Prueba de Acceso a la Universidad (PAU)

Universidad de Extremadura

Curso 2024-2025

Materia: Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II Tiempo máximo de la prueba: 1h 30m

Instrucciones para realizar el examen:

En algunos apartados existe la posibilidad de elegir entre dos preguntas. En caso de responder a más preguntas o tareas de los establecidos en cada bloque sólo se corregirá el que aparezca físicamente en primer lugar, salvo que aparezca tachado.

Criterios generales: Las respuestas a las preguntas o tareas deben realizarse expresando de forma razonada el proceso seguido en su resolución, con el rigor y la precisión necesarios, usando el lenguaje, la notación y los símbolos matemáticos adecuados, y utilizando argumentos, justificaciones, explicaciones y razonamientos explícitos y coherentes. La mera descripción del planteamiento, sin que se lleve a cabo la resolución de manera efectiva, no es suficiente para obtener una valoración completa de la pregunta o tarea.

En las preguntas o tareas en los que se pida expresamente una deducción razonada, la mera aplicación de una fórmula no será suficiente para obtener una valoración completa de los mismos.

Los errores en las operaciones aritméticas elementales se penalizarán con un máximo de 0.25 puntos en cada pregunta o tarea.

Ortografía y redacción: Con carácter general se penalizará la incorrección gramatical de la siguiente manera: Los 2 primeros errores ortográficos no se penalizarán. Se comenzará a deducir 0.10 puntos por cada falta ortográfica a partir de la tercera, hasta alcanzar la máxima penalización de 1 punto. Cuando se repita la misma falta de ortografía se contará como una sola. Por errores en la sintaxis, el vocabulario y la presentación se podrá deducir un máximo de 0.50 puntos.

Materiales: Se permitirá una calculadora no gráfica, no programable. También se podrá utilizar una regla pequeña y bolígrafos de colores (salvo el rojo y verde) para las gráficas.

Este documento es un modelo de examen que tiene carácter orientativo y puede servir como referencia para el estudiante que realice las pruebas. No obstante, además de los problemas contenidos en este modelo de examen, podrán plantearse otros tipos de ejercicios que se encuadren en lo establecido en los saberes básicos que aparecen en el currículo de la materia publicados en el Real Decreto 243/2022, de 5 de abril por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas del Bachillerato.

APARTADO A (4 puntos)

Una compañía energética realiza un estudio de mercado entre sus clientes. Responde, razonadamente, a las siguientes cuestiones que surgieron en el estudio:

A1. Los clientes de esta compañía energética pueden contratar dos productos electricidad o gas. El 75% de los clientes contrata la electricidad. De estos clientes, sólo el 20% contrata el gas. Se pide, justificando las respuestas:

a) ¿Qué porcentaje de clientes contrata ambos productos?

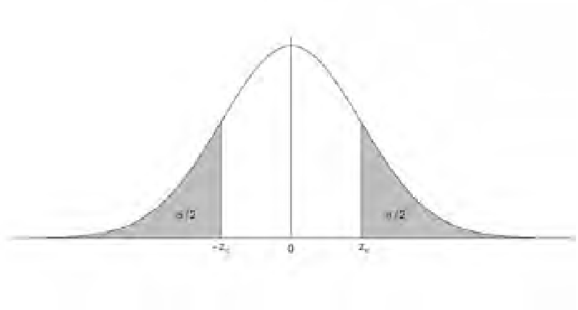
b) Si el 90% de los clientes contrata alguno de los dos productos, ¿qué porcentaje de clientes contrata el gas?

A2. El gasto mensual en electricidad de los clientes de esta compañía es una variable que se ajusta a una distribución normal con desviación típica 16 euros. Se examinan las facturas de 81 clientes elegidos al azar, resultando un gasto promedio de 72 euros. Se pide, justificando las respuestas:

a) Hallar un intervalo de confianza, al nivel de confianza del 90%, para el gasto medio mensual en electricidad de los clientes de esta compañía.

b) En base a dicho intervalo, ¿podemos decir que el gasto medio mensual en electricidad de los clientes de esta compañía superó los 70 euros?

α	z_α
0.01	2.576
0.02	2.326
0.03	2.170
0.04	2.054
0.05	1.960
0.06	1.881
0.07	1.812
0.08	1.751
0.09	1.695
0.1	1.645



Ejercicio A1 (2 puntos): Apartado a) entre 0 y 1 punto, apartado b) entre 0 y 1 punto.
Ejercicio A2 (2 puntos): Apartado a) entre 0 y 1.5 puntos, apartado b) entre 0 y 0.5 puntos.

APARTADO B (3 puntos)
Elige uno de los siguientes problemas y resuélvelo, justificando las respuestas:

B1. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & b \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

se pide, justificando las respuestas:
a) Hallar el valor de b para el que no existe la matriz inversa de A.
b) Para b = 0, hallar la matriz X que verifique $A \cdot X = A + 2 \cdot X$

B2. Una tienda de accesorios de telefonía móvil vende baterías externas, carcasas y cargadores a 20, 10 y 15 euros, respectivamente. Los precios de coste de estos productos son de 15 euros cada batería, 8 euros cada carcasa y 12 euros cada cargador. Cierta semana, en la que el total de los productos le costó 1210 euros, obtuvo unos beneficios de 340 euros. Calcular cuántas unidades vendió de cada producto si sabemos que en total vendió 100 (las mismas que compró).

Ejercicio B1: Apartado a) entre 0 y 1 punto, apartado b) entre 0 y 2 puntos.
Ejercicio B2: Entre 0 y 3 puntos.

APARTADO C (3 puntos)
Elige uno de los siguientes problemas y resuélvelo, justificando las respuestas:

C1. En una almazara el coste total (en euros) que supone la producción de x toneladas de determinada variedad de aceite de oliva viene dado por la función:

$$C(x) = 2x^4 - 48x^3 + 360x^2 - 600x, \quad 5 \le x \le 13$$

Determinar, justificando la respuesta:

a) La función que proporciona el coste medio por tonelada (coste unitario).
b) La cantidad de toneladas que han de producirse para alcanzar los costes unitarios mínimo y máximo.
c) Los costes unitarios máximo y mínimo que puede tener la almazara.

C2. Calcular de forma razonada:

a) El área encerrada por la función $f(x) = x^2 - 2x - 3$ y el eje OX entre $x = 1$ y $x = 4$.
b) Las asíntotas de la función:

$$g(x) = \frac{3x+2}{x^2 - 2x - 3}$$

Ejercicio C1: Apartado a) entre 0 y 0.5 puntos, apartado b) entre 0 y 2 puntos, apartado c) entre 0 y 0.5 puntos.
Ejercicio C2: Apartado a) entre 0 y 1.5 puntos, apartado b) entre 0 y 1.5 puntos.

SOLUCIONES

APARTADO A (4 puntos)

Una compañía energética realiza un estudio de mercado entre sus clientes. Responde, razonadamente, a las siguientes cuestiones que surgieron en el estudio:

A1. Los clientes de esta compañía energética pueden contratar dos productos electricidad o gas. El 75% de los clientes contrata la electricidad. De estos clientes, sólo el 20% contrata el gas. Se pide, justificando las respuestas:

a) ¿Qué porcentaje de clientes contrata ambos productos?

b) Si el 90% de los clientes contrata alguno de los dos productos, ¿qué porcentaje de clientes contrata el gas?

Realizamos una tabla de contingencia.

	Electricidad	No electricidad	
Gas	$0.20 \cdot 75 = \mathbf{15}$		
No gas			
	75		100

a) El 20 % del 75 % es $0.2 \cdot 75 = 15$ %. El 15% de los clientes contrata ambos productos.

b) Si hay un 90 % de clientes que contratan algún producto el restante 10 % no contrata ningún producto. Añadimos este dato a la tabla de contingencia y la completamos.

	Electricidad	No electricidad	
Gas	**15**	**15**	**30**
No gas	**60**	**10**	**70**
	75	**25**	**100**

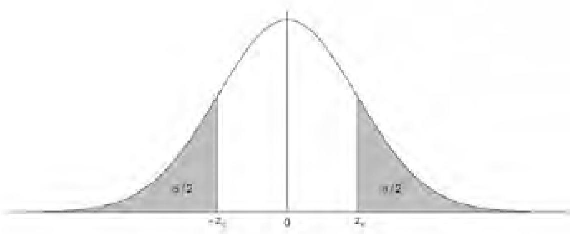
Hay un 30 % de los clientes que contrata el gas.

A2. El gasto mensual en electricidad de los clientes de esta compañía es una variable que se ajusta a una distribución normal con desviación típica 16 euros. Se examinan las facturas de 81 clientes elegidos al azar, resultando un gasto promedio de 72 euros. Se pide, justificando las respuestas:

a) Hallar un intervalo de confianza, al nivel de confianza del 90%, para el gasto medio mensual en electricidad de los clientes de esta compañía.

b) En base a dicho intervalo, ¿podemos decir que el gasto medio mensual en electricidad de los clientes de esta compañía superó los 70 euros?

α	z_α
0.01	2.576
0.02	2.326
0.03	2.170
0.04	2.054
0.05	1.960
0.06	1.881
0.07	1.812
0.08	1.751
0.09	1.695
0.1	1.645

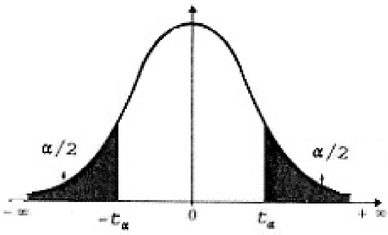


X = El gasto mensual en electricidad de los hogares de cierta localidad.

X = N(μ,16)

a) La muestra es de tamaño n = 81. La media muestral es $\bar{x} = 72$ euros.

El nivel de confianza del 90% significa que 1 – ∝ = 0.90 → ∝ = 0.10 → $z_{\alpha/2}$ = **1.645**



Utilizamos la fórmula del error del intervalo de confianza.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.645 \cdot \frac{16}{\sqrt{81}} \simeq 2.924 \text{ euros}$$

El intervalo de confianza es

$$\left(\bar{x} - Error,\ \bar{x} + Error\right) = \left(72 - 2.924, 72 + 2.924\right) = \left(69.076,\ 74.924\right)$$

b) 70 euros de gasto medio pertenece al intervalo de confianza obtenido, al igual que 71, 72, 73, 74, pero no pertenece al intervalo ningún valor superior a 75 euros.

No podemos asegurar con el nivel de confianza del apartado anterior que el gasto medio mensual en electricidad superó los 70 euros en dicha localidad.

Sería más adecuado afirmar que el gasto mensual en electricidad está entre 70 y 74 euros.

B1. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & b\\ 0 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 3\end{pmatrix}$

se pide, justificando las respuestas:

a) Hallar el valor de b para el que no existe la matriz inversa de A.

b) Para b = 0, hallar la matriz X que verifique $A\cdot X = A+2\cdot X$

a) Para que no exista la inversa el determinante debe ser nulo.

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 2 & b\\ 0 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 3\end{vmatrix}=3+0+0-2b-0-0=3-2b$$

$$|A|=0 \Rightarrow 3-2b=0 \Rightarrow 2b=3 \to \boxed{b=\frac{3}{2}}$$

La matriz inversa de A no existe para $b=\frac{3}{2}$.

b) Para b = 0 la matriz queda $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 3\end{pmatrix}$ y tiene inversa.

Despejamos X de la ecuación matricial.

$$A\cdot X - A = 2\cdot X \Rightarrow AX-2X=A \Rightarrow (A-2I)X=A \Rightarrow X=(A-2I)^{-1}A$$

Comprobamos que la matriz $A-2I$ tiene inversa y la calculamos.

$$A-2I=A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 3\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$|A-2I|=\begin{vmatrix}-1 & 2 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 2 & 0 & 1\end{vmatrix}=1+0+0-0-0-0=1\neq 0 \to \text{Existe la inversa}$$

$$(A-2I)^{-1}=\frac{Adj\left(\left(A-2I\right)^T\right)}{|A-2I|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}-1 & 0 & 2\\ 2 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}}{1}=\begin{pmatrix}+\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}2 & -1\\ 0 & 0\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}0 & 2\\ 0 & 1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 0 & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 0 & 0\end{vmatrix}\\ +\begin{vmatrix}0 & 2\\ -1 & 0\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 2 & 0\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 2 & -1\end{vmatrix}\end{pmatrix}$$

$$\left(A-2I\right)^{-1}=\begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Utilizamos este resultado obtenido y determinamos la expresión de la matriz X.

$$X=\left(A-2I\right)^{-1}A=\begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & -2-2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2+2 & 4+4 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & -4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 4 & 8 & 3 \end{pmatrix}$$

B2. Una tienda de accesorios de telefonía móvil vende baterías externas, carcasas y cargadores a 20, 10 y 15 euros, respectivamente. Los precios de coste de estos productos son de 15 euros cada batería, 8 euros cada carcasa y 12 euros cada cargador. Cierta semana, en la que el total de los productos le costó 1210 euros, obtuvo unos beneficios de 340 euros. Calcular cuántas unidades vendió de cada producto si sabemos que en total vendió 100 (las mismas que compró).

Llamamos "x" al número de baterías externas que vendió, "y" al número de carcasas y "z" al número de cargadores que vendió.

"Los precios de coste de estos productos son de 15 euros cada batería externa, 8 euros cada carcasa y 12 euros cada cargador. Cierta semana, en la que el total de los productos le costó 1210 euros" → $15x+8y+12z=1210$.

"Los precios de coste de estos productos son de 15 euros cada batería externa (la vende a 20 €), 8 euros cada carcasa (la vende a 10 €) y 12 euros cada cargador (lo vende a 15 €). Cierta semana, en la que el total de los productos le costó 1210 euros, obtuvo unos beneficios de 340 euros" → $(20-15)x+(10-8)y+(15-12)z=340$.

"En total vendió 100 unidades" → $x+y+z=100$.

Reunimos todas las ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left.\begin{array}{l}15x+8y+12z=1210\\(20-15)x+(10-8)y+(15-12)z=340\\x+y+z=100\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}15x+8y+12z=1210\\5x+2y+3z=340\\x+y+z=100\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left.\begin{array}{l}15x+8y+12z=1210\\5x+2y+3z=340\\z=100-x-y\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}15x+8y+12(100-x-y)=1210\\5x+2y+3(100-x-y)=340\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left.\begin{array}{l}15x+8y+1200-12x-12y=1210\\5x+2y+300-3x-3y=340\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}3x-4y=10\\2x-y=40\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}3x-4y=10\\2x-40=y\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x-4(2x-40)=10\Rightarrow 3x-8x+160=10\Rightarrow -5x=-150\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\boxed{x=\frac{-150}{-5}=30}\Rightarrow\boxed{y=2\cdot 30-40=20}\Rightarrow\boxed{z=100-30-20=50}$$

Se vendieron 30 baterías externas, 20 carcasas y 50 cargadores.

C1. En una almazara el coste total (en euros) que supone la producción de x toneladas de determinada variedad de aceite de oliva viene dado por la función:

$$C(x) = 2x^4 - 48x^3 + 360x^2 - 600x, \quad 5 \le x \le 13$$

Determinar, justificando la respuesta:

a) La función que proporciona el coste medio por tonelada (coste unitario).

b) La cantidad de toneladas que han de producirse para alcanzar los costes unitarios mínimo y máximo.

c) Los costes unitarios máximo y mínimo que puede tener la almazara.

a) El coste medio por tonelada (coste unitario) lo denotamos $CU(x)$ y tiene la expresión:

$$CU(x) = \frac{C(x)}{x} = \frac{2x^4 - 48x^3 + 360x^2 - 600x}{x} = 2x^3 - 48x^2 + 360x - 600, \quad 5 \le x \le 13$$

b) Hallamos la derivada de la función y vemos cuando se anula.

$$CU(x) = 2x^3 - 48x^2 + 360x - 600 \Rightarrow CU'(x) = 6x^2 - 96x + 360$$

$$CU'(x) = 0 \Rightarrow 6x^2 - 96x + 360 = 0 \Rightarrow x^2 - 16x + 60 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{16 \pm \sqrt{(-16)^2 - 240}}{2} = \frac{16 \pm 4}{2} = \begin{cases} \frac{16+4}{2} = 10 \in [5,13] \\ \frac{16-4}{2} = 6 \in [5,13] \end{cases}$$

Sustituimos estos dos valores obtenidos en la segunda derivada

$$CU'(x) = 6x^2 - 96x + 360 \Rightarrow CU''(x) = 12x - 96 \Rightarrow \begin{cases} CU''(6) = 12 \cdot 6 - 96 = -24 < 0 \\ CU''(10) = 12 \cdot 10 - 96 = 24 > 0 \end{cases}$$

En $x = 6$ la segunda derivada es negativa. La función tiene un máximo relativo en $x = 6$.
En $x = 10$ la segunda derivada es positiva.La función presenta un mínimo relativo en $x = 10$.

Valoramos el coste unitario en los puntos críticos y en los extremos del intervalo para encontrar el mínimo y máximo absoluto-

$$CU(5) = 2 \cdot 5^3 - 48 \cdot 5^2 + 360 \cdot 5 - 600 = 250$$
$$CU(6) = 2 \cdot 6^3 - 48 \cdot 6^2 + 360 \cdot 6 - 600 = 264$$
$$CU(10) = 2 \cdot 10^3 - 48 \cdot 10^2 + 360 \cdot 10 - 600 = 200 \text{ ¡Mínimo!}$$
$$CU(13) = 2 \cdot 13^3 - 48 \cdot 13^2 + 360 \cdot 13 - 600 = 362 \text{ ¡Máximo!}$$

Han de producirse 13 toneladas para alcanzar el coste unitario máximo y 10 toneladas para obtener el coste unitario mínimo.

c) Como $CU(13) = 362$ el coste unitario máximo es de 362 euros por tonelada.

Como $CU(10) = 200$ el coste unitario mínimo es de 200 euros por tonelada.

C2. Calcular de forma razonada:

a) El área encerrada por la función $f(x) = x^2 - 2x - 3$ y el eje OX entre $x = 1$ y $x = 4$.

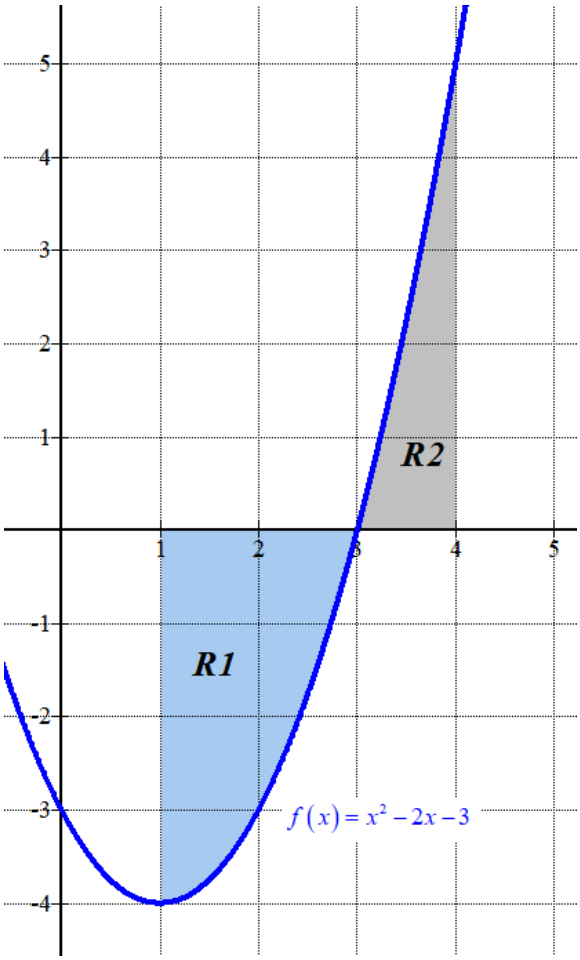
b) Las asíntotas de la función:

$$g(x) = \frac{3x+2}{x^2-2x-3}$$

a) Averiguamos si la gráfica de la parábola corta el eje OX entre 1 y 4.

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = x^2 - 2x - 3 \\ Eje\ OX \to y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 + 12}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} = \begin{cases} \frac{2+4}{2} = \boxed{3 \in (1,4)} \\ \frac{2-4}{2} = -1 \notin (1,4) \end{cases}$$

Como la gráfica de la parábola corta el eje OX en $x = 3$ calculamos el área del recinto como el valor absoluto de la integral de la función entre 1 y 3 más el valor absoluto de la integral definida de la función entre 3 y 4.



El área de la región R1.

$$Área\ R1 = \left| \int_1^3 x^2 - 2x - 3dx \right| = \left| \left[\frac{x^3}{3} - x^2 - 3x \right]_1^3 \right| = \left| \left[\frac{3^3}{3} - 3^2 - 3 \cdot 3 \right] - \left[\frac{1^3}{3} - 1^2 - 3 \cdot 1 \right] \right| =$$

$$=\left|9-9-9-\frac{1}{3}+1+3\right|=\frac{16}{3}\ u^2$$

El área de la región R2.

$$\acute{A}rea\ R2=\left|\int_3^4 x^2-2x-3dx\right|=\left|\left[\frac{x^3}{3}-x^2-3x\right]_3^4\right|=\left|\left[\frac{4^3}{3}-4^2-3\cdot 4\right]-\left[\frac{3^3}{3}-3^2-3\cdot 3\right]\right|=$$

$$=\left|\frac{64}{3}-16-12-9+9+9\right|=\frac{7}{3}\ u^2$$

El área total es la suma del área de R1 y R2: $\frac{16}{3}+\frac{7}{3}=\frac{23}{3}\simeq 7.667$ unidades cuadradas.

b) Hallamos el dominio de la función $g(x)=\frac{3x+2}{x^2-2x-3}$.

$$x^2-2x-3=0\Rightarrow x=\frac{2\pm\sqrt{(-2)^2+12}}{2}=\frac{2\pm 4}{2}=\begin{cases}\frac{2+4}{2}=\boxed{3=x}\\ \frac{2-4}{2}=\boxed{-1=x}\end{cases}$$

El dominio de la función es $\mathbb{R}-\{-1,3\}$.

Asíntotas verticales. $x=a$

¿ $x=-1$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x\to -1} g(x)=\lim_{x\to -1}\frac{3x+2}{x^2-2x-3}=\frac{-3+2}{(-1)^2-2(-1)-3}=\frac{-1}{0}=\infty$$

$x=-1$ es asíntota vertical.

¿ $x=3$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x\to 3} g(x)=\lim_{x\to 3}\frac{3x+2}{x^2-2x-3}=\frac{9+2}{3^2-6-3}=\frac{11}{0}=\infty$$

$x=3$ es asíntota vertical.

Asíntota horizontal. $y=b$

$$\lim_{x\to\infty} g(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{3x+2}{x^2-2x-3}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3x}{x^2}+\frac{2}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{2x}{x^2}-\frac{3}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}{1-\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}}=\frac{\frac{3}{\infty}+\frac{2}{\infty^2}}{1-\frac{2}{\infty}-\frac{3}{\infty^2}}=\frac{0+0}{1-0-0}=0$$

La recta $y=0$ es asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. $y=mx+n$

Al tener asíntota horizontal no tiene asíntota oblicua.