Universidad de Cantabria

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL

ACCESO A LA UNIVERSIDAD

MODELO 2025

MATEMÁTICAS II

INDICACIONES

- Para obtener la máxima calificación, debe responder a una tarea de cada apartado/bloque.
- En aquellos apartados/bloques en los que se ofrece la posibilidad de elegir entre varias tareas, debe responder solo a una de las opciones. Si realiza más de una opción, se corregirá la primera de ellas, según el orden en que aparecen resueltas en el cuadernillo de examen.
- Debe exponerse con claridad el planteamiento de la respuesta o el método utilizado para su resolución. Todas las respuestas deben ser razonadas.
- Entre corchetes se indica la puntuación máxima de cada apartado.
- No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables. Tampoco está permitido el uso de dispositivos con acceso a Internet.

APARTADO 1 (Bloque A+D) [2,5 PUNTOS]
Resuelva una de las siguientes cuestiones (1A o 1B):

1A) Considere las matrices

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

1A.a) [1 PUNTO] Razone si A tiene inversa. En caso afirmativo, calcúlela.
1A.b) [0,5 PUNTOS] Calcule $C - 3B$.
1A.c) [1 PUNTO] Resuelve la ecuación $AX+3B=C$.

1B) Considere el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x-3y+z=2 \\ -2x+2z=0 \\ -x-3y+3z=a \end{cases}$$

dependiente del parámetro $a\in\mathbb{R}$.
Determine si este sistema es incompatible, compatible determinado o compatible indeterminado en el caso en que:
1B.a) [1,25 PUNTOS] $a=2$. Resuélvalo si es compatible.
1B.b) [1,25 PUNTOS] $a=8$. Resuélvalo si es compatible.

APARTADO 2 (Bloque B) [2,5 PUNTOS]
Resuelva una de las siguientes cuestiones (2A o 2B):

2A) Considere la siguiente función definida a trozos

$$f(x)=\begin{cases} x^3-6x^2+9x & si\ x\le 3 \\ \ln\left(x^2-9\right) & si\ x>3 \end{cases}$$

donde ln denota al logaritmo neperiano.

2A.a) [0,5 PUNTOS] Determine el dominio de definición de *f(x)*.
2A.b) [0,75 PUNTOS] Determine los intervalos de continuidad de *f(x)*.
2A.c) [0,5 PUNTOS] Halle los puntos de corte de *f(x)* con el eje OX de abscisas.
2A.d) [0,75 PUNTOS] Calcule la(s) asíntota(s) de *f(x)* y diga de que tipo(s) es(son), si la(s) tiene.

2B) Considere la función $f\left(x\right)=\dfrac{x}{x^2+1}$.

2B.a) [0,5 PUNTOS] Determine la parte del dominio de definición de *f(x)* en que es decreciente.
2B.b) [1 PUNTO] Determine la parte del dominio de definición de *f(x)* en que es cóncava.
2B.c) [1 PUNTO] Determine los puntos de inflexión de *f(x)*.

APARTADO 3 (Bloque C) [2,5 PUNTOS]

Considere el punto $P\left(1,5,0\right)$ y la recta $r:\begin{cases}x+y-2=0\\2x-z-1=0\end{cases}$

3.a) [0,75 PUNTOS] Obtenga la ecuación de la recta paralela a *r* que pase por el punto P.
3.b) [1,25 PUNTOS] Considere un punto P′ en *r* y un vector dirección de *r*. Calcule el área del paralelogramo determinado por $\overrightarrow{P'P}$ y el vector dirección de *r* elegido.
3.c) [0,5 PUNTOS] Calcule la distancia entre P y *r*.

APARTADO 4 (Bloque E) [2,5 PUNTOS]
Resuelva una de las siguientes cuestiones (4A o 4B):

4A) Determinada enfermedad es curable si se trata antes de que aparezcan sus síntomas. Para poder tratar a los pacientes a tiempo, se pasa un test a la mayor parte de la población. El 1,5% de la población sufre esta enfermedad. La probabilidad de que, no sufriendo la enfermedad, el test de positivo es 0,021 y la de que si estas enfermo de negativo también es 0,021.

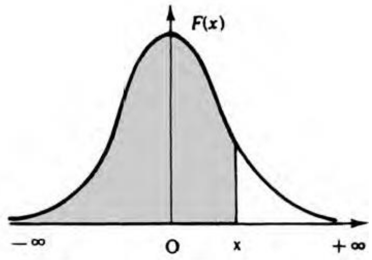
4A.a) [0,5 PUNTOS] ¿Cuál es la probabilidad de no sufrir la enfermedad?
4A.b) [0,75 PUNTOS] ¿Cuál es la probabilidad de que el test de positivo si la persona está enferma?
4A.c) [1,25 PUNTOS] ¿Cuál es la probabilidad de que la persona esté enferma si el test ha dado positivo?

4B) Sean A y B dos sucesos asociados a un experimento aleatorio tales que $P\left(A\right)=0,8$, $P\left(B\right)=0,5$ y $P(A\cup B)=1$.

4B.a) [0,5 PUNTOS] Calcule la $P\left(A\cap B\right)$.
4B.b) [0,75 PUNTOS] Razone si A y B son independientes.
4B.c) [0,5 PUNTOS] Calcule la $P\left(B^c\right)$, con B^c el suceso contrario a B.
4B.d) [0,75 PUNTOS] Calcule la $P\left(A^c\cap B^c\right)$, con A^c el suceso contrario a A.

Distribución normal

$$F(x) = p(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}t^2}\, dt$$



x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	:9997	.9997	.9997	.9998
3.6	.9998	.9998	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999

SOLUCIONES

1A) Considere las matrices

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ -1 & 1 & 0\\ 2 & -1 & 0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2 & -2 & 0\\ 0 & -1 & 2\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}-3 & 0 & 2\\ -1 & 2 & 1\\ 0 & -2 & -1\end{pmatrix}$$

1A.a) [1 PUNTO] Razone si A tiene inversa. En caso afirmativo, calcúlela.
1A.b) [0,5 PUNTOS] Calcule $C-3B$.
1A.c) [1 PUNTO] Resuelve la ecuación $AX+3B=C$.

1A.a) Para que la matriz tenga inversa su determinante no debe ser nulo.

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & -1 & -1\\ -1 & 1 & 0\\ 2 & -1 & 0\end{vmatrix}=0+0-1+2-0-0=1\neq 0$$

El determinante de A es distinto de cero y esta matriz tiene inversa. La calculamos.

$$A^{-1}=\frac{Adj\left(A^T\right)}{|A|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ -1 & 1 & -1\\ -1 & 0 & 0\end{pmatrix}}{1}=\begin{pmatrix}+\begin{vmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}-1 & -1\\ -1 & 0\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}-1 & 1\\ -1 & 0\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 0 & 0\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1 & 2\\ -1 & 0\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & -1\\ -1 & 0\end{vmatrix}\\ +\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 1 & -1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 2\\ -1 & -1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{vmatrix}\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 1\\ -1 & -1 & 0\end{pmatrix}$$

1A.b) Calculamos la matriz $C-3B$.

$$C-3B=\begin{pmatrix}-3 & 0 & 2\\ -1 & 2 & 1\\ 0 & -2 & -1\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}2 & -2 & 0\\ 0 & -1 & 2\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3-6 & 0+6 & 2-0\\ -1-0 & 2+3 & 1-6\\ 0-3 & -2+3 & -1+3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-9 & 6 & 2\\ -1 & 5 & -5\\ -3 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

1A.c) Despejamos X de la ecuación matricial.

$$AX+3B=C\Rightarrow AX=C-3B\Rightarrow X=A^{-1}(C-3B)$$

Determinamos la expresión de la matriz X.

$$X=A^{-1}(C-3B)=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 1\\ -1 & -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-9 & 6 & 2\\ -1 & 5 & -5\\ -3 & 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1-3 & 5+1 & -5+2\\ -2-3 & 10+1 & -10+2\\ 9+1 & -6-5 & -2+5\end{pmatrix}$$

La matriz X tiene la expresión $X=\begin{pmatrix}-4 & 6 & -3\\ -5 & 11 & -8\\ 10 & -11 & 3\end{pmatrix}$.

1B) Considere el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x-3y+z=2 \\ -2x+2z=0 \\ -x-3y+3z=a \end{cases}$$

dependiente del parámetro $a \in \mathbb{R}$.

Determine si este sistema es incompatible, compatible determinado o compatible indeterminado en el caso en que:

1B.a) [1,25 PUNTOS] $a=2$. Resuélvalo si es compatible.

1B.b) [1,25 PUNTOS] $a=8$. Resuélvalo si es compatible.

1B.a) Para $a=2$ el sistema queda $\begin{cases} x-3y+z=2 \\ -2x+2z=0 \\ -x-3y+3z=2 \end{cases}$.

Este sistema tiene como matriz de coeficientes $A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$ y como matriz ampliada $A/B=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & -3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Utilizamos el método de Gauss para transformar la matriz ampliada y obtener un sistema triangular equivalente.

$$A/B=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & -3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila 3}^{\text{a}} + \text{Fila 1}^{\text{a}} \\ -1 \quad -3 \quad 3 \quad 2 \\ \underline{1 \quad -3 \quad 1 \quad 2} \\ 0 \quad -6 \quad 4 \quad 4 \rightarrow \text{Nueva fila 3}^{\text{a}} \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila 2}^{\text{a}} + 2\cdot\text{Fila 1}^{\text{a}} \\ -2 \quad 0 \quad 2 \quad 0 \\ \underline{2 \quad -6 \quad 2 \quad 4} \\ 0 \quad -6 \quad 4 \quad 4 \rightarrow \text{Nueva fila 2}^{\text{a}} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & -6 & 4 & 4 \\ 0 & -6 & 4 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila 3}^{\text{a}} - \text{Fila 2}^{\text{a}} \\ 0 \quad -6 \quad 4 \quad 4 \\ \underline{0 \quad 6 \quad -4 \quad -4} \\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva fila 3}^{\text{a}} \end{array} \right\} \Rightarrow \overbrace{\begin{pmatrix} \underbrace{\begin{matrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & -6 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}}_{A} & \begin{matrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{matrix} \end{pmatrix}}^{A/B}$$

Los rangos de la matriz A y de A/B son iguales a 2, menor que el número de incógnitas (3). El sistema es compatible indeterminado.

Lo resolvemos partiendo del sistema equivalente obtenido.

$$\left(\begin{array}{c}\overbrace{\begin{matrix}1 & -3 & 1 & 2\end{matrix}}^{A/B}\\ \begin{matrix}0 & -6 & 4 & 4\end{matrix}\\ \underbrace{\begin{matrix}0 & 0 & 0\end{matrix}}_{A}\ \ 0\end{array}\right) \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x-3y+z=2 \\ -6y+4z=4 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x-3y+z=2 \\ -3y+2z=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x-3y+z=2 \\ -3y=2-2z \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x+2-2z+z=2 \Rightarrow x-z=0 \Rightarrow x=z \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x=\alpha \\ -3y=2-2\alpha \rightarrow y=\dfrac{-2}{3}+\dfrac{2}{3}\alpha \\ z=\alpha \end{cases}}$$

Para $a=2$ las soluciones del sistema son $x=\alpha;\ y=\dfrac{-2}{3}+\dfrac{2}{3}\alpha;\ z=\alpha$ para cualquier valor $\alpha \in \mathbb{R}$.

1B.b) Para $a=8$ el sistema queda $\begin{cases} x-3y+z=2 \\ -2x+2z=0 \\ -x-3y+3z=8 \end{cases}$.

Este sistema tiene como matriz de coeficientes $A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$ y como matriz ampliada

$A/B=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & -3 & 3 & 8 \end{pmatrix}$.

Utilizamos el método de Gauss para transformar la matriz ampliada y obtener un sistema triangular equivalente.

$$A/B=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & -3 & 3 & 8 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Fila 3}^{\text{a}} + \text{Fila 1}^{\text{a}} \\ \begin{matrix} -1 & -3 & 3 & 8 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 & -3 & 1 & 2 \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} 0 & -6 & 4 & 10 \end{matrix} \rightarrow \text{Nueva fila 3}^{\text{a}} \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Fila 2}^{\text{a}} + 2\cdot\text{Fila 1}^{\text{a}} \\ \begin{matrix} -2 & 0 & 2 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 2 & -6 & 2 & 4 \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} 0 & -6 & 4 & 4 \end{matrix} \rightarrow \text{Nueva fila 2}^{\text{a}} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & -6 & 4 & 4 \\ 0 & -6 & 4 & 10 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Fila 3}^{\text{a}} - \text{Fila 2}^{\text{a}} \\ \begin{matrix} 0 & -6 & 4 & 10 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 6 & -4 & -4 \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 6 \end{matrix} \rightarrow \text{Nueva fila 3}^{\text{a}} \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{c}\overbrace{\begin{matrix}1 & -3 & 1 & 2\end{matrix}}^{A/B}\\ \begin{matrix}0 & -6 & 4 & 4\end{matrix}\\ \underbrace{\begin{matrix}0 & 0 & 0\end{matrix}}_{A}\ \ 6\end{array}\right)$$

El rango de la matriz A es 2 y el de A/B es 3. Los rangos son distintos y el sistema es incompatible (sin solución).

2A) Considere la siguiente función definida a trozos

$$f(x)=\begin{cases} x^3-6x^2+9x & si\ x\le 3 \\ \ln\left(x^2-9\right) & si\ x>3 \end{cases}$$

donde ln denota al logaritmo neperiano.
2A.a) [0,5 PUNTOS] Determine el dominio de definición de *f(x)*.
2A.b) [0,75 PUNTOS] Determine los intervalos de continuidad de *f(x)*.
2A.c) [0,5 PUNTOS] Halle los puntos de corte de *f(x)* con el eje OX de abscisas.
2A.d) [0,75 PUNTOS] Calcule la(s) asíntota(s) de *f(x)* y diga de que tipo(s) es(son), si la(s) tiene.

2A.a) El único problema se puede plantear al calcular el logaritmo neperiano, pero si $x>3$ entonces $x^2-9>9-9=0$ y el logaritmo neperiano $\ln\left(x^2-9\right)$ existe.
El dominio de la función es todo $\mathbb{R}$.

2A.b) En el intervalo $(-\infty,3)$ la función es $f(x)=x^3-6x^2+9x$ que es una función polinómica y por tanto continua.
En el intervalo $(3,+\infty)$ la función es $f(x)=\ln\left(x^2-9\right)$ que es una función logarítmica que es continua pues $x^2-9>0$.
Comprobamos la continuidad en *x* = *3*.

$$\left.\begin{array}{l} f(3)=3^3-6\cdot 3^2+9\cdot 3=0 \\ \lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-} x^3-6x^2+9x=0 \\ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+} \ln\left(x^2-9\right)=\ln(9-9)=-\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 3^-} f(x)\neq \lim_{x\to 3^+} f(x)$$

La función no es continua en *x* = *3*. La función es continua en $(-\infty,3)\cup(3,+\infty)$.

2A.c) Hallamos los puntos de corte.

$$\left.\begin{array}{r} f(x)=\begin{cases} x^3-6x^2+9x & si\ x\le 3 \\ \ln\left(x^2-9\right) & si\ x>3 \end{cases} \\ eje\ OX\ \to y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x^3-6x^2+9x=0 \to x\left(x^2-6x+9\right)=0 \to \\ \to \begin{cases} \boxed{x=0}\in(-\infty,3) \\ x^2-6x+9=0 \to \boxed{x=\dfrac{6\pm\sqrt{(-6)^2-36}}{2}=3} \end{cases} \\ \ln\left(x^2-9\right)=0 \to x^2-9=1 \to x^2=10 \to \\ \to \boxed{x=\sqrt{10}} \simeq 3.16\in(3,+\infty) \end{cases}$$

Los puntos de corte de *f(x)* con el eje OX de abscisas son $(0,0)$, $(3,0)$ y $\left(\sqrt{10},0\right)$.

2A.d) **Asíntotas verticales**. $x=a$.

$x=3$ es asíntota vertical por la derecha pues $\lim_{x\to 3^+} f(x)=\lim_{x\to 3^+}\ln\left(x^2-9\right)=\ln(9-9)=-\infty$.

Asíntota horizontal. $y=b$.

Buscamos en –∞.

$$\lim_{x\to -\infty} f(x)=\lim_{x\to -\infty} x^3-6x^2+9x=-\infty$$

No existe asíntota horizontal cuando *x* tiende a –∞.

Buscamos en +∞.

$$\lim_{x\to +\infty} f(x)=\lim_{x\to +\infty}\ln\left(x^2-9\right)=+\infty$$

No existe asíntota horizontal cuando *x* tiende a +∞.

Asíntota oblicua. $y=mx+n$

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\begin{cases} =\lim_{x\to -\infty}\dfrac{x^3-6x^2+9x}{x}=\lim_{x\to -\infty} x^2-6x+9=+\infty \\ =\lim_{x\to +\infty}\dfrac{\ln\left(x^2-9\right)}{x}=\dfrac{\infty}{\infty}=\left\{L\acute{}H\hat{o}pital\right\}=\lim_{x\to +\infty}\dfrac{\frac{2x}{x^2-9}}{1}=\lim_{x\to +\infty}\dfrac{2x}{x^2-9}=0 \end{cases}$$

Como el valor obtenido es +∞ y 0 la función no tiene asíntota oblicua.

Resumiendo: La función tiene una asíntota vertical por la derecha: $x=3$ y no tiene ni asíntota horizontal ni oblicua.

2B) Considere la función $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$.

2B.a) [0,5 PUNTOS] Determine la parte del dominio de definición de *f(x)* en que es decreciente.

2B.b) [1 PUNTO] Determine la parte del dominio de definición de *f(x)* en que es cóncava.

2B.c) [1 PUNTO] Determine los puntos de inflexión de *f(x)*.

2B.a) El dominio de la función es todo $\mathbb{R}$, pues el denominador nunca se anula. Buscamos los puntos críticos de la función usando la derivada.

$$f(x)=\frac{x}{x^2+1}\Rightarrow f'(x)=\frac{1\cdot\left(x^2+1\right)-2x\cdot x}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{x^2+1-2x^2}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{1-x^2}{\left(x^2+1\right)^2}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow\frac{1-x^2}{\left(x^2+1\right)^2}=0\Rightarrow 1-x^2=0\Rightarrow x^2=1\Rightarrow\boxed{x=\sqrt{1}=\pm1}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos dos puntos críticos: $x=-1$ y $x=1$

- En el intervalo $(-\infty,-1)$ tomamos $x=-2$ y la derivada vale $f'(-2)=\dfrac{1-(-2)^2}{\left((-2)^2+1\right)^2}=\dfrac{-3}{25}<0$. La función decrece en $(-\infty,-1)$.
- En el intervalo $(-1,1)$ tomamos $x=0$ y la derivada vale $f'(0)=\dfrac{1-0^2}{\left(0^2+1\right)^2}=1>0$. La función crece en $(-1,1)$.
- En el intervalo $(1,+\infty)$ tomamos $x=2$ y la derivada vale $f'(2)=\dfrac{1-2^2}{\left(2^2+1\right)^2}=\dfrac{-3}{25}<0$. La función decrece en $(1,+\infty)$.

La función es decreciente en $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

2B.b) Buscamos los valores que anulan la segunda derivada.

$$f'(x)=\frac{1-x^2}{\left(x^2+1\right)^2}\Rightarrow f''(x)=\frac{-2x\left(x^2+1\right)^2-2\left(1+x^2\right)2x\left(1-x^2\right)}{\left(x^2+1\right)^4}=$$

$$=\frac{-2x\left(x^2+1\right)-4x\left(1-x^2\right)}{\left(x^2+1\right)^3}=\frac{-2x^3-2x-4x+4x^3}{\left(x^2+1\right)^3}=\frac{2x^3-6x}{\left(x^2+1\right)^3}$$

$$f''(x)=0 \Rightarrow \frac{2x^3-6x}{\left(x^2+1\right)^3}=0 \Rightarrow 2x^3-6x=0 \Rightarrow 2x\left(x^2-3\right)=0 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x=0} \\ x^2-3=0 \rightarrow \boxed{x=\pm\sqrt{3}} \end{cases}$$

Estudiamos el signo de la segunda derivada antes, entre y después de estos tres valores.

- En el intervalo $\left(-\infty,-\sqrt{3}\right)$ tomamos $x = -2$ y la segunda derivada vale

  $f''(-2)=\dfrac{2(-2)^3-6(-2)}{\left((-2)^2+1\right)^3}=\dfrac{-4}{125}<0$. La función es cóncava (∩) en $\left(-\infty,-\sqrt{3}\right)$.

- En el intervalo $\left(-\sqrt{3},0\right)$ tomamos $x = -1$ y la segunda derivada vale

  $f''(-1)=\dfrac{2(-1)^3-6(-1)}{\left((-1)^2+1\right)^3}=\dfrac{4}{8}>0$. La función es convexa (∪) en $\left(-\sqrt{3},0\right)$.

- En el intervalo $\left(0,+\sqrt{3}\right)$ tomamos $x = 1$ y la segunda derivada vale

  $f''(1)=\dfrac{2(1)^3-6(1)}{\left(1^2+1\right)^3}=\dfrac{-4}{8}<0$. La función es cóncava (∩) en $\left(0,+\sqrt{3}\right)$.

- En el intervalo $\left(+\sqrt{3},+\infty\right)$ tomamos $x = 2$ y la segunda derivada vale

  $f''(2)=\dfrac{2(2)^3-6(2)}{\left(2^2+1\right)^3}=\dfrac{4}{125}>0$. La función es convexa (∪) en $\left(+\sqrt{3},+\infty\right)$.

La función es cóncava en $\left(-\infty,-\sqrt{3}\right)\cup\left(0,+\sqrt{3}\right)$.

2B.c) La función cambia de concavidad a convexidad o viceversa en $x=0$, $x=+\sqrt{3}$ y $x=-\sqrt{3}$.

$$f\left(-\sqrt{3}\right)=\frac{-\sqrt{3}}{\left(-\sqrt{3}\right)^2+1}=\frac{-\sqrt{3}}{4} \rightarrow A\left(-\sqrt{3},\frac{-\sqrt{3}}{4}\right)$$

$$f(0)=\frac{0}{(0)^2+1}=0 \longrightarrow B(0,0)$$

$$f\left(+\sqrt{3}\right)=\frac{+\sqrt{3}}{\left(\sqrt{3}\right)^2+1}=\frac{+\sqrt{3}}{4} \longrightarrow C\left(+\sqrt{3},\frac{+\sqrt{3}}{4}\right)$$

Sus puntos de inflexión son $A\left(-\sqrt{3},\dfrac{-\sqrt{3}}{4}\right)$, $B(0,0)$ y $C\left(+\sqrt{3},\dfrac{+\sqrt{3}}{4}\right)$.

APARTADO 3 (Bloque C) [2,5 PUNTOS]

Considere el punto $P(1,5,0)$ y la recta $r:\begin{cases} x+y-2=0 \\ 2x-z-1=0 \end{cases}$

3.a) [0,75 PUNTOS] Obtenga la ecuación de la recta paralela a *r* que pase por el punto P.
3.b) [1,25 PUNTOS] Considere un punto P′ en *r* y un vector dirección de *r*. Calcule el área del paralelogramo determinado por $\overrightarrow{P'P}$ y el vector dirección de *r* elegido.
3.c) [0,5 PUNTOS] Calcule la distancia entre P y *r*.

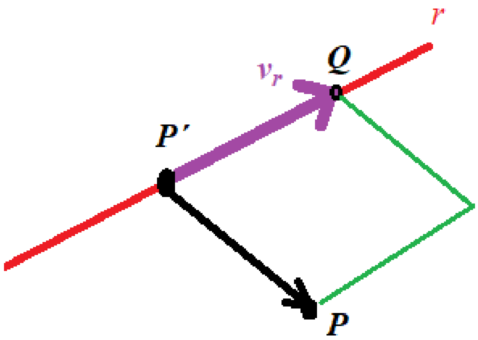
3.a) Hallamos un vector director y un punto de la recta *r*.

$$r:\begin{cases} x+y-2=0 \\ 2x-z-1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=2-x \\ 2x-1=z \end{cases} \Rightarrow r:\begin{cases} x=\alpha \\ y=2-\alpha \\ z=-1+2\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_r(0,2,-1) \\ \overrightarrow{v_r}=(1,-1,2) \end{cases}$$

La recta *s* paralela a *r* tiene como vector director el vector director de *r*.

$$\left.\begin{array}{l} P(1,5,0)\in s \\ \overrightarrow{u_s}=\overrightarrow{v_r}=(1,-1,2) \end{array}\right\} \Rightarrow s:\begin{cases} x=1+\lambda \\ y=5-\lambda;\ \lambda\in\mathbb{R} \\ z=2\lambda \end{cases}$$

3.b) Dibujamos el paralelogramo.



Consideramos el punto $P'=P_r(0,2,-1)$ y el vector director $\overrightarrow{v_r}=(1,-1,2)$. Hallamos las coordenadas del punto Q sumando al punto P´ el vector $\overrightarrow{v_r}$.

$$Q=P'+\overrightarrow{v_r}=(0,2,-1)+(1,-1,2)=(1,1,1)$$

El área del paralelogramo es el módulo del producto vectorial $\overrightarrow{P'P}\times\overrightarrow{v_r}$.

$$\overrightarrow{P'P}=(1,5,0)-(0,2,-1)=(1,3,1)$$

$$\overrightarrow{P'P}\times\overrightarrow{v_r}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}=6i+j-k-3k-2j+i=7i-j-4k=(7,-1,-4)$$

$$Área=\left|\overrightarrow{P'P}\times\overrightarrow{v_r}\right|=\sqrt{7^2+(-1)^2+(-4)^2}=\boxed{\sqrt{66}\simeq 8.124\ u^2}$$

El área del paralelogramo tiene un valor de $\sqrt{66} \simeq 8.124$ unidades cuadradas.

3.c) La distancia del punto P a la recta *r* es el valor del área del paralelogramo dividida por el módulo del vector $\overrightarrow{v_r}$ (base del paralelogramo).

$$\overrightarrow{v_r} = (1, -1, 2) \Rightarrow \left|\overrightarrow{v_r}\right| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{6}$$

$$d(P, r) = \frac{\acute{A}rea\ paralelogramo}{base = \left|\overrightarrow{v_r}\right|} = \frac{\sqrt{66}}{\sqrt{6}} = \sqrt{11} \simeq 3.32\, unidades$$

4A) Determinada enfermedad es curable si se trata antes de que aparezcan sus síntomas. Para poder tratar a los pacientes a tiempo, se pasa un test a la mayor parte de la población. El 1,5% de la población sufre esta enfermedad. La probabilidad de que, no sufriendo la enfermedad, el test de positivo es 0,021 y la de que si estas enfermo de negativo también es 0,021.
4A.a) [0,5 PUNTOS] ¿Cuál es la probabilidad de no sufrir la enfermedad?
4A.b) [0,75 PUNTOS] ¿Cuál es la probabilidad de que el test de positivo si la persona está enferma?
4A.c) [1,25 PUNTOS] ¿Cuál es la probabilidad de que la persona esté enferma si el test ha dado positivo?

Llamamos M al suceso "sufrir la enfermedad" y T a "el test da positivo".
Tenemos que $P(M)=0.015$, $P\left(T/\overline{M}\right)=0.021$ y $P\left(\overline{T}/M\right)=0.021$.

4A.a) Nos piden calcular $P\left(\overline{M}\right)$. Como es el suceso contrario de sufrir la enfermedad tenemos que $P\left(\overline{M}\right)=1-P(M)=1-0.015=0.985$.

4A.b) Nos piden calcular $P(T/M)$. Como es el suceso contrario de dar negativo si tienes la enfermedad tenemos que $P(T/M)=1-P\left(\overline{T}/M\right)=1-0.021=0.979$.

4A.c) Nos piden calcular $P(M/T)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(M/T)=\frac{P(M\cap T)}{P(T)}=\frac{P(M)P(T/M)}{P(M)P(T/M)+P\left(\overline{M}\right)P\left(T/\overline{M}\right)}=$$

$$=\frac{0.015\cdot 0.979}{0.015\cdot 0.979+0.985\cdot 0.021}=\boxed{\frac{979}{2358}\simeq 0.415}$$

La probabilidad de que la persona esté enferma si el test ha dado positivo tiene un valor aproximado de 0.415.

4B) Sean A y B dos sucesos asociados a un experimento aleatorio tales que $P(A)=0,8$, $P(B)=0,5$ y $P(A\cup B)=1$.

4B.a) [0,5 PUNTOS] Calcule la $P(A\cap B)$.

4B.b) [0,75 PUNTOS] Razone si A y B son independientes.

4B.c) [0,5 PUNTOS] Calcule la $P(B^c)$, con B^c el suceso contrario a B.

4B.d) [0,75 PUNTOS] Calcule la $P(A^c\cap B^c)$, con A^c el suceso contrario a A.

4B.a) Utilizamos la fórmula de la probabilidad de la unión de dos sucesos.

$$\left.\begin{array}{l} P(A\cup B)=1 \\ P(A)=0.8 \\ P(B)=0.5 \\ P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B) \end{array}\right\} \Rightarrow 1=0.8+0.5-P(A\cap B)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{P(A\cap B)=1.3-1=0.3}$$

Hemos obtenido que $P(A\cap B)=0.3$.

4B.b) Para que A y B sean independientes debe cumplirse que $P(A\cap B)=P(A)P(B)$. Averiguamos si se cumple la igualdad o no.

$$\left.\begin{array}{l} P(A\cap B)=0.3 \\ P(A)P(B)=0.8\cdot 0.5=0.4 \end{array}\right\} \Rightarrow P(A\cap B)=0.3\neq 0.4=P(A)P(B)$$

No se cumple la igualdad y los sucesos A y B no son independientes.

4B.c) $P(B^c)=1-P(B)=1-0.5=0.5$

4B.d) Utilizamos las leyes de Morgan.

$$P(A^c\cap B^c)=P\left((A\cup B)^c\right)=1-P(A\cup B)=1-1=\boxed{0}$$