Universidad de Cantabria

PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD

EJEMPLO

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

INDICACIONES

- El examen consta de **3 tareas obligatorias** (1 por cada apartado). En caso de responder a más preguntas o tareas de los establecidos en cada apartado sólo se corregirá la que aparezca físicamente en primer lugar.
- Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, ni gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados. Durante el desarrollo del ejercicio no se permitirá el préstamo de calculadoras entre estudiantes.
- Los teléfonos móviles deberán estar apagados durante el examen.

APARTADO 1 [3 puntos]

Opción A

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1) Se pide hallar la matriz X que satisface la ecuación $X^{-1}A + A = B$.
2) Se pide hallar la matriz Y que satisface la ecuación $AYA^{-1} = I$

Opción B

La editorial "EcoReads", comprometida con la sostenibilidad ambiental, planea lanzar dos colecciones de libros: una de guías prácticas sobre sostenibilidad y una colección de libros de cocina vegetariana. Cada guía práctica genera un beneficio de 5 € y cada libro de cocina vegetariana aporta un beneficio de 4 €. Para la producción de estos libros, la editorial emplea dos tipos de papel ecológico: papel reciclado de alta calidad y papel de fibras de bambú. La impresión de una guía requiere 60 g de papel reciclado y 20 g de papel de bambú, mientras que cada libro de cocina vegetariana necesita 70 g de papel reciclado y 10 g de papel de bambú. La editorial tiene a su disposición 4000 g de papel reciclado y 800 g de papel de bambú para su próxima producción.
Además, para garantizar una diversificación del catálogo, la editorial decide que se deben publicar al menos 10 libros de cocina vegetariana.
1) Plantee la función objetivo y el conjunto de restricciones que describen el problema.
2) Dibuje la región factible en el plano, calculando sus vértices.
3) ¿Cuántos ejemplares de cada colección debería publicar la editorial para maximizar sus beneficios?
4) ¿A cuánto asciende dicho beneficio?

APARTADO 2 [4 puntos]

Dada la función $f\left(x\right)=\begin{cases} ax^2-4, & si\ x\leq -1 \\ x^3-x+3, & si\ -1<x\leq 2 \\ \dfrac{x+3b-2}{x-1}, & si\ x>2 \end{cases}$

1) Determine los valores de los parámetros a y b para los cuales la función es continua en todo su dominio.

2) Utilizando los valores de los parámetros a y b del apartado anterior, analice si la función $f(x)$ es creciente o decreciente en el intervalo $(2, +\infty)$.

3) Calcule la integral definida $I=\int_0^2 f\left(x\right)dx$

APARTADO 3 [3 puntos]
Opción A

Un profesor ha determinado que el tiempo que sus estudiantes tardan en completar un examen sigue una distribución normal con una desviación típica de 10 minutos. A partir de una muestra de 100 estudiantes seleccionados al azar, se calcula que el tiempo medio necesario para completar un examen es de 90 minutos.

1) Calcule el intervalo de confianza del 93 % para el tiempo medio que los estudiantes tardan en completar un examen.
2) ¿Cuál es el número mínimo de estudiantes que habría que considerar para que el error al estimar el tiempo medio empleado en completar un examen, con un nivel de confianza del 97 %, sea de 2 minutos?

Opción B

En un instituto, se sabe que el 45 % de los estudiantes practican algún deporte, el 30 % participan en actividades artísticas y el 25 % están involucrados en actividades de voluntariado. Además, se sabe que el 60 % de los estudiantes que practican deportes, el 40 % de los que participan en actividades artísticas y el 20 % de los que están involucrados en actividades de voluntariado también son miembros del consejo estudiantil. Si se escoge al azar un estudiante:

1) ¿Cuál es la probabilidad de que practique deporte y sea miembro del consejo estudiantil?
2) ¿Cuál es la probabilidad de que un estudiante participe en actividades artísticas y no sea miembro del consejo estudiantil?
3) ¿Cuál es la probabilidad de que un estudiante sea miembro del consejo estudiantil?
4) Si un estudiante no es miembro del consejo estudiantil, ¿cuál es la probabilidad de que participe en actividades de voluntariado?

SOLUCIONES

APARTADO 1 [3 puntos]
Opción A

Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}$

1) Se pide hallar la matriz X que satisface la ecuación $X^{-1}A+A=B$.
2) Se pide hallar la matriz Y que satisface la ecuación $AYA^{-1}=I$

1) Despejamos X de la ecuación.

$$X^{-1}A+A=B \Rightarrow X^{-1}A=B-A \Rightarrow A=X\left(B-A\right) \Rightarrow A\left(B-A\right)^{-1}=X$$

Comprobamos que la matriz $B-A$ tiene determinante no nulo y por tanto tiene inversa.

$$B-A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$$

$$\left|B-A\right|=\begin{vmatrix}0&1&1\\0&0&1\\1&0&0\end{vmatrix}=0+1+0-0-0-0=1\neq 0$$

Calculamos la inversa de $B-A$.

$$\left(B-A\right)^{-1}=\frac{Adj\left(\left(B-A\right)^{T}\right)}{\left|B-A\right|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\1&1&0\end{pmatrix}}{1}=\begin{pmatrix}+\begin{vmatrix}0&0\\1&0\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1&0\\1&0\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1&0\\1&1\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}0&1\\1&0\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}0&1\\1&0\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}0&0\\1&1\end{vmatrix}\\ +\begin{vmatrix}0&1\\0&0\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}0&1\\1&0\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}0&0\\1&0\end{vmatrix}\end{pmatrix}$$

$$\left(B-A\right)^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&-1&0\\0&1&0\end{pmatrix}$$

Determinamos la expresión de la matriz X.

$$X=A\left(B-A\right)^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\1&-1&0\\0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-1&1\\1&-1&0\\0&1&0\end{pmatrix}$$

La matriz X tiene la expresión $X = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

2) Despejamos Y de la ecuación.

$$AYA^{-1} = I \Rightarrow A^{-1}AYA^{-1} = A^{-1}I \Rightarrow YA^{-1} = A^{-1} \Rightarrow YA^{-1}A = A^{-1}A \Rightarrow Y = I$$

La matriz Y tiene la expresión $Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

APARTADO 1 [3 puntos]
Opción B
La editorial "EcoReads", comprometida con la sostenibilidad ambiental, planea lanzar dos colecciones de libros: una de guías prácticas sobre sostenibilidad y una colección de libros de cocina vegetariana. Cada guía práctica genera un beneficio de 5 € y cada libro de cocina vegetariana aporta un beneficio de 4 €. Para la producción de estos libros, la editorial emplea dos tipos de papel ecológico: papel reciclado de alta calidad y papel de fibras de bambú. La impresión de una guía requiere 60 g de papel reciclado y 20 g de papel de bambú, mientras que cada libro de cocina vegetariana necesita 70 g de papel reciclado y 10 g de papel de bambú. La editorial tiene a su disposición 4000 g de papel reciclado y 800 g de papel de bambú para su próxima producción.
Además, para garantizar una diversificación del catálogo, la editorial decide que se deben publicar al menos 10 libros de cocina vegetariana.
1) Plantee la función objetivo y el conjunto de restricciones que describen el problema.
2) Dibuje la región factible en el plano, calculando sus vértices.
3) ¿Cuántos ejemplares de cada colección debería publicar la editorial para maximizar sus beneficios?
4) ¿A cuánto asciende dicho beneficio?

.

1) Llamamos "x" = número de guías prácticas que publica la editorial e "y" = número de libros de cocina que publica.

Realizamos una tabla con los datos del problema.

	Gramos de papel reciclado	Gramos de papel de bambú	Beneficio
Nº guías prácticas (x)	$60x$	$20x$	$5x$
Nº libros de cocina (y)	$70y$	$10y$	$4y$
TOTAL	$60x+70y$	$20x+10y$	$5x+4y$

La función objetivo que deseamos maximizar es el beneficio que viene expresado como:

$$B(x,y)=5x+4y$$

Las restricciones son:

"La editorial tiene a su disposición 4000 g de papel reciclado y 800 g de papel de bambú para su próxima producción" → $60x+70y\le 4000;\ 20x+10y\le 800$

"La editorial decide que se deben publicar al menos 10 libros de cocina vegetariana" → $y\ge 10$

Las cantidades deben ser positivas → $x\ge 0;\ y\ge 0$

Reunimos todas las restricciones en un sistema de inecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} 60x+70y\le 4000 \\ 20x+10y\le 800 \\ y\ge 10 \\ x\ge 0;\ y\ge 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 6x+7y\le 400 \\ 2x+y\le 80 \\ y\ge 10 \\ x\ge 0;\ y\ge 0 \end{array}\right\}$$

2) Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

$2x + y = 80$

x	$y = 80 - 2x$
0	80
20	40
35	10

$6x + 7y = 400$

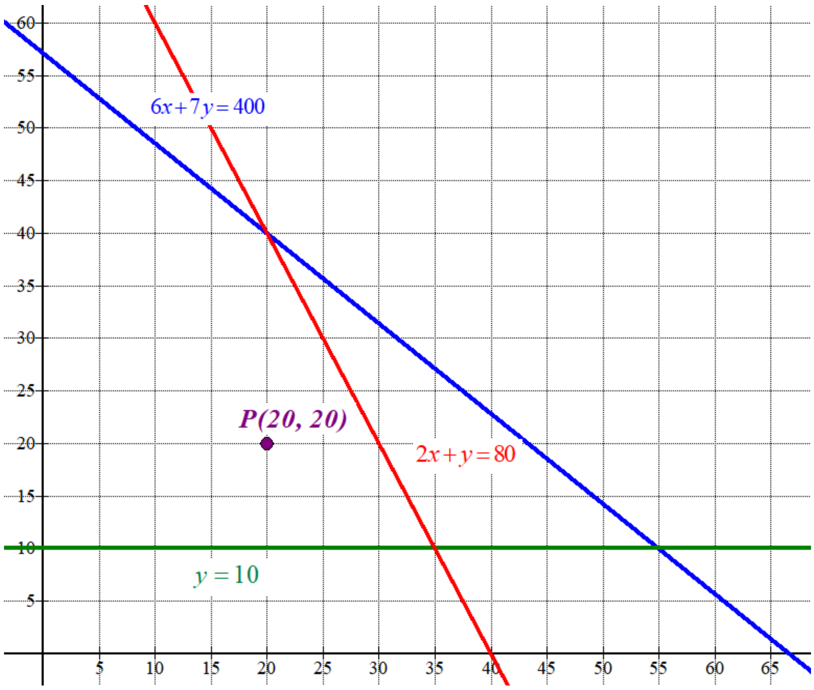
x	$y = \dfrac{400 - 6x}{7}$
0	$400/7$
20	40
60	$40/7$

$y = 10$

x	$y = 10$
0	10
35	10

$x \geq 0;\ y \geq 0$

Primer cuadrante

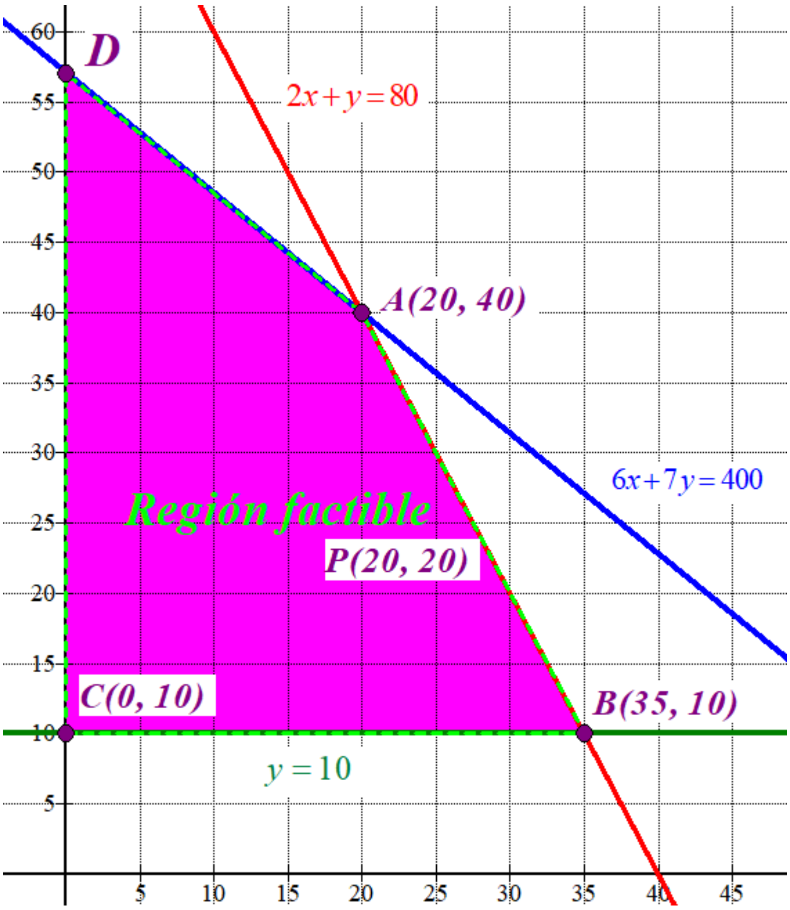


Como las restricciones del problema son $\left.\begin{array}{l} 6x + 7y \leq 400 \\ 2x + y \leq 80 \\ y \geq 10 \\ x \geq 0;\ y \geq 0 \end{array}\right\}$ la región factible es la región del primer cuadrante que está por debajo de las rectas azul y roja, y por encima de la recta horizontal verde.

Comprobamos que el punto P(20, 20) que pertenece a dicha región cumple las restricciones.

$$\left.\begin{array}{l} 6 \cdot 20 + 7 \cdot 20 \leq 400 \\ 2 \cdot 20 + 20 \leq 80 \\ 20 \geq 10 \\ 20 \geq 0;\ 20 \geq 0 \end{array}\right\} \text{¡Se cumplen todas!}$$

Coloreamos de rosa la región factible en el siguiente dibujo y determinamos las coordenadas de sus vértices.



Hallamos las coordenadas del vértice D.

$$D \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 6x+7y=400 \\ x=0 \end{array} \right\} \Rightarrow 7y=400 \Rightarrow y=\frac{400}{7} \Rightarrow D\left(0, \frac{400}{7}\right)$$

Los vértices son A(20, 40); B(35, 10); C(0, 10) y $D\left(0, \frac{400}{7}\right)$.

3) Valoramos la función objetivo $B(x,y)=5x+4y$ en cada vértice en busca del valor máximo.

A(20, 40) → $B(20,40)=5\cdot 20+4\cdot 40=260$ ¡Máximo!

B(35, 10) → $B(35,10)=5\cdot 35+4\cdot 10=215$

C(0, 10) → $B(0,10)=5\cdot 0+4\cdot 10=40$

$D\left(0,\frac{400}{7}\right) \to B\left(0,\frac{400}{7}\right)=5\cdot 0+4\cdot\frac{400}{7}=228.57$

El máximo beneficio se obtiene en el vértice A(20, 40). Se deben publicar 20 guías y 40 libros de cocina para maximizar los beneficios.

4) El máximo beneficio es de 260 €.

APARTADO 2 [4 puntos]

Dada la función $f(x)=\begin{cases} ax^2-4, & si\ x\leq -1 \\ x^3-x+3, & si\ -1<x\leq 2 \\ \dfrac{x+3b-2}{x-1}, & si\ x>2 \end{cases}$

1) Determine los valores de los parámetros a y b para los cuales la función es continua en todo su dominio.
2) Utilizando los valores de los parámetros a y b del apartado anterior, analice si la función $f(x)$ es creciente o decreciente en el intervalo (2, +∞).
3) Calcule la integral definida $I=\int_0^2 f(x)dx$

1) La función debe ser continua en $x = -1$.

$$\left.\begin{array}{l} f(-1)=a(-1)^2-4=a-4 \\ \lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-} ax^2-4=a-4 \\ \lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+} x^3-x+3=(-1)^3-(-1)+3=3 \\ f(-1)=\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) \end{array}\right\}\Rightarrow a-4=3\Rightarrow \boxed{a=7}$$

La función debe ser continua en $x = 2$.

$$\left.\begin{array}{l} f(2)=2^3-2+3=9 \\ \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-} x^3-x+3=9 \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x+3b-2}{x-1}=\dfrac{2+3b-2}{1}=3b \\ f(2)=\lim\limits_{x\to 32} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) \end{array}\right\}\Rightarrow 3b=9\Rightarrow \boxed{b=3}$$

Los valores que hacen continua la función son $a = 7$ y $b = 3$.

2) Para los valores $a = 7$ y $b = 3$ la función queda $f(x)=\begin{cases} 7x^2-4, & si\ x\leq -1 \\ x^3-x+3, & si\ -1<x\leq 2 \\ \dfrac{x+7}{x-1}, & si\ x>2 \end{cases}$.

En el intervalo (2, +∞) la función es $f(x)=\dfrac{x+7}{x-1}$.

Estudiamos el signo de la derivada.

$$f(x)=\frac{x+7}{x-1}\Rightarrow f'(x)=\frac{1\cdot(x-1)-1\cdot(x+7)}{(x-1)^2}=\frac{x-1-x-7}{(x-1)^2}=\frac{-8}{(x-1)^2}$$

Al ser el numerador negativo y el denominador positivo la derivada es siempre negativa.
La función decrece en $(2, +\infty)$.

3) En el intervalo [0, 2] la función es $f(x) = x^3 - x + 3$.

Calculamos la integral definida pedida.

$$I = \int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^2 x^3 - x + 3dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + 3x\right]_0^2 =$$

$$= \left[\frac{2^4}{4} - \frac{2^2}{2} + 3\cdot 2\right] - \left[\frac{0^4}{4} - \frac{0^2}{2} + 3\cdot 0\right] = 4 - 2 + 6 = \boxed{8}$$

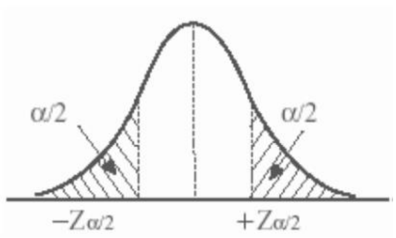
APARTADO 3 [3 puntos]
Opción A
Un profesor ha determinado que el tiempo que sus estudiantes tardan en completar un examen sigue una distribución normal con una desviación típica de 10 minutos. A partir de una muestra de 100 estudiantes seleccionados al azar, se calcula que el tiempo medio necesario para completar un examen es de 90 minutos.

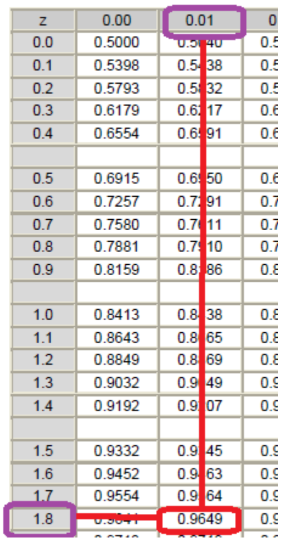
1) Calcule el intervalo de confianza del 93 % para el tiempo medio que los estudiantes tardan en completar un examen.
2) ¿Cuál es el número mínimo de estudiantes que habría que considerar para que el error al estimar el tiempo medio empleado en completar un examen, con un nivel de confianza del 97 %, sea de 2 minutos?

X = el tiempo que sus estudiantes tardan en completar un examen (en minutos). X = N(**μ**, 10)
Tamaño de muestra = n = *100*. $\bar{x} = 90$ minutos.

1) Con un nivel de confianza del 93% determinamos el valor de $z_{\alpha/2}$.

$$1 - \alpha = 0.93 \rightarrow \alpha = 0.07 \rightarrow \alpha/2 = 0.035 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.965 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1.81}$$





z	0.00	0.01
0.0	0.5000	0.5[illegible]40
0.1	0.5398	0.5[illegible]38
0.2	0.5793	0.5[illegible]32
0.3	0.6179	0.6[illegible]17
0.4	0.6554	0.6[illegible]91
0.5	0.6915	0.6[illegible]50
0.6	0.7257	0.7[illegible]91
0.7	0.7580	0.7[illegible]11
0.8	0.7881	0.7[illegible]10
0.9	0.8159	0.8[illegible]86
1.0	0.8413	0.8[illegible]38
1.1	0.8643	0.8[illegible]65
1.2	0.8849	0.8[illegible]69
1.3	0.9032	0.9[illegible]49
1.4	0.9192	0.9[illegible]07
1.5	0.9332	0.9[illegible]45
1.6	0.9452	0.9[illegible]63
1.7	0.9554	0.9[illegible]64
1.8	[illegible]	0.9649

Calculamos el valor del error.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.81 \cdot \frac{10}{\sqrt{100}} = 1.81 \text{ minutos}$$

El intervalo de confianza es:

$$\left(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error\right) = (90 - 1.81, 90 + 1.81) = (88.19, 91.81)$$

2) Con un nivel de confianza del 97% determinamos el valor de $z_{\alpha/2}$.

$$1 - \alpha = 0{,}97 \rightarrow \alpha = 0{,}03 \rightarrow \alpha/2 = 0'015 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0{,}985 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{2.17}$$

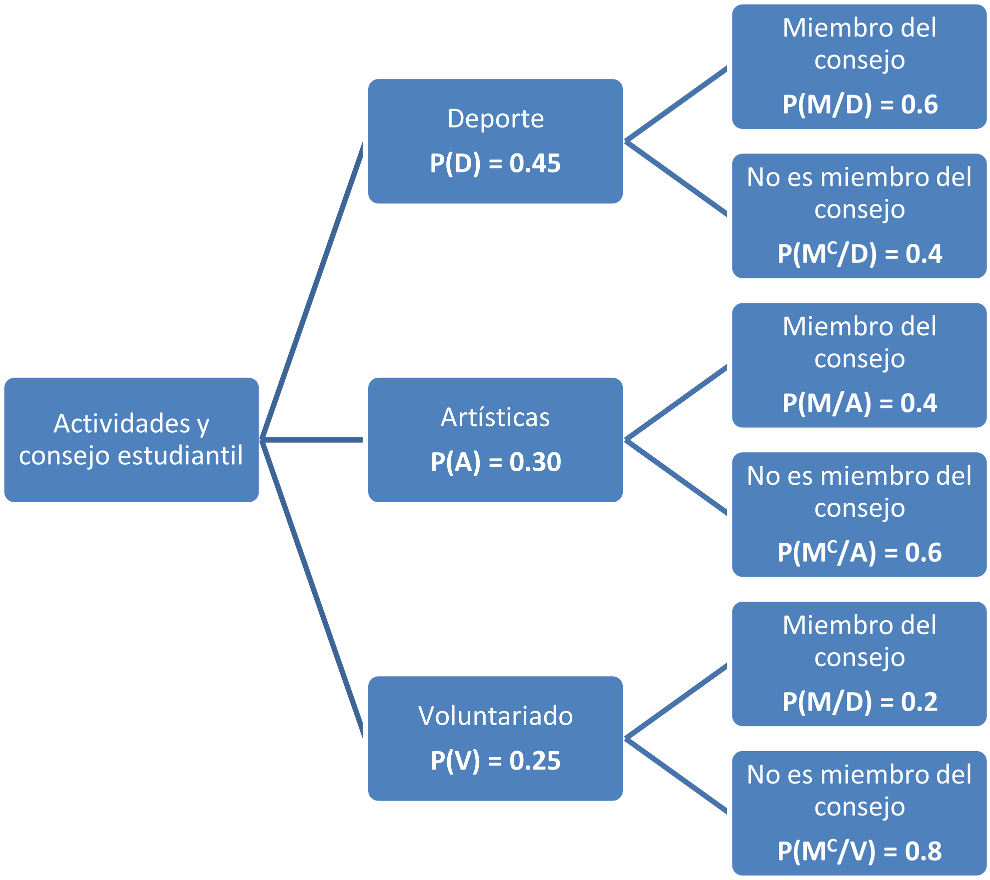
Igualamos el error a 2 minutos.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 2 = 2.17 \cdot \frac{10}{\sqrt{n}} \Rightarrow 2\sqrt{n} = 21.7 \Rightarrow \sqrt{n} = \frac{21.7}{2} \Rightarrow n = \left(\frac{21.7}{2}\right)^2 = 117.7225$$

Como n debe ser entero y superior al "n" hallado el tamaño mínimo de la muestra es de 118 estudiantes.

APARTADO 3 [3 puntos]
Opción B
En un instituto, se sabe que el 45 % de los estudiantes practican algún deporte, el 30 % participan en actividades artísticas y el 25 % están involucrados en actividades de voluntariado. Además, se sabe que el 60 % de los estudiantes que practican deportes, el 40 % de los que participan en actividades artísticas y el 20 % de los que están involucrados en actividades de voluntariado también son miembros del consejo estudiantil. Si se escoge al azar un estudiante:
1) ¿Cuál es la probabilidad de que practique deporte y sea miembro del consejo estudiantil?
2) ¿Cuál es la probabilidad de que un estudiante participe en actividades artísticas y no sea miembro del consejo estudiantil?
3) ¿Cuál es la probabilidad de que un estudiante sea miembro del consejo estudiantil?
4) Si un estudiante no es miembro del consejo estudiantil, ¿cuál es la probabilidad de que participe en actividades de voluntariado?

Llamamos D al suceso “el estudiante practica algún deporte, A al suceso “el estudiante participa en actividades artísticas”, V al suceso “el estudiante participa en actividades de voluntariado” y M al suceso “el estudiante es miembro del consejo estudiantil”.
Realizamos un diagrama de árbol para ordenar toda la información proporcionada.



1) Nos piden calcular $P(D \cap M)$.

$$P(D \cap M) = P(D)P(M/D) = 0.45 \cdot 0.6 = \boxed{0.27}$$

La probabilidad de que practique deporte y sea miembro del consejo estudiantil es de 0.27.

2) Nos piden calcular $P(A \cap M^C)$.

$$P\left(A\cap M^C\right)=P(A)P\left(M^C/A\right)=0.3\cdot 0.6=\boxed{0.18}$$

La probabilidad de que un estudiante participe en actividades artísticas y no sea miembro del consejo estudiantil es de 0.18

3) Nos piden calcular $P(M)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(M)=P(D\cap M)+P(A\cap M)+P(V\cap M)=$$

$$=P(D)P(M/D)+P(A)P(M/A)+P(V)P(M/V)=$$

$$=0.45\cdot 0.6+0.3\cdot 0.4+0.25\cdot 0.2=\boxed{0.44}$$

La probabilidad de que un estudiante sea miembro del consejo estudiantil es de 0.44.

4) Nos piden calcular $P\left(V/M^C\right)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P\left(V/M^C\right)=\frac{P\left(V\cap M^C\right)}{P\left(M^C\right)}=\frac{P(V)P\left(M^C/V\right)}{P(D)P\left(M^C/D\right)+P(A)P\left(M^C/A\right)+P(V)P\left(M^C/V\right)}=$$

$$=\frac{0.25\cdot 0.8}{0.45\cdot 0.4+0.3\cdot 0.6+0.25\cdot 0.8}=\boxed{\frac{5}{14}\simeq 0.3571}$$