Universidad Zaragoza 1542

PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD
CONVOCATORIA ORDINARIA EXTRAORDINARIA DE 2025
EJERCICIO DE: **MATEMÁTICAS II**
TIEMPO DISPONIBLE: **1 hora 30 minutos**

PUNTUACIÓN QUE SE OTORGARÁ A ESTE EJERCICIO: (véanse las distintas partes del examen)

El examen consta de cuatro preguntas. Cada pregunta tiene una valoración de 2,5 puntos. La primera pregunta es obligatoria, mientras que en las tres últimas se deberá elegir entre Opción I y Opción II, respondiendo únicamente a una de las dos. En caso de contestar cuestiones de ambas opciones, solo se corregirá la opción que aparezca en primer lugar en el tríptico.

El/la estudiante debe indicar claramente, <u>en la primera página del tríptico</u>, cuáles han sido las opciones elegidas en las preguntas 2, 3 y 4. (Si no se indica, y se han respondido dos opciones de una misma pregunta, sólo se corregirá la opción que se haya respondido en primer lugar).

Justifica los pasos realizados para llegar a la solución obtenida.

1. El trabajo de Gema y Fernando sobre la evolución de la contaminación acústica de su ciudad ha sido seleccionado como el mejor de su instituto. Además del reconocimiento, les han premiado con dos entradas para un partido del Casademont femenino. A ambos les gustaría ir juntos, pero les da vergüenza reconocerlo. Así que deciden sortear quién se las queda. Inicialmente, proponen tirar una moneda tres veces cada uno. Quien obtenga más caras gana las dos entradas. En caso de empate, no gana nadie y se irán juntos al partido. Fernando piensa que, como hay tres situaciones posibles, la probabilidad de que empaten es un tercio.

a) (0,75 puntos) ¿Tiene razón Fernando al pensar que la probabilidad de empate con el sorteo de las monedas sería un tercio? En caso de no tener razón, ¿en cuánto se equivoca?

Así que decide proponer un sorteo más elaborado con idea de aumentar la probabilidad de empate. Cada uno de ellos pensará una función y tirará un dado de seis caras no trucado tres veces. Si el valor de la derivada de su función evaluada en el valor que saque el dado es mayor o igual a cero, consigue un punto. Quien más puntos obtenga con sus tres tiradas, gana. En caso de empate, se van juntos al partido. A Gema le encantan las matemáticas, así que acepta inmediatamente. Ella escribe en su papel su función, $g(x)=e^x$ pensando que Fernando también elegirá una función cuya derivada sea siempre positiva. Para su sorpresa, la función de Fernando es $f(x)=\cos(2x)$. Así que, rápidamente, para obtener la máxima probabilidad de empate, cambia su función por otra cuya derivada toma un valor negativo en sólo uno de los seis valores posibles del dado.

b) (0,5 puntos) Propón una función que cumpla las características que busca Gema una vez conoce la función propuesta por Fernando.

c) (0,75 puntos) ¿Ha conseguido Fernando su propósito de aumentar la probabilidad de empate?

d) (0,5 puntos) Si Fernando hubiera visto la función g(x) que tenía pensada Gema inicialmente, ¿cómo tendría que haber elegido su función para lograr la máxima probabilidad de empate?

2. Elige entre 2.1 y 2.2, respondiendo únicamente uno de los dos.

2.1 Sean A(1, 2, 3), B(1, 0, –1) y C(2, 2, 2) tres puntos en el espacio y $\vec{v_1}$ el vector que va de A a B; $\vec{v_2}$ el vector que va de B a C y $\vec{v_3}$ el vector que va de C a A.

a) (1.25 puntos) Estudia si los vectores $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$ y $\overrightarrow{v_3}$ son linealmente independientes.

b) (1.25 puntos) Calcula el área del triángulo cuyos vértices son A, B, C.

2.2 Halla la ecuación de un plano que es perpendicular a la recta dada por los planos $\begin{cases} 2x+y-z=0 \\ x-y+z=-3 \end{cases}$ y además pasa por el punto (3, 2, 1).

3. Elige entre 3.1 y 3.2, respondiendo únicamente uno de los dos.

3.1 a) (1 punto) Calcula el valor de la siguiente integral:

$$\int \frac{x^2+5x+5}{x^3+4x^2+5x}dx$$

b) (1,5 puntos) Calcula las dimensiones del rectángulo de mayor área inscrito en una circunferencia de radio *r*.

3.2 a) (1 punto) Sea $p(x)=x^3-2x^2+2x$. Calcula, utilizando el cambio de variable $x=1+t$, $\int \frac{dx}{p(x)}$.

b) (1,5 puntos) Dada la función $f(x)=\frac{e^x}{p(x)}$, calcula sus asíntotas, cuando existan, y sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

4. Elige entre 4.1 y 4.2, respondiendo únicamente uno de los dos.

4.1 Sea $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

a) (1,3 puntos) Estudia si existe alguna matriz columna no nula B tal que $A\cdot B=B$. En caso afirmativo, calcula dicha matriz B.

b) (1,2 puntos) Sea C una matriz columna no nula tal que $A\cdot C=-C$. Demuestra que también se cumple $A^{-1}\cdot C=-C$.

4.2 Analizamos en un comercio los precios de tres artículos A, B y C. El producto A es de primera necesidad y tiene un tipo superreducido de IVA del 4 %; el producto B es de alimentación y tiene un tipo reducido de IVA del 10% y el artículo C es un pequeño electrodoméstico cuyo tipo de IVA es del 21 %. El precio total sin IVA de la compra de 1 artículo A de primera necesidad, 2 productos B de alimentación y 5 pequeños electrodomésticos C es de 483 €. Mientras que el total de IVA correspondiente a la compra de 100 artículos de primera necesidad A, 10 productos de alimentación B y 100 pequeños electrodomésticos C, es de 1954 €. Además, se sabe que el precio sin IVA del pequeño electrodoméstico es igual al precio sin IVA de cuatro artículos de primera necesidad más ocho artículos de alimentación. Calcula los precios a la venta de los tres artículos, teniendo en cuenta que el precio a la venta es el precio con IVA incluido.

SOLUCIONES

1. El trabajo de Gema y Fernando sobre la evolución de la contaminación acústica de su ciudad ha sido seleccionado como el mejor de su instituto. Además del reconocimiento, les han premiado con dos entradas para un partido del Casademont femenino. A ambos les gustaría ir juntos, pero les da vergüenza reconocerlo. Así que deciden sortear quién se las queda. Inicialmente, proponen tirar una moneda tres veces cada uno. Quien obtenga más caras gana las dos entradas. En caso de empate, no gana nadie y se irán juntos al partido. Fernando piensa que, como hay tres situaciones posibles, la probabilidad de que empaten es un tercio.

a) (0,75 puntos) ¿Tiene razón Fernando al pensar que la probabilidad de empate con el sorteo de las monedas sería un tercio? En caso de no tener razón, ¿en cuánto se equivoca?

Así que decide proponer un sorteo más elaborado con idea de aumentar la probabilidad de empate. Cada uno de ellos pensará una función y tirará un dado de seis caras no trucado tres veces. Si el valor de la derivada de su función evaluada en el valor que saque el dado es mayor o igual a cero, consigue un punto. Quien más puntos obtenga con sus tres tiradas, gana. En caso de empate, se van juntos al partido. A Gema le encantan las matemáticas, así que acepta inmediatamente. Ella escribe en su papel su función, $g(x)=e^x$ pensando que Fernando también elegirá una función cuya derivada sea siempre positiva. Para su sorpresa, la función de Fernando es $f(x)=\cos(2x)$. Así que, rápidamente, para obtener la máxima probabilidad de empate, cambia su función por otra cuya derivada toma un valor negativo en sólo uno de los seis valores posibles del dado.

b) (0,5 puntos) Propón una función que cumpla las características que busca Gema una vez conoce la función propuesta por Fernando.
c) (0,75 puntos) ¿Ha conseguido Fernando su propósito de aumentar la probabilidad de empate?
d) (0,5 puntos) Si Fernando hubiera visto la función g(x) que tenía pensada Gema inicialmente, ¿cómo tendría que haber elegido su función para lograr la máxima probabilidad de empate?

a) Al tirar una moneda tres veces los resultados posibles son {CCC, CC+, +CC, C+C, C++, +C+, ++C, +++}. Son 8 los resultados posibles.

La probabilidad de sacar 3 caras es $P(3Caras)=\frac{1}{8}$.

La probabilidad de sacar 2 caras es $P(2Caras)=\frac{3}{8}$.

La probabilidad de sacar 1 cara es $P(1Cara)=\frac{3}{8}$.

La probabilidad de sacar 0 caras es $P(0Caras)=\frac{1}{8}$.

Llamamos G = "gana Gemma", F = "gana Fernando" y C = "hay empate" .
Para que gane Gemma debe de sacar 3 caras y Fernando 2, 1 o ninguna, o bien sacar 2 caras y Fernando 1 o ninguna cara o bien sacar 1 cara y Fernando ninguna cara.

$$P(G)=P(3C)P(2C)+P(3C)P(1C)+P(3C)P(0C)+P(2C)P(1C)+$$
$$+P(2C)P(0C)+P(1C)P(0C)=$$

$$=\frac{1}{8}\cdot\frac{3}{8}+\frac{1}{8}\cdot\frac{3}{8}+\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{8}+\frac{3}{8}\cdot\frac{3}{8}+\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{8}+\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{8}=\frac{22}{64}$$

La probabilidad de que gane Fernando es la misma $P(F)=\frac{22}{64}$.

Y la probabilidad de empatar es $P(C)=1-P(G)-P(F)=1-\frac{22}{64}-\frac{22}{64}=\frac{20}{64}$

No es cierto que $P(G)=P(F)=P(C)=\frac{1}{3}$.

Se equivoca muy poco: $\frac{1}{3}-\frac{20}{64}=\frac{1}{48}$.

b) Nos piden encontrar una función cuya derivada toma un valor negativo en sólo uno de los seis valores posibles del dado.

$$h'(x)=x-1.5\Rightarrow h(x)=\int x-1.5dx=\frac{x^2}{2}-1.5x+C$$

Comprobamos que la función $h(x)=\frac{x^2}{2}-1.5x$ cumple lo pedido.

$$h(x)=\frac{x^2}{2}-1.5x\Rightarrow h'(x)=x-1.5\Rightarrow\begin{cases}h'(1)=1-1.5=-0.5<0\\h'(2)=2-1.5=0.5>0\\h'(3)=3-1.5=1.5>0\\h'(4)=4-1.5=2.5>0\\h'(5)=5-1.5>3.5>0\\h'(6)=6-1.5=4.5>0\end{cases}$$

c) Con la función inicial $f(x)=\cos(2x)$ tenemos que $f'(x)=-2sen(2x)$.

$$f'(x)=-2sen(2x)\Rightarrow\begin{cases}f'(1)=-2sen(2)\approx-1.8<0\\f'(2)=-2sen(4)\approx1.5>0\\f'(3)=-2sen(6)\approx0.5>0\\f'(4)=-2sen(8)\approx-1.9<0\\f'(5)=-2sen(10)\approx1.08>0\\f'(6)=-2sen(12)\approx1.07>0\end{cases}$$

La probabilidad de obtener un punto con una tirada del dado es 5/6 con la nueva función y con la función inicial es 4/6.

Con la función inicial $f(x)=\cos(2x)$ la probabilidad de sacar 0 puntos en las tres tiradas es $\frac{2}{6}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{2}{6}=\frac{8}{216}$, de sacar 1 punto es $\frac{4}{6}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{2}{6}+\frac{2}{6}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{2}{6}+\frac{2}{6}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{4}{6}=\frac{48}{216}$, de sacar 2 puntos es $\frac{4}{6}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{2}{6}+\frac{4}{6}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{4}{6}+\frac{2}{6}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{4}{6}=\frac{96}{216}$ y de sacar 3 puntos es $\frac{4}{6}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{4}{6}=\frac{64}{216}$.

Para empatar Gema y Fernando deben obtener la misma puntuación (0, 1, 2 o 3 puntos). La probabilidad de empate con la función inicial $f(x)=\cos(2x)$ es:

$$\frac{8}{216}\cdot\frac{8}{216}+\frac{48}{216}\cdot\frac{48}{216}+\frac{96}{216}\cdot\frac{96}{216}+\frac{64}{216}\cdot\frac{64}{216}=\frac{245}{729}\simeq\boxed{0.336}$$

Con la nueva función $h(x)=\frac{x^2}{2}-1.5x$ la probabilidad de sacar 0 puntos en las tres tiradas es $\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{216}$, de sacar 1 punto es $\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}=\frac{15}{216}$, de sacar 2 puntos es $\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}+\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}=\frac{75}{216}$ y de sacar 3 puntos es $\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}=\frac{125}{216}$.

Para empatar Gema y Fernando deben obtener la misma puntuación (0, 1, 2 o 3 puntos). La probabilidad de empate con la nueva función $h(x)=\frac{x^2}{2}-1.5x$ es:

$$\frac{1}{216}\cdot\frac{1}{216}+\frac{15}{216}\cdot\frac{15}{216}+\frac{75}{216}\cdot\frac{75}{216}+\frac{125}{216}\cdot\frac{125}{216}=\frac{5369}{11664}\simeq\boxed{0.4603}$$

Si se ha conseguido aumentar la probabilidad del empate, aunque no llega a 0.5 y sigue siendo mayor la probabilidad de que gane alguno de los dos.

c) Hubiese elegido una función con la derivada siempre positiva con lo que la probabilidad de obtener un punto sería igual para los dos, por ejemplo, la función $k(x)=x$.

2.1 Sean A(1, 2, 3), B(1, 0, –1) y C(2, 2, 2) tres puntos en el espacio y $\vec{v_1}$ el vector que va de A a B; $\vec{v_2}$ el vector que va de B a C y $\vec{v_3}$ el vector que va de C a A.

a) (1.25 puntos) Estudia si los vectores $\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$ y $\vec{v_3}$ son linealmente independientes.

b) (1.25 puntos) Calcula el área del triángulo cuyos vértices son A, B, C.

a) Hallamos las coordenadas de los vectores.

$$\vec{v_1} = \overrightarrow{AB} = (1,0,-1)-(1,2,3) = (0,-2,-4)$$

$$\vec{v_2} = \overrightarrow{BC} = (2,2,2)-(1,0,-1) = (1,2,3)$$

$$\vec{v_3} = \overrightarrow{CA} = (1,2,3)-(2,2,2) = (-1,0,1)$$

Para que los vectores sean linealmente independientes el producto mixto $\left[\vec{v_1},\vec{v_2},\vec{v_3}\right]$ debe ser no nulo.

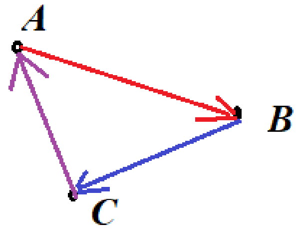
$$\left.\begin{array}{l}\vec{v_1}=(0,-2,-4)\\ \vec{v_2}=(1,2,3)\\ \vec{v_3}=(-1,0,1)\end{array}\right\} \Rightarrow \left[\vec{v_1},\vec{v_2},\vec{v_3}\right] = \begin{vmatrix} 0 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0+6+0-8+2+0=0$$

El producto mixto es nulo y los vectores son linealmente dependientes.

Otra forma de razonarlo es pensar que los tres puntos definen un plano y los tres vectores pertenecen al mismo plano, por lo que los vectores son linealmente dependientes.

Otra forma de razonarlo:

$$\left.\begin{array}{l}\vec{v_1}=\overrightarrow{AB}\\ \vec{v_2}=\overrightarrow{BC}\\ \vec{v_3}=\overrightarrow{CA}\end{array}\right\} \Rightarrow \vec{v_1}+\vec{v_2}+\vec{v_3}=\vec{0}$$



Los vectores son linealmente dependientes.

b) El área del triángulo cuyos vértices son A, B, C es la mitad del módulo del producto vectorial $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}=(0,-2,-4)\\ \overrightarrow{AC}=(2,2,2)-(1,2,3)=(1,0,-1)\end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & -2 & -4 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2i-4j+0+2k-0-0 = 2i-4j+2k = (2,-4,2)$$

$$Área = \frac{\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|}{2} = \frac{\sqrt{2^2+(-4)^2+2^2}}{2} = \frac{\sqrt{24}}{2} = \sqrt{6}\ u^2$$

El área del triángulo cuyos vértices son A, B, C tiene un valor de $\sqrt{6}$ unidades cuadradas.

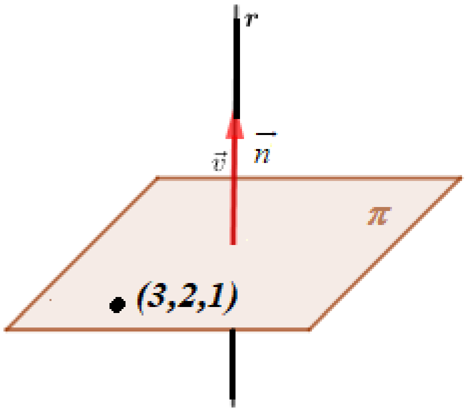
2.2 Halla la ecuación de un plano que es perpendicular a la recta dada por los planos $\begin{cases} 2x+y-z=0 \\ x-y+z=-3 \end{cases}$ y además pasa por el punto (3, 2, 1).

Hallamos un vector director de la recta.

$$\begin{cases} 2x+y-z=0 \\ x-y+z=-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+y-z=0 \\ z=-3+y-x \end{cases} \Rightarrow 2x+y+3-y+x=0 \Rightarrow 3x=-3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{-3}{3}=-1 \Rightarrow z=-3+y+1=-2+y \Rightarrow r:\begin{cases} x=1 \\ y=\lambda \\ z=-2+\lambda \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_r}=(0,1,1)$$

El vector normal del plano es el vector director de la recta $\overrightarrow{v_r}=(0,1,1)$. Hallamos la ecuación del plano.



$$\left.\begin{array}{l} \vec{n}=\overrightarrow{v_r}=(0,1,1) \\ (3,2,1)\in\pi \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \pi: y+z+D=0 \\ (3,2,1)\in\pi \end{array}\right\} \Rightarrow 2+1+D=0 \Rightarrow D=-3 \Rightarrow \pi: y+z-3=0$$

La ecuación del plano perpendicular a la recta y que pasa por el punto (3, 2, 1) es $\pi: y+z-3=0$.

3.1 a) (1 punto) Calcula el valor de la siguiente integral:

$$\int \frac{x^2+5x+5}{x^3+4x^2+5x}dx$$

b) (1,5 puntos) Calcula las dimensiones del rectángulo de mayor área inscrito en una circunferencia de radio r.

a) Usamos el método de descomposición en fracciones simples.

$$x^3+4x^2+5x=0 \Rightarrow x\left(x^2+4x+5\right)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x^2+4x+5=0 \to x=\dfrac{-4\pm\sqrt{4^2-20}}{2}=No\,existe \end{cases}$$

$$\frac{x^2+5x+5}{x^3+4x^2+5x}=\frac{x^2+5x+5}{x\left(x^2+4x+5\right)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+4x+5} \Rightarrow$$

$$x^2+5x+5=A\left(x^2+4x+5\right)+\left(Bx+C\right)x \Rightarrow$$

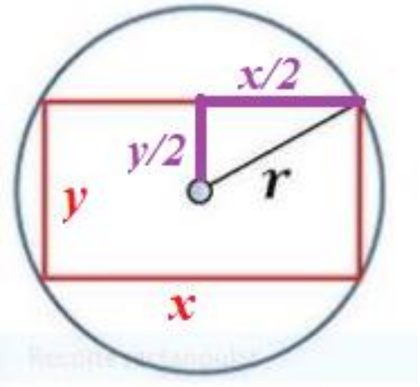
$$\Rightarrow \begin{cases} x=0 \to 5=5A \to \boxed{A=1} \\ \left.\begin{array}{l} x=1 \to 11=10+B+C \to B=1-C \\ x=-1 \to 1=2+B-C \to B-C=-1 \end{array}\right\} \to 1-C-C=-1 \to -2C=-2 \to \\ \to \boxed{C=1} \to \boxed{B=1-1=0} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2+5x+5}{x^3+4x^2+5x}=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2+4x+5}$$

$$\int \frac{x^2+5x+5}{x^3+4x^2+5x}dx=\int \frac{1}{x}+\frac{1}{x^2+4x+5}dx=\int \frac{1}{x}dx+\int \frac{1}{x^2+4x+5}dx=$$

$$=\int \frac{1}{x}dx+\int \frac{1}{\left(x+2\right)^2+1}dx=\ln x+arctg\left(x+2\right)+C$$

b) La situación planteada es la del dibujo.



Consideramos el triángulo rectángulo de hipotenusa r y aplicamos el teorema de Pitágoras:

$$r^2=\left(\frac{x}{2}\right)^2+\left(\frac{y}{2}\right)^2 \Rightarrow r^2=\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4} \Rightarrow 4r^2=x^2+y^2 \Rightarrow y^2=4r^2-x^2 \Rightarrow y=\sqrt{4r^2-x^2}$$

El área del rectángulo es $A(x,y)=xy$, sustituyendo tenemos:

$$\left.\begin{array}{l} A(x,y)=xy \\ y=\sqrt{4r^2-x^2} \end{array}\right\} \Rightarrow A(x)=x\sqrt{4r^2-x^2}=\sqrt{4r^2x^2-x^4}$$

Derivamos la función y buscamos cuando se anula (puntos críticos).

$$A(x)=\sqrt{4r^2x^2-x^4} \Rightarrow A'(x)=\frac{8r^2x-4x^3}{2\sqrt{4r^2x^2-x^4}}$$

$$A'(x)=0 \Rightarrow \frac{8r^2x-4x^3}{2\sqrt{4r^2x^2-x^4}}=0 \Rightarrow 8r^2x-4x^3=0 \Rightarrow 4x\left(2r^2-x^2\right)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \boxed{x=0} \\ 2r^2-x^2=0 \Rightarrow x^2=2r^2 \Rightarrow \boxed{x=\sqrt{2}\cdot r} \end{cases}$$

Solo consideramos el valor $x=\sqrt{2}\cdot r$. Estudiamos el signo de la derivada antes y después para decidir si el punto crítico es máximo o mínimo.

- Antes de $x=\sqrt{2}\cdot r$ tomamos $x=r$ y la derivada vale
  $A'(r)=\frac{8r^2r-4r^3}{2\sqrt{4r^2r^2-r^4}}=\frac{4r^3}{2\sqrt{3r^4}}>0$. El área crece antes de $x=\sqrt{2}\cdot r$.

- Después de $x=\sqrt{2}\cdot r$ tomamos $x=1.5r$ y la derivada vale
  $A'(1.5r)=\frac{8r^2 1.5r-4\cdot\frac{27}{8}r^3}{2\sqrt{4r^2\frac{9}{4}r^2-\frac{81}{16}r^4}}=\frac{-1.5r^3}{2\sqrt{\frac{63}{16}r^4}}<0$. El área decrece antes de $x=\sqrt{2}\cdot r$.

La función área presenta un máximo para $x=\sqrt{2}\cdot r$.

El rectángulo de mayor área inscrito en una circunferencia de radio r tiene base $x=\sqrt{2}\cdot r$ y altura $y=\sqrt{4\cdot 2r^2-4r^2}=\sqrt{2}\cdot r$. Un cuadrado de lado $\sqrt{2}\cdot r$.

3.2 a) (1 punto) Sea $p(x)=x^3-2x^2+2x$. Calcula, utilizando el cambio de variable $x=1+t$,

$$\int \frac{dx}{p(x)}.$$

b) (1,5 puntos) Dada la función $f(x)=\dfrac{e^x}{p(x)}$, calcula sus asíntotas, cuando existan, y sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

a) $$\int \frac{dx}{p(x)}=\int \frac{1}{x^3-2x^2+2x}dx=\int \frac{1}{x\left(x^2-2x+2\right)}dx=\begin{Bmatrix}\text{Cambio de variable}\\ 1+t=x\to dt=dx\end{Bmatrix}=$$

$$=\int \frac{1}{(1+t)\left((1+t)^2-2(1+t)+2\right)}dt=\int \frac{1}{(1+t)\left(1+t^2+\cancel{2t}-\cancel{2}-\cancel{2t}+\cancel{2}\right)}dt=$$

$$=\int \frac{1}{(1+t)\left(1+t^2\right)}dt=\ldots$$

Descomposición en fracciones simples

$$\frac{1}{(1+t)\left(1+t^2\right)}=\frac{A}{1+t}+\frac{Bt+C}{1+t^2}=\frac{A\left(1+t^2\right)+(1+t)(Bt+C)}{(1+t)\left(1+t^2\right)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1=A\left(1+t^2\right)+(1+t)(Bt+C)\Rightarrow\begin{cases}t=-1\to 1=2A\to \boxed{A=\dfrac{1}{2}}\\ t=0\to 1=A+C\to 1=\dfrac{1}{2}+C\to \boxed{C=\dfrac{1}{2}}\\ t=1\to 1=2A+2B+2C\to 1=1+2B+1\Rightarrow\\ \to 2B=-1\to \boxed{B=\dfrac{-1}{2}}\end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(1+t)\left(1+t^2\right)}=\frac{1/2}{1+t}+\frac{-1/2t+1/2}{1+t^2}$$

$$\ldots=\int \frac{1/2}{1+t}+\frac{-1/2t+1/2}{1+t^2}dt=\int \frac{1/2}{1+t}dt+\int \frac{-1/2t+1/2}{1+t^2}dt=$$

$$=\frac{1}{2}\int \frac{1}{1+t}dt+\frac{1}{2}\int \frac{-t+1}{1+t^2}dt=\frac{1}{2}\int \frac{1}{1+t}dt+\frac{1}{2}\left[\int \frac{-t}{1+t^2}dt+\int \frac{1}{1+t^2}dt\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\int \frac{1}{1+t}dt+\frac{1}{2}\left[\frac{-1}{2}\int \frac{2t}{1+t^2}dt+\int \frac{1}{1+t^2}dt\right]=\frac{1}{2}\ln(1+t)-\frac{1}{4}\ln\left(1+t^2\right)+\frac{1}{2}arctg(t)=$$

$$=\begin{Bmatrix}\text{Cambio de variable}\\ 1+t=x\to t=x-1\end{Bmatrix}=\boxed{\frac{1}{2}\ln(x)-\frac{1}{4}\ln\left(1+(x-1)^2\right)+\frac{1}{2}arctg(x-1)+C}$$

b) Obtenemos la expresión de la función: $f(x)=\frac{e^x}{p(x)}=\frac{e^x}{x^3-2x^2+2x}$.

Averiguamos cuando se anula el denominador de la función.

$$x^3-2x^2+2x=0 \Rightarrow x\left(x^2-2x+2\right)=0 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x=0} \\ x^2-2x+2=0 \rightarrow x=\dfrac{2\pm\sqrt{(-2)^2-8}}{2}= \\ =\dfrac{2\pm\sqrt{-4}}{2}=\text{No existe} \end{cases}$$

El dominio de la función es $\mathbb{R}-\{0\}$.

Asíntota vertical. $x=a$

¿ $x=0$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{x^3-2x^2+2x}=\frac{e^0}{0^3-2\cdot 0^2+2\cdot 0}=\frac{1}{0}=\infty$$

$x=0$ es asíntota vertical.

Asíntota horizontal. $y=b$.

Cuando x tiende a $+\infty$.

$$b=\lim_{x\to +\infty} f(x)=\lim_{x\to +\infty}\frac{e^x}{x^3-2x^2+2x}=\frac{e^{+\infty}}{\infty}=\frac{+\infty}{\infty}=\text{Indeterminación (L´Hôpital)}=$$

$$=\lim_{x\to +\infty}\frac{e^x}{3x^2-4x+2}=\frac{+\infty}{\infty}=\text{Indeterminación (L´Hôpital)}=\lim_{x\to +\infty}\frac{e^x}{6x-4}=\frac{+\infty}{\infty}=$$

$$=\text{Indeterminación (L´Hôpital)}=\lim_{x\to +\infty}\frac{e^x}{6}=+\infty$$

No tiene asíntota horizontal cuando x tiende a $+\infty$.

Cuando x tiende a $-\infty$.

$$b=\lim_{x\to -\infty} f(x)=\lim_{x\to -\infty}\frac{e^x}{x^3-2x^2+2x}=\lim_{x\to -\infty}\frac{1}{e^{-x}\left(x^3-2x^2+2x\right)}=$$

$$=\frac{1}{e^{+\infty}(-\infty)}=\frac{1}{-\infty}=0$$

La recta $y=0$ es asíntota horizontal cuando x tiende a $-\infty$.

Para estudiar el crecimiento o decrecimiento de la función buscamos los puntos críticos.

$$f(x)=\frac{e^x}{x^3-2x^2+2x}\Rightarrow f'(x)=\frac{e^x\cdot\left(x^3-2x^2+2x\right)-\left(3x^2-4x+2\right)e^x}{\left(x^3-2x^2+2x\right)^2}$$

$$f'(x)=\frac{e^x\cdot\left(x^3-2x^2+2x-3x^2+4x-2\right)}{\left(x^3-2x^2+2x\right)^2}=\frac{e^x\cdot\left(x^3-5x^2+6x-2\right)}{\left(x^3-2x^2+2x\right)^2}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow\frac{e^x\cdot\left(x^3-5x^2+6x-2\right)}{\left(x^3-2x^2+2x\right)^2}=0\Rightarrow e^x\cdot\left(x^3-5x^2+6x-2\right)=0\Rightarrow x^3-5x^2+6x-2=0$$

Utilizamos el método de Ruffini para obtener las raíces de la ecuación de grado 3.

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -5 & 6 & -2 \\ 1 & & 1 & -4 & 2 \\ \hline & 1 & -4 & 2 & \lfloor 0 \end{array}\Rightarrow x^3-5x^2+6x-2=(x-1)\left(x^2-4x+2\right)$$

$$(x-1)\left(x^2-4x+2\right)=0\Rightarrow\begin{cases}\boxed{x=1}\\ x^2-4x+2=0\Rightarrow x=\dfrac{4\pm\sqrt{(-4)^2-8}}{2}=\dfrac{4\pm\sqrt{8}}{2}=\begin{cases}\boxed{2+\sqrt{2}=x}\\ \boxed{2-\sqrt{2}=x}\end{cases}\end{cases}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos tres puntos críticos y el valor excluido del dominio $x=0$.

- En el intervalo $(-\infty,0)$ consideramos $x=-1$ y la derivada vale $$f'(-1)=\frac{e^{-1}\cdot\left((-1)^3-5(-1)^2+6(-1)-2\right)}{\left((-1)^3-2(-1)^2+2(-1)\right)^2}=\frac{e^{-1}(-14)}{25}=\frac{14}{25e}<0$$. La función decrece en $(-\infty,0)$.

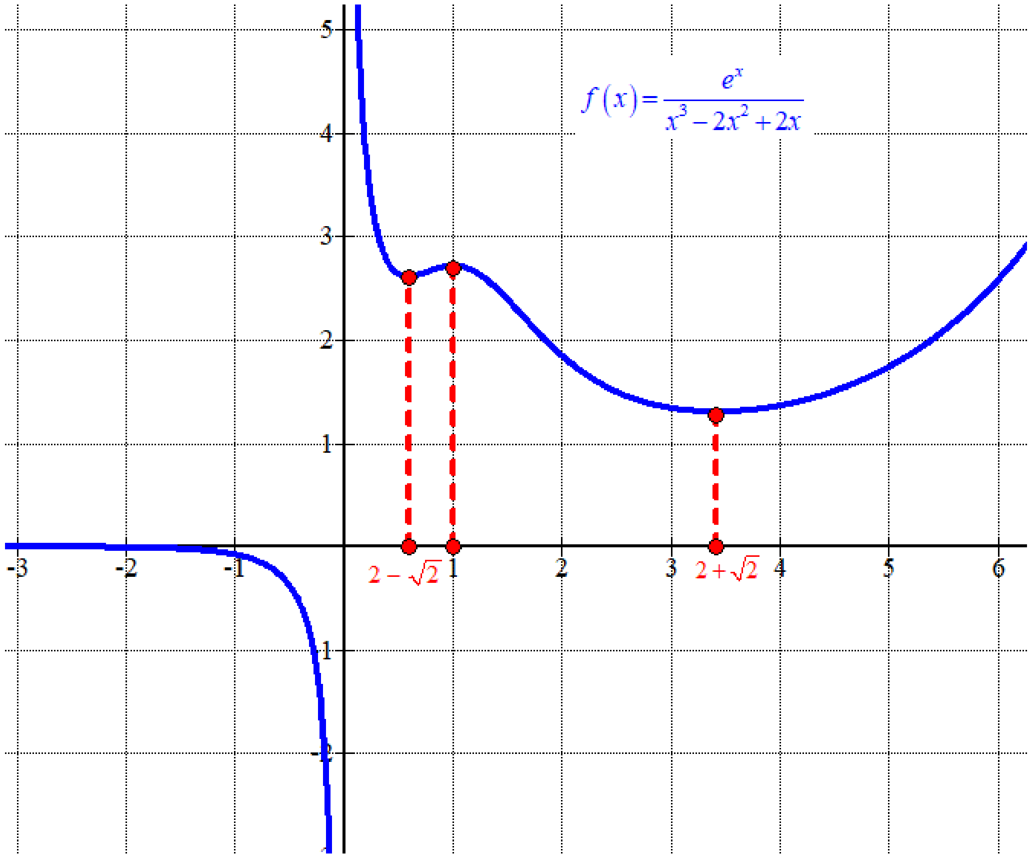
- En el intervalo $\left(0,\,2-\sqrt{2}\right)$ consideramos $x=0.1$ y la derivada vale $$f'(0.1)=\frac{e^{0.1}\cdot\left((0.1)^3-5(0.1)^2+6(0.1)-2\right)}{\left((0.1)^3-2(0.1)^2+2(0.1)\right)^2}=\frac{e^{0.1}(-1.449)}{+}<0$$. La función decrece en $\left(0,\,2-\sqrt{2}\right)$.

- En el intervalo $\left(2-\sqrt{2},1\right)$ consideramos $x=0.8$ y la derivada vale $f'(0.8)=\dfrac{e^{0.8}\cdot\left(0.8^3-5(0.8)^2+6(0.8)-2\right)}{\left(0.8^3-2(0.8)^2+2(0.8)\right)^2}=\dfrac{0.112e^{0.8}}{+}>0$. La función crece en $\left(2-\sqrt{2},1\right)$.

- En el intervalo $\left(1,\,2+\sqrt{2}\right)$ consideramos $x=2$ y la derivada vale $f'(2)=\dfrac{e^{2}\cdot\left(2^3-5(2)^2+6(2)-2\right)}{\left(2^3-2(2)^2+2(2)\right)^2}=\dfrac{-2e^{2}}{+}<0$. La función decrece en $\left(1,\,2+\sqrt{2}\right)$.

- En el intervalo $\left(2+\sqrt{2},\,+\infty\right)$ consideramos $x=4$ y la derivada vale $f'(4)=\dfrac{e^{4}\cdot\left(4^3-5(4)^2+6(4)-2\right)}{\left(4^3-2(4)^2+2(4)\right)^2}=\dfrac{6e^{4}}{+}>0$. La función crece en $\left(2+\sqrt{2},\,+\infty\right)$.

La función decrece en $(-\infty,0)\cup\left(0,\,2-\sqrt{2}\right)\cup\left(1,\,2+\sqrt{2}\right)$ y crece en $\left(2-\sqrt{2},\,1\right)\cup\left(2+\sqrt{2},\,+\infty\right)$.



4.1 Sea $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$.

a) (1,3 puntos) Estudia si existe alguna matriz columna no nula B tal que $A\cdot B=B$. En caso afirmativo, calcula dicha matriz B.

b) (1,2 puntos) Sea C una matriz columna no nula tal que $A\cdot C=-C$. Demuestra que también se cumple $A^{-1}\cdot C=-C$.

a) Para que sea posible el producto $A\cdot B=B$ la matriz B debe ser una matriz columna con 3 filas: $B=\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix}$.

$$A\cdot B=B\Rightarrow\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}a+b\\ b\\ -c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}a+b=a\rightarrow\boxed{b=0}\\ b=b\\ -c=c\rightarrow\boxed{c=0}\end{cases}$$

Existen muchas matrices columna B que cumplen $A\cdot B=B$. Tienen la expresión $B=\begin{pmatrix}a\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$, para cualquier valor $a\in\mathbb{R}$.

b) La matriz A tiene inversa pues su determinante vale –1 que es un valor distinto de cero.

$$A\cdot C=-C\Rightarrow A^{-1}\cdot A\cdot C=-A^{-1}\cdot C\Rightarrow C=-A^{-1}\cdot C\Rightarrow\boxed{A^{-1}\cdot C=-C}$$

4.2 Analizamos en un comercio los precios de tres artículos A, B y C. El producto A, es de primera necesidad y tiene un tipo superreducido de IVA del 4 %; el producto B es de alimentación y tiene un tipo reducido de IVA del 10% y el artículo C es un pequeño electrodoméstico cuyo tipo de IVA es del 21 %. El precio total sin IVA de la compra de 1 artículo A de primera necesidad, 2 productos B de alimentación y 5 pequeños electrodomésticos C es de 483 €. Mientras que el total de IVA correspondiente a la compra de 100 artículos de primera necesidad A, 10 productos de alimentación B y 100 pequeños electrodomésticos C, es de 1954 €. Además, se sabe que el precio sin IVA del pequeño electrodoméstico es igual al precio sin IVA de cuatro artículos de primera necesidad más ocho artículos de alimentación. Calcula los precios a la venta de los tres artículos, teniendo en cuenta que el precio a la venta es el precio con IVA incluido.

Llamamos "x" al precio sin IVA de un artículo A, "y" al precio sin IVA de un artículo B y "z" al precio sin IVA de un artículo C.

El precio total sin IVA de la compra de 1 artículo A de primera necesidad, 2 productos B de alimentación y 5 pequeños electrodomésticos C es de 483 € → $x+2y+5z=483$

El total de IVA correspondiente a la compra de 100 artículos de primera necesidad A (4 %), 10 productos de alimentación B (10 %) y 100 pequeños electrodomésticos C (21 %), es de 1954 € → $100x\cdot 0.04+10y\cdot 0.10+100z\cdot 0.21=1954$.

El precio sin IVA del pequeño electrodoméstico (C) es igual al precio sin IVA de cuatro artículos de primera necesidad (A) más ocho artículos de alimentación (B) → $z=4x+8y$

Reunimos las ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left.\begin{array}{l} x+2y+5z=483 \\ 100x\cdot 0.04+10y\cdot 0.10+100z\cdot 0.21=1954 \\ z=4x+8y \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+2y+5z=483 \\ 4x+y+21z=1954 \\ z=4x+8y \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+2y+5(4x+8y)=483 \\ 4x+y+21(4x+8y)=1954 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+2y+20x+40y=483 \\ 4x+y+84x+168y=1954 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 21x+42y=483 \\ 88x+169y=1954 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+2y=23 \\ 88x+169y=1954 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=23-2y \\ 88x+169y=1954 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 88(23-2y)+169y=1954 \Rightarrow 2024-176y+169y=1954 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -7y=-70 \Rightarrow \boxed{y=\frac{70}{7}=10} \Rightarrow \boxed{x=23-20=3} \Rightarrow \boxed{z=12+80=92}$$

El precio con IVA de un producto A es 3 · 1.04 = 3.12 €, un producto B vale 10 · 1.10 = 11 € y un producto C vale 92 · 1.21 = 111.32 €.