdot 8 \\ 12\ge 0;\;\; 8\ge 0 \end{array}\right\}$$

El punto (12, 8) cumple todas las inecuaciones y si se pueden tejer 12 gorros y 8 bufandas.

Si vende cada gorro a 12 euros y cada bufanda a 18 euros, ¿cuántos gorros y bufandas debe tejer para maximizar los ingresos?

Averiguamos las coordenadas de los vértices C y D.

$$C\to \left.\begin{array}{l} x+2y=44 \\ 2x+5y=100 \end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=44-2y \\ 2x+5y=100 \end{array}\right\}\Rightarrow 2(44-2y)+5y=100\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 88-4y+5y=100\Rightarrow y=12\Rightarrow x=44-24=20\Rightarrow C(20,12)$$

$$D\to \left.\begin{array}{l} x+2y=44 \\ x=2y \end{array}\right\}\Rightarrow 2y+2y=44\Rightarrow 4y=44\Rightarrow y=\frac{44}{4}=11\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=22\Rightarrow D(22,11)$$

Los ingresos son $I(x,y)=12x+18y$. Deseamos maximizarlos.

Valoramos la función ingresos en cada uno de los vértices.

A(0,0) → $I(0,0)=0$

B(0, 20) → $I(0,20)=12\cdot 0+18\cdot 20=360$

C(20, 12) → $I(20,12)=12\cdot 20+18\cdot 12=456$

D(22, 11) → $I(22,11)=12\cdot 22+18\cdot 11=$ 462 ¡Máximo!

Los máximos ingresos que se pueden obtener son 462 euros, y se obtienen con la confección y venta de 22 gorros y 11 bufandas.

Pregunta 3. Opción A. Dado el sistema: $\begin{cases}(m-1)x+(m-4)y=6 \\ 2x-y=2m\end{cases}$

a) Selecciona un valor de *m* para el que el sistema tenga solución única y encuentra la solución en ese caso. **(1.5 puntos)**

b) Para $m=3$, ¿pueden ser (x,y) = (3,0) y (x,y) = (2,–2) soluciones de ese sistema? ¿Podría tener otras soluciones para $m=3$? ¿Cuántas? Explica tu respuesta. **(1 punto)**

a) Despejamos "y" en la segunda ecuación y sustituimos en la primera.

$$\begin{cases}(m-1)x+(m-4)y=6 \\ 2x-y=2m\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}(m-1)x+(m-4)y=6 \\ 2x-2m=y\end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (m-1)x+(m-4)(2x-2m)=6 \Rightarrow mx-x+2mx-2m^2-8x+8m=6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3mx-9x=6-8m+2m^2 \Rightarrow (3m-9)x=2m^2-8m+6$$

Consideramos un valor tal que $3m-9\neq 0 \Rightarrow m\neq 3$, por ejemplo $m=0$.
Terminamos de resolver el sistema para este valor.

$$\left.\begin{array}{r}(3m-9)x=2m^2-8m+6 \\ m=0\end{array}\right\} \Rightarrow -9x=6 \Rightarrow \boxed{x=\frac{-6}{9}=\frac{-2}{3}} \Rightarrow \boxed{y=2\frac{-2}{3}-2\cdot 0=\frac{-4}{3}}$$

Para $m=0$ el sistema tiene solución única: $x=\frac{-2}{3}$, $y=\frac{-4}{3}$.

b) Para $m=3$ el sistema queda $\begin{cases}2x-y=6 \\ 2x-y=6\end{cases} \Rightarrow 2x-y=6 \Rightarrow y=2x-6 \Rightarrow \begin{cases}x=\alpha \\ y=2\alpha-6\end{cases}$.

Si tomamos $\alpha=3$ nos queda la solución $\begin{cases}x=3 \\ y=2\cdot 3-6=0\end{cases}$.

(x,y) = (3,0) si es solución del sistema.

Si tomamos $\alpha=2$ nos queda la solución $\begin{cases}x=2 \\ y=2\cdot 2-6=-2\end{cases}$.

(x,y) = (2,–2) si es solución del sistema.

Para $m=3$ el sistema tiene infinitas soluciones. Dando distintos valores a "α" obtenemos distintas e infinitas soluciones del sistema.

Pregunta 3. Opción B. Sean las matrices

$$A=\begin{pmatrix}-m & m-2\\ 2m & 2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 2m\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}m & 2\\ -1 & 0\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\ \text{ y }\ E=\begin{pmatrix}1\\ m\end{pmatrix}.$$

a) Si $\frac{1}{3}(A+B\cdot C)\cdot D=E$, plantea un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas (representadas por *x* e *y*) en función del parámetro *m*. **(1.5 puntos)**

b) Encuentra un valor de *m* para el cual el sistema tenga infinitas soluciones. **(1 punto)**

a) Obtenemos el sistema de ecuaciones.

$$A+B\cdot C=\begin{pmatrix}-m & m-2\\ 2m & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 2m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}m & 2\\ -1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-m & m-2\\ 2m & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}m+1 & 2\\ m-2m & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & m\\ m & 4\end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{3}(A+B\cdot C)\cdot D=E\Rightarrow(A+B\cdot C)\cdot D=3E\Rightarrow\begin{pmatrix}1 & m\\ m & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}1\\ m\end{pmatrix}\Rightarrow\left.\begin{matrix}x+my=3\\ mx+4y=3m\end{matrix}\right\}$$

El sistema de ecuaciones es $\left.\begin{matrix}x+my=3\\ mx+4y=3m\end{matrix}\right\}$.

b) Estudiamos la compatibilidad del sistema analizando el rango de la matriz de coeficientes A. Vemos cuando se anula el determinante de A.

$$A=\begin{pmatrix}1 & m\\ m & 4\end{pmatrix}\Rightarrow|A|=\begin{vmatrix}1 & m\\ m & 4\end{vmatrix}=4-m^2$$

$$\left.\begin{matrix}|A|=4-m^2\\ |A|=0\end{matrix}\right\}\Rightarrow 4-m^2=0\Rightarrow m^2=4\Rightarrow m=\sqrt{4}=\pm2$$

Analizamos las distintas situaciones que se plantean.

- Si $m\neq\pm2$ el determinante de la matriz de coeficientes es no nulo y su rango es 2, al igual que el rango de la matriz ampliada y el número de incógnitas. El sistema tiene una única solución.

- Si $m=2$ el determinante de la matriz de coeficientes es nulo y su rango es menor de 2. El sistema queda $\left.\begin{matrix}x+2y=3\\ 2x+4y=6\end{matrix}\right\}$. Al ser las dos ecuaciones proporcionales el sistema se reduce a una única ecuación: $x+2y=3$. El sistema tiene infinitas soluciones.

- Si $m=-2$ el determinante de la matriz de coeficientes es nulo y su rango es menor de 2. El sistema queda $\left.\begin{matrix}x-2y=3\\ -2x+4y=-6\end{matrix}\right\}$. Al ser las dos ecuaciones proporcionales el sistema se reduce a una ecuación: $x-2y=3$. El sistema tiene infinitas soluciones.

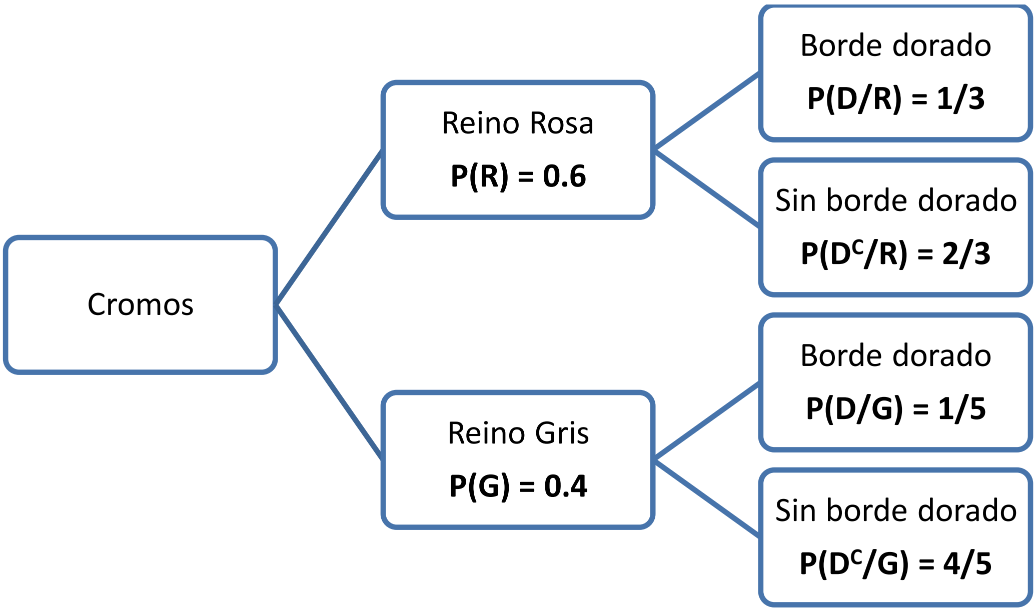
Respuesta: El sistema tiene infinitas soluciones para $m=2$ o $m=-2$.

Pregunta 4. Opción A. Una empresa comercializa cromos de unos dibujos animados. El 60% de los cromos son de personajes del <<Reino Rosa>> y el resto de personajes del <<Reino Gris>>. Por otro lado, uno de cada tres cromos del <<Reino Rosa>> y uno de cada cinco del <<Reino Gris>> tienen el borde dorado.

a) Elegido un cromo al azar, ¿cuál es la probabilidad de que tenga el borde dorado? **(1.25 puntos)**

b) Si se elige al azar un cromo entre los que no tienen el borde dorado, ¿cuál es la probabilidad de que sea del <<Reino Rosa>>? **(1.25 puntos)**

Llamamos R al suceso “el cromo es de Reino Rosa”, G a “el cromo es del Reino Gris” y D a “el cromo tiene el borde dorado”.
Realizamos un diagrama de árbol.



a) Nos piden calcular $P(D)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(D)=P(R)P(D/R)+P(G)P(D/G)=0.6\cdot\frac{1}{3}+0.4\cdot\frac{1}{5}=\boxed{\frac{7}{25}=0.28}$$

La probabilidad de que el cromo elegido tenga el borde dorado es de 0.28.

b) Nos piden calcular $P\left(R/D^C\right)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P\left(R/D^C\right)=\frac{P\left(R\cap D^C\right)}{P\left(D^C\right)}=\frac{P(R)P\left(D^C/R\right)}{1-P(D)}=\frac{0.6\cdot\frac{2}{3}}{1-0.28}=\boxed{\frac{5}{9}\simeq 0.556}$$

La probabilidad de que el cromo sin borde dorado elegido sea del <<Reino Rosa>> tiene un valor aproximado de 0.556

OTRA FORMA DE RESOLVERLO

Pasamos los datos a valores absolutos. Suponemos que tenemos 100 cromos. De ellos 60 son del Reino Rosa y 40 del Reino Gris. De los 60 del Reino Rosa tenemos que un tercio tienen borde dorado, es decir, 60/3 = 20 cromos tienen borde dorado y son del Reino Rosa. De los 40 cromos del Reino Gris una quinta parte tienen borde dorado, es decir 40/5 = 8 cromos son del Reino Gris y tienen borde dorado.

a) Tenemos 20 cromos del Reino Rosa con borde dorado y 8 con borde dorado del Reino Gris. Aplicamos la regla de Laplace y calculamos la probabilidad pedida.

$$P(D)=\frac{20+8}{100}=0.28$$

b) Tenemos 40 cromos del Reino Rosa sin borde dorado y 32 del Reino Gris sin borde dorado. Aplicamos la regla de Laplace y calculamos la probabilidad pedida.

$$P\left(R/D^{C}\right)=\frac{40}{40+32}=\frac{5}{9}$$

Pregunta 4. Opción B. Una marca de bolsos comercializó tres modelos la pasada primavera. El 3 % del total de bolsos fabricados salieron defectuosos. Por otra parte, el 30 % de todos los bolsos fabricados eran de tipo A; el 35 %, de tipo B y el resto, de tipo C. Además, se sabe que el 3 % de los de tipo A y el 5 % de los de tipo C salieron defectuosos.

a) Elegido al azar un bolso entre los de tipo B, ¿cuál es la probabilidad de que sea defectuoso? **(1.25 puntos)**

b) Elegido un bolso al azar entre los defectuosos, ¿cuál es la probabilidad de que sea defectuoso? **(1.25 puntos)**

Pasamos los datos porcentuales a valores absolutos. Consideramos que tenemos 2000 bolsos.
El 30 % de todos los bolsos fabricados eran de tipo A ($0.3 \cdot 2000 = 600$ bolsos son del tipo A); el 35 %, de tipo B ($0.35 \cdot 2000 = 700$ son del tipo B) y el resto, de tipo C ($2000 - 600 - 700 = 700$ del tipo C).
El 3 % del total de bolsos fabricados salieron defectuosos, eso implica que hay $0.03 \cdot 2000 = 60$ bolsos que salieron defectuosos.
El 3 % de los de tipo A ($0.03 \cdot 600 = 18$ bolsos tipo A defectuosos) y el 5 % de los de tipo C ($0.05 \cdot 700 = 35$) salieron defectuosos.
Los bolsos de tipo B defectuosos son $60 - 18 - 35 = 7$.

a) Hay 700 bolsos del tipo B y 7 son defectuosos. Aplicamos la regla de Laplace y la probabilidad de que al elegir un bolso de tipo B sea defectuoso tiene un valor de $\frac{7}{700} = 0.01$.

b) Hay 60 bolsos defectuosos y 7 de ellos son del tipo B. Aplicamos la regla de Laplace y la probabilidad de que al elegir un bolso defectuoso sea de tipo B es $\frac{7}{60} \simeq 0.1167$

Pregunta 5. Opción A. Una fábrica hace un control de calidad para determinar la proporción de tabletas de chocolate que realmente contienen la cantidad de leche que indican en el envoltorio.

a) ¿Cuál debería ser el tamaño muestral mínimo para determinar la verdadera proporción de tabletas con el contenido en leche indicado a partir de la proporción muestral con un error de estimación máximo de 0.05 y un nivel de confianza del 95%? **(1 punto)**

b) Finalmente, se decidió analizar 300 tabletas. Si la proporción muestral y el nivel de confianza son los mismos, ¿se obtendrá un intervalo más amplio con 300 tabletas o con el número de tabletas obtenido en el apartado anterior? **(1 punto)**

c) Si a partir de la misma muestra de tamaño 300 se quisiera obtener un intervalo de confianza al 99 % de confianza, ¿este último intervalo sería más amplio o menos? ¿Por qué? **(0.5 puntos)**

a) No tenemos un valor para la proporción muestral de las tabletas de chocolate que contienen la cantidad de leche indicada en el envoltorio.
Al no conocer el valor de la proporción y no poder estimarlo, puesto que aún no tenemos una muestra, se considera el caso más desfavorable: $p = 0.5$.

Buscamos en la tabla de la normal para un nivel de confianza del 95% el valor de $z_{\alpha/2}$.

1 – α = 0,95 → α = 0,05 → α/2 = 0’025 → 1 – α/2 = 0,975 → $z_{\alpha/2}$ **= 1,96**

F(1.28) = 0.90, F(1.64) = 0.95, **F(1.96) = 0.975**, F(2.33) = 0.99 y F(2.58) = 0.995

Sustituimos en la fórmula del error y despejamos *n*.

$$Error = z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \Rightarrow 0.05 = 1.96\cdot\sqrt{\frac{0.5\cdot 0.5}{n}} \Rightarrow \frac{0.05}{1.96} = \sqrt{\frac{0.25}{n}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{0.05}{1.96}\right)^2 = \frac{0.25}{n} \Rightarrow n = \frac{0.25}{\left(\frac{0.05}{1.96}\right)^2} = 384.16$$

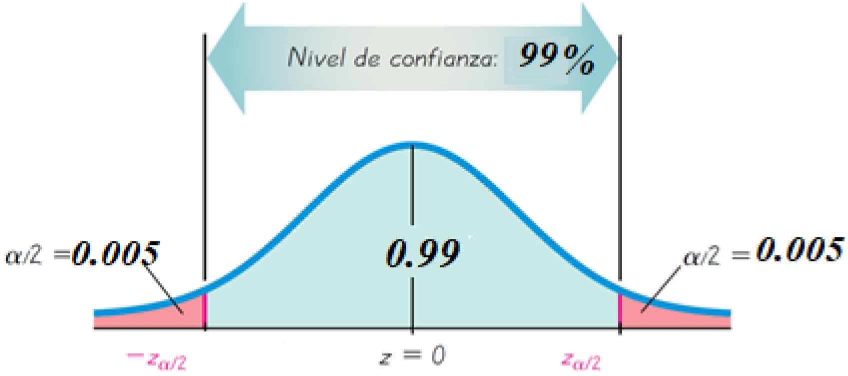
El tamaño mínimo de la muestra es de 385 tabletas de chocolate.

b) Tamaño de la muestra = n = 300. La proporción de las tabletas de chocolate que contienen la cantidad de leche indicada en el envoltorio es: $p = 0.5$.

$$Error = z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = 1.96\cdot\sqrt{\frac{0.5\cdot 0.5}{300}} = 0.0566$$

El error es mayor que 0.05 y el intervalo de confianza será más amplio.
Al disminuir el tamaño muestral, la estimación empeora, aumentando la amplitud del intervalo de confianza.

c) Si aumentamos el nivel de confianza la estimación se vuelve más imprecisa, por lo que aumenta la amplitud del intervalo de confianza. Lo comprobamos.
Buscamos en la tabla de la normal para un nivel de confianza del 99% el valor de $z_{\alpha/2}$.



$1 - \alpha = 0.99 \rightarrow \alpha = 0.01 \rightarrow \alpha/2 = 0.005 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.995 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{2.58}$

F(1.28) = 0.90, F(1.64) = 0.95, F(1.96) = 0.975, F(2.33) = 0.99 y **F(2.58) = 0.995**.

Calculamos el valor del error del intervalo de confianza.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = 2.58\sqrt{\frac{0.5 \cdot 0.5}{300}} \simeq 0.0745$$

El error es mayor que 0.05 y por tanto el intervalo de confianza será más amplio.

Pregunta 5. Opción B. El nivel de cierta hormona en sangre sigue distribución normal con desviación típica 1.2 UI/l. Para una muestra de 200 personas se obtuvo, con un nivel de confianza al 90 %, el intervalo de confianza (8.5608, 8.8392) para estimar el nivel medio de esa hormona en la sangre de las personas en la muestra.
a) ¿Cuál fue el nivel medio de la hormona en la sangre en esas 200 personas? **(1 punto)**
b) En el intervalo anterior, ¿cuánto vale el error de estimación? **(0.75 puntos)**
c) Uno de los dos intervalos siguientes: (8.5681,8.8319) y (8.5514,8.8486) se obtuvo a partir de la misma muestra al 88 % de confianza. Razona adecuadamente cuál de los dos corresponde al nivel de confianza del 88 %. **(0.75 puntos)**

a) X = El nivel de cierta hormona en sangre. X = N(μ, 1.2).
Tamaño de la muestra = *n* = *200*.
La media muestral es el valor central del intervalo de confianza.
Media muestral = $\bar{x} = \dfrac{8.5608+8.8392}{2} = 8.7$ UI/l.

b) El error del intervalo de confianza es la mitad de su amplitud.

$$Error = \frac{8.8392-8.5608}{2} = 0.1392 \text{ UI/l.}$$

c) Si reducimos el nivel de confianza del 90% al 88% el intervalo debe ser menos amplio, por lo que debe ser el intervalo de confianza al 88% el intervalo (8.5681,8.8319).
Lo comprobamos.
Buscamos en la tabla de la normal para un nivel de confianza del 88% el valor de $z_{\alpha/2}$.

$$1-\alpha = 0.88 \rightarrow \alpha = 0.12 \rightarrow \alpha/2 = 0.06 \rightarrow 1-\alpha/2 = 0.94 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1.64}$$

F(1.28) = 0.90, **F(1.64) = 0.95**, F(1.96) = 0.975, F(2.33) = 0.99 y F(2.58) = 0.995.

El valor de $z_{\alpha/2}$ debe ser un poco más pequeño, pero utilizamos los datos disponibles.
Calculamos el valor del error del intervalo de confianza.

$$Error = z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow Error = 1.64\cdot\frac{1.2}{\sqrt{200}} \simeq 0.1392 \text{ UI/l.}$$

El intervalo de confianza para la media de la población es:

$$\left(\bar{x}-Error, \bar{x}+Error\right) = \left(8.7-0.1392, 8.7+0.1392\right) = \left(8.5608, 8.8392\right)$$

Como el error realmente es un poco más pequeño del obtenido el intervalo de confianza debe de salir realmente (8.5681,8.8319) si hubiésemos utilizado el valor adecuado de $z_{\alpha/2}$.