

	UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD Curso 2024-2025 MATERIA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II	Modelo Orientativo
<u>INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN</u> El examen consta de 4 ejercicios: el primero sin apartados optativos y los tres siguientes con posibilidad de elección. Todas las respuestas deben ser razonadamente justificadas CALIFICACION: cada ejercicio se valorará sobre 2,5 puntos. DURACION: 90 minutos.		

EJERCICIO 1 (2,5 puntos) Responda los tres apartados, este ejercicio no tiene opcionalidad. HidroBio es una marca de un preparado en polvo para elaborar suero bebible que se utiliza para rehidratar a pacientes con gastroenteritis. El suero se prepara disolviendo un sobre de HidroBio en un litro de agua. La marca comercializa tres tipos de sobres, de sabor a naranja, fresa o limón. El contenido de cada sobre reacciona químicamente con el agua produciéndose en esa reacción un determinado principio activo, en cantidad variable en función del tiempo, de manera que la tasa de variación instantánea de la cantidad de principio activo, medida en mg/hora, viene dada por la función

$$c(t) = \frac{3}{2} \left(t - \frac{t^2}{2} \right)$$

siendo t el tiempo transcurrido, en horas, desde la elaboración del preparado hasta pasadas tres horas. La cantidad de principio activo presente en la disolución potencia además el sabor del preparado, de forma que a más cantidad de principio más intenso es el sabor.

- 1.a) (1 punto) Indique la cantidad de principio activo al cabo de 60 minutos de haber sido preparado el suero.
- 1.b) (0,75 puntos) ¿Va aumentando la cantidad de principio activo a lo largo de las 3 primeras horas? ¿Por qué?
- 1.c) (0,75 puntos) Se ha observado que para conseguir que los menores de 5 años ingieran el suero más fácilmente, lo mejor es disolver un sobre con sabor a fresa y darles el primer vaso en el momento en que el sabor de la disolución sea más intenso. ¿Cuándo le daría el primer vaso de suero a una niña de 4 años? Determine cuál será la cantidad de principio activo en el litro de suero en ese momento.

EJERCICIO 2 (2.5 puntos) Responda únicamente a una de las dos preguntas, o bien 2.1 o 2.2.

Pregunta 2.1

Se consideran las matrices A y B dadas por:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & -100 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

2.1. a) (1,25 puntos) Calcule la matriz D tal que $B(D^t + A^{-1})B^{-1} = 2I$, donde I es la matriz identidad de tamaño 2×2 .

2.1. b) (1,25 puntos) La matriz A verifica la igualdad $A^2 = A + 2I$. Calcule A^4 .

Pregunta 2.2

Se considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a :

$$\begin{cases} x - y + z = -1 \\ ax + (-a + 2)y = 2 \\ 2x - (a + 3)y + (a + 2)z = -5 \end{cases}$$

2.2.a) (1,5 puntos) Discuta el sistema en función de los valores del parámetro a .

2.2.b) (1 punto) Resuelva el sistema de ecuaciones para $a = 1$.

EJERCICIO 3 (2.5 puntos) Responda únicamente a una de las dos preguntas, o bien 3.1 o 3.2. Una comunidad autónoma española quiere evaluar el nivel de compromiso con el reciclaje de sus ciudadanos y ciudadanas. Para ello, se realiza un estudio en dos municipios seleccionados al azar.

Pregunta 3.1

En el primer municipio, la proporción de personas comprometidas con el reciclaje es de $p = 0,7$. Se toma una muestra aleatoria simple de 600 personas de dicho municipio:

3.1.a) (1 punto) Determine el número esperado de personas en la muestra elegida que no estarán comprometidas con prácticas de reciclaje.

3.1.b) (1,5 puntos) Mediante la aproximación por una normal, calcule la probabilidad de que el número de personas comprometidas con el reciclaje esté entre 408 y 432, ambos inclusive.

Pregunta 3.2

En el segundo municipio:

3.2.a) (1,25 puntos) Se tomó una muestra aleatoria simple de 450 personas de las cuales 351 se declaran comprometidas con prácticas de reciclaje. Obtenga un intervalo de confianza del 90% para la proporción de personas del segundo municipio comprometidas con prácticas de reciclaje.

3.2.b) (1,25 puntos) Asumiendo que la proporción poblacional de los comprometidos con el reciclaje en este segundo municipio es $p = 0,8$, determine el tamaño mínimo necesario de una muestra de personas para garantizar, con un nivel de confianza del 95%, que el margen de error en la estimación no supere el 3% ($\pm 3\%$).

EJERCICIO 4 (2.5 puntos) Responda únicamente a una de las dos preguntas, o bien 4.1 o 4.2.

Pregunta 4.1

De dos sucesos A y B sabemos que: $P(A \cup B) = 1$, $P(B) = 0,8$ y $P(\bar{A}) = 0,55$, donde $\bar{A}$ es el suceso complementario de A.

4.1.a) (1 punto) Calcule $P(A/B)$.

4.1.b) (1 punto) Calcule $P(\bar{B}/A)$ siendo $\bar{B}$ el suceso complementario de B.

4.1.c) (0,5 puntos) Calcule $P(\bar{A} \cap B)$.

Pregunta 4.2

En los premios Grammy Latino, se sabe que el 40% de los artistas nominados en la categoría de Mejor Álbum del Año son dúos, el 30% son grupos musicales (más de dos artistas) y el 30% son solistas. Además, se ha observado que el 20% de los dúos, el 15% de los grupos musicales y el 25% de los solistas nominados han ganado el premio de Mejor Álbum del Año. Eligiendo al azar un artista nominado al Mejor Álbum del Año, y sabiendo que en este concurso los artistas sólo pueden presentarse por una de las tres categorías musicales, calcule la probabilidad de que:

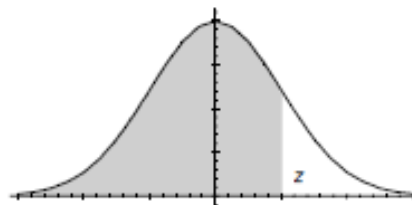
4.2.a) (1,25 puntos) Haya ganado el Grammy Latino en dicha categoría.

4.2.b) (1,25 puntos) Dicho artista sea solista, sabiendo que ha ganado el Grammy Latino en dicha categoría.

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales

ÁREAS BAJO LA DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD NORMAL ESTÁNDAR

Los valores en la tabla representan el área bajo la curva normal hasta un valor positivo de z .



z	,00	,01	,02	,03	,04	,05	,06	,07	,08	,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7703	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9954	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990

SOLUCIONES

EJERCICIO 1 (2,5 puntos) Responda los tres apartados, este ejercicio no tiene opcionalidad. HidroBio es una marca de un preparado en polvo para elaborar suero bebible que se utiliza para rehidratar a pacientes con gastroenteritis. El suero se prepara disolviendo un sobre de HidroBio en un litro de agua. La marca comercializa tres tipos de sobres, de sabor a naranja, fresa o limón. El contenido de cada sobre reacciona químicamente con el agua produciéndose en esa reacción un determinado principio activo, en cantidad variable en función del tiempo, de manera que la tasa de variación instantánea de la cantidad de principio activo, medida en mg/hora, viene dada por la función

$$c(t) = \frac{3}{2} \left(t - \frac{t^2}{2} \right)$$

siendo t el tiempo transcurrido, en horas, desde la elaboración del preparado hasta pasadas tres horas. La cantidad de principio activo presente en la disolución potencia además el sabor del preparado, de forma que a más cantidad de principio más intenso es el sabor.

1.a) (1 punto) Indique la cantidad de principio activo al cabo de 60 minutos de haber sido preparado el suero.

1.b) (0,75 puntos) ¿Va aumentando la cantidad de principio activo a lo largo de las 3 primeras horas? ¿Por qué?.

1.c) (0,75 puntos) Se ha observado que para conseguir que los menores de 5 años ingieran el suero más fácilmente, lo mejor es disolver un sobre con sabor a fresa y darles el primer vaso en el momento en que el sabor de la disolución sea más intenso. ¿Cuándo le daría el primer vaso de suero a una niña de 4 años? Determine cuál será la cantidad de principio activo en el litro de suero en ese momento.

1.a) Si la función $c(t)$ es la variación instantánea de la cantidad de principio activo entonces la cantidad de principio activo es $C(t) = \int c(t) dt$. Además, para $t = 0$ (sin disolver) la cantidad de principio activo se supone 0.

Hallamos la función cantidad de principio activo a las t horas de haber preparado el suero.

$$C(t) = \int c(t) dt = \int \frac{3}{2} \left(t - \frac{t^2}{2} \right) dt = \frac{3}{2} \int t - \frac{t^2}{2} dt = \frac{3}{2} \left(\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{6} \right) = \frac{3t^2}{4} - \frac{t^3}{4} + K$$

Como $C(0) = 0$ determinamos el valor de K .

$$\left. \begin{array}{l} C(t) = \frac{3t^2}{4} - \frac{t^3}{4} + K \\ C(0) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{3 \cdot 0^2}{4} - \frac{0^3}{4} + K = 0 \Rightarrow \boxed{K = 0}$$

La función que nos proporciona la cantidad de principio activo al cabo de t horas de la preparación del suero es $C(t) = \frac{3t^2}{4} - \frac{t^3}{4}$.

Nos piden calcular $C(1)$.

$$C(1) = \frac{3 \cdot 1^2}{4} - \frac{1^3}{4} = 0.5$$

La cantidad de principio activo al cabo de 60 minutos de haber sido preparado el suero es de 0.5 mg.

1.b) Averiguamos cuando se anula la variación instantánea de principio activo.

$$\left. \begin{array}{l} c(t) = \frac{3}{2} \left(t - \frac{t^2}{2} \right) \\ c(t) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{3}{2} \left(t - \frac{t^2}{2} \right) = 0 \Rightarrow t - \frac{t^2}{2} = 0 \Rightarrow 2t - t^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t(2-t) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 2 \end{cases}$$

Comprobamos el signo de la variación instantánea de principio activo antes y después de $t = 2$.

- En el intervalo $(0, 2)$ tomamos $t = 1$ y la variación es $c(1) = \frac{3}{2} \left(1 - \frac{1^2}{2} \right) = \frac{3}{4} > 0$. La cantidad de principio activo aumenta en el intervalo $(0, 2)$.
- En el intervalo $(2, 3)$ tomamos $t = 1.5$ y la variación es $c(1.5) = \frac{3}{2} \left(1 - \frac{1.5^2}{2} \right) = \frac{3}{4} - \frac{3}{16} = \frac{-3}{16} < 0$. La cantidad de principio activo disminuye en el intervalo $(2, 3)$.

Resumiendo: En el intervalo $(0, 2)$ la cantidad de principio activo aumenta y en el intervalo $(2, 3)$ la cantidad disminuye.

1.c) Por lo visto en el apartado anterior la cantidad de principio activo es máxima para $t = 2$. Valoramos la cantidad de principio activo al comienzo de la preparación ($t = 0$), a las 2 horas ($t = 2$) y al final ($t = 3$).

$$C(0) = \frac{3 \cdot 0^2}{4} - \frac{0^3}{4} = 0 \qquad C(2) = \frac{3 \cdot 2^2}{4} - \frac{2^3}{4} = 1 \qquad C(3) = \frac{3 \cdot 3^2}{4} - \frac{3^3}{4} = 0$$

El sabor más intenso se obtiene a las 2 horas de haber preparado el suero siendo la concentración de 1 mg.

Pregunta 2.1

Se consideran las matrices A y B dadas por:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & -100 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

2.1. a) (1,25 puntos) Calcule la matriz D tal que $B(D^t + A^{-1})B^{-1} = 2I$, donde I es la matriz identidad de tamaño 2×2 .

2.1. b) (1,25 puntos) La matriz A verifica la igualdad $A^2 = A + 2I$. Calcule A^4 .

2.1. a) Despejamos D de la igualdad.

$$B(D^t + A^{-1})B^{-1} = 2I \Rightarrow D^t + A^{-1} = B^{-1} \cdot 2I \cdot B \Rightarrow D^t + A^{-1} = 2I \Rightarrow D^t = 2I - A^{-1}$$

Comprobamos que la matriz A es invertible y hallamos su inversa.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}(A^t)}{|A|} = \frac{\text{Adj} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}}{-2} = \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 3/2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Obtenemos la expresión de la matriz D.

$$D^t = 2I - A^{-1} = 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1/2 & 3/2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1/2 & 3/2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 & -3/2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Como la matriz D es la traspuesta de D^t , tenemos que $D = (D^t)^t = \begin{pmatrix} 3/2 & 0 \\ -3/2 & 3 \end{pmatrix}$.

2.1. b) Obtenemos A^4 .

$$A^4 = A^2 \cdot A^2 = (A + 2I)(A + 2I) = A^2 + 2A + 2A + 4I =$$

$$= \{A^2 = A + 2I\} = A + 2I + 2A + 2A + 4I = 5A + 6I =$$

$$= 5 \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + 6 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10+6 & 15+0 \\ 0+0 & -5+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 15 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Hemos obtenido que $A^4 = \begin{pmatrix} 16 & 15 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Pregunta 2.2

Se considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a :

$$\begin{cases} x - y + z = -1 \\ ax + (-a + 2)y = 2 \\ 2x - (a + 3)y + (a + 2)z = -5 \end{cases}$$

2.2.a) (1,5 puntos) Discuta el sistema en función de los valores del parámetro a .

2.2.b) (1 punto) Resuelva el sistema de ecuaciones para $a = 1$.

2.2.a) Este sistema tiene como matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ a & -a+2 & 0 \\ 2 & -a-3 & a+2 \end{pmatrix}$ y como

matriz ampliada $A/B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ a & -a+2 & 0 & 2 \\ 2 & -a-3 & a+2 & -5 \end{pmatrix}$.

Averiguamos cuando se anula el determinante de A .

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ a & -a+2 & 0 \\ 2 & -a-3 & a+2 \end{vmatrix} = \begin{cases} \text{Columna 2}^a + \text{Columna 1}^a \\ 1 & -1 & \rightarrow & 0 \\ a & -a+2 & \rightarrow & 2 \\ 2 & -a-3 & \rightarrow & -a-1 \end{cases} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ a & 2 & 0 \\ 2 & -a-1 & a+2 \end{vmatrix} =$$

$$= 2(a+2) + a(-a-1) - 4 = 2a + 4 - a^2 - a - 4 = -a^2 + a = -a(a-1)$$

$$|A| = 0 \Rightarrow -a(a-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a - 1 = 0 \rightarrow a = 1 \end{cases}$$

Analizamos tres situaciones diferentes.

CASO 1. $a \neq 0$ y $a \neq 1$.

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3. El rango de la matriz A/B también es 3.

Rango A = Rango A/B = Número de incógnitas = 3. El sistema es compatible determinado (una única solución).

CASO 2. $a = 0$

El sistema queda $\begin{cases} x - y + z = -1 \\ 2y = 2 \\ 2x - 3y + 2z = -5 \end{cases}$. Queda tan sencillo que podemos intentar resolverlo.

$$\begin{cases} x - y + z = -1 \\ 2y = 2 \\ 2x - 3y + 2z = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y + z = -1 \\ y = 1 \\ 2x - 3y + 2z = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 1 + z = -1 \\ 2x - 3 + 2z = -5 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -z \\ x + z = -1 \end{cases} \Rightarrow -z + z = -1 \Rightarrow 0 = -1 \text{ ¡Imposible!}$$

Llegamos a una situación imposible. El sistema es incompatible (sin solución)

CASO 3. $a=1$.

En este caso el determinante de A es nulo y su rango es menor de 3. Estudiamos su rango y el de la ampliada usando el método de Gauss.

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & -4 & 3 & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - \text{Fila } 1^a \\ 1 \quad 1 \quad 0 \quad 2 \\ -1 \quad 1 \quad -1 \quad 1 \\ \hline 0 \quad 2 \quad -1 \quad 3 \rightarrow \text{Nueva fila } 2^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - 2 \cdot \text{Fila } 1^a \\ 2 \quad -4 \quad 3 \quad -5 \\ -2 \quad 2 \quad -2 \quad 2 \\ \hline 0 \quad -2 \quad 1 \quad -3 \rightarrow \text{Nueva fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a + \text{Fila } 2^a \\ 0 \quad -2 \quad 1 \quad -3 \\ 0 \quad 2 \quad -1 \quad 3 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{c} \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}^{A/B} \\ \underbrace{\hspace{1.5cm}}_A \end{array} \right)$$

El rango de A y de A/B son iguales a 2, menor que el número de incógnitas (3).
Este sistema tiene infinitas soluciones (compatible indeterminado)

Resumiendo: Si $a \neq 0$ y $a \neq 1$ el sistema es compatible determinado, si $a = 0$ el sistema es incompatible y si $a = 1$ el sistema es compatible indeterminado.

2.2.b) Para $a = 1$ el sistema es compatible indeterminado. Lo resolvemos a partir del sistema equivalente obtenido en el apartado anterior.

$$\left(\begin{array}{c} \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}^{A/B} \\ \underbrace{\hspace{1.5cm}}_A \end{array} \right) \Rightarrow \begin{cases} x - y + z = -1 \\ 2y - z = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y + z = -1 \\ 2y - 3 = z \end{cases} \Rightarrow x - y + 2y - 3 = -1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x + y = 2 \Rightarrow x = 2 - y \Rightarrow \begin{cases} x = 2 - \alpha \\ y = \alpha \\ z = -3 + 2\alpha \end{cases} ; \alpha \in \mathbb{R}$$

Las soluciones son $x = 2 - \alpha$; $y = \alpha$; $z = -3 + 2\alpha$, para cualquier valor $\alpha \in \mathbb{R}$.

EJERCICIO 3

Una comunidad autónoma española quiere evaluar el nivel de compromiso con el reciclaje de sus ciudadanos y ciudadanas. Para ello, se realiza un estudio en dos municipios seleccionados al azar.

Pregunta 3.1

En el primer municipio, la proporción de personas comprometidas con el reciclaje es de $p = 0,7$. Se toma una muestra aleatoria simple de 600 personas de dicho municipio:

3.1.a) (1 punto) Determine el número esperado de personas en la muestra elegida que no estarán comprometidas con prácticas de reciclaje.

3.1.b) (1,5 puntos) Mediante la aproximación por una normal, calcule la probabilidad de que el número de personas comprometidas con el reciclaje esté entre 408 y 432, ambos inclusive.

La variable aleatoria $X =$ 'número de personas del primer municipio comprometidas con prácticas de reciclaje' sigue una distribución binomial: $B(600, 0,7)$.

3.1.a) La media o esperanza de la distribución binomial es $np = 600 \cdot 0,7 = 420$. Significa que de las 600 personas se espera que hayan 420 comprometidas con el reciclaje. Las otras $600 - 420 = 180$ se espera que no estén comprometidas con el reciclaje.

3.1.b) Como la muestra es de un tamaño muy grande las probabilidades de la distribución binomial se pueden aproximar usando la normal Y de media $\mu = np = 420$ y desviación típica $\sqrt{npq} = \sqrt{600 \cdot 0,7 \cdot 0,3} \approx 11,225$. $Y = N(420, 11,225)$.

Esta aproximación es buena pues $np = 420 > 5$ y $nq = 600 \cdot 0,3 = 180 > 5$.

Nos piden calcular $P(408 \leq X \leq 432)$.

$$\begin{aligned}
 P(408 \leq X \leq 432) &= \{\text{Corrección de Yates}\} = P(407,5 < X < 432,5) = \\
 &= P(X < 432,5) - P(X < 407,5) = \{\text{Tipificamos}\} = \\
 &= P\left(Z < \frac{432,5 - 420}{11,225}\right) - P\left(Z < \frac{407,5 - 420}{11,225}\right) = P(Z < 1,11) - P(Z < -1,11) = \\
 &= P(Z < 1,11) - P(Z \geq 1,11) = P(Z < 1,11) - [1 - P(Z \leq 1,11)] = \\
 &= \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla } N(0,1) \end{array} \right\} = 0,8665 - 1 + 0,8665 = \boxed{0,7333}
 \end{aligned}$$

La probabilidad de que en una muestra de 600 personas el número de personas comprometidas con el reciclaje esté entre 408 y 432 es de 0.7333.

EJERCICIO 3

Una comunidad autónoma española quiere evaluar el nivel de compromiso con el reciclaje de sus ciudadanos y ciudadanas. Para ello, se realiza un estudio en dos municipios seleccionados al azar.

Pregunta 3.2

En el segundo municipio:

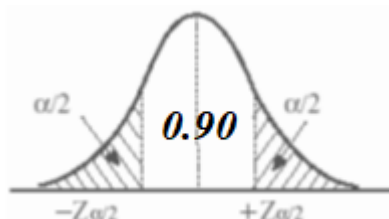
3.2.a) (1,25 puntos) Se tomó una muestra aleatoria simple de 450 personas de las cuales 351 se declaran comprometidas con prácticas de reciclaje. Obtenga un intervalo de confianza del 90% para la proporción de personas del segundo municipio comprometidas con prácticas de reciclaje.

3.2.b) (1,25 puntos) Asumiendo que la proporción poblacional de los comprometidos con el reciclaje en este segundo municipio es $p = 0,8$, determine el tamaño mínimo necesario de una muestra de personas para garantizar, con un nivel de confianza del 95%, que el margen de error en la estimación no supere el 3% ($\pm 3\%$).

3.2.a) El tamaño de la muestra es $n = 450$. La proporción muestral de personas comprometidas con el reciclaje es $p = \frac{351}{450} = 0.78$.

Determinamos el valor de $z_{\alpha/2}$ para un nivel de confianza del 90%.

$$1 - \alpha = 0.9 \Rightarrow \alpha = 0.1 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.05 \Rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.95 \Rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{1.64 + 1.65}{2} = 1.645$$



Obtenemos el valor del error.

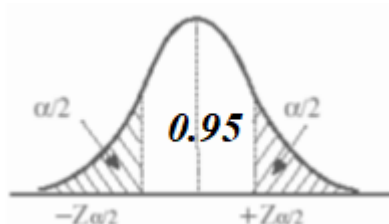
$$Error = z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{pq}{n}} = 1.645 \sqrt{\frac{0.78(1-0.78)}{450}} \approx 0.0321$$

El intervalo de confianza para la proporción de personas comprometidas con el reciclaje es:

$$(p - Error, p + Error) = (0.78 - 0.0321, 0.78 + 0.0321) = (0.7479, 0.8121)$$

3.2.b) Determinamos el valor de $z_{\alpha/2}$ para un nivel de confianza del 95%.

$$1 - \alpha = 0.95 \Rightarrow \alpha = 0.05 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.025 \Rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.975 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1.96$$



Utilizamos la fórmula del error para despejar n .

$$\begin{aligned} \text{Error} = z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{pq}{n}} &\Rightarrow 0.03 = 1.96 \sqrt{\frac{0.8(1-0.8)}{n}} \Rightarrow \frac{0.03}{1.96} = \sqrt{\frac{0.16}{n}} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left(\frac{0.03}{1.96} \right)^2 = \frac{0.16}{n} \Rightarrow n = \frac{0.16}{\left(\frac{0.03}{1.96} \right)^2} \approx 682.95 \end{aligned}$$

Por lo tanto, el tamaño mínimo de muestra necesario es de 683 personas.

Pregunta 4.1

De dos sucesos A y B sabemos que: $P(A \cup B) = 1$, $P(B) = 0,8$ y $P(\bar{A}) = 0,55$, donde $\bar{A}$ es el suceso complementario de A.

4.1.a) (1 punto) Calcule $P(A/B)$.

4.1.b) (1 punto) Calcule $P(\bar{B}/A)$ siendo $\bar{B}$ el suceso complementario de B.

4.1.c) (0,5 puntos) Calcule $P(\bar{A} \cap B)$.

Tenemos que $P(\bar{A}) = 0,55$, por lo que $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - 0,55 = 0,45$.

Utilizamos la fórmula de la probabilidad de la unión de dos sucesos.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow 1 = 0,45 + 0,8 - P(A \cap B) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(A \cap B) = 0,45 + 0,8 - 1 = 0,25$$

4.1.a) Utilizamos el teorema de Bayes.

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,25}{0,8} = \boxed{0,3125}$$

$$\mathbf{4.1.b)} \quad P(\bar{B}/A) = \frac{P(\bar{B} \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A) - P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{0,45 - 0,25}{0,45} = \boxed{\frac{4}{9} \approx 0,444}$$

$$\mathbf{4.1.c)} \quad P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = 0,8 - 0,25 = \boxed{0,55}$$

Pregunta 4.2

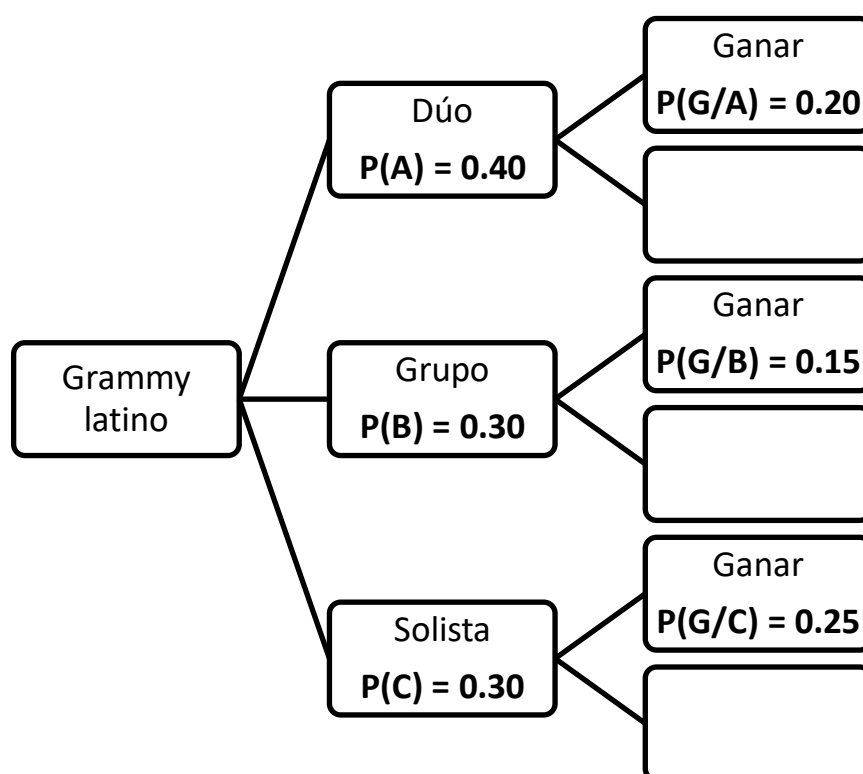
En los premios Grammy Latino, se sabe que el 40% de los artistas nominados en la categoría de Mejor Álbum del Año son dúos, el 30% son grupos musicales (más de dos artistas) y el 30% son solistas. Además, se ha observado que el 20% de los dúos, el 15% de los grupos musicales y el 25% de los solistas nominados han ganado el premio de Mejor Álbum del Año. Eligiendo al azar un artista nominado al Mejor Álbum del Año, y sabiendo que en este concurso los artistas sólo pueden presentarse por una de las tres categorías musicales, calcule la probabilidad de que:

4.2.a) (1,25 puntos) Haya ganado el Grammy Latino en dicha categoría.

4.2.b) (1,25 puntos) Dicho artista sea solista, sabiendo que ha ganado el Grammy Latino en dicha categoría.

Llamamos A = “ser un dúo”, B = “ser grupo musical”, C = “ser solista” y G = “ganar el Grammy”.

Construimos un diagrama de árbol reuniendo todas las probabilidades del ejercicio.



4.2.a) Nos piden calcular $P(G)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$\begin{aligned}
 P(G) &= P(A)P(G/A) + P(B)P(G/B) + P(C)P(G/C) = \\
 &= 0.4 \cdot 0.2 + 0.3 \cdot 0.15 + 0.3 \cdot 0.25 = \boxed{0.2}
 \end{aligned}$$

4.2.b) Nos piden calcular $P(C/G)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(C/G) = \frac{P(C \cap G)}{P(G)} = \frac{P(C)P(G/C)}{P(G)} = \frac{0.3 \cdot 0.25}{0.2} = \boxed{0.375}$$