



Universidad de
Oviedo

Prueba de acceso a la Universidad (PAU)
Curso 2024-2025

MATEMÁTICAS II

➤ Responda en el pliego en blanco a **cuatro** de las cinco preguntas que se proponen. De cada una de las seleccionadas conteste una única opción A o B. Todas las preguntas se calificarán con un máximo de **2.5 puntos**.

➤ Agrupaciones de preguntas que sumen más de 10 puntos o que no coincidan con las indicadas conllevarán la **anulación** de la(s) última(s) pregunta(s) seleccionada(s) y/o respondida(s)

Pregunta 1. Opción A. Has llegado a la Universidad y decides hacer una fiesta con tus compañeros de clase para conoceros. Para ello debes conseguir dinero. Tres estudiantes del grupo decidís fabricar pulseras, collares y marcapáginas para venderlos e intentar conseguir lo que necesitáis. Para fabricarlas, Luis compra el material necesario para hacer 20 pulseras y 20 collares a juego, Ana el de 30 pulseras, 20 collares y 10 marcapáginas. Para decidir a qué precio se debe vender cada producto miras los tickets de compra, pero sólo pone el precio final, 60 € el ticket de Luis y 90 € el de Ana.

(a) **(1 punto)** Plantea un sistema de ecuaciones lineal que modelice el problema y escríbelo matricialmente especificando quién es la matriz de coeficientes y la matriz ampliada.

(b) **(1 punto)** Con los datos dados, ¿pueden saber cuánto cuesta el material para producir cada artículo? Luis dice ‘creo que ha costado 10 € el material para cada marcapáginas’ y Ana le dice ‘eso no puede ser’ ¿Quién tiene razón?

(c) **(0.5 puntos)** Se venden los collares a 5 € y las pulseras a 4 €. ¿Cuál debe ser el precio de los marcapáginas para que se obtengan exactamente 420 € tras la venta completa?

Pregunta 1. Opción A. Sea $x \in \mathbb{R}$ y las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & x \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(a) **(1.25 puntos)** Calcula en caso de que sea posible AB y BA especificando el tamaño y el rango de la matriz resultante.

(b) **(1.25 puntos)** Calcula el determinante de A y los valores de x para los cuales existe su inversa. Calcula cuando sea posible $\det(A^{-1})$.

Pregunta 2. Opción A. Se considera la función $f(x) = \frac{x^2 + 1}{1 - x^2}$.

(a) **(1 punto)** Calcula el dominio de la función f y sus asíntotas.

(b) **(1 punto)** Halla en caso de que existan, los máximos y mínimos y puntos de inflexión. Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

(c) **(0.5 puntos)** Utilizando los apartados anteriores, realiza un esbozo de la gráfica de f .

Pregunta 2. Opción B. (2.5 puntos) Se dispone de una placa circular de 4 metros de radio, de la que se pretende obtener una pieza rectangular de área máxima. Sabiendo que el centro del rectángulo estará en el centro de la placa, calcule la longitud de los lados del rectángulo y el

área del mismo. (Ayuda: la ecuación de la circunferencia de centro en el punto (a, b) radio r es $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$).

Pregunta 3. Opción A. Dada la función $f(x) = \cos^4(x) \operatorname{sen}(x)$.

- (a) **(1.25 puntos)** Calcula una primitiva de f que pase por el punto $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$.
- (b) **(1.25 puntos)** Calcula el área limitada por f , el eje X y las rectas $x = 0$ y $x = \pi$.

Pregunta 3. Opción B. Dos drones están realizando un vuelo de forma que las alturas de cada uno de ellos viene dado por las funciones $h_1(t) = 36/t$ y $h_2(t) = t^3 + 5t$ de tiempo, con $t \in [1, 4]$.

- (a) **(0.5 puntos)** Calcula los instantes en los que los dos drones se encuentran a la misma altura.
- (b) **(1 punto)** Calcula los puntos de máxima altura de los dos.
- (c) **(1 punto)** Calcula el área acotada encerrada entre ambas curvas.
-

Pregunta 4. Opción A. Se consideran los puntos $A = (2, 1, 3)$ y $B = (0, -1, 1)$,

- (a) **(1.25 puntos)** Encuentra la ecuación del plano π que cumple que los dos puntos son simétricos respecto a él.
- (b) **(1.25 puntos)** Dado el plano $\pi' \equiv x + y + z = 3$, razona valores de y y de z para que $C = (2, y, z) \in \pi'$ y la distancia de C a A sea de 3 unidades.

Pregunta 4. Opción B. Se consideran los puntos $P = (1, 1, 1)$, $Q = (1, 0, 1)$ y el vector $\vec{v} = (1, -1, 1)$

- (a) **(0.75 puntos)** Calcula la ecuación continua de la recta r que pasa por P y en la dirección de $\vec{v}$.
- (b) **(0.75 puntos)** Calcula las ecuaciones de la recta s que corta a r perpendicularmente y que pasa por Q .
- (c) **(1 punto)** Calcula la ecuación del plano que contiene a las rectas r y s .
-

Pregunta 5. Opción A. Estás jugando a un juego online consistente en lanzar bolas a una diana. El juego te asigna un personaje al azar de 10 posibles, 4 de ellos son azules y los 6 restantes rojos. La probabilidad de que un personaje azul dé en la diana es 0.95, mientras que si el personaje es rojo es de 0.65.

- (a) **(1.25 puntos)** ¿Cuál es la probabilidad de que aciertes?
- (b) **(1.25 puntos)** Haces un lanzamiento y aciertas en la diana, ¿qué es más probable que tengas un personaje azul o rojo?

Pregunta 5. Opción B. En una comunidad autónoma se pretende medir el nivel de conocimientos en matemáticas de estudiantes de cuarto de ESO. Para ello se realiza un examen tipo test con 100 preguntas y en cada una de ellas debe decidirse si la afirmación es verdadera o falsa. Un estudiante decide responder al azar a todas las preguntas.

- (a) **(0.75 puntos)** Comprueba que el número de respuestas acertadas puede ser aproximada por una distribución normal y decide los parámetros que la describen.
-

(b) **(0.75 puntos)** Utilizando la aproximación anterior, calcula la probabilidad de que un estudiante que haya respondido al azar obtenga más de un 6, es decir, que tenga al menos 60 aciertos.

(c) **(1 punto)** Supongamos que se reduce el número de preguntas del examen a 10. Calcula la probabilidad de que un estudiante que responde al azar acierte 5 preguntas.

* Algunos valores de la función de distribución $N(0, 1)$ son: $F(x) = P(Z \leq x)$, $F(0) = 0.5$, $F(0.5) = 0.6915$, $F(0.6915) = 0.7549$, $F(2) = 0.9772$, $F(1.9) = 0.9713$, $F(0.34) = 0.6331$, $F(0.35) = 0.6455$, $F(0.9772) = 0.8340$.

En caso de que tu valor no coincida con los mostrados, toma el más cercano.

SOLUCIONES

Pregunta 1. Opción A. Has llegado a la Universidad y decides hacer una fiesta con tus compañeros de clase para conoceros. Para ello debes conseguir dinero. Tres estudiantes del grupo decidís fabricar pulseras, collares y marcapáginas para venderlos e intentar conseguir lo que necesitáis. Para fabricarlas, Luis compra el material necesario para hacer 20 pulseras y 20 collares a juego, Ana el de 30 pulseras, 20 collares y 10 marcapáginas. Para decidir a qué precio se debe vender cada producto miras los tickets de compra, pero sólo pone el precio final, 60 € el ticket de Luis y 90 € el de Ana.

- (a) **(1 punto)** Plantea un sistema de ecuaciones lineal que modelice el problema y escríbelo matricialmente especificando quién es la matriz de coeficientes y la matriz ampliada.
- (b) **(1 punto)** Con los datos dados, ¿pueden saber cuánto cuesta el material para producir cada artículo? Luis dice ‘creo que ha costado 10 € el material para cada marcapáginas’ y Ana le dice ‘eso no puede ser’ ¿Quién tiene razón?
- (c) **(0.5 puntos)** Se venden los collares a 5 € y las pulseras a 4 €. ¿Cuál debe ser el precio de los marcapáginas para que se obtengan exactamente 420 € tras la venta completa?

- (a) Llamamos “x” al precio del material necesario para hacer 1 pulsera, “y” al material necesario para hacer 1 collar y “z” al material necesario para hacer 1 marcapáginas.

“Luis compra el material necesario para hacer 20 pulseras y 20 collares a juego y paga 60 €”
 $\rightarrow 20x + 20y = 60$.

“Ana compra el material necesario para hacer 30 pulseras, 20 collares y 10 marcapáginas pagando 90 €” $\rightarrow 30x + 20y + 10z = 90$.

Reunimos las ecuaciones en un sistema:
$$\left. \begin{array}{l} 20x + 20y = 60 \\ 30x + 20y + 10z = 90 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y = 3 \\ 3x + 2y + z = 9 \end{array} \right\}$$

Lo expresamos de forma matricial:
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

La matriz de coeficientes es $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es $A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 9 \end{pmatrix}$.

- (b) Nos falta un poco más de información para determinar el precio de cada material. Tenemos 3 incógnitas y sólo 2 ecuaciones.
 Resolvemos el sistema y obtenemos la expresión de las soluciones con la información de que disponemos.

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 3 \\ 3x + 2y + z = 9 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y = 3 - x \\ 3x + 2(3 - x) + z = 9 \end{array} \right\} \Rightarrow 3x + 2(3 - x) + z = 9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x + 6 - 2x + z = 9 \Rightarrow x + z = 3 \Rightarrow z = 3 - x \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 3 - t \\ z = 3 - t \end{cases}$$

Luis dice ‘creo que ha costado 10 € el material para cada marcapáginas’. Con esta hipótesis tendríamos que
$$\begin{cases} x = t \\ y = 3 - t \\ 10 = 3 - t \rightarrow t = -7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -7 \\ y = 3 + 7 = 10 \end{cases}.$$
 No es posible pues tendríamos un precio negativo para el material de una pulsera.

Ana le dice ‘eso no puede ser’.

Ana tiene razón.

- (c) Sabemos que han confeccionado $20 + 30 = 50$ pulseras, $20 + 20 = 40$ collares y 10 marcapáginas. Si venden las pulseras a 4 € obtienen $50 \cdot 4 = 200$ € por ellas. Si venden los collares a 5 € obtienen $40 \cdot 5 = 200$ € por ellos. Si han obtenido 420 € por la venta de todo lo que han hecho deben obtener por los marcapáginas $420 - 200 - 200 = 20$ €. Como venden 10 marcapáginas deben haberlos vendido a 2 € cada uno.

Pregunta 1. Opción B. Sea $x \in \mathbb{R}$ y las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & x \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

- (a) **(1.25 puntos)** Calcula en caso de que sea posible AB y BA especificando el tamaño y el rango de la matriz resultante.
- (b) **(1.25 puntos)** Calcula el determinante de A y los valores de x para los cuales existe su inversa. Calcula cuando sea posible $\det(A^{-1})$.

(a) Intentamos calcular AB .

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$3 \times \boxed{3} \cdot \boxed{2} \times 3$$

No es posible pues el número de columnas de la matriz A (3) no coincide con el número de filas de la matriz B (2).

Intentamos calcular BA .

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-1+4 & 2 & 3+3+2x \\ -1+1+4 & -2 & -3-3+2x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 6+2x \\ 4 & -2 & -6+2x \end{pmatrix}$$

$$2 \times \boxed{3} \cdot \boxed{3} \times 3 \longrightarrow 2 \times 3$$

BA si es posible pues el número de columnas de la matriz B (3) coincide con el número de filas de la matriz A (3). Se obtiene una matriz de 2 filas y 3 columnas.

Determinamos el rango de la matriz $BA = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 6+2x \\ 4 & -2 & -6+2x \end{pmatrix}$.

Si consideramos el menor de orden 2 que resulta de quitar la columna tercera $\rightarrow$

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -8 - 8 = -16 \neq 0.$$

El rango de BA es 2.

(b) Calculamos el determinante de A .

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & x \end{vmatrix} = 0 + 12 + 0 - 0 + 2x - 0 = 12 + 2x$$

Averiguamos cuando se anula el determinante de A .

$$|A| = 0 \Rightarrow 12 + 2x = 0 \Rightarrow 2x = -12 \Rightarrow \boxed{x = -6}$$

Para $x = -6$ el determinante de A se anula y no existe la inversa de A . Existe la inversa de A para cualquier valor de x distinto de -6 .

Por las propiedades de los determinantes sabemos que $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$.

Para $x \neq -6$ tenemos que $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)} = \frac{1}{12 + 2x}$.

Pregunta 2. Opción A. Se considera la función $f(x) = \frac{x^2+1}{1-x^2}$.

- (a) **(1 punto)** Calcula el dominio de la función f y sus asíntotas.
 (b) **(1 punto)** Halla en caso de que existan, los máximos y mínimos y puntos de inflexión. Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento.
 (c) **(0.5 puntos)** Utilizando los apartados anteriores, realiza un esbozo de la gráfica de f .

- (a) El dominio de la función son todos los números reales menos los que anulan el denominador.

$$1-x^2=0 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\sqrt{1}=\pm 1$$

El dominio de la función es $\mathbb{R} - \{-1, +1\}$.

Asíntotas verticales. $x=a$

¿ $x=-1$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2+1}{1-x^2} = \frac{(-1)^2+1}{1-(-1)^2} = \frac{2}{0} = \infty$$

$x=-1$ es asíntota vertical.

¿ $x=1$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+1}{1-x^2} = \frac{1^2+1}{1-1^2} = \frac{2}{0} = \infty$$

$x=1$ es asíntota vertical.

Asíntota horizontal. $y=b$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+1}{1-x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2}{x^2} + \frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2} - \frac{x^2}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2} - 1} = \frac{1 + \frac{1}{\infty}}{\frac{1}{\infty} - 1} = \frac{1+0}{0-1} = -1$$

La recta $y=-1$ es asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. $y=mx+n$

Al existir asíntota horizontal no existe asíntota oblicua.

- (b) Hallamos los puntos críticos donde se anula la derivada de la función.

$$f(x) = \frac{x^2+1}{1-x^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{2x(1-x^2) - (-2x)(x^2+1)}{(1-x^2)^2} = \frac{2x-2x^3+2x^3+2x}{(1-x^2)^2} = \frac{4x}{(1-x^2)^2}$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow \frac{4x}{(1-x^2)^2} = 0 \Rightarrow 4x=0 \Rightarrow \boxed{x=0}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de $x=-1$, $x=0$ y $x=1$.

- En el intervalo $(-\infty, -1)$ tomamos $x = -2$ y la derivada vale

$$f'(-2) = \frac{4(-2)}{(1-(-2)^2)^2} = \frac{-8}{9} < 0. \text{ La función decrece en } (-\infty, -1).$$

- En el intervalo $(-1, 0)$ tomamos $x = -0.5$ y la derivada vale

$$f'(-0.5) = \frac{4(-0.5)}{(1-(-0.5)^2)^2} = \frac{-2}{+} < 0. \text{ La función decrece en } (-1, 0).$$

- En el intervalo $(0, 1)$ tomamos $x = 0.5$ y la derivada vale

$$f'(0.5) = \frac{4(0.5)}{(1-(0.5)^2)^2} = \frac{2}{+} > 0. \text{ La función crece en } (0, 1).$$

- En el intervalo $(1, +\infty)$ tomamos $x = 2$ y la derivada vale $f'(2) = \frac{4(2)}{(1-2^2)^2} = \frac{8}{9} > 0.$

La función crece en $(1, +\infty)$.

La función decrece en $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$ y crece en $(0, 1) \cup (1, +\infty)$.

La función tiene un mínimo relativo en $x = 0$.

Buscamos los posibles puntos de inflexión averiguando donde se anula la derivada segunda.

$$f'(x) = \frac{4x}{(1-x^2)^2} \Rightarrow f''(x) = \frac{4(1-x^2)^2 - 2(-2x)(1-x^2)4x}{(1-x^2)^{4 \rightarrow 3}} = \frac{4(1-x^2) - 2(-2x)4x}{(1-x^2)^3} =$$

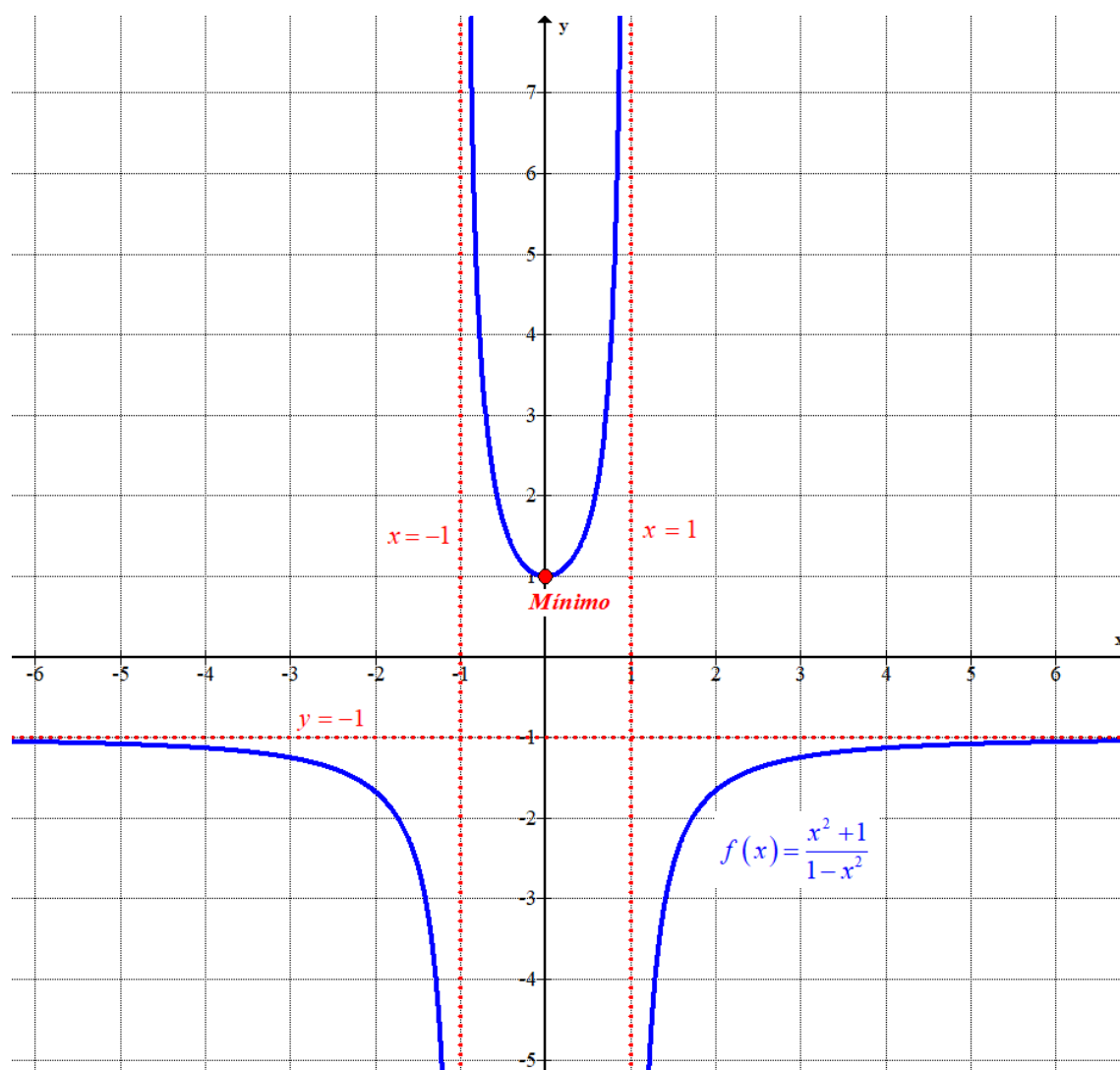
$$= \frac{4 - 4x^2 + 16x^2}{(1-x^2)^3} = \frac{4 + 12x^2}{(1-x^2)^3}$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow \frac{4 + 12x^2}{(1-x^2)^3} = 0 \Rightarrow 4 + 12x^2 = 0 \Rightarrow 12x^2 = -4 \Rightarrow x^2 = \frac{-4}{12} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{-1}{3}} \text{ Imposible}$$

La función no presenta puntos de inflexión. Cambia de concavidad a convexidad o viceversa en los puntos de discontinuidad.

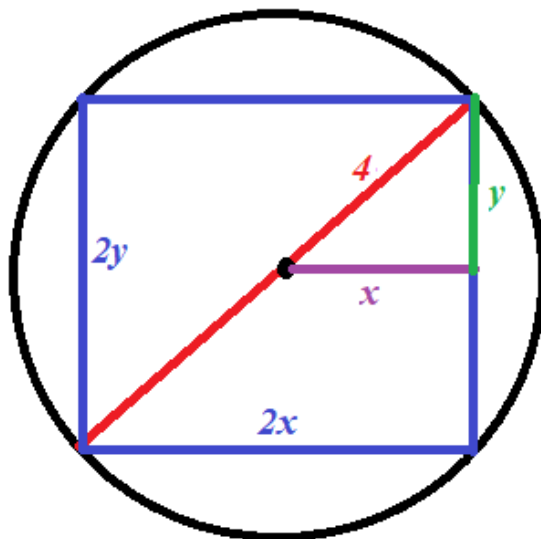
(c) Realizamos una tabla de valores y dibujamos la gráfica de la función.

x	$f(x) = \frac{x^2 + 1}{1 - x^2}$
-3	-1.25
-2	-5/3
-0.5	5/3
0	1
0.5	5/3
2	-5/3
3	-1.25



Pregunta 2. Opción B. (2.5 puntos) Se dispone de una placa circular de 4 metros de radio, de la que se pretende obtener una pieza rectangular de área máxima. Sabiendo que el centro del rectángulo estará en el centro de la placa, calcule la longitud de los lados del rectángulo y el área del mismo. (Ayuda: la ecuación de la circunferencia de centro en el punto (a, b) radio r es $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$).

La situación planteada es la del dibujo.



Consideramos el triángulo rectángulo de catetos “x” e “y”. Aplicamos el teorema de Pitágoras.

$$x^2 + y^2 = 4^2 \Rightarrow y^2 = 16 - x^2 \Rightarrow y = \sqrt{16 - x^2}$$

El área del rectángulo es el producto de su base ($2x$) por su altura ($2y$).

$$\left. \begin{array}{l} A(x, y) = 2x \cdot 2y \\ y = \sqrt{16 - x^2} \end{array} \right\} \Rightarrow A(x) = 4x\sqrt{16 - x^2} = \sqrt{256x^2 - 16x^4}$$

La función área del rectángulo es $A(x) = \sqrt{256x^2 - 16x^4}$; $0 \leq x \leq 4$.

Buscamos los puntos críticos de la función Área.

$$A(x) = \sqrt{256x^2 - 16x^4} \Rightarrow A'(x) = \frac{512x - 64x^3}{2\sqrt{256x^2 - 16x^4}}$$

$$A'(x) = 0 \Rightarrow \frac{512x - 64x^3}{2\sqrt{256x^2 - 16x^4}} = 0 \Rightarrow 512x - 64x^3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 64x(8 - x^2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 8 - x^2 = 0 \rightarrow x^2 = 8 \rightarrow x = \pm\sqrt{8} \end{cases}$$

El único de los puntos críticos que interesa estudiar es $x = \sqrt{8} \approx 2.828$ metros.

Estudiamos el signo de la derivada antes y después de este valor para decidir si es un máximo o un mínimo.

- Antes de $x = \sqrt{8} \approx 2.828$ tomamos $x=1$ y la derivada vale

$$A'(1) = \frac{512-64}{2\sqrt{256-16}} = \frac{448}{2\sqrt{240}} > 0. \text{ La función área crece antes de } x = \sqrt{8}.$$

- Después de $x = \sqrt{8} \approx 2.828$ tomamos $x=3$ y la derivada vale

$$A'(3) = \frac{512 \cdot 3 - 64 \cdot 27}{2\sqrt{256 \cdot 9 - 16 \cdot 81}} = \frac{-8\sqrt{7}}{7} < 0. \text{ La función área decrece después de } x = \sqrt{8}.$$

Como crece antes y decrece después la función tiene un máximo en $x = \sqrt{8}$.

La base del rectángulo es $2\sqrt{8} = \sqrt{32}$ metros.

Como $y = \sqrt{16 - (\sqrt{8})^2} = \sqrt{8}$ la altura del rectángulo es $2\sqrt{8} = \sqrt{32}$ metros.

La pieza rectangular de área máxima con centro en la circunferencia de radio 4 metros debe tener de base y altura $\sqrt{32} \approx 5.657$ metros. Es un cuadrado de lado $\sqrt{32} \approx 5.657$ metros. La superficie de este cuadrado es de 32 metros cuadrados.

Pregunta 3. Opción A. Dada la función $f(x) = \cos^4(x) \operatorname{sen}(x)$.

(a) **(1.25 puntos)** Calcula una primitiva de f que pase por el punto $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$.

(b) **(1.25 puntos)** Calcula el área limitada por f , el eje X y las rectas $x=0$ y $x=\pi$.

(a) Calculamos la integral indefinida de $f(x) = \cos^4(x) \operatorname{sen}(x)$ usando un cambio de variable.

$$F(x) = \int f(x) dx = \int \cos^4(x) \operatorname{sen}(x) dx = \left\{ \begin{array}{l} \cos(x) = t \rightarrow -\operatorname{sen}(x) dx = dt \\ \operatorname{sen}(x) dx = -dt \end{array} \right\} =$$

$$= \int t^4 (-dt) = -\int t^4 dt = \frac{-t^5}{5} = \frac{-\cos^5(x)}{5} + K$$

Esta primitiva debe pasar por el punto $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ por lo que $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

$$\left. \begin{array}{l} F(x) = \frac{-\cos^5(x)}{5} + K \\ F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{-\cos^5\left(\frac{\pi}{2}\right)}{5} + K = 0 \Rightarrow K = 0 \Rightarrow \boxed{F(x) = \frac{-\cos^5(x)}{5}}$$

La primitiva buscada es $F(x) = \frac{-\cos^5(x)}{5}$.

(b) Buscamos los puntos de corte de la función con el eje OX.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = \cos^4(x) \operatorname{sen}(x) \\ f(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \cos^4(x) \operatorname{sen}(x) = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{sen}(x) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pi \end{cases} \\ \cos(x) = 0 \rightarrow x = \frac{\pi}{2} \end{array} \right.$$

En el intervalo $[0, \pi]$ la función corta el eje en los extremos y en un punto intermedio.

El área será el valor absoluto de la integral definida entre 0 y $\frac{\pi}{2}$ de la función más el

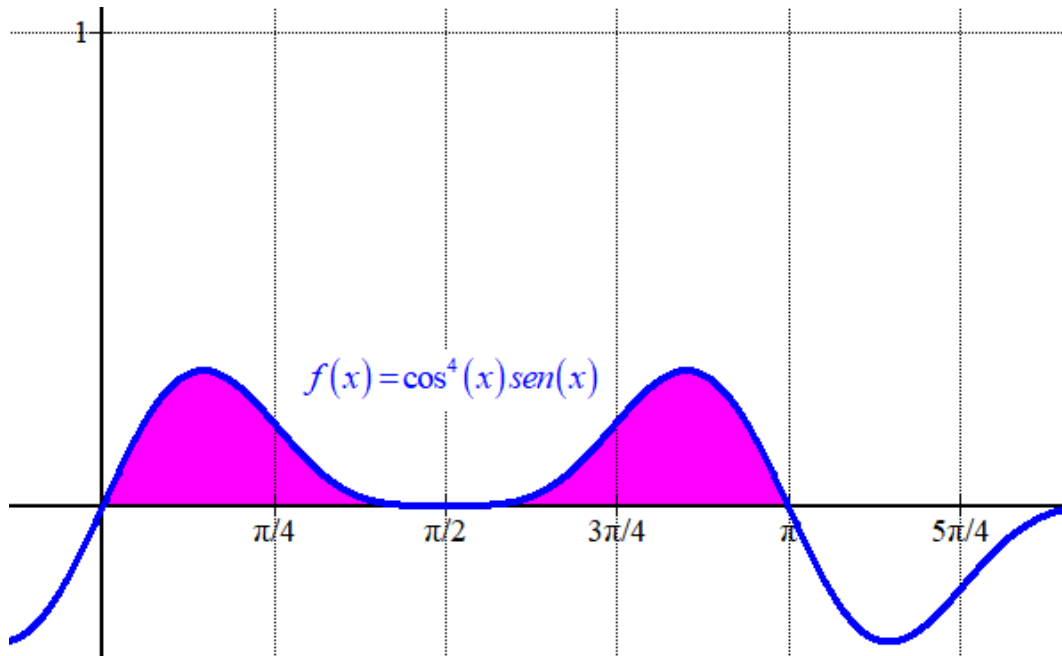
valor absoluto de la integral definida entre $\frac{\pi}{2}$ y π de la función.

$$\text{Área} = \left| \int_0^{\pi/2} f(x) dx \right| + \left| \int_{\pi/2}^{\pi} f(x) dx \right| = \left| \int_0^{\pi/2} \cos^4(x) \operatorname{sen}(x) dx \right| + \left| \int_{\pi/2}^{\pi} \cos^4(x) \operatorname{sen}(x) dx \right| =$$

$$= \left| \left[\frac{-\cos^5(x)}{5} \right]_0^{\pi/2} \right| + \left| \left[\frac{-\cos^5(x)}{5} \right]_{\pi/2}^{\pi} \right| = \left| \frac{-\cos^5\left(\frac{\pi}{2}\right)}{5} - \frac{-\cos^5(0)}{5} \right| + \left| \frac{-\cos^5(\pi)}{5} - \frac{-\cos^5\left(\frac{\pi}{2}\right)}{5} \right| =$$

$$= \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{2}{5} = \boxed{0.4u^2}$$

Realmente no era necesario considerar dos integrales definidas pues la función $f(x) = \cos^4(x) \operatorname{sen}(x)$ es mayor o igual que cero en el intervalo $[0, \pi]$.



Pregunta 3. Opción B. Dos drones están realizando un vuelo de forma que las alturas de cada uno de ellos viene dado por las funciones $h_1(t) = 36/t$ y $h_2(t) = t^3 + 5t$ de tiempo, con $t \in [1, 4]$.

(a) **(0.5 puntos)** Calcula los instantes en los que los dos drones se encuentran a la misma altura.

(b) **(1 punto)** Calcula los puntos de máxima altura de los dos.

(c) **(1 punto)** Calcula el área acotada encerrada entre ambas curvas.

(a) Averiguamos cuando $h_2(t) = h_1(t)$.

$$\left. \begin{array}{l} h_1(t) = 36/t \\ h_2(t) = t^3 + 5t \\ h_2(t) = h_1(t) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{36}{t} = t^3 + 5t \Rightarrow 36 = t^4 + 5t^2 \Rightarrow t^4 + 5t^2 - 36 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t^2 = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4(-36)}}{2} = \frac{-5 \pm 13}{2} = \begin{cases} \frac{-5+13}{2} = 4 = t^2 \rightarrow t = \sqrt{4} = \boxed{t = 2 \in [1, 4]} \\ \frac{-5-13}{2} = -9 = t^2 \rightarrow t = \sqrt{-9} = \text{Imposible} \end{cases}$$

Se encuentran a la misma altura cuando $t = 2$.

(b) Usamos la derivada para encontrar los puntos críticos de $h_1(t) = 36/t$.

$$h_1(t) = \frac{36}{t} \Rightarrow h_1'(t) = \frac{-36}{t^2}$$

Esta expresión de la derivada siempre es negativa, por lo que la función siempre decrece en el intervalo $[1, 4]$. Por lo que la máxima altura se tendrá en $t = 1$.

Calculamos $h_1(1) = 36/1 = 36$. La máxima altura del primer dron es 36.

Usamos la derivada para encontrar los puntos críticos de $h_2(t) = t^3 + 5t$.

$$h_2(t) = t^3 + 5t \Rightarrow h_2'(t) = 3t^2 + 5$$

Esta expresión de la derivada siempre es positiva, por lo que la función siempre crece en el intervalo $[1, 4]$. Por lo que la máxima altura se tendrá en $t = 4$.

Calculamos $h_2(4) = 4^3 + 5 \cdot 4 = 84$. La máxima altura del segundo dron es 84.

(c) Como las gráficas se cortan en $t = 2 \in [1, 4]$ el recinto encerrado entre ambas gráficas lo dividimos en dos partes, calculando el área de cada una de ellas por separado.

Área de R1.

$$\int_1^2 h_2(t) - h_1(t) dt = \int_1^2 t^3 + 5t - \frac{36}{t} dt = \left[\frac{t^4}{4} + \frac{5t^2}{2} - 36 \ln t \right]_1^2 =$$

$$\begin{aligned}
 &= \left[\frac{2^4}{4} + \frac{5 \cdot 2^2}{2} - 36 \ln 2 \right] - \left[\frac{1^4}{4} + \frac{5 \cdot 1^2}{2} - 36 \ln 1 \right] = \\
 &= 4 + 10 - 36 \ln 2 - \frac{1}{4} - \frac{5}{2} = \boxed{\frac{45}{4} - 36 \ln 2 \approx -13.7}
 \end{aligned}$$

El área del recinto R1 vale $\frac{-45}{4} + 36 \ln 2 \approx 13.7$ unidades cuadradas.

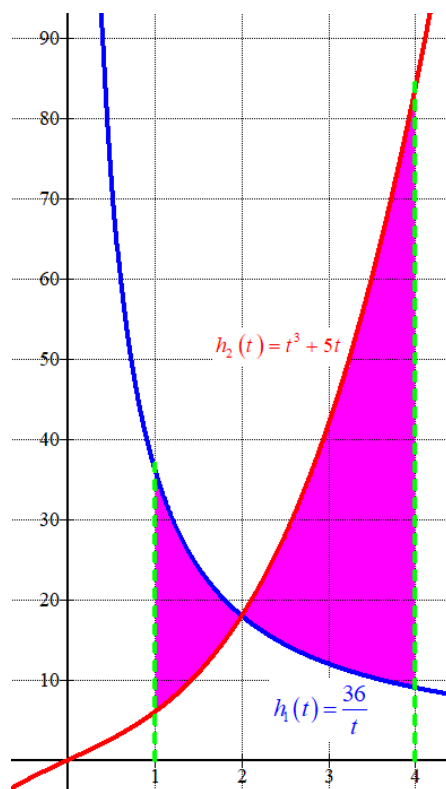
Área de R2.

$$\begin{aligned}
 \int_2^4 h_2(t) - h_1(t) dt &= \int_2^4 t^3 + 5t - \frac{36}{t} dt = \left[\frac{t^4}{4} + \frac{5t^2}{2} - 36 \ln t \right]_2^4 = \\
 &= \left[\frac{4^4}{4} + \frac{5 \cdot 4^2}{2} - 36 \ln 4 \right] - \left[\frac{2^4}{4} + \frac{5 \cdot 2^2}{2} - 36 \ln 2 \right] = \\
 &= 64 + 40 - 36 \ln 4 - 4 - 10 + 36 \ln 2 = \boxed{90 - 36 \ln 2 \approx 65.05}
 \end{aligned}$$

El área del recinto R2 vale $90 - 36 \ln 2 \approx 65.05$ unidades cuadradas.

El área acotada encerrada entre ambas curvas es la suma de las áreas obtenidas.

$$\text{Área} = \frac{-45}{4} + 36 \ln 2 + 90 - 36 \ln 2 = \boxed{78.75 \text{ u}^2}$$



Pregunta 4. Opción A. Se consideran los puntos $A=(2,1,3)$ y $B(0,-1,1)$,

- (a) **(1.25 puntos)** Encuentra la ecuación del plano π que cumple que los dos puntos son simétricos respecto a él.
 (b) **(1.25 puntos)** Dado el plano $\pi' \equiv x+y+z=3$, razona valores de y y de z para que $C=(2,y,z) \in \pi'$ y la distancia de C a A sea de 3 unidades.

- (a) El plano π que cumple que los dos puntos son simétricos respecto a él contiene al punto medio del segmento AB y tiene como vector normal el vector $\overrightarrow{AB}$.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{n} = \overrightarrow{AB} = (0, -1, 1) - (2, 1, 3) = (-2, -2, -2) \\ M = \frac{(0, -1, 1) + (2, 1, 3)}{2} = (1, 0, 2) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \pi: -2x - 2y - 2z + D = 0 \\ M(1, 0, 2) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2 - 0 - 4 + D = 0 \Rightarrow D = 6 \Rightarrow \pi: -2x - 2y - 2z + 6 = 0 \Rightarrow \boxed{\pi: x + y + z - 3 = 0}$$

La ecuación del plano π que cumple que los dos puntos son simétricos respecto a él es $\pi: x + y + z - 3 = 0$.

- (b) Imponemos la primera condición.

$$\left. \begin{array}{l} \pi' \equiv x + y + z = 3 \\ C = (2, y, z) \in \pi' \end{array} \right\} \Rightarrow 2 + y + z = 3 \Rightarrow \boxed{y + z = 1}$$

Imponemos la segunda condición: $d(C, A) = 3$.

$$\overrightarrow{CA} = (2, y, z) - (2, 1, 3) = (0, y-1, z-3)$$

$$d(C, A) = 3 \Rightarrow |\overrightarrow{CA}| = 3 \Rightarrow \sqrt{0^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2} = 3 \Rightarrow \boxed{(y-1)^2 + (z-3)^2 = 9}$$

Reunimos las dos ecuaciones obtenidas en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} (y-1)^2 + (z-3)^2 = 9 \\ y + z = 1 \rightarrow y = 1 - z \end{array} \right\} \Rightarrow (1-z-1)^2 + (z-3)^2 = 9 \Rightarrow z^2 + z^2 + 9 - 6z = 9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2z^2 - 6z = 0 \Rightarrow 2z(z-3) = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \boxed{z=0} \rightarrow \boxed{y=1-0=1} \\ z-3=0 \rightarrow \boxed{z=3} \rightarrow \boxed{y=1-3=-2} \end{array} \right.$$

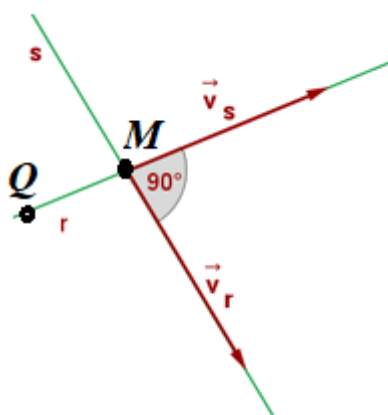
Existen dos soluciones a lo planteado: $y=1, z=0$ e $y=-2, z=3$.

- Pregunta 4. Opción B.** Se consideran los puntos $P = (1,1,1)$, $Q = (1,0,1)$ y el vector $\vec{v} = (1,-1,1)$
- (a) **(0.75 puntos)** Calcula la ecuación continua de la recta r que pasa por P y en la dirección de $\vec{v}$.
- (b) **(0.75 puntos)** Calcula las ecuaciones de la recta s que corta a r perpendicularmente y que pasa por Q .
- (c) **(1 punto)** Calcula la ecuación del plano que contiene a las rectas r y s .

(a) Hallamos la ecuación de la recta r .

$$\left. \begin{array}{l} P = (1,1,1) \in r \\ \vec{v}_r = \vec{v} = (1,-1,1) \end{array} \right\} \Rightarrow r: \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{1}$$

(b) Dibujamos la situación planteada.



Necesitamos hallar el punto M de la recta r tal que el vector $\overrightarrow{QM}$ es perpendicular a $\vec{v}_r$.

$$\left. \begin{array}{l} P = (1,1,1) \in r \\ \vec{v}_r = \vec{v} = (1,-1,1) \end{array} \right\} \Rightarrow r: \begin{cases} x = 1 + \alpha \\ y = 1 - \alpha \\ z = 1 + \alpha \end{cases} \Rightarrow M(1 + \alpha, 1 - \alpha, 1 + \alpha)$$

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{QM} = (1 + \alpha, 1 - \alpha, 1 + \alpha) - (1, 0, 1) = (\alpha, 1 - \alpha, \alpha) \\ \vec{v}_r = (1, -1, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow (\alpha, 1 - \alpha, \alpha)(1, -1, 1) = 0 \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{QM} \perp \vec{v}_r \rightarrow \overrightarrow{QM} \cdot \vec{v}_r = 0$$

$$\Rightarrow \alpha - 1 + \alpha + \alpha = 0 \Rightarrow 3\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{3} \Rightarrow M\left(1 + \frac{1}{3}, 1 - \frac{1}{3}, 1 + \frac{1}{3}\right) = \left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$$

Hallamos la ecuación de la recta s como la recta que pasa por el punto $Q = (1,0,1)$ y tiene como vector director el vector $\overrightarrow{QM}$.

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{QM} = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) \rightarrow \vec{u}_s = 3\overrightarrow{QM} = (1, 2, 1) \\ Q = (1, 0, 1) \in s \end{array} \right\} \Rightarrow s: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases} ; \lambda \in \mathbb{R}$$

- (c) El plano π que contiene ambas rectas tiene como vectores directores los vectores directores de las rectas y pasa, por ejemplo, por el punto $Q = (1, 0, 1)$.

$$\left. \begin{array}{l} u = \vec{u}_s = (1, 2, 1) \\ \vec{v} = \vec{v}_r = (1, -1, 1) \\ Q = (1, 0, 1) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \pi : \begin{vmatrix} x-1 & y & z-1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

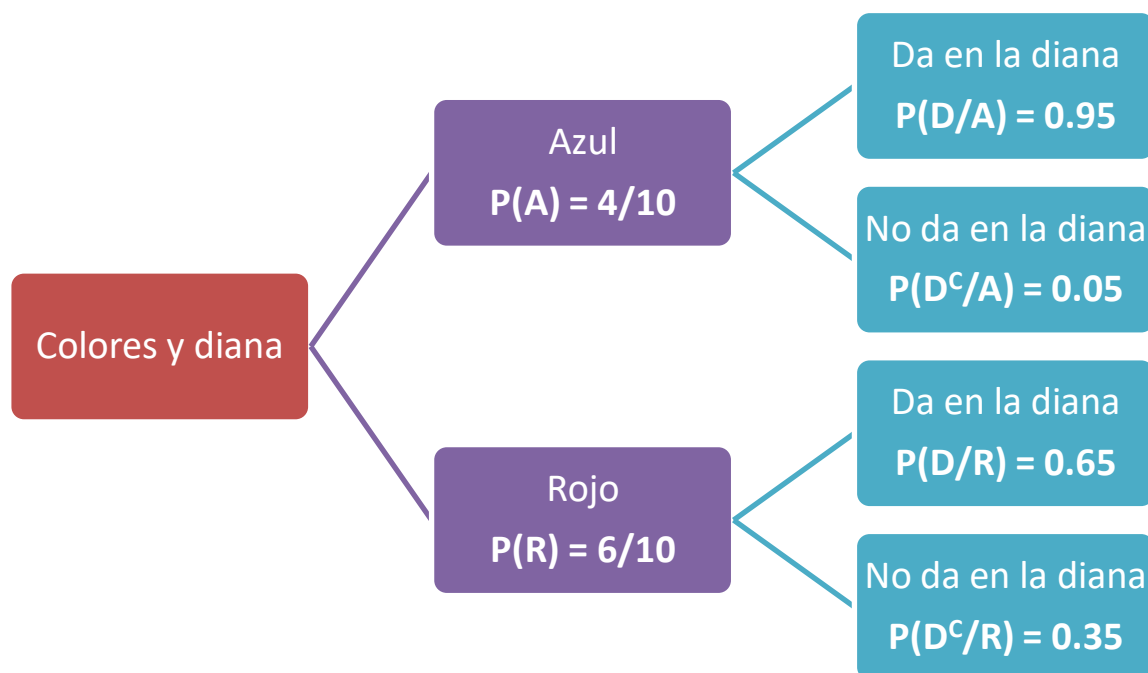
$$\Rightarrow 2x - 2 + y - z + 1 - 2z + 2 - y + x - 1 = 0 \Rightarrow 3x - 3z = 0 \Rightarrow \boxed{\pi : x - z = 0}$$

El plano que contiene a las rectas r y s tiene ecuación $\pi : x - z = 0$.

Pregunta 5. Opción A. Estás jugando a un juego online consistente en lanzar bolas a una diana. El juego te asigna un personaje al azar de 10 posibles, 4 de ellos son azules y los 6 restantes rojos. La probabilidad de que un personaje azul dé en la diana es 0.95, mientras que si el personaje es rojo es de 0.65.

- (a) **(1.25 puntos)** ¿Cuál es la probabilidad de que aciertes?
 (b) **(1.25 puntos)** Haces un lanzamiento y aciertas en la diana, ¿qué es más probable que tengas un personaje azul o rojo?

Realizamos un diagrama de árbol.



- (a) Nos piden calcular $P(D)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(D) = P(A)P(D/A) + P(R)P(D/R) = \frac{4}{10} \cdot 0.95 + \frac{6}{10} \cdot 0.65 = \boxed{0.77}$$

La probabilidad de acertar en la diana es de 0.77.

- (b) Calculamos $P(A/D)$ y $P(R/D)$. Son probabilidades a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(A/D) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{P(A)P(D/A)}{P(D)} = \frac{0.4 \cdot 0.95}{0.77} = \frac{38}{77} \approx 0.4935$$

$$P(R/D) = 1 - P(A/D) = 1 - \frac{38}{77} = \frac{39}{77} \approx 0.5065$$

Es más probable que sea un personaje rojo. Aunque las probabilidades son muy parecidas.

Pregunta 5. Opción B. En una comunidad autónoma se pretende medir el nivel de conocimientos en matemáticas de estudiantes de cuarto de ESO. Para ello se realiza un examen tipo test con 100 preguntas y en cada una de ellas debe decidirse si la afirmación es verdadera o falsa. Un estudiante decide responder al azar a todas las preguntas.

- (a) **(0.75 puntos)** Comprueba que el número de respuestas acertadas puede ser aproximada por una distribución normal y decide los parámetros que la describen.
- (b) **(0.75 puntos)** Utilizando la aproximación anterior, calcula la probabilidad de que un estudiante que haya respondido al azar obtenga más de un 6, es decir, que tenga al menos 60 aciertos.
- (c) **(1 punto)** Supongamos que se reduce el número de preguntas del examen a 10. Calcula la probabilidad de que un estudiante que responde al azar acierte 5 preguntas.

- (a) La situación planteada es elegir entre dos opciones al azar, por lo que la probabilidad de éxito es 0.5.

Hay 100 repeticiones independientes entre sí.

Si llamamos X a la variable aleatoria que cuenta el número de aciertos en ese test de 100 preguntas tenemos que X es una variable binomial de $n = 100$ repeticiones y $p = 0.5$.

$X = B(100, 0.5)$

Como el número de repeticiones es muy alto, $np = 100 \cdot 0.5 = 50 > 5$ y $nq = 100 \cdot 0.5 = 50 > 5$ podemos aproximar esta variable binomial a una variable normal de media $\mu = np = 50$ y desviación típica $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{100 \cdot 0.5 \cdot 0.5} = 5$. $Y = N(50, 5)$.

- (b) Calculamos $P(X \geq 60)$.

$$P(X \geq 60) = \{\text{Corrección de Yates}\} = P(Y \geq 59.5) = \{\text{Tipificamos}\} =$$

$$= P\left(Z \geq \frac{59.5 - 50}{5}\right) = P(Z \geq 1.9) = 1 - P(Z \leq 1.9) =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en los} \\ \text{datos del ejercicio} \end{array} \right\} = 1 - 0.9713 = \boxed{0.0287}$$

Algunos valores de la función de distribución $N(0, 1)$ son: $F(x) = P(Z \leq x)$, $F(0) = 0.5$, $F(0.5) = 0.6915$, $F(0.6915) = 0.7549$, $F(2) = 0.9772$, **$F(1.9) = 0.9713$** , $F(0.34) = 0.6331$, $F(0.35) = 0.6455$, $F(0.9772) = 0.8340$.

La probabilidad de obtener más de un 6 respondiendo a las 100 preguntas del test de forma aleatoria es de 0.0287.

- (c) Consideramos X a la variable aleatoria que cuenta el número de aciertos en ese nuevo test de 10 preguntas. Tenemos que X es una variable binomial de $n = 10$ repeticiones y $p = 0.5$. $X = B(10, 0.5)$

Nos piden calcular $P(X = 5)$.

$$P(X = 5) = \binom{10}{5} 0.5^5 \cdot 0.5^5 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot 0.5^{10} = 9 \cdot 7 \cdot 4 \cdot 0.5^{10} = \boxed{\frac{63}{256} = 0.24609375}$$

En un test de 10 preguntas la probabilidad de acertar 5 respondiendo al azar es de 0.2461.