Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II (Modelo de muestra) MODELO DE MUESTRA

Justifique las respuestas usando lenguaje matemático y/o no matemático, según corresponda. Se permite utilizar calculadora científica básica. No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables, ni de dispositivos que puedan transmitir o almacenar información.

Parte A. Contesta el Problema A1, y contesta también un problema a escoger entre el Problema A2 y el problema A3 (total 4 pt).

Problema A1 (obligatorio). - En una navegación marítima, considera los sucesos:
A: hemos avistado algún albatros, y
B: hemos avistado alguna ballena.
Sabemos que $P(A) = 0.75$ y que $P(A \cup B) = 0.77$.

a) Dados los valores de $P(A)$ y $P(A \cup B)$ indicados arriba, es imposible que $P(B) = 0.01$. Justifícalo. (1 pt)

b) Teniendo en cuenta que $0 \leq P(A \cap B) \leq 1$, ¿cuál es la máxima y la mínima probabilidad de avistar ballenas en esta situación? (1 pt)

Problema A2.- Una empresa que fabrica componentes electrónicos realiza un estudio sobre la vida útil de sus productos. Con una muestra aleatoria de 50 componentes electrónicos, el tiempo medio de vida útil es de 507 horas. Supongamos que el tiempo de vida útil sigue una distribución normal y que su desviación típica es conocida e igual a 150 horas.
Calcula un intervalo de confianza para la media poblacional de la vida útil de los componentes con un nivel de confianza del 75%. (2 pt)

Problema A3.- Un estudio de mercado indica que unos clientes determinados tienen un 7% de probabilidades de comprar un producto A, y un 10% de probabilidades de comprar un producto B.

a) Si la probabilidad de "comprar A y no comprar B" es de un 6%, ¿son los sucesos "comprar A" y "comprar B" independientes? (1 pt)

b) Si los sucesos "comprar A" y "comprar B" fuesen independientes, ¿qué sería mayor: la probabilidad de "no comprar A"; o la probabilidad de "no comprar A, sabiendo que se ha comprado B"? (1 pt)

Parte B. Escoja sólo un problema de esta parte (total 3 pt).

Problema B1.- Considera las matrices siguientes:

$$I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 5 & 8\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}x & -3\\ -5 & 2\end{pmatrix},\qquad C=\begin{pmatrix}y & z\\ 7 & -1\end{pmatrix}$$

a) Sabemos que existe un valor x tal que B es la inversa de A. ¿Cuál es este valor x? (1 pt)

b) Para el valor x del apartado anterior, calcula $(A+I)(B-I)+(A-I)(B+I)$. (1 pt)

c) ¿Existen algunos valores para y, z de manera que C sea la inversa de A? (1 pt)

Problema B2.- Una empresa produce dos tipos de productos: aspiradoras y baterías eléctricas.

- Para producir una aspiradora, necesitamos 5h de un operario y 4 kg de materias primas.
- Para producir una batería, necesitamos 1 h de un operario y 1 kg de materias primas.

Cada aspiradora se vende por 100 € y cada batería por 22 €. Disponemos de un máximo de 110 horas de operarios y de 100 kg de materias primas. Supondremos que venderemos toda la producción. ¿Cuántas unidades de cada tipo tenemos que producir para maximizar los ingresos? (3 pt)

Parte C. Escoja sólo un problema de esta parte (total 3 pt).

Problema C1.- Considera la función $f(x) = e^x - e^{-x}$, para $x \geq 0$.

a) Calcula el valor de la función en los extremos del dominio. (1 pt)

b) Calcula $f'(x)$ y $f''(x)$. (1 pt)

c) Calcula $\int_0^1 f(x)dx$. (1 pt)

Problema C2.- Según un estudio de mercado, la cantidad de gente que asistirá a un espectáculo, g (en número de personas), en función del precio de la entrada, p (en €), será la siguiente:

$$g(p) = \begin{cases} 500, & para\ p = 0, \\ 300 - 3p & para\ 0 < p < 100 \\ 0, & para\ p = 100 \end{cases}$$

a) Según el estudio de mercado, ¿con qué precio asistirán al espectáculo un total de 240 personas? (1 pt)

b) Los ingresos son el producto del precio por la cantidad de gente que asistirá. Según el estudio, ¿qué precio maximiza los ingresos? (2 pt)

SOLUCIONES

Problema A1 (obligatorio). - En una navegación marítima, considera los sucesos:
A: hemos avistado algún albatros, y
B: hemos avistado alguna ballena.
Sabemos que P(A) = 0.75 y que $P(A\cup B)=0.77$.

a) Dados los valores de P(A) y $P(A\cup B)$ indicados arriba, es imposible que $P(B)=0.01$. Justifícalo. (1 pt)

b) Teniendo en cuenta que $0 \le P(A\cap B) \le 1$, ¿cuál es la máxima y la mínima probabilidad de avistar ballenas en esta situación? (1 pt)

a) Supongamos que $P(B)=0.01$. Utilizamos la fórmula de la probabilidad de la unión de dos sucesos.

$$\left.\begin{array}{l} P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B) \\ P(A\cup B)=0.77 \\ P(A)=0.75 \\ ¿P(B)=0.01? \end{array}\right\} \Rightarrow 0.77=0.75+0.01-P(A\cap B) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -P(A\cap B)=0.01 \Rightarrow ¡¡\ P(A\cap B)=-0.01\ !!$$

Llegamos a un resultado absurdo obteniendo una probabilidad negativa para $P(A\cap B)$. Al ser imposible el resultado la hipótesis de partida es errónea y no es posible que $P(B)=0.01$. Debe tener un valor mayor para evitar el valor negativo de la probabilidad de la intersección.

b) Utilizamos la fórmula de la probabilidad de la unión de dos sucesos.

$$\left.\begin{array}{l} P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B) \\ P(A\cup B)=0.77 \\ P(A)=0.75 \end{array}\right\} \Rightarrow 0.77=0.75+P(B)-P(A\cap B) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(B)=P(A\cap B)+0.02 \Rightarrow \{0 \le P(A\cap B)\} \Rightarrow \boxed{0.02 \le P(A\cap B)+0.02=P(B)}$$

La probabilidad de avistar ballenas es mayor o igual a 0.02.
Por otro lado, como $P(A\cup B)=0.77$, es decir, la probabilidad de avistar ballenas o albatros es de 0.77, entonces la probabilidad de avistar ballenas no puede ser mayor de esta probabilidad.

Como conclusión la probabilidad de avistar ballenas tiene un valor entre 0.02 y 0.77.

Problema A2.- Una empresa que fabrica componentes electrónicos realiza un estudio sobre la vida útil de sus productos. Con una muestra aleatoria de 50 componentes electrónicos, el tiempo medio de vida útil es de 507 horas. Supongamos que el tiempo de vida útil sigue una distribución normal y que su desviación típica es conocida e igual a 150 horas.
Calcula un intervalo de confianza para la media poblacional de la vida útil de los componentes con un nivel de confianza del 75%. (2 pt)

X = La vida útil de un componente (en horas). X = N(μ , 150)

El tamaño de la muestra es n = 50. La media es $\bar{x} = 507$ horas.
Averiguamos el valor de $z_{\frac{\alpha}{2}}$ para un nivel de confianza el 75 %

$$1-\alpha = 0.75 \rightarrow \alpha = 0.25 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.125 \rightarrow 1-\frac{\alpha}{2} = 0.875 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Busco en la} \\ \text{tabla de la N(0,1)} \end{array} \right\} \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.15$$

	0	1	2	3	4	5	
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8

Utilizamos la fórmula de cálculo del *Error* y tenemos

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.15 \cdot \frac{150}{\sqrt{50}} \simeq 24.4$$

El intervalo de confianza para la vida útil de los componentes es:

$$\left(\bar{x} - Error,\ \bar{x} + Error\right) = \left(507 - 24.4,\ 507 + 24.4\right) = \left(482.6,\ 531.4\right)$$

Problema A3.- Un estudio de mercado indica que unos clientes determinados tienen un 7% de probabilidades de comprar un producto A, y un 10% de probabilidades de comprar un producto B.

a) Si la probabilidad de "comprar A y no comprar B" es de un 6%, ¿son los sucesos "comprar A" y "comprar B" independientes? (1 pt)

b) Si los sucesos "comprar A" y "comprar B" fuesen independientes, ¿qué sería mayor: la probabilidad de "no comprar A"; o la probabilidad de "no comprar A, sabiendo que se ha comprado B"? (1 pt)

a) Llamamos A al suceso "comprar A" y B a "comprar B".

Sabemos que $P(A)=0.07$, $P(B)=0.10$ y $P\left(A\cap\overline{B}\right)=0.06$.

Como $P(A)=P(A\cap B)+P\left(A\cap\overline{B}\right)$ entonces tenemos que $0.07=P(A\cap B)+0.06$, por lo que $P(A\cap B)=0.01$.

Para que sean independientes los sucesos A y B debe cumplirse $P(A\cap B)=P(A)P(B)$.

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}P(A)=0.07\\P(B)=0.10\end{array}\right\}\to P(A)P(B)=0.07\cdot 0.1=0.007\\P(A\cap B)=0.01\end{array}\right\}\Rightarrow P(A\cap B)=0.010\neq 0.007=P(A)P(B)$$

Los sucesos no son independientes.

b) Nos piden comparar los valores de $P\left(\overline{A}\right)$ y de $P\left(\overline{A}/B\right)$.

Si los sucesos A y B son independientes se cumple $P(A\cap B)=P(A)P(B)=0.007$.

Calculamos las probabilidades de los dos sucesos planteados y comparamos sus valores.

$$P\left(\overline{A}\right)=1-P(A)=1-0.07=0.93$$

$$P\left(\overline{A}/B\right)=\frac{P\left(\overline{A}\cap B\right)}{P(B)}=\frac{P(B)-P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{0.1-0.007}{0.1}=0.93$$

Son igual de probables los dos sucesos.

Problema B1.- Considera las matrices siguientes:

$$I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\quad A=\begin{pmatrix}2&3\\5&8\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}x&-3\\-5&2\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}y&z\\7&-1\end{pmatrix}$$

a) Sabemos que existe un valor *x* tal que B es la inversa de A. ¿Cuál es este valor *x*? (1 pt)

b) Para el valor *x* del apartado anterior, calcula $(A+I)(B-I)+(A-I)(B+I)$. (1 pt)

c) ¿Existen algunos valores para *y*, *z* de manera que C sea la inversa de A? (1 pt)

a) Si B es la inversa de A se cumple que $AB=I$.
Planteamos esta igualdad y hallamos, si es posible, *x*.

$$AB=I\Rightarrow\begin{pmatrix}2&3\\5&8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x&-3\\-5&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}2x-15&-6+6\\5x-40&-15+16\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}2x-15&0\\5x-40&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}2x-15=1\to 2x=16\to\boxed{x=\frac{16}{2}=8}\\5x-40=0\to 5x=40\to\boxed{x=\frac{40}{5}=8}\end{cases}$$

El valor buscado es *x* = *8*.

b) Para *x* = *8* la matriz B es la inversa de A.

$$(A+I)(B-I)+(A-I)(B+I)=AB-AI+IB-I\cdot I+AB+AI-IB-I\cdot I=$$

$$=\left\{\begin{matrix}B\text{ es la inversa de }A\\AB=I\end{matrix}\right\}=\cancel{I}-\cancel{A}+B-\cancel{I}+\cancel{I}+\cancel{A}-B-\cancel{I}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

La expresión queda igual a la matriz nula $\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$.

c) Hemos visto en el apartado a) que la matriz B es la inversa de A para *x* = *8*.
La inversa de A es la matriz $B=\begin{pmatrix}8&-3\\-5&2\end{pmatrix}$.
Si C es la inversa de A debe cumplirse que $C=B$ con *x* = *8*.

$$C=B\Rightarrow\begin{pmatrix}8&-3\\-5&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y&z\\7&-1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}y=8\\z=-3\\-5=7\\2=-1\end{cases},\ \text{¡Imposible!}$$

No existen valores de *y*, *z* de manera que C sea la inversa de A.

Problema B2.- Una empresa produce dos tipos de productos: aspiradoras y baterías eléctricas.
- Para producir una aspiradora, necesitamos 5h de un operario y 4 kg de materias primas.
- Para producir una batería, necesitamos 1 h de un operario y 1 kg de materias primas.
Cada aspiradora se vende por 100 € y cada batería por 22 €. Disponemos de un máximo de 110 horas de operarios y de 100 kg de materias primas. Supondremos que venderemos toda la producción. ¿Cuántas unidades de cada tipo tenemos que producir para maximizar los ingresos? (3 pt)

Llamamos x = número de aspiradoras que debe producir, y = número de baterías.
Hacemos una tabla.

	Horas de operarios	**Kg de materias primas**	**Beneficios**
Nº aspiradoras (x)	**5x**	**4x**	**100x**
Nº baterías (y)	**y**	**y**	**22y**
TOTALES	$5x+y$	$4x+y$	$100x+22y$

La función a maximizar son los beneficios $B(x,y)=100x+22y$.

Las restricciones son:

"Disponemos de un máximo de 110 horas de operarios y de 100 kg de materias primas" → $5x+y\le 110;\ 4x+y\le 100$

Las cantidades deben ser positivas → $x\ge 0;\ y\ge 0$

Reunimos las restricciones en un sistema:

$$\left.\begin{array}{l} 5x+y\le 110 \\ 4x+y\le 100 \\ x\ge 0;\ y\ge 0 \end{array}\right\}$$

Empezamos dibujando las rectas que delimitan la región factible.

$5x+y=110$

x	$y=110-5x$
0	110
10	60
22	0

$4x+y=100$

x	$y=100-4x$
0	100
10	60
25	0

$x\ge 0;\ y\ge 0$

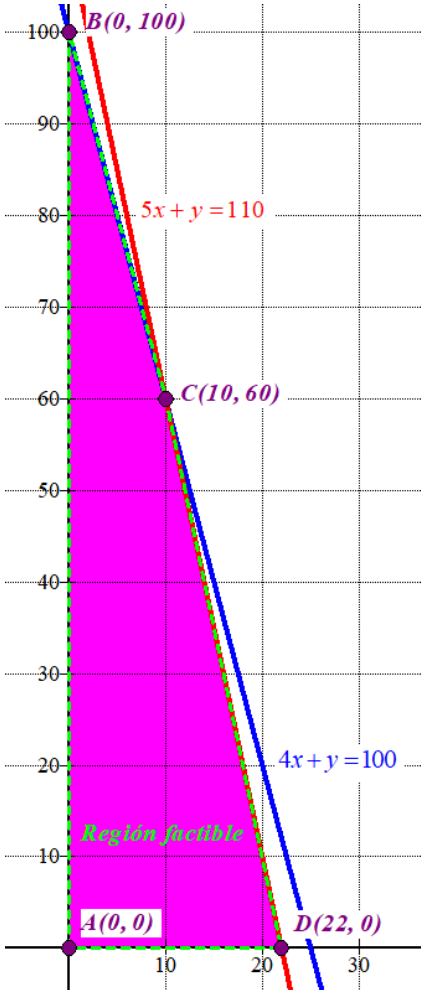
Primer cuadrante

La región factible es la región del plano cuyos puntos cumplen las inecuaciones $\left.\begin{array}{l} 5x+y\le 110 \\ 4x+y\le 100 \\ x\ge 0;\ y\ge 0 \end{array}\right\}$, por lo tanto, es la región del primer cuadrante por debajo de las rectas roja y azul.

Comprobamos que el punto P(10, 10) perteneciente a esta región cumple las inecuaciones.

$$\left.\begin{array}{l} 50+10\le 110 \\ 40+10\le 100 \\ 10\ge 0;\ 10\ge 0 \end{array}\right\} \text{ ¡Se cumplen todas!}$$

La región es la indicada. Coloreamos de rosa la región factible en el siguiente dibujo.



Los vértices de la región factible son: A(0, 0), B(0, 100), C(10, 60) y D(22, 0).

Valoramos la función beneficio $B(x,y)=100x+22y$ en cada uno de los vértices.

A(0, 0) → $B(0,0)=0$

B(0, 100) → $B(0,100)=100\cdot 0+22\cdot 100=2\,200$

C(10, 60) → $B(10,60)=100\cdot 10+22\cdot 60=2\,320$

D(22, 0) → $B(22,0)=100\cdot 22+22\cdot 0=2\,200$

El máximo beneficio que se puede obtener cumpliendo las restricciones es de 2320 € y se obtiene en el vértice C(10, 60), lo que significa producir 10 aspiradoras y 60 baterías.

Problema C1.- Considera la función $f(x)=e^x-e^{-x}$, para $x\geq 0$.

a) Calcula el valor de la función en los extremos del dominio. (1 pt)

b) Calcula $f'(x)$ y $f''(x)$. (1 pt)

c) Calcula $\int_0^1 f(x)dx$. (1 pt)

a) El dominio de la función es $[0,+\infty)$.

En $x = 0$ la función vale $f(0)=e^0-e^{-0}=0$.

En $+\infty$ calculamos el límite de la función.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} e^x-e^{-x}=\lim_{x\to+\infty} e^x-\frac{1}{e^x}=e^{+\infty}-\frac{1}{e^{+\infty}}=+\infty-\frac{1}{\infty}=+\infty-0=+\infty$$

b) Calculamos la expresión de la derivada primera y segunda de la función.

$$f(x)=e^x-e^{-x}\Rightarrow f'(x)=e^x+e^{-x}\Rightarrow f''(x)=e^x-e^{-x}=f(x)$$

c) Calculamos primero la integral indefinida de *f(x)*.

$$\int f(x)dx=\int e^x-e^{-x}dx=e^x+e^{-x}+C$$

Calculamos la integral definida pedida.

$$\int_0^1 f(x)dx=\left[e^x+e^{-x}\right]_0^1=\left[e^1+e^{-1}\right]-\left[e^0+e^{-0}\right]=e+\frac{1}{e}-2=\boxed{\frac{e^2-2e+1}{e}\simeq 1.086}$$

Hemos comprobado que $\int_0^1 f(x)dx=\dfrac{e^2-2e+1}{e}\simeq 1.086$.

Problema C2.- Según un estudio de mercado, la cantidad de gente que asistirá a un espectáculo, g (en número de personas), en función del precio de la entrada, p (en €), será la siguiente:

$$g(p)=\begin{cases} 500, & para\ p=0, \\ 300-3p & para\ 0<p<100 \\ 0, & para\ p=100 \end{cases}$$

a) Según el estudio de mercado, ¿con qué precio asistirán al espectáculo un total de 240 personas? (1 pt)

b) Los ingresos son el producto del precio por la cantidad de gente que asistirá. Según el estudio, ¿qué precio maximiza los ingresos? (2 pt)

a) Averiguamos cuando la función vale 240.

$$g(p)=240 \Rightarrow \begin{cases} 500=240 \rightarrow \text{¡Imposible!} \\ 300-3p=240 \rightarrow 60=3p \rightarrow p=20 \in (0,100) \\ 0=240 \rightarrow \text{¡Imposible!} \end{cases}$$

Cuando asisten 240 personas el precio de la entrada es de 20 €,

b) Obtenemos la expresión de los ingresos.

$$I(p)=g(p)\cdot p=\begin{cases} 500p=0, & para\ p=0, \\ (300-3p)p=300p-3p^2 & para\ 0<p<100 \Rightarrow \\ 0\cdot p=0, & para\ p=100 \end{cases}$$

$$\Rightarrow I(p)=300p-3p^2$$

La función ingresos es $I(p)=300p-3p^2$, siendo $0\le p\le 100$.

Buscamos los puntos críticos de la función.

$$I(p)=300p-3p^2 \Rightarrow I'(p)=300-6p$$

$$I'(p)=0 \Rightarrow 300-6p=0 \Rightarrow 300=6p \Rightarrow p=\frac{300}{6}=50$$

Estudiamos el signo de la segunda derivada en el punto crítico *p = 50*.

$$I'(p)=300-6p \Rightarrow I''(p)=-6 \Rightarrow I''(50)=-6<0$$

Como el signo de la segunda derivada es negativo la función ingresos tiene un máximo relativo para un precio de la entrada de 50 €.

Este máximo relativo es máximo absoluto de los ingresos, pues la función ingresos es una función parabólica.