GENERALITAT VALENCIANA
Conselleria d'Educació, Cultura, Universitats i Ocupació

PROVA D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT
PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD

SISTEMA UNIVERSITARI VALENCIÀ
SISTEMA UNIVERSITARIO VALENCIANO

CONVOCATÒRIA: MODEL 2025	CONVOCATORIA: MODELO 2025
Assignatura: MATEMÀTIQUES APLICADES A LES CIÈNCIES SOCIALS II	Asignatura: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES. II

BAREMO DEL EXAMEN: **Se ha de contestar un problema del Apartado 1, un problema del Apartado 2 y el problema del Apartado 3.** En cada cuestión se indica la puntuación máxima, siendo la nota final la suma de las calificaciones de cada una ellas. Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables y que no puedan realizar cálculo simbólico ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados. Está permitido el uso de regla. Las gráficas se harán con el mismo color que el resto del examen.

Todas las respuestas han de estar debidamente razonadas.

Apartado 1. Responda **un** problema de este apartado de los dos propuestos. (3,5 puntos)

Problema 1. A. Una empresa fabrica dos modelos de frigoríficos, A y B. Para su fabricación la empresa necesita un departamento de montaje y un departamento de pintura. Cada departamento dispone semanalmente de 100 horas. Un frigorífico del modelo A necesita 3 horas en el departamento de montaje y 1 hora en el de pintura, mientras que uno del modelo B necesita 1 hora y 2 horas, respectivamente, en cada departamento. Se pide:

a) ¿Qué cantidad de cada modelo debe producir la empresa para maximizar sus ganancias, si el beneficio por cada frigorífico del modelo A es de 500 euros y por cada frigorífico del modelo B es de 400 euros? (3 puntos)

b) ¿Cuál es dicha ganancia máxima? (0,5 puntos)

Problema 1. B. Una papelería pone a la venta 50 bolígrafos repartidos entre tres tipos: azules, rojos y negros. El número de bolígrafos azules es 11 veces la suma de la cantidad de bolígrafos negros más la mitad de los bolígrafos rojos. Vende por 3,75 euros cada bolígrafo azul, por 2,25 cada bolígrafo rojo y por 1,5 cada bolígrafo negro. Sabiendo que le han robado 2 bolígrafos negros y 4 azules y que ha recaudado vendiendo el resto de los bolígrafos 159 euros, ¿cuántos bolígrafos rojos, azules y negros tenía la tienda inicialmente?

(Planteamiento correcto 1,5 puntos --- Resolución correcta 2 puntos)

Apartado 2. Responda **un** problema de este apartado de los dos propuestos. (3,5 puntos)

Problema 2. A. Se considera la función:

$$f(x)=\begin{cases} x^3+ax^2+24x & si\ \ x\le -1 \\ (x-1)^2+3 & si\ \ x>-1 \end{cases}$$

siendo a un número real.

a) Determina el valor de a para que esta función sea continua. *(0,5 puntos)*

b) Supongamos que $a = 9$. Determina los máximos y mínimos locales que tiene esta función en el intervalo $\left]-9/2,-3/2\right[$. *(1,5 puntos)*

c) Supongamos que $a = 0$. Calcula el área de la región delimitada por esta función, la recta de ecuación $x = 2$, la recta de ecuación $x = 3$ y el eje OX. *(1,5 puntos)*

Problema 2. B. El rendimiento, en tanto por ciento, de cierto motor de combustión en función del tiempo de uso (medido en años) viene dado por la siguiente expresión:

$$f(x)=\frac{50x}{1+x^2}+50$$

a) Calcula cuándo el motor alcanza su rendimiento máximo y cuál es ese rendimiento máximo. *(1,5 puntos)*

b) ¿En algún momento el rendimiento del motor es inferior al 50 %? *(1 punto)*

c) Si se considera que el motor debe reemplazarse si el rendimiento es inferior al 65 % a partir del primer año, ¿en qué momento debe reemplazarse? *(1 punto)*

Apartado 3. Responda el único problema de este apartado. (3 puntos)

Problema 3. Un instituto tiene estudiantes de ESO y de Bachillerato. El instituto ofrece tres extraescolares: dos deportivas (fútbol y baloncesto) y una no deportiva (música); todos los estudiantes tienen que escoger una extraescolar, pero solo una. El instituto tiene en total 400 estudiantes, y 300 de ellos han escogido fútbol. El instituto tiene 310 estudiantes de ESO; de ellos, 230 han escogido fútbol y 60 han escogido baloncesto. Se sabe también que 8 estudiantes de Bachillerato han escogido música. Seleccionamos al azar un estudiante de este instituto.

a) Calcula la probabilidad de que el estudiante esté en ESO o haya escogido música. *(1 punto)*

b) Si sabemos que el estudiante seleccionado ha escogido una extraescolar deportiva, ¿cuál es la probabilidad de que esté en ESO? *(1 punto)*

c) ¿Son independientes los sucesos “el estudiante está en Bachillerato” y “el estudiante no ha escogido baloncesto”? *(1 punto)*

Soluciones

Problema 1. A. Una empresa fabrica dos modelos de frigoríficos, A y B. Para su fabricación la empresa necesita un departamento de montaje y un departamento de pintura. Cada departamento dispone semanalmente de 100 horas. Un frigorífico del modelo A necesita 3 horas en el departamento de montaje y 1 hora en el de pintura, mientras que uno del modelo B necesita 1 hora y 2 horas, respectivamente, en cada departamento. Se pide:

a) ¿Qué cantidad de cada modelo debe producir la empresa para maximizar sus ganancias, si el beneficio por cada frigorífico del modelo A es de 500 euros y por cada frigorífico del modelo B es de 400 euros? (3 puntos)

b) ¿Cuál es dicha ganancia máxima? (0,5 puntos)

a) Llamamos x = número de frigoríficos A e y = número de frigoríficos B.
Realizamos una tabla.

	Horas de montaje	Horas de pintura	Ganancias
Nº frigoríficos A (x)	3x	x	500x
Nº frigoríficos B (y)	y	2y	400y
TOTALES	$3x+y$	$x+2y$	$500x+400y$

La función objetivo que deseamos maximizar son las ganancias $G(x,y)=500x+400y$.

Las restricciones son:

"Cada departamento dispone semanalmente de 100 horas" → $3x+y\le 100;\ x+2y\le 100$

Las cantidades deben ser positivas → $x\ge 0;\ y\ge 0$

Reunimos todas las restricciones en un sistema de inecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} 3x+y\le 100 \\ x+2y\le 100 \\ x\ge 0;\ y\ge 0 \end{array}\right\}$$

Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

$3x+y=100$

x	$y=100-3x$
0	100
20	40
100 / 3	0

$x+2y=100$

x	$y=\dfrac{100-x}{2}$
0	50
20	40
100	0

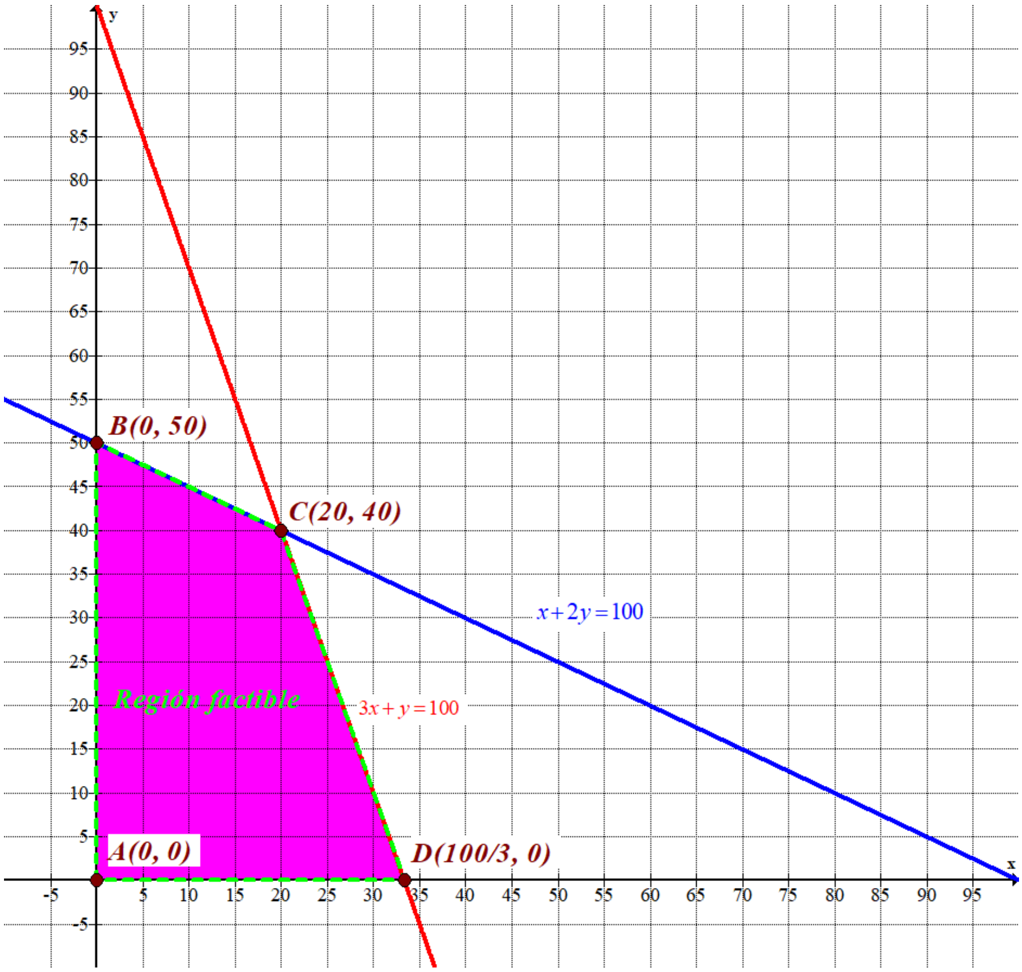
$x\ge 0;\ y\ge 0$

Primer cuadrante

Como las restricciones del problema son $\left.\begin{array}{l} 3x+y\le 100 \\ x+2y\le 100 \\ x\ge 0;\ y\ge 0 \end{array}\right\}$ la región factible es la región del primer cuadrante que está por debajo de las rectas azul y roja. Comprobamos que el punto P(10, 10) perteneciente a dicha región cumple las restricciones.

$$\left.\begin{array}{l} 30+10\le 100 \\ 10+20\le 100 \\ 10\ge 0; 10\ge 0 \end{array}\right\} \text{ ¡Se cumplen todas!}$$

Coloreamos de rosa la región factible en el siguiente dibujo y determinamos las coordenadas de sus vértices.



Los vértices son A(0, 0); B(0, 50), C(20, 40) y D(100/3, 0).

Valoramos la función objetivo ganancias $G(x,y)=500x+400y$ en cada vértice en busca del valor máximo.

A(0, 0) → $G(0,0)=0$

B(0, 50) → $G(0,50)=500\cdot 0+400\cdot 50=20000$

C(20, 40) → $G(20,40)=500\cdot 20+400\cdot 40=26000$ ¡Máximo!

D(100/3, 0) → $G(100/3,0)=500\cdot\dfrac{100}{3}+400\cdot 0\simeq 16666.667$

El valor máximo de la función ganancias se obtiene en el vértice C(20, 40). Se deben producir 20 frigoríficos A y 40 frigoríficos B para maximizar las ganancias.

b) Las ganancias máximas que se pueden obtener son 26 000 €.

Problema 1. B. Una papelería pone a la venta 50 bolígrafos repartidos entre tres tipos: azules, rojos y negros. El número de bolígrafos azules es 11 veces la suma de la cantidad de bolígrafos negros más la mitad de los bolígrafos rojos. Vende por 3,75 euros cada bolígrafo azul, por 2,25 cada bolígrafo rojo y por 1,5 cada bolígrafo negro. Sabiendo que le han robado 2 bolígrafos negros y 4 azules y que ha recaudado vendiendo el resto de los bolígrafos 159 euros, ¿cuántos bolígrafos rojos, azules y negros tenía la tienda inicialmente?
(Planteamiento correcto 1,5 puntos --- Resolución correcta 2 puntos)

Llamamos "x" al número de bolígrafos azules, "y" al número de bolígrafos rojos y "z" al número de bolígrafos negros.

"El número de bolígrafos es 50" → $x+y+z=50$
"El número de bolígrafos azules es 11 veces la suma de la cantidad de bolígrafos negros más la mitad de los bolígrafos rojos" → $x=11\left(z+\frac{y}{2}\right)$
"Vende por 3,75 euros cada bolígrafo azul, por 2,25 cada bolígrafo rojo y por 1,5 cada bolígrafo negro. Sabiendo que le han robado 2 bolígrafos negros $(z-2)$ y 4 azules $(x-4)$ y que ha recaudado vendiendo el resto de los bolígrafos 159 euros" → $3.75(x-4)+2.25y+1.5(z-2)=159$.

Reunimos las ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=50 \\ x=11\left(z+\frac{y}{2}\right) \\ 3.75(x-4)+2.25y+1.5(z-2)=159 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+z=50 \\ x=11z+5.5y \\ 3.75x-15+2.25y+1.5z-3=159 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+z=50 \\ x=11z+5.5y \\ 3.75x+2.25y+1.5z=177 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 11z+5.5y+y+z=50 \\ 3.75(11z+5.5y)+2.25y+1.5z=177 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 6.5y+12z=50 \\ 41.25z+20.625y+2.25y+1.5z=177 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y=\frac{50-12z}{6.5} \\ 22.875y+42.75z=177 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 22.875\frac{50-12z}{6.5}+42.75z=177 \Rightarrow 1143,75-274.5z+277.875z=1150.5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3.375z=6.75 \Rightarrow \boxed{z=\frac{6.75}{3.375}=2} \Rightarrow \boxed{y=\frac{50-12\cdot 2}{6.5}=4} \Rightarrow x+4+2=50 \Rightarrow \boxed{x=44}$$

Tenía en la tienda 44 bolígrafos azules, 4 rojos y 2 negros.

Problema 2. A. Se considera la función:

$$f(x)=\begin{cases} x^3+ax^2+24x & si\ x\leq -1 \\ (x-1)^2+3 & si\ x>-1 \end{cases}$$

siendo a un número real.

a) Determina el valor de a para que esta función sea continua. *(0,5 puntos)*

b) Supongamos que $a = 9$. Determina los máximos y mínimos locales que tiene esta función en el intervalo $]-9/2,-3/2[$. *(1,5 puntos)*

c) Supongamos que $a = 0$. Calcula el área de la región delimitada por esta función, la recta de ecuación $x = 2$, la recta de ecuación $x = 3$ y el eje OX. *(1,5 puntos)*

a) Para que la función sea continua debe serlo en $x = -1$.

- Existe $f(-1)=(-1)^3+a(-1)^2+24(-1)=-25+a$.
- Existe $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-} x^3+ax^2+24x=-25+a$.
- Existe $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+} (x-1)^2+3=(-1-1)^2+3=7$
- Los tres valores son iguales → $-25+a=7\Rightarrow \boxed{a=32}$

Para que la función sea continua debe ser $a = 32$.

b) Si $a = 9$ la función queda $f(x)=\begin{cases} x^3+9x^2+24x & si\ x\leq -1 \\ (x-1)^2+3 & si\ x>-1 \end{cases}$.

En el intervalo $]-9/2,-3/2[$ la función es $f(x)=x^3+9x^2+24x$.

Hallamos sus puntos críticos.

$$f(x)=x^3+9x^2+24x\Rightarrow f'(x)=3x^2+18x+24$$

$$f'(x)=0\Rightarrow 3x^2+18x+24=0\Rightarrow x^2+6x+8=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{-6\pm\sqrt{6^2-4(1)(8)}}{2}=\frac{-6\pm 2}{2}=\begin{cases} \dfrac{-6+2}{2}=-2=x \\ \dfrac{-6-2}{2}=-4=x \end{cases}$$

Sustituimos los valores de los puntos críticos: $x = -4$ y $x = -2$ en la segunda derivada.

$$f'(x)=3x^2+18x+24\Rightarrow f''(x)=6x+18\Rightarrow \begin{cases} f''(-4)=6(-4)+18=-6<0 \\ f''(-2)=6(-2)+18=6>0 \end{cases}$$

La función tiene un máximo local en $x = -4$ y un mínimo local en $x = -2$.

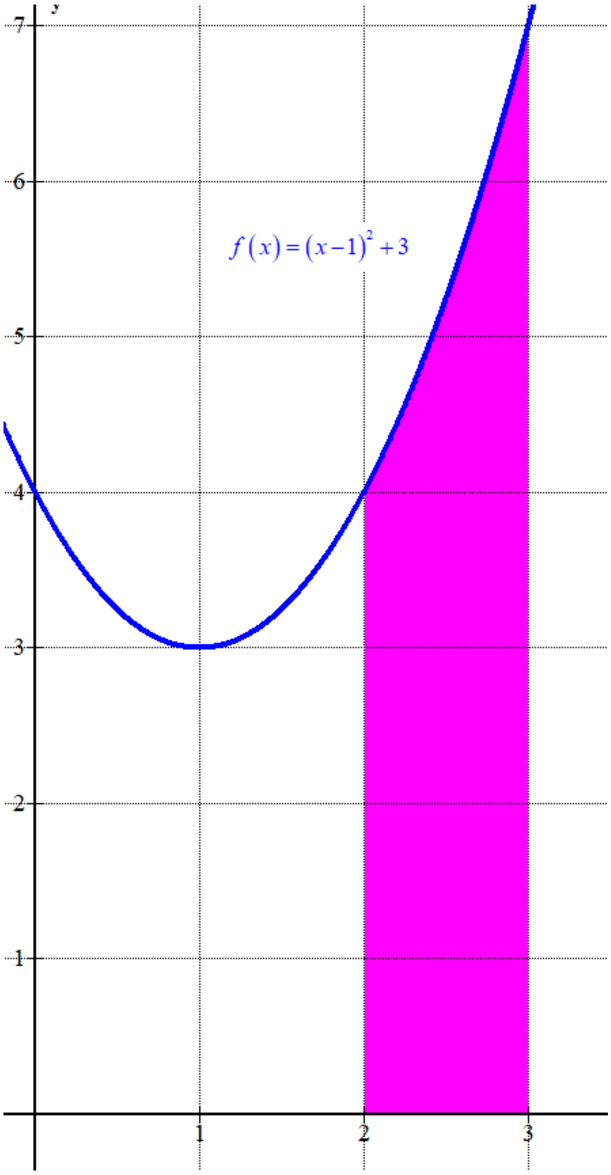
c) Para $a = 0$ la función queda $f(x)=\begin{cases} x^3+24x & si\ x\leq -1 \\ (x-1)^2+3 & si\ x>-1 \end{cases}$.

Entre $x = 2$ y $x = 3$ la función es $f(x) = (x-1)^2 + 3 = x^2 + 1 - 2x + 3 = x^2 - 2x + 4$. En el intervalo (2, 3) la función es positiva.
El área de la región delimitada por esta función, la recta de ecuación $x = 2$, la recta de ecuación $x = 3$ y el eje OX es el valor de la integral definida entre 2 y 3 de la función.

$$\acute{A}rea = \int_2^3 f(x)dx = \int_2^3 x^2 - 2x + 4dx = \left[\frac{x^3}{3} - x^2 + 4x\right]_2^3 =$$

$$= \left[\frac{3^3}{3} - 3^2 + 4 \cdot 3\right] - \left[\frac{2^3}{3} - 2^2 + 4 \cdot 2\right] = 9 - 9 + 12 - \frac{8}{3} + 4 - 8 = \boxed{\frac{16}{3} \simeq 5.33u^2}$$

El área de la región delimitada por esta función, la recta de ecuación $x = 2$, la recta de ecuación $x = 3$ y el eje OX tiene un valor aproximado de 5.33 unidades cuadradas.



Problema 2. B. El rendimiento, en tanto por ciento, de cierto motor de combustión en función del tiempo de uso (medido en años) viene dado por la siguiente expresión:

$$f(x)=\frac{50x}{1+x^2}+50$$

a) Calcula cuándo el motor alcanza su rendimiento máximo y cuál es ese rendimiento máximo. *(1,5 puntos)*

b) ¿En algún momento el rendimiento del motor es inferior al 50 %? *(1 punto)*

c) Si se considera que el motor debe reemplazarse si el rendimiento es inferior al 65 % a partir del primer año, ¿en qué momento debe reemplazarse? *(1 punto)*

a) La función la consideramos definida en el intervalo $[0,+\infty)$, pues el número de años de uso siempre es mayor o igual que cero.

Derivamos la función y buscamos cuando se anula la derivada.

$$f(x)=\frac{50x}{1+x^2}+50 \Rightarrow f'(x)=\frac{50(1+x^2)-2x\cdot 50x}{1+x^2}=\frac{50+50x^2-100x^2}{1+x^2}=\frac{50-50x^2}{1+x^2}$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow \frac{50-50x^2}{1+x^2}=0 \Rightarrow 50-50x^2=0 \Rightarrow 50(1-x^2)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1-x^2=0 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow \boxed{x=\sqrt{1}=\pm 1}$$

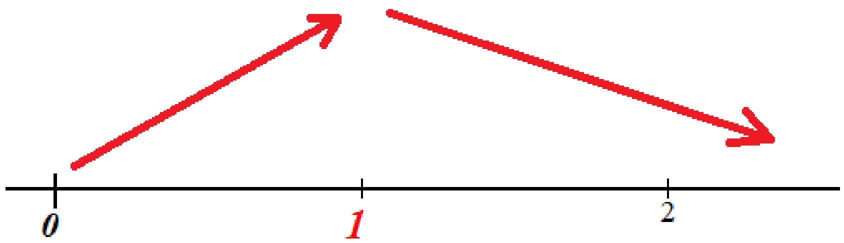
Solo tenemos en cuenta el punto crítico *x* = *1*. Estudiamos el signo de la derivada antes y después de este punto crítico.

- En el intervalo $(0,1)$ tomamos $x=0.5$ y la derivada vale

  $f'(0.5)=\frac{50-50\cdot 0.5^2}{1+0.5^2}=30>0$. La función crece en $(0,1)$.
- En el intervalo $(1,+\infty)$ tomamos $x=2$ y la derivada vale

  $f'(2)=\frac{50-50\cdot 2^2}{1+2^2}=-30<0$. La función decrece en $(1,+\infty)$.

La función sigue el esquema siguiente.



El rendimiento del motor es máximo en *x* = *1*.

Como $f(1)=\frac{50}{1+1^2}+50=75$ podemos decir que el rendimiento máximo del motor es del 75% y se alcanza tras 1 año de uso.

b) Estudiamos si el rendimiento del motor puede ser del 50 %.

$$\frac{50x}{1+x^2}+50=50 \Rightarrow \frac{50x}{1+x^2}=0 \Rightarrow \boxed{x=0}$$

El rendimiento del motor es del 50 % al iniciar su uso, después crece hasta llegar al año de uso al 75 % y a partir de ahí disminuye su rendimiento, pero nunca llega a estar por debajo del 50 %. Lo comprobamos calculando el límite del rendimiento cuando x tiene a $+\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{50x}{1+x^2}+50=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{50x}{x^2}}{\frac{1}{x^2}+\frac{x^2}{x^2}}+50=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{50}{x}}{\frac{1}{x^2}+1}+50=\frac{\frac{50}{\infty}}{\frac{1}{\infty}+1}+50=\frac{0}{0+1}+50=\boxed{50}$$

El rendimiento del motor con el paso del tiempo tiende a ser del 50 %, pero nunca inferior al 50%.

c) Estudiamos cuando el rendimiento del motor es del 65 %.

$$\frac{50x}{1+x^2}+50=65 \Rightarrow \frac{50x}{1+x^2}=15 \Rightarrow 50x=15+15x^2 \Rightarrow 15x^2-50x+15=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x^2-10x+3=0 \Rightarrow x=\frac{10\pm\sqrt{(-10)^2-36}}{6}=\frac{10\pm 8}{6}=\begin{cases}\frac{10+8}{6}=\boxed{3=x}\\ \frac{10-8}{6}=\frac{2}{6}=0.333<1\end{cases}$$

El rendimiento del motor en el primer año de uso es del 75 %, luego disminuye este rendimiento llegando en el tercer año a un rendimiento del 65 %. Este es el momento de cambiarlo, pues el rendimiento sigue disminuyendo y será inferior al 65 % en los años siguientes.

Problema 3. Un instituto tiene estudiantes de ESO y de Bachillerato. El instituto ofrece tres extraescolares: dos deportivas (fútbol y baloncesto) y una no deportiva (música); todos los estudiantes tienen que escoger una extraescolar, pero solo una. El instituto tiene en total 400 estudiantes, y 300 de ellos han escogido fútbol. El instituto tiene 310 estudiantes de ESO; de ellos, 230 han escogido fútbol y 60 han escogido baloncesto. Se sabe también que 8 estudiantes de Bachillerato han escogido música. Seleccionamos al azar un estudiante de este instituto.

a) Calcula la probabilidad de que el estudiante esté en ESO o haya escogido música. *(1 punto)*

b) Si sabemos que el estudiante seleccionado ha escogido una extraescolar deportiva, ¿cuál es la probabilidad de que esté en ESO? *(1 punto)*

c) ¿Son independientes los sucesos "el estudiante está en Bachillerato" y "el estudiante no ha escogido baloncesto"? *(1 punto)*

Realizamos una tabla de contingencia.

	Futbol (F)	Baloncesto (B)	Música (M)	
Alumnos de ESO (A)	230	60		310
Alumnos de Bachillerato (A^C)			8	
	300			400

Completamos la tabla.

	Futbol (F)	Baloncesto (B)	Música (M)	
Alumnos de ESO (A)	230	60	**20**	310
Alumnos de Bachillerato (A^C)	**70**	**12**	8	**90**
	300	**72**	**28**	400

a) Nos piden calcular $P(A \cup M)$. Hay 400 alumnos en el instituto, de los cuales 310 son de ESO y 8 alumnos de Bachillerato han elegido música. Aplicamos la regla de Laplace.

$$P(A \cup M) = \frac{310+8}{400} = \boxed{\frac{159}{200} = 0.795}$$

La probabilidad de que el estudiante esté en ESO o haya escogido música tiene un valor de 0.795.

b) Hay 300 + 72 = 372 alumnos que han elegido extraescolar deportiva. De ellos 230 + 60 = 290 son alumnos de ESO. Aplicamos la regla de Laplace.

$$P(A/(F \cup B)) = \frac{290}{372} = \boxed{\frac{145}{186} \simeq 0.7796}$$

La probabilidad de que un alumno que ha elegido extraescolar deportiva sea alumno de ESO es de $\frac{145}{186} \simeq 0.7796$.

c) Los sucesos A^C y B^C son independientes si se cumple $P(A^C \cap B^C) = P(A^C)P(B^C)$.

$$\left.\begin{array}{l} P(A^C) = \frac{90}{400} = \frac{9}{40} \\ P(B^C) = \frac{300+28}{400} = \frac{41}{50} \end{array}\right\} \Rightarrow P(A^C)P(B^C) = \frac{9}{40}\cdot\frac{41}{50} = \frac{369}{2000}$$

$$\left.\begin{array}{l} P\left(A^C \cap B^C\right) = \dfrac{70+8}{400} = \dfrac{39}{200} = \dfrac{390}{2000} \\ P\left(A^C\right)P\left(B^C\right) = \dfrac{369}{2000} \end{array}\right\} \Rightarrow P\left(A^C \cap B^C\right) = \frac{390}{2000} \neq \frac{369}{2000} = P\left(A^C\right)P\left(B^C\right)$$

No se cumple la igualdad y los sucesos no son independientes.