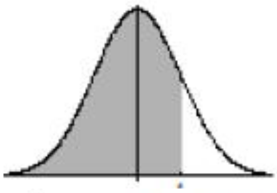
Universidad del País Vasco — Euskal Herriko Unibertsitatea

USaP	PAU
2024/25	2024/25
AZTERKETA EREDUA **GG.ZZ.-ei APLIKATUTAKO MATEMATIKAK II**	MODELO DE EXAMEN MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CC. SS. II

EUSKO JAURLARITZA — GOBIERNO VASCO
HEZKUNTZA SAILA — DEPARTAMENTO DE EDUCACIÓN

INSTRUCCIONES PARA EL EXAMEN

- ***El examen costa de cinco problemas:***
  - ***Problema 1: de opción única y obligatoria.***
  - ***Problemas del 2 al 5: de los cuatro problemas debes elegir TRES problemas. En cada uno de los problemas seleccionados hay que responder a uno de los apartados (por ejemplo: apartado 2.1 o apartado 2.2)***
- ***En caso de responder a más preguntas de las estipuladas, las respuestas se corregirán en orden hasta llegar al número necesario.***



$N(0,1)$ kurbak $-\infty$-tik z-raino mugatutako azalerak

Áreas limitadas por la curva $N(0,1)$ desde $-\infty$ hasta z

	0	0'01	0'02	0'03	0'04	0'05	0'06	0'07	0'08	0'09
0	0'5000	0'5040	0'5080	0'5120	0'5160	0'5199	0'5239	0'5279	0'5319	0'5359
0'1	0'5398	0'5438	0'5478	0'5517	0'5557	0'5596	0'5636	0'5675	0'5714	0'5753
0'2	0'5793	0'5832	0'5871	0'5910	0'5948	0'5987	0'6026	0'6064	0'6103	0'6141
0'3	0'6179	0'6217	0'6255	0'6293	0'6331	0'6368	0'6406	0'6443	0'6480	0'6517
0'4	0'6554	0'6591	0'6628	0'6664	0'6700	0'6736	0'6772	0'6808	0'6844	0'6879
0'5	0'6915	0'6950	0'6985	0'7019	0'7054	0'7088	0'7123	0'7157	0'7190	0'7224
0'6	0'7257	0'7291	0'7324	0'7357	0'7389	0'7422	0'7454	0'7486	0'7517	0'7549
0'7	0'7580	0'7611	0'7642	0'7673	0'7704	0'7734	0'7764	0'7794	0'7823	0'7852
0'8	0'7881	0'7910	0'7939	0'7967	0'7995	0'8023	0'8051	0'8078	0'8106	0'8133
0'9	0'8159	0'8186	0'8212	0'8238	0'8264	0'8289	0'8315	0'8340	0'8365	0'8389
1	0'8413	0'8438	0'8461	0'8485	0'8508	0'8531	0'8554	0'8577	0'8599	0'8621
1'1	0'8643	0'8665	0'8686	0'8708	0'8729	0'8749	0'8770	0'8790	0'8810	0'8830
1'2	0'8849	0'8869	0'8888	0'8907	0'8925	0'8944	0'8962	0'8980	0'8997	0'9015
1'3	0'9032	0'9049	0'9066	0'9082	0'9099	0'9115	0'9131	0'9147	0'9162	0'9177
1'4	0'9192	0'9207	0'9222	0'9236	0'9251	0'9265	0'9279	0'9292	0'9306	0'9319
1'5	0'9332	0'9345	0'9357	0'9370	0'9382	0'9394	0'9406	0'9418	0'9429	0'9441
1'6	0'9452	0'9463	0'9474	0'9484	0'9495	0'9505	0'9515	0'9525	0'9535	0'9545
1'7	0'9554	0'9564	0'9573	0'9582	0'9591	0'9599	0'9608	0'9616	0'9625	0'9633
1'8	0'9641	0'9649	0'9656	0'9664	0'9671	0'9678	0'9686	0'9693	0'9699	0'9706
1'9	0'9713	0'9719	0'9726	0'9732	0'9738	0'9744	0'9750	0'9756	0'9761	0'9767
2	0'9772	0'9778	0'9783	0'9788	0'9793	0'9798	0'9803	0'9808	0'9812	0'9817
2'1	0'9821	0'9826	0'9830	0'9834	0'9838	0'9842	0'9846	0'9850	0'9854	0'9857
2'2	0'9861	0'9864	0'9868	0'9871	0'9875	0'9878	0'9881	0'9884	0'9887	0'9890
2'3	0'9893	0'9896	0'9898	0'9901	0'9904	0'9906	0'9909	0'9911	0'9913	0'9916
2'4	0'9918	0'9920	0'9922	0'9925	0'9927	0'9929	0'9931	0'9932	0'9934	0'9936
2'5	0'9938	0'9940	0'9941	0'9943	0'9945	0'9946	0'9948	0'9949	0'9951	0'9952
2'6	0'9953	0'9955	0'9956	0'9957	0'9959	0'9960	0'9961	0'9962	0'9963	0'9964
2'7	0'9965	0'9966	0'9967	0'9968	0'9969	0'9970	0'9971	0'9972	0'9973	0'9974
2'8	0'9974	0'9975	0'9976	0'9977	0'9977	0'9978	0'9979	0'9979	0'9980	0'9981
2'9	0'9981	0'9982	0'9982	0'9983	0'9984	0'9984	0'9985	0'9985	0'9986	0'9986
3	0'9987	0'9987	0'9987	0'9988	0'9988	0'9989	0'9989	0'9989	0'9990	0'9990
3'1	0'9990	0'9991	0'9991	0'9991	0'9992	0'9992	0'9992	0'9992	0'9993	0'9993
3'2	0'9993	0'9993	0'9994	0'9994	0'9994	0'9994	0'9994	0'9995	0'9995	0'9995
3'3	0'9995	0'9995	0'9995	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9997
3'4	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9998
3'5	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998
3'6	0'9998	0'9998	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'7	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'8	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'9	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000

PROBLEMA 1 [2,5 puntos]

La industria de la relojería ha visto un resurgimiento en la demanda de productos tradicionales y una determinada fábrica de relojes que se encuentra en un momento crucial de su desarrollo, quiere aprovechar esta tendencia.

Sin embargo, se enfrenta a ciertas restricciones de producción, como la capacidad de maquinaria, la disponibilidad de materiales y la mano de obra especializada, lo que le hace limitar la fabricación diaria a 1000 unidades.

El análisis que realiza la fábrica se centra en determinar si es más viable producir relojes de pulsera o de bolsillo y en qué medida puede optimizar este proceso productivo. Para ello, considera varios factores. En cuanto a la facturación, hay una diferencia importante, la unidad de reloj de pulsera la vende a 90 euros, mientras que por cada uno de bolsillo ingresa 120 euros.

Por otra parte, las limitaciones de empleo de maquinaria, así como la duración de las jornadas del personal especializado, impiden la fabricación de más de 800 relojes de pulsera al día y de más de 600 de bolsillo.

Atendiendo a la situación de esta fábrica, responda a los apartados a) y b):

a) [2,2 puntos] ¿Cuántos relojes de cada tipo debe producir a diario para obtener el máximo ingreso?

b) [0,3 puntos] ¿Cuál sería dicho ingreso?

PROBLEMA 2

En caso de elegir este problema hay que responder a uno de estos dos apartados:

APARTADO 2.1 o **APARTADO 2.2**

APARTADO 2.1 [2,5 puntos]

En un examen de matemáticas que constaba de tres problemas, Aitor obtuvo una calificación total de 7,2 puntos.

La puntuación obtenida en el primer problema fue un 40 % más que la obtenida en el segundo, y la del tercero fue el doble de la suma de las puntuaciones obtenidas en el primero y en el segundo.

¿Cuál fue la puntuación obtenida por Aitor en cada problema?

APARTADO 2.2 [2,5 puntos]

a) [1,25 puntos] Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1-2x & 0 \\ 2 & x+1 & 2 \\ 0 & 1 & z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

b) [1,25 puntos] Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$, calcula la matriz:

$$M = A^t \cdot A^{-1}$$

PROBLEMA 3

En caso de elegir este problema hay que responder a uno de estos dos apartados:

APARTADO 3.1 o **APARTADO 3.2**

APARTADO 3.1 [2,5 puntos]

La función de costes de una empresa (en miles de euros) se puede determinar mediante la expresión:

$$f(x) = 40 - 6x + x^2 \text{ , para } x \geq 0$$

donde "x" representa la cantidad producida de un determinado artículo.

a) [0,75 puntos] ¿Disminuye el coste alguna vez?

b) [0,5 puntos] Determina la cantidad producida de este artículo cuando el coste es mínimo y calcula cuál es dicho coste.

c) [0,25 puntos]¿Cuál sería el coste si no se produjese nada de ese artículo?

d) [0,75 puntos] Si el coste fuera 80.000 €, ¿cuál sería la cantidad producida?

e) [0,25 puntos] Representa gráficamente la función.

APARTADO 3.2 [2,5 puntos]

a) [0,75 puntos] Sea la función $f(x) = ax^3 + 3x^2 - 5x + b$. Halla los valores de los coeficientes a y b sabiendo que la función pasa por el punto $(1,-3)$ y tiene un punto de inflexión en $x = -1$.

b) [1 punto] Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los máximos y mínimos relativos de la función $g(x) = x^3 - 3x^2 + 7$.

c) [0,75 puntos] Calcula el área de la región delimitada por la función $g(x)$, el eje de abscisas OX y las rectas x = 1, x = 2; y haz su representación gráfica.

PROBLEMA 4

En caso de elegir este problema hay que responder a uno de estos dos apartados:
APARTADO 4.1 o **APARTADO 4.2**

APARTADO 4.1 [2,5 puntos]

En una caja hay una bola roja y una bola azul. Se extraen dos bolas de la caja como se explica a continuación: se extrae una bola, y antes de sacar la segunda se devuelve a la caja la primera bola extraída, añadiendo otras dos bolas del mismo color. A continuación, se extrae una segunda bola.

a) [0,5 puntos] Calcula la probabilidad de que la segunda bola extraída sea roja si la primera que se ha sacado ha sido azul.

b) [1,25 puntos] Calcula la probabilidad de que la segunda bola extraída sea azul.

c) [0,75 puntos] Si la segunda bola ha sido azul, ¿cuál es la probabilidad de que la primera bola extraída haya sido roja?

APARTADO 4.2 [2,5 puntos]

Sean A, B, C, D y E sucesos de un determinado experimento aleatorio.

a) [0,75 puntos] Sabemos que $P(A)$ = 0,4; $P(B)$ = 0,3 y $P(A \cup B)$ = 0,5.
Calcula la probabilidad de que ocurran A y B.

b) [1 punto] Sabemos que $P(C)$ = 0,5; $P(D)$ = 0,6 y $P(C \cup D)$ = 0,7.
Calcula la probabilidad de que ocurra C sabiendo que ha ocurrido D.

c) [0,75 puntos] Sabemos que $P(A)$ = 0,4; $P(E)$ = 0,6 y que los sucesos A y E son independientes. Calcula la probabilidad de que ocurra alguno de los dos sucesos.

PROBLEMA 5

En caso de elegir este problema hay que responder a uno de estos dos apartados:
APARTADO 5.1 o **APARTADO 5.2**

APARTADO 5.1 [2,5 puntos]

En un determinado mes el tiempo diario de conexión a Internet del alumnado de una cierta universidad sigue una distribución normal de media 210 minutos y de varianza 144 minutos^2.

a) [1 punto] Obtén el intervalo característico para el 80%.

b) [0,3 puntos]¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo de conexión en un día sea superior a 228 minutos?

c) [0,8 puntos]¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo de conexión en un día esté entre 200 y 210 minutos?

d) [0,4 puntos] Seleccionada una muestra aleatoria simple de tamaño 30, ¿cuál es la probabilidad de que el tiempo medio de conexión a Internet sea inferior a 207 minutos?

APARTADO 5.2 [2,5 puntos]
Para estimar el coeficiente intelectual medio de las y los estudiantes de cierta universidad, se ha tomado una muestra aleatoria de tamaño 100, a partir de la que se han obtenido los siguientes valores:

$$\bar{x} = 98 \; puntos \;\; \text{y} \;\; s = 15 \;\; puntos.$$

Hemos hecho la siguiente afirmación:
"El coeficiente intelectual medio de las y los estudiantes de esta universidad está entre 94,5 puntos y 101,5 puntos".
¿Con qué nivel de confianza se puede hacer esta afirmación?

Soluciones

PROBLEMA 1 [2,5 puntos]
La industria de la relojería ha visto un resurgimiento en la demanda de productos tradicionales y una determinada fábrica de relojes que se encuentra en un momento crucial de su desarrollo, quiere aprovechar esta tendencia.
Sin embargo, se enfrenta a ciertas restricciones de producción, como la capacidad de maquinaria, la disponibilidad de materiales y la mano de obra especializada, lo que le hace limitar la fabricación diaria a 1000 unidades.
El análisis que realiza la fábrica se centra en determinar si es más viable producir relojes de pulsera o de bolsillo y en qué medida puede optimizar este proceso productivo. Para ello, considera varios factores. En cuanto a la facturación, hay una diferencia importante, la unidad de reloj de pulsera la vende a 90 euros, mientras que por cada uno de bolsillo ingresa 120 euros.
Por otra parte, las limitaciones de empleo de maquinaria, así como la duración de las jornadas del personal especializado, impiden la fabricación de más de 800 relojes de pulsera al día y de más de 600 de bolsillo.
Atendiendo a la situación de esta fábrica, responda a los apartados a) y b):
a) [2,2 puntos] ¿Cuántos relojes de cada tipo debe producir a diario para obtener el máximo ingreso?
b) [0,3 puntos] ¿Cuál sería dicho ingreso?

a) Llamamos “x” al número de relojes de pulsera, “y” al número de relojes de bolsillo.

“La capacidad máxima diaria de fabricación es de 1000 relojes” → $x+y\leq 1000$.
“No puede fabricar más de 800 de pulsera ni más de 600 de bolsillo” → $x\leq 800;\ \ y\leq 600$.
Las cantidades deben ser positivas → $x\geq 0;\ y\geq 0$.

Reunimos las inecuaciones en un sistema.

$$\left.\begin{array}{l} x+y\leq 1000 \\ x\leq 800;\ \ y\leq 600 \\ x\geq 0;\ y\geq 0 \end{array}\right\}$$

La función a maximizar son los ingresos: $I(x,y)=90x+120y$.

Dibujamos las rectas asociadas a las inecuaciones.

$x+y=1000$

x	$y=1000-x$
0	1000
400	600
800	200
1000	0

$x=800$

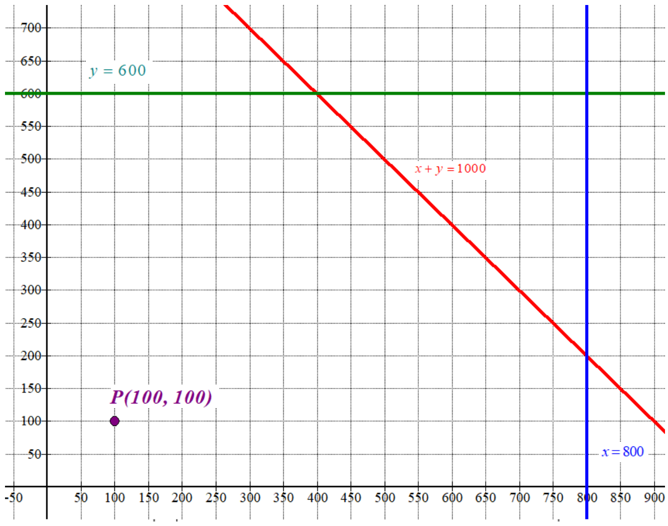
x	$y=800$
800	0
800	200
800	100
800	0

$y=600$

x	$y=600$
0	600
400	600
600	600

$x\geq 0;\ y\geq 0$

Primer cuadrante



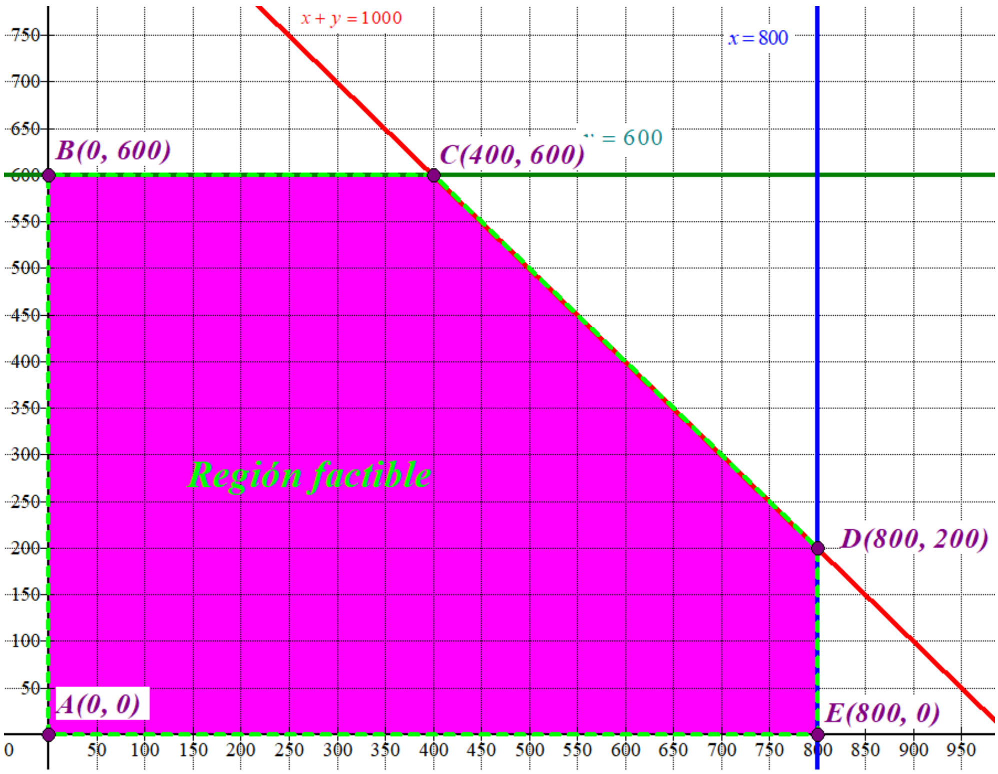
Como las restricciones son $\left.\begin{array}{l} x+y \leq 1000 \\ x \leq 800;\ \ y \leq 600 \\ x \geq 0;\ y \geq 0 \end{array}\right\}$ la región factible es la región del primer cuadrante situada por debajo de las rectas azul, verde y roja.

Comprobamos que el punto P(100, 100) perteneciente a esta región cumple las restricciones.

$$\left.\begin{array}{l} 100+100 \leq 1000 \\ 100 \leq 800;\ \ 100 \leq 600 \\ 100 \geq 0;\ 100 \geq 0 \end{array}\right\}$$

¡Son ciertas todas las desigualdades!

Coloreamos de rosa la región factible en el siguiente dibujo.



Valoramos la función ingresos $I(x,y) = 90x + 120y$ en cada uno de los vértices de la región factible en busca del valor máximo.

A(0, 0) → $I(0,0) = 0$ €

B(0, 600) → $I(0,600) = 90 \cdot 0 + 120 \cdot 600 = 72000$

C(400, 600) → $I(400,600) = 90 \cdot 400 + 120 \cdot 600 = 108000$ ¡Máximo!

D(800, 200) → $I(800,200) = 90 \cdot 800 + 120 \cdot 200 = 96000$

E(800, 0) → $I(800,0) = 90 \cdot 800 + 120 \cdot 0 = 72000$

Los máximos ingresos que se puede obtener en la región factible son de 108000 € y se obtienen en el punto C(400, 600), lo que significa fabricar y vender 400 relojes de pulsera y 600 de bolsillo.

b) Los máximos ingresos que se puede obtener en la región factible son 108000 €.

APARTADO 2.1 [2,5 puntos]
En un examen de matemáticas que constaba de tres problemas, Aitor obtuvo una calificación total de 7,2 puntos.
La puntuación obtenida en el primer problema fue un 40 % más que la obtenida en el segundo, y la del tercero fue el doble de la suma de las puntuaciones obtenidas en el primero y en el segundo.
¿Cuál fue la puntuación obtenida por Aitor en cada problema?

Llamamos “x” a la puntuación obtenida en el primer problema, “y” a la obtenida en el segundo y “z” a la obtenida en el tercero.

“Aitor obtuvo una calificación total de 7,2 puntos” → $x+y+z=7.2$.
“La puntuación obtenida en el primer problema fue un 40 % más que la obtenida en el segundo” → $x=1.40\cdot y$.
“La del tercero fue el doble de la suma de las puntuaciones obtenidas en el primero y en el segundo” → $z=2(x+y)$.

Reunimos las ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=7.2 \\ x=1.40\cdot y \\ z=2(x+y) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 1.40y+y+z=7.2 \\ z=2(1.40y)+2y \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2.40y+z=7.2 \\ z=4.8y \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2.4y+4.8y=7.2 \Rightarrow 7.2y=7.2 \Rightarrow \boxed{y=1} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \boxed{z=4.8\cdot 1=4.8} \\ \boxed{x=1.4\cdot 1=1.4} \end{array}\right.$$

Aitor ha obtenido 1.4 puntos en el primer problema, 1 punto en el segundo y 4.8 en el tercero.

APARTADO 2.2 [2,5 puntos]

a) [1,25 puntos] Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1-2x & 0 \\ 2 & x+1 & 2 \\ 0 & 1 & z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

b) [1,25 puntos] Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$, calcula la matriz:

$$M = A^t \cdot A^{-1}$$

a) Obtenemos el sistema de ecuaciones.

$$\begin{pmatrix} 3 & 1-2x & 0 \\ 2 & x+1 & 2 \\ 0 & 1 & z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3y+2(1-2x) \\ 2y+2(1+x)+2 \\ 2+z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3y+2-4x \\ 2y+2+2x+2 \\ 2+z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} -4x+3y+2=-1 \\ 2x+2y+4=2 \\ z+2=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -4x+3y=-3 \\ 2x+2y=-2 \\ \boxed{z=-2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -4x+3y=-3 \\ x+y=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -4x+3y=-3 \\ y=-1-x \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -4x+3(-1-x)=-3 \Rightarrow -4x-3-3x=-3 \Rightarrow -7x=0 \Rightarrow \boxed{x=\frac{0}{-7}=0} \Rightarrow \boxed{y=-1-0=-1}$$

La solución del sistema es $x=0;\ y=-1;\ z=-2$.

b) Comprobamos que la matriz A tiene inversa.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 10-12 = -2 \neq 0$$

Al ser no nulo el determinante la matriz A tiene inversa. La calculamos.

$$A^{-1} = \frac{Adj\left(A^t\right)}{|A|} = \frac{Adj\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}}{-2} = \frac{-1}{2}\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$$

Calculamos la expresión de la matriz $M = A^t \cdot A^{-1}$.

$$M = A^t \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \frac{-1}{2}\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} = \frac{-1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} = \frac{-1}{2}\begin{pmatrix} 10-16 & -6+8 \\ 15-20 & -9+10 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{-1}{2}\begin{pmatrix} -6 & 2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

La matriz M queda $M = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5/2 & -1/2 \end{pmatrix}$.

APARTADO 3.1 [2,5 puntos]
La función de costes de una empresa (en miles de euros) se puede determinar mediante la expresión:

$$f(x) = 40 - 6x + x^2 \text{ , para } x \geq 0$$

donde "x" representa la cantidad producida de un determinado artículo.

a) [0,75 puntos] ¿Disminuye el coste alguna vez?

b) [0,5 puntos] Determina la cantidad producida de este artículo cuando el coste es mínimo y calcula cuál es dicho coste.

c) [0,25 puntos]¿Cuál sería el coste si no se produjese nada de ese artículo?

d) [0,75 puntos] Si el coste fuera 80.000 €, ¿cuál sería la cantidad producida?

e) [0,25 puntos] Representa gráficamente la función.

a) Averiguamos cuando se anula la derivada.

$$f(x) = 40 - 6x + x^2 \Rightarrow f'(x) = -6 + 2x$$

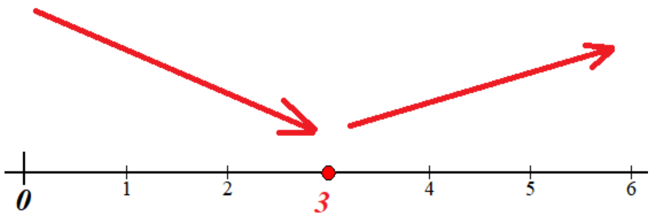
$$f'(x) = 0 \Rightarrow -6 + 2x = 0 \Rightarrow 2x = 6 \Rightarrow \boxed{x = \frac{6}{2} = 3}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes y después de $x = 3$.

- En el intervalo $[0,3)$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale $f'(1) = -6 + 2 \cdot 1 = -4 < 0$. El coste disminuye en $[0,3)$.
- En el intervalo $(3,+\infty)$ tomamos $x = 4$ y la derivada vale $f'(4) = -6 + 2 \cdot 4 = 2 > 0$. El coste crece en $(3,+\infty)$.

El coste disminuye cuando la cantidad producida del artículo es inferior a 3 unidades.

b) Por lo estudiado en el apartado anterior la función sigue el esquema siguiente.



La función tiene un mínimo en $x = 3$. Como $f(3) = 40 - 6 \cdot 3 + 3^2 = 31$ este coste mínimo es de 31 000 euros.

c) Nos piden el valor de $f(0)$.

$$\left. \begin{array}{l} f(0) \\ f(x) = 40 - 6x + x^2 \end{array} \right\} \Rightarrow f(0) = 40 - 6 \cdot 0 + 0^2 = 40$$

El coste de no producir ningún artículo es de 40000 €.

d) Nos piden averiguar el valor de "x" para el que $f(x)=80$.

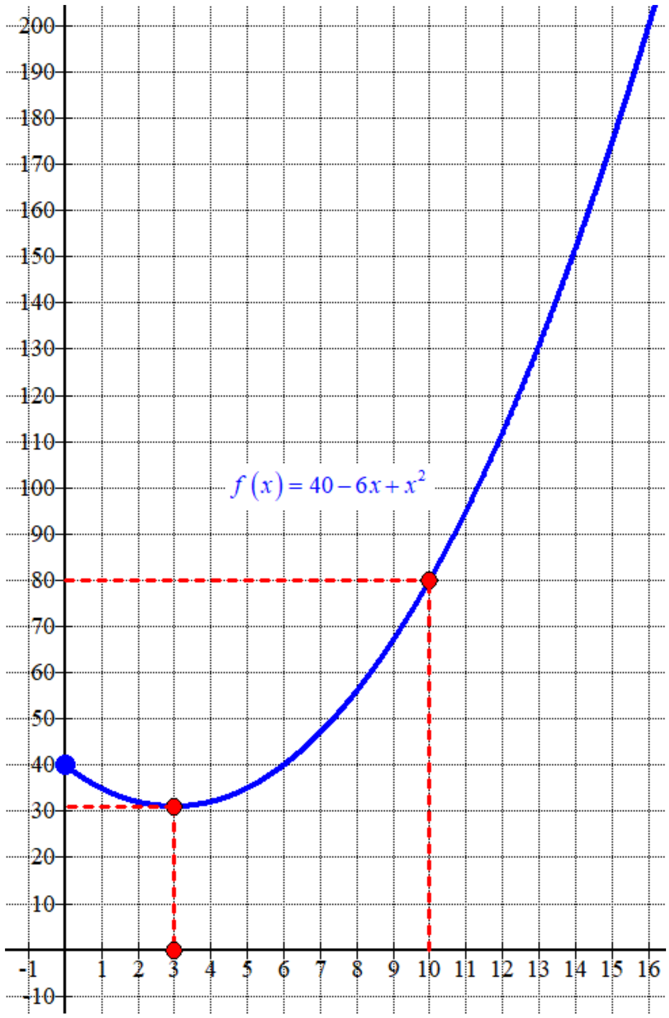
$$\left.\begin{array}{l} f(x)=80 \\ f(x)=40-6x+x^2 \end{array}\right\} \Rightarrow 40-6x+x^2=80 \Rightarrow x^2-6x-40=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{6\pm\sqrt{(-6)^2-4(1)(-40)}}{2}=\frac{6\pm 14}{2}=\begin{cases} \dfrac{6+14}{2}=\boxed{10=x} \\ \dfrac{6-14}{2}=-4\notin[0,+\infty) \end{cases}$$

Para la producción de 10 unidades el coste es de 80000 euros.

e) Hacemos una tabla de valores y representamos la función costes.

x	$f(x)=40-6x+x^2$
0	40
3	31
10	80



APARTADO 3.2 [2,5 puntos]

a) [0,75 puntos] Sea la función $f(x) = ax^3 + 3x^2 - 5x + b$. Halla los valores de los coeficientes a y b sabiendo que la función pasa por el punto $(1,-3)$ y tiene un punto de inflexión en $x = -1$.

b) [1 punto] Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los máximos y mínimos relativos de la función $g(x) = x^3 - 3x^2 + 7$.

c) [0,75 puntos] Calcula el área de la región delimitada por la función $g(x)$, el eje de abscisas OX y las rectas $x = 1$, $x = 2$; y haz su representación gráfica.

a) Si la función pasa por el punto $(1,-3)$ significa que $f(1) = -3$.

$$\left.\begin{array}{r} f(x) = ax^3 + 3x^2 - 5x + b \\ f(1) = -3 \end{array}\right\} \Rightarrow -3 = a\cdot 1^3 + 3\cdot 1^2 - 5\cdot 1 + b \Rightarrow -3 = a + 3 - 5 + b \Rightarrow \boxed{a + b = -1}$$

Si la función tiene un punto de inflexión en $x = -1$ implica que $f''(-1) = 0$.

$$f(x) = ax^3 + 3x^2 - 5x + b \Rightarrow f'(x) = 3ax^2 + 6x - 5 \Rightarrow f''(x) = 6ax + 6$$

$$\left.\begin{array}{l} f''(x) = 6ax + 6 \\ f''(-1) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 0 = 6a(-1) + 6 \Rightarrow 0 = -6a + 6 \Rightarrow 6a = 6 \Rightarrow \boxed{a = 1}$$

Sustituimos este valor en la primera ecuación y obtenemos el valor de b.

$$\left.\begin{array}{l} a = 1 \\ a + b = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow 1 + b = -1 \Rightarrow \boxed{b = -2}$$

Los valores buscados son $a = 1$ y $b = -2$.

b) Utilizamos la derivada para encontrar los puntos críticos de la función.

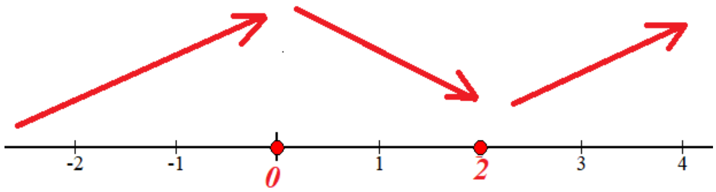
$$g(x) = x^3 - 3x^2 + 7 \Rightarrow g'(x) = 3x^2 - 6x$$

$$g'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 6x = 0 \Rightarrow 3x(x - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x = 0} \\ x - 2 = 0 \rightarrow \boxed{x = 2} \end{cases}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos valores.

- En el intervalo $(-\infty, 0)$ tomamos $x = -1$ y la derivada vale $g'(-1) = 3(-1)^2 - 6(-1) = 9 > 0$. La función crece en $(-\infty, 0)$.
- En el intervalo $(0, 2)$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale $g'(1) = 3(1)^2 - 6(1) = -3 < 0$. La función decrece en $(0, 2)$.
- En el intervalo $(2, +\infty)$ tomamos $x = 3$ y la derivada vale $g'(3) = 3(3)^2 - 6(3) = 9 > 0$. La función crece en $(2, +\infty)$.

La función sigue el esquema siguiente.

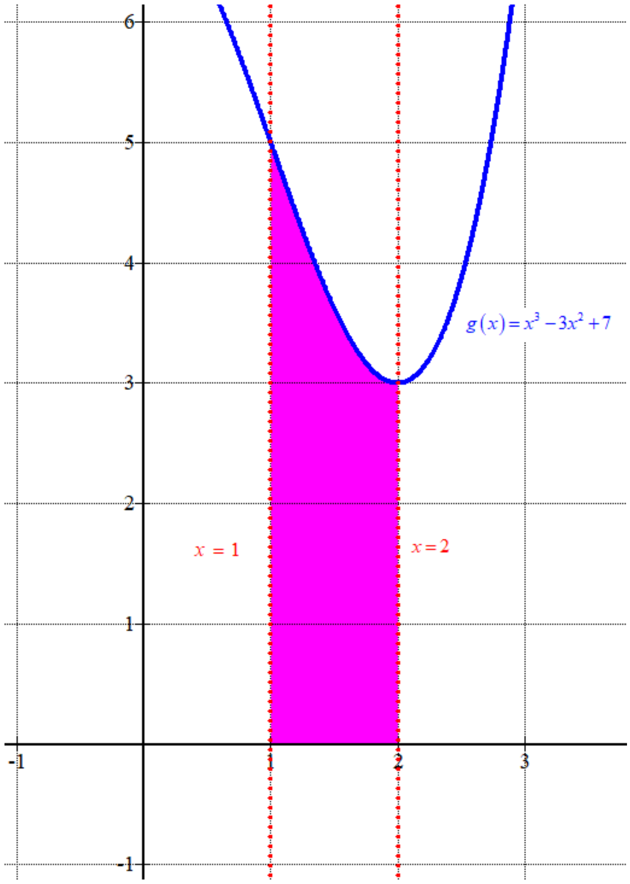


La función crece en $(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$ y decrece en $(0,2)$.

$$g(0)=0^3-3\cdot 0^2+7=7,\ \ g(2)=2^3-3\cdot 2^2+7=3$$

El punto (0, 7) es un máximo relativo y el punto (2, 3) es un mínimo relativo.

c) Dibujamos la región de la que deseamos calcular el área.



Contando cuadraditos de 1 unidad cuadrada cada uno podemos aproximar el área de la zona coloreada. Tiene un valor entre 3 y 4 unidades cuadradas.
Usamos el cálculo integral para obtener su valor exacto.

$$\acute{A}rea=\int_1^2 g(x)dx=\int_1^2 x^3-3x^2+7dx=\left[\frac{x^4}{4}-x^3+7x\right]_1^2=$$

$$=\left[\frac{2^4}{4}-2^3+7\cdot 2\right]-\left[\frac{1^4}{4}-1^3+7\cdot 1\right]=4-8+14-\frac{1}{4}+1-7=\frac{15}{4}=3.75$$

El área de la región delimitada por la función $g(x)$, el eje de abscisas OX y las rectas $x=1$, $x=2$ tiene un valor de 3.75 unidades cuadradas.

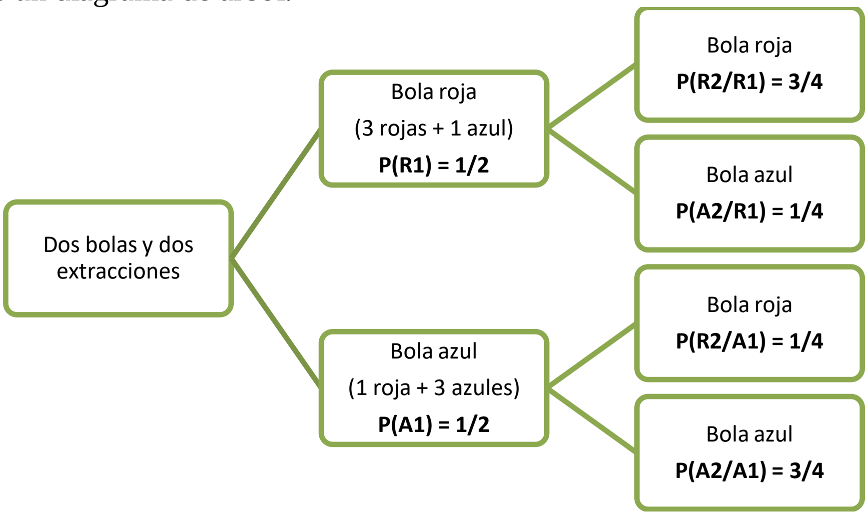
APARTADO 4.1 [2,5 puntos]
En una caja hay una bola roja y una bola azul. Se extraen dos bolas de la caja como se explica a continuación: se extrae una bola, y antes de sacar la segunda se devuelve a la caja la primera bola extraída, añadiendo otras dos bolas del mismo color. A continuación, se extrae una segunda bola.

a) [0,5 puntos] Calcula la probabilidad de que la segunda bola extraída sea roja si la primera que se ha sacado ha sido azul.

b) [1,25 puntos] Calcula la probabilidad de que la segunda bola extraída sea azul.

c) [0,75 puntos] Si la segunda bola ha sido azul, ¿cuál es la probabilidad de que la primera bola extraída haya sido roja?

Llamamos A1, A2, R1 y R2 a sacar bola azul o roja en primera o segunda extracción. Realizamos un diagrama de árbol.



a) Nos piden calcular $P(R2/A1)$. Si sacas primero una bola azul para la segunda extracción se devuelve la bola azul a la caja junto con dos bolas azules más. La caja pasa a tener 1 bola roja y 3 azules.
La probabilidad de que la segunda bola extraída sea roja si la primera que se ha sacado ha sido azul es de $\frac{1}{4} = 0.25$.

b) Nos piden calcular $P(A2)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(A2) = P(A1)P(A2/A1) + P(R1)P(A2/R1) = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{2} = 0.5$$

La probabilidad de que la segunda bola extraída sea azul es de 0.5.

c) Nos piden calcular $P(R1/A2)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(R1/A2) = \frac{P(R1\cap A2)}{P(A2)} = \frac{P(R1)P(A2/R1)}{P(A2)} = \frac{0.5\cdot 0.25}{0.5} = \boxed{0.25}$$

La probabilidad de que la primera bola extraída haya sido roja sabiendo que la segunda ha sido azul es de 0.25.

APARTADO 4.2 [2,5 puntos]
Sean A, B, C, D y E sucesos de un determinado experimento aleatorio.
a) [0,75 puntos] Sabemos que $P(A) = 0{,}4$; $P(B) = 0{,}3$ y $P(A \cup B) = 0{,}5$.
Calcula la probabilidad de que ocurran A y B.
b) [1 punto] Sabemos que $P(C) = 0{,}5$; $P(D) = 0{,}6$ y $P(C \cup D) = 0{,}7$.
Calcula la probabilidad de que ocurra C sabiendo que ha ocurrido D.
c) [0,75 puntos] Sabemos que $P(A) = 0{,}4$; $P(E) = 0{,}6$ y que los sucesos A y E son independientes. Calcula la probabilidad de que ocurra alguno de los dos sucesos.

a) Usamos la fórmula de la probabilidad de la unión de dos sucesos.

$$\left.\begin{array}{l} P(A)=0.4 \\ P(B)=0.3 \\ P(A\cup B)=0.5 \\ P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B) \end{array}\right\} \Rightarrow 0.5=0.4+0.3-P(A\cap B) \Rightarrow \boxed{P(A\cap B)=0.2}$$

La probabilidad de que ocurran A y B es de 0.2

b) Nos piden calcular $P(C/D)$.

Primero determinamos la probabilidad de $P(C\cap D)$.

$$\left.\begin{array}{l} P(S)=0.5 \\ P(D)=0.6 \\ P(C\cup D)=0.7 \\ P(C\cup D)=P(C)+P(D)-P(C\cap D) \end{array}\right\} \Rightarrow 0.7=0.5+0.6-P(C\cap D) \Rightarrow P(C\cap D)=0.4$$

Calculamos el valor de $P(C/D)$ usando el teorema de Bayes.

$$P(C/D)=\frac{P(C\cap D)}{P(D)}=\frac{0.4}{0.6}=\boxed{\frac{2}{3}\simeq 0.667}$$

c) Nos piden calcular $P(A\cup E)$.

Si los sucesos A y E son independientes se cumple que $P(A\cap E)=P(A)P(E)$.

$$\left.\begin{array}{l} P(A)=0.4 \\ P(E)=0.6 \\ P(A\cap E)=P(A)P(E)=0.4\cdot 0.6=0.24 \\ P(A\cup E)=P(A)+P(E)-P(A\cap E) \end{array}\right\} \Rightarrow P(A\cup E)=0.4+0.6-0.24=\boxed{0.76}$$

La probabilidad de que ocurra alguno de los dos sucesos es de 0.76

APARTADO 5.1 [2,5 puntos]

En un determinado mes el tiempo diario de conexión a Internet del alumnado de una cierta universidad sigue una distribución normal de media 210 minutos y de varianza 144 minutos^2.

a) [1 punto] Obtén el intervalo característico para el 80%.

b) [0,3 puntos]¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo de conexión en un día sea superior a 228 minutos?

c) [0,8 puntos]¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo de conexión en un día esté entre 200 y 210 minutos?

d) [0,4 puntos] Seleccionada una muestra aleatoria simple de tamaño 30, ¿cuál es la probabilidad de que el tiempo medio de conexión a Internet sea inferior a 207 minutos?

X = tiempo diario (en minutos) de conexión a Internet del alumnado de una cierta universidad.

Como la varianza es 144 la desviación típica es $\sqrt{144} = 12$ minutos. X = N(210, 12)

a) Buscamos en la tabla de la normal para un nivel de confianza del 80% el valor de $z_{\alpha/2}$.

$$1 - \alpha = 0.80 \rightarrow \alpha = 0.20 \rightarrow \alpha/2 = 0.10 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.90 \rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{1.28+1.29}{2} = \mathbf{1.285}$$

	0	0'01	0'02	0'03	0'04	0'05	0'06	0'07	0'08	0'09
0	0'5000	0'5040	0'5080	0'5120	0'5160	0'5199	0'5239	0'5279	[illegible]	[illegible]
0'1	0'5398	0'5438	0'5478	0'5517	0'5557	0'5596	0'5636	0'5675	[illegible]	[illegible]
0'2	0'5793	0'5832	0'5871	0'5910	0'5948	0'5987	0'6026	0'6064	[illegible]	[illegible]
0'3	0'6179	0'6217	0'6255	0'6293	0'6331	0'6368	0'6406	0'6443	[illegible]	[illegible]
0'4	0'6554	0'6591	0'6628	0'6664	0'6700	0'6736	0'6772	0'6808	[illegible]	[illegible]
0'5	0'6915	0'6950	0'6985	0'7019	0'7054	0'7088	0'7123	0'7157	[illegible]	[illegible]
0'6	0'7257	0'7291	0'7324	0'7357	0'7389	0'7422	0'7454	0'7486	[illegible]	[illegible]
0'7	0'7580	0'7611	0'7642	0'7673	0'7704	0'7734	0'7764	0'7794	[illegible]	[illegible]
0'8	0'7881	0'7910	0'7939	0'7967	0'7995	0'8023	0'8051	0'8078	[illegible]	[illegible]
0'9	0'8159	0'8186	0'8212	0'8238	0'8264	0'8289	0'8315	0'8340	[illegible]	[illegible]
1	0'8413	0'8438	0'8461	0'8485	0'8508	0'8531	0'8554	0'8577	[illegible]	[illegible]
1'1	0'8643	0'8665	0'8686	0'8708	0'8729	0'8749	0'8770	0'8790	[illegible]	[illegible]
1'2	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0'8997	0'9015
1'3	0'9032	0'9049	0'9066	0'9082	0'9099	0'9115	0'9131	0'9147	0'9162	0'9177

Utilizando la fórmula del error:

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sigma = 1.285 \cdot 12 = 15.42$$

El intervalo de confianza es:

$$(\mu - Error,\ \mu + Error) = (210 - 15.42,\ 210 + 15.42) = (194.58,\ 225.42)$$

b) Nos piden calcular $P(X \geq 228)$.

$$P(X \geq 228) = \left\{ \begin{array}{l} Tipificamos \\ Z = \dfrac{X - 210}{12} \end{array} \right\} = P\left(Z \geq \frac{228-210}{12} \right) = P(Z \geq 1.5) =$$

$$= 1 - P(Z < 1.5) = \{\text{Miramos en la tabla N(0, 1)}\} = 1 - 0.9332 = \boxed{0.0668}$$

	0	
0	0'5000	0
0'1	0'5398	0
0'2	0'5793	0
0'3	0'6179	0
0'4	0'6554	0
0'5	0'6915	0
0'6	0'7257	0
0'7	0'7580	0
0'8	0'7881	0
0'9	0'8159	0
1	0'8413	0
1'1	0'8643	0
1'2	0'8849	0
1'3	0'9032	0
1'4	0'9192	0
1'5	0'9332	0
1'6	0'9452	0

La probabilidad de que el tiempo de conexión en un día sea superior a 228 minutos es de 0.0668.

c) Nos piden calcular $P(200 \leq X \leq 210)$.

$$P(200 \leq X \leq 210) = \left\{ \begin{array}{l} Tipificamos \\ Z = \dfrac{X - 210}{12} \end{array} \right\} = P\left(\frac{200-210}{12} \leq Z \leq \frac{210-210}{12} \right) =$$

$$= P(-0.83 \leq Z \leq 0) = P(Z \leq 0) - P(Z \leq -0.83) = 0.5 - P(Z \geq 0.83) =$$

$$= 0.5 - (1 - P(Z < 0.83)) = \{\text{Miramos en la tabla N(0, 1)}\} = 0.5 - 1 + 0.7967 = \boxed{0.2967}$$

	0	0'01	0'02	0'03	0'
0	0'5000	0'5040	0'5080	0'5120	0'5
0'1	0'5398	0'5438	0'5478	0'5517	0'5
0'2	0'5793	0'5832	0'5871	0'5910	0'5
0'3	0'6179	0'6217	0'6255	0'6293	0'6
0'4	0'6554	0'6591	0'6628	0'6664	0'6
0'5	0'6915	0'6950	0'6985	0'7019	0'7
0'6	0'7257	0'7291	0'7324	0'7357	0'7
0'7	0'7580	0'7611	0'7642	0'7673	0'7
0'8	0'7881	0'7910	0'7939	0'7967	0'7
0'9	0'8159	0'8186	0'8212	0'8238	0'8

La probabilidad de que el tiempo de conexión en un día esté entre 200 y 210 minutos es de 0.2967.

d) La distribución de las medias muestrales de tamaño 30 sigue una ley normal con la misma media (210) y con desviación típica $\sigma = \frac{12}{\sqrt{30}} = 2.19$. $\overline{X_{30}} = N(210, 2.19)$.

Nos piden calcular $P\left(\overline{X_{30}} < 207\right)$.

$$P\left(\overline{X_{30}} < 207\right) = \{Tipificamos\} = P\left(Z < \frac{207-210}{2.19}\right) = P(Z < -1.37) =$$

$$= P(Z > 1.37) = 1 - P(Z \leq 1.37) = \left\{\begin{matrix} \text{Miramos en} \\ \text{la tabla N}(0,1) \end{matrix}\right\} = 1 - 0.9147 = \boxed{0.0853}$$

	0	0'01	0'02	0'03	0'04	0'05	0'06	0'07	[illegible]
0	0'5000	0'5040	0'5080	0'5120	0'5160	0'5199	0'5239	0'5[illegible]79	0'
0'1	0'5398	0'5438	0'5478	0'5517	0'5557	0'5596	0'5636	0'5[illegible]75	0'
0'2	0'5793	0'5832	0'5871	0'5910	0'5948	0'5987	0'6026	0'6[illegible]64	0'
0'3	0'6179	0'6217	0'6255	0'6293	0'6331	0'6368	0'6406	0'6[illegible]43	0'
0'4	0'6554	0'6591	0'6628	0'6664	0'6700	0'6736	0'6772	0'6[illegible]08	0'
0'5	0'6915	0'6950	0'6985	0'7019	0'7054	0'7088	0'7123	0'7[illegible]57	0'
0'6	0'7257	0'7291	0'7324	0'7357	0'7389	0'7422	0'7454	0'7[illegible]86	0'
0'7	0'7580	0'7611	0'7642	0'7673	0'7704	0'7734	0'7764	0'7[illegible]94	0'
0'8	0'7881	0'7910	0'7939	0'7967	0'7995	0'8023	0'8051	0'8[illegible]78	0'
0'9	0'8159	0'8186	0'8212	0'8238	0'8264	0'8289	0'8315	0'8[illegible]40	0'
1	0'8413	0'8438	0'8461	0'8485	0'8508	0'8531	0'8554	0'8[illegible]77	0'
1'1	0'8643	0'8665	0'8686	0'8708	0'8729	0'8749	0'8770	0'8[illegible]90	0'
1'2	0'8849	0'8869	0'8888	0'8907	0'8925	0'8944	0'8962	0'8[illegible]80	0'
1'3	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0'9147	0'
1'4	0'9192	0'9207	0'9222	0'9236	0'9251	0'9265	0'9279	0'9292	0'

La probabilidad de que el tiempo medio de conexión a Internet sea inferior a 207 minutos es de 0.0853.

APARTADO 5.2 [2,5 puntos]
Para estimar el coeficiente intelectual medio de las y los estudiantes de cierta universidad, se ha tomado una muestra aleatoria de tamaño 100, a partir de la que se han obtenido los siguientes valores:

$$\overline{x} = 98 \; puntos \;\; \text{y} \;\; s = 15 \;\; puntos.$$

Hemos hecho la siguiente afirmación:
"El coeficiente intelectual medio de las y los estudiantes de esta universidad está entre 94,5 puntos y 101,5 puntos".
¿Con qué nivel de confianza se puede hacer esta afirmación?

X = el coeficiente intelectual medio de las y los estudiantes de cierta universidad
Media muestral $\overline{x} = 98$ puntos. Tamaño de la muestra = n = 100
El intervalo de confianza es $(94.5, 101.5)$
El error del intervalo de confianza es la mitad de su amplitud.

$$Error = \frac{101.5 - 94.5}{2} = 3.5$$

Utilizando la fórmula del error:

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 3.5 = z_{\alpha/2} \cdot \frac{15}{\sqrt{100}} \Rightarrow \frac{3.5 \cdot 10}{15} = z_{\alpha/2} \Rightarrow z_{\alpha/2} = 2.33$$

Buscamos en la tabla de la normal el valor de $1 - \frac{\alpha}{2}$ para $z_{\alpha/2} = 2.33$.

	0	0'01	0'02	0'03
0	0'5000	0'5040	0'5080	0'5120
0'1	0'5398	0'5438	0'5478	0'5517
0'2	0'5793	0'5832	0'5871	0'5910
0'3	0'6179	0'6217	0'6255	0'6293
0'4	0'6554	0'6591	0'6628	0'6664
0'5	0'6915	0'6950	0'6985	0'7019
0'6	0'7257	0'7291	0'7324	0'7357
0'7	0'7580	0'7611	0'7642	0'7673
0'8	0'7881	0'7910	0'7939	0'7967
0'9	0'8159	0'8186	0'8212	0'8238
1	0'8413	0'8438	0'8461	0'8485
1'1	0'8643	0'8665	0'8686	0'8708
1'2	0'8849	0'8869	0'8888	0'8907
1'3	0'9032	0'9049	0'9066	0'9082
1'4	0'9192	0'9207	0'9222	0'9236
1'5	0'9332	0'9345	0'9357	0'9370
1'6	0'9452	0'9463	0'9474	0'9484
1'7	0'9554	0'9564	0'9573	0'9582
1'8	0'9641	0'9649	0'9656	0'9664
1'9	0'9713	0'9719	0'9726	0'9732
2	0'9772	0'9778	0'9783	0'9788
2'1	0'9821	0'9826	0'9830	0'9834
2'2	0'9861	0'9864	0'9868	0'9871
2'3	[illegible]	[illegible]	0'9898	0'9901
2'4	0'9918	0'9920	0'9922	0'9925

Como $1 - \frac{\alpha}{2} = 0.9901 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.0099 \Rightarrow \alpha = 0.0198 \Rightarrow 1 - \alpha = 0.9802$.
El nivel de confianza es del 98.02 %.

Se puede afirmar con un 98.02 % de confianza que el coeficiente intelectual medio de las y los estudiantes de esta universidad está entre 94,5 puntos y 101,5 puntos.