	Prueba de acceso a la Universidad **Castilla y León**	**MATEMÁTICAS II**	**MODELO 0** Nº páginas: 3

APARTADO 1: (elegir UN problema)

Problema 1A.

a) Discutir el sistema de ecuaciones lineales según los valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$**:**

$$\begin{cases} x+\dfrac{y}{2}+z=0 \\ 2ax+y=0 \\ 2x+y+az=0 \end{cases}$$ **(1,5 puntos)**

b) Resolverlo para $a=1$. **(1 punto)**

Problema 1B.

a) Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $D=\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, hallar la matriz X tal que $AB+CX=D$. **(1,5 puntos)**

b) Sea M una matriz cuadrada de orden 2 tal que $|M|=-3$, calcular el determinante de 4M y el determinante de $(2M)^{-1}$. **(1 punto)**

APARTADO 2: (obligatorio)

Problema 2.

a) Dada la función $f(x)=e^{-x}(x-1)$, determinar su dominio de definición, asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento y extremos relativos. Esbozar su gráfica. **(1 punto)**

b) Calcular el área de la región limitada por la gráfica de la función f y el eje de abscisas en el intervalo [1,3]. **(1 punto)**

c) Demostrar que la función $g(x)=2x+senx$ se anula en un único punto. **(0,5 puntos)**

APARTADO 3: (elegir UN problema)

Problema 3A.

Sean las rectas $r=\begin{cases} x=1 \\ y=\alpha \\ z=\alpha \end{cases}$ y $s=\begin{cases} x-z=3 \\ y-3z=4 \end{cases}$.

a) Estudiar la posición relativa de r y s. **(1 punto)**

b) Hallar el punto simétrico a $P(1,0,1)$ respecto de la recta r. **(1 punto)**

c) Calcular el plano que contiene a la recta s y al punto $P(1,0,1)$. **(0,5 puntos)**

Problema 3B.
Los puntos $A(1,1,1)$, $B\ (2,2,2)\ y\ C(1,3,3)$ son vértices consecutivos del paralelogramo *ABCD*.
a) Calcular el área del paralelogramo. **(1 punto)**
b) Hallar la ecuación general del plano que contiene a dicho paralelogramo **(1 punto)**
c) Calcular las coordenadas del vértice *D*. **(0,5 puntos)**

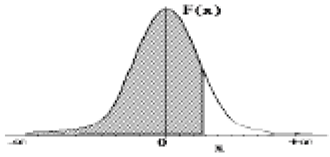
APARTADO 4: (elegir UN problema)

Problema 4A.
En las pruebas de acceso a la universidad, las notas que se han obtenido por 1000 estudiantes han seguido una distribución normal de media 6,05 y desviación típica 2,5.
a) ¿Cuántos estudiantes han superado el 7? Razona la respuesta. **(1,25 puntos)**
b) Si tenemos que adjudicar 330 plazas, calcula razonadamente la nota de corte. **(1,25 puntos)**

Problema 4B.
En una oficina del ayuntamiento se asigna un número a cada persona que entra. Se observa que el 70% de las personas que entran son mujeres y que el 40% de los hombres y el 30% de las mujeres que entran son menores de 30 años.
a) Indicar las probabilidades que aparecen en el enunciado utilizando una notación adecuada **(0,5 puntos)**
Si se escoge una persona al azar, calcula:
b) La probabilidad de que un número sea asignado a una persona menor de 30 años. **(0.5 puntos)**
c) La probabilidad de que un número sea asignado a un hombre que no tiene menos de 30 años. **(0.75 puntos)**
d) Si la persona a la que se le ha asignado un número no tiene menos de 30 años ¿cuál es la probabilidad de que sea hombre? **(0.75 puntos)**

Distribución Normal

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}t^2}\,dt$$



	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9014
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9318
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9997	0,9997	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999

SOLUCIONES

Problema 1A.

a) Discutir el sistema de ecuaciones lineales según los valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$ **:**

$$\begin{cases} x+\dfrac{y}{2}+z=0 \\ 2ax+y=0 \\ 2x+y+az=0 \end{cases}$$ **(1,5 puntos)**

b) Resolverlo para a=1. **(1 punto)**

a) La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A=\begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 1 \\ 2a & 1 & 0 \\ 2 & 1 & a \end{pmatrix}$

y la matriz ampliada es $A/B=\begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 1 & 0 \\ 2a & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & a & 0 \end{pmatrix}$.

Veamos cuando se anula el determinante de A.

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 0.5 & 1 \\ 2a & 1 & 0 \\ 2 & 1 & a \end{vmatrix}=a+0+2a-2-a^2-0=-a^2+3a-2 .$$

$$|A|=0 \Rightarrow -a^2+3a-2=0 \Rightarrow a=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4(-1)(-2)}}{-2}=\frac{-3\pm 1}{-2}=\begin{cases} \dfrac{-3+1}{-2}=\boxed{1=a} \\ \dfrac{-3-1}{-2}=\boxed{2=a} \end{cases}$$

Al ser un sistema homogéneo siempre va a ser compatible pues el rango de la matriz A y el de A/B son iguales.

Existen tres situaciones diferentes que estudiamos por separado.

<u>CASO 1.</u> $a \neq 1$ y $a \neq 2$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el de A/B y el número de incógnitas, por lo que el sistema es **compatible determinado,** tiene solución única: $x=y=z=0$.

<u>CASO 2.</u> $a=1$

El determinante de la matriz A es nulo, por lo que su rango no es 3.

Al sustituir el valor de a la matriz de coeficientes queda $A=\begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, si tomamos el menor que resulta de quitar la 3ª fila y 1ª columna su determinante es $\begin{vmatrix} 0.5 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=-1\neq 0$. Por lo que el rango de A es 2.

Rango de A = Rango de A/B = 2 < Número de incógnitas = 3.

El sistema es **compatible indeterminado** (infinitas soluciones).

<u>CASO 3.</u> $a=2$

El determinante de la matriz A es nulo, por lo que su rango no es 3.

Al sustituir el valor de a la matriz de coeficientes queda $A=\begin{pmatrix}1 & 0.5 & 1\\ 4 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 2\end{pmatrix}$, si tomamos el menor que resulta de quitar la 3ª fila y 1ª columna su determinante es $\begin{vmatrix}0.5 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}=-1\neq 0$. Por lo que el rango de A es 2.
Rango de A = Rango de A/B = 2 < Número de incógnitas = 3.
El sistema es **compatible indeterminado** (infinitas soluciones).

Resumiendo: Si $a\neq 1$ y $a\neq 2$ el sistema es **compatible determinado,** tiene solución única: $x=y=z=0$. Si $a=1$ o $a=2$ el sistema es **compatible indeterminado** (infinitas soluciones).

a) Para $a=1$ el sistema queda $\begin{cases} x+\dfrac{y}{2}+z=0\\ 2x+y=0\\ 2x+y+z=0\end{cases}$. Hemos visto que el sistema es compatible indeterminado. Hallamos sus soluciones.

$$\begin{cases} x+\dfrac{y}{2}+z=0\\ 2x+y=0\\ 2x+y+z=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x+\dfrac{y}{2}+z=0\\ y=-2x\\ 2x+y+z=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x+\dfrac{-2x}{2}+z=0\\ 2x-2x+z=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\boxed{z=0}\\ z=0\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x+y=0\Rightarrow y=-2x\Rightarrow\boxed{\begin{cases}x=\alpha\\ y=-2\alpha\\ z=0\end{cases}}$$

Las soluciones son $\begin{cases}x=\alpha\\ y=-2\alpha\\ z=0\end{cases}$, para cualquier valor $\alpha\in\mathbb{R}$.

Problema 1B.

a) Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ y $D=\begin{pmatrix}0 & 3\\ 1 & 3\end{pmatrix}$, hallar la matriz X tal que $AB+CX=D$. **(1,5 puntos)**

b) Sea M una matriz cuadrada de orden 2 tal que $|M|=-3$, calcular el determinante de 4M y el determinante de $(2M)^{-1}$. **(1 punto)**

a) Despejamos X de la ecuación matricial.

$$AB+CX=D \Rightarrow CX=D-AB \Rightarrow X=C^{-1}(D-AB)$$

Comprobamos que la matriz C tiene inversa.

$$|C|=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1-0=1\neq 0$$

Su determinante es no nulo y existe la inversa de C. La calculamos.

$$C^{-1}=\frac{Adj(C^T)}{|C|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}}{1}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

Determinamos la expresión de la matriz X.

$$D-AB=\begin{pmatrix}0 & 3\\ 1 & 3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 2\\ 1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 3\\ 1 & 3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1 & 2+1\\ 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$X=C^{-1}(D-AB)=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

La matriz X solución de la ecuación matricial $AB+CX=D$ tiene la expresión $X=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

b) Por las propiedades de los determinantes sabemos que si M es una matriz cuadrada de orden 2 entonces $|4M|=4^2\cdot|M|$ y $|2M|=2^2\cdot|M|=4\cdot|M|$. También se cumple que $\left|(2M)^{-1}\right|=\dfrac{1}{|2M|}$

Obtenemos el determinante de 4M: $|4M|=4^2\cdot|M|=16\cdot(-3)=-48$.

Obtenemos el determinante de $(2M)^{-1}$: $\left|(2M)^{-1}\right|=\dfrac{1}{|2M|}=\dfrac{1}{2^2\cdot|M|}=\dfrac{1}{4(-3)}=\dfrac{-1}{12}$

Problema 2.
a) Dada la función $f\left(x\right)=e^{-x}\left(x-1\right)$, determinar su dominio de definición, asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento y extremos relativos. Esbozar su gráfica. **(1 punto)**
b) Calcular el área de la región limitada por la gráfica de la función f y el eje de abscisas en el intervalo [1,3]. **(1 punto)**
c) Demostrar que la función $g\left(x\right)=2x+senx$ se anula en un único punto. **(0,5 puntos)**

a) El **dominio de la función** $f\left(x\right)=e^{-x}\left(x-1\right)=\dfrac{x-1}{e^x}$ es todo R, pues no presenta ningún problema al sustituir la "x" por cualquier valor real. Dominio = $\mathbb{R}$.

Asíntota vertical. No tiene, pues no tiene discontinuidades.

Asíntota horizontal. $y=b$

$$b=\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x-1}{e^x}=\frac{\infty}{\infty}=\text{Indeterminación (L´Hôpital)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=\frac{1}{\infty}=0$$

$$b=\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} e^{-x}\left(x-1\right)=e^{+\infty}\left(-\infty\right)=-\infty$$

Tiene una **asíntota horizontal** cuando x tiende a $+\infty$: $y=0$.

Asíntota oblicua. $y=mx+n$

Veamos cuando $x\to-\infty$, pues en esa rama no tiene asíntota horizontal.

$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{-x}\left(x-1\right)}{x}=\lim_{x\to-\infty} e^{-x}\frac{x-1}{x}=\lim_{x\to-\infty} e^{-x}\left(\frac{x}{x}-\frac{1}{x}\right)=$$

$$=\lim_{x\to-\infty} e^{-x}\left(1-\frac{1}{x}\right)=e^{+\infty}\left(1-\frac{1}{\infty}\right)=e^{+\infty}=+\infty$$

No tiene asíntota oblicua.

Para estudiar el crecimiento y decrecimiento utilizamos la derivada para encontrar sus puntos críticos.

$$f\left(x\right)=e^{-x}\left(x-1\right)\Rightarrow f'(x)=-e^{-x}\left(x-1\right)+e^{-x}\left(1\right)=e^{-x}\left(1-x+1\right)=\left(2-x\right)e^{-x}=\frac{2-x}{e^x}$$

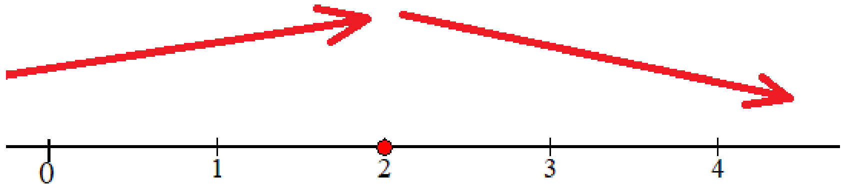
Igualamos a cero.

$$f'(x)=0\Rightarrow\frac{2-x}{e^x}=0\Rightarrow 2-x=0\Rightarrow\boxed{x=2}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes y después de 2.

- En $\left(-\infty,2\right)$ tomamos $x=0$ y la derivada vale $f'(0)=\dfrac{2-0}{e^0}=2>0$. Es positiva, por lo que la función crece en $\left(-\infty,2\right)$.

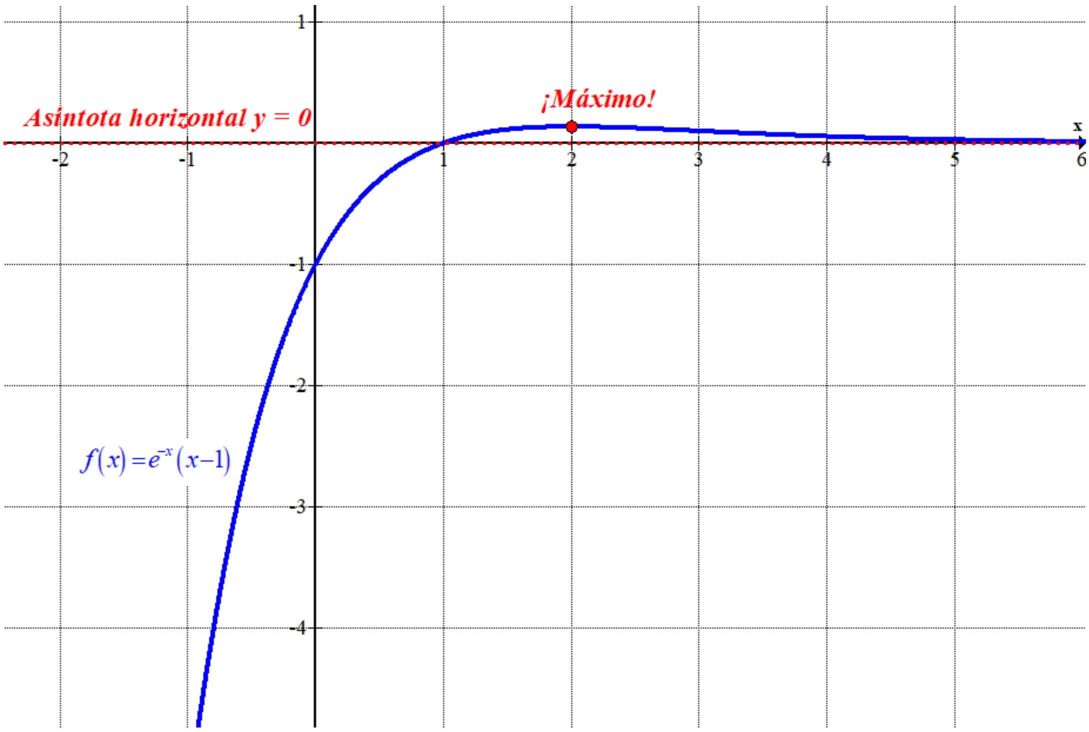
- En $(2,+\infty)$ tomamos $x=3$ y la derivada vale $f\,'(3)=\dfrac{2-3}{e^3}=\dfrac{-1}{e^3}<0$. Es negativa, por lo que la función decrece en $(2,+\infty)$.



La función **crece** en $(-\infty,2)$ y **decrece** en $(2,+\infty)$. Tiene un **máximo** en $x=2$.

Para esbozar la gráfica hallamos las coordenadas de algunos puntos de la función.

x	$y=e^{-x}(x-1)$
-1	$-2e$
0	-1
1	0
2	e^{-2}
3	$2e^{-3}$
4	$3e^{-4}$



b) El área de la región limitada por la gráfica de la función f y el eje de abscisas en el intervalo [1,3] es el valor de la integral definida de la función entre 1 y 3. Como podemos apreciar en el dibujo de la gráfica de la función esta área va a tener un valor muy pequeño.
Calculamos primero la integral indefinida.

$$\int f(x)\,dx = \int e^{-x}(x-1)\,dx = \left\{\begin{array}{l}\text{Integración por partes}\\ u = x-1 \to du = dx\\ dv = e^{-x}dx \to v = \int e^{-x}dx = -e^{-x}\end{array}\right\} = -e^{-x}(x-1) - \int -e^{-x}dx =$$

$$= e^{-x}(1-x) + \int e^{-x}dx = e^{-x}(1-x) - e^{-x} = e^{-x}(1-x-1) = -xe^{-x} + K$$

Lo usamos para el cálculo del área.

$$Área = \int_1^3 e^{-x}(x-1)\,dx = \left[-xe^{-x}\right]_1^3 = \left[-3e^{-3}\right] - \left[-1e^{-1}\right] = \boxed{\frac{-3}{e^3} + \frac{1}{e} \simeq 0.2185\ u^2}$$

c) La función $g(x) = 2x + senx$ es continua y derivable en todo $\mathbb{R}$.

Esta función se anula para $x = 0$, pues $g(0) = 2\cdot 0 + sen0 = 0$.

Si esta función se anulase en más de un punto, por ejemplo, en $x = 0$ y en $x = a$ entonces podríamos aplicar el teorema de Rolle a la función $g(x)$ en el intervalo $[0,a]$ y debería existir un valor $c \in (0,a)$ tal que $g'(c) = 0$.

Pero esto no es posible pues la derivada de la función $g(x) = 2x + senx$ es $g'(x) = 2 - \cos x$ y debería cumplirse que $g'(c) = 2 - \cos c = 0 \Rightarrow$ ¡$\cos c = 2$!.

El coseno no puede tomar el valor 2 pues su valor está comprendido entre –1 y 1.

La hipótesis de partida no es posible y la función solo se anula en $x = 0$.

Problema 3A.

Sean las rectas $r \equiv \begin{cases} x=1 \\ y=\alpha \\ z=\alpha \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x-z=3 \\ y-3z=4 \end{cases}$.

a) Estudiar la posición relativa de r y s. **(1 punto)**

b) Hallar el punto simétrico a $P(1,0,1)$ respecto de la recta r. **(1 punto)**

c) Calcular el plano que contiene a la recta s y al punto $P(1,0,1)$. **(0,5 puntos)**

a) La recta es $r \equiv \begin{cases} x=1 \\ y=\alpha \\ z=\alpha \end{cases}$ tiene como vector director $\overrightarrow{u_r}=(0,1,1)$ y uno de sus puntos es $P_r(1,0,0)$

Hallamos un vector director y un punto de la recta s.

$$s \equiv \begin{cases} x-z=3 \\ y-3z=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3+z \\ y=4+3z \end{cases} \Rightarrow s: \begin{cases} x=3+\lambda \\ y=4+3\lambda \\ z=\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{v_s}=(1,3,1) \\ Q_s(3,4,0) \end{cases}$$

Los vectores directores no tienen coordenadas proporcionales, por lo que las rectas no son ni paralelas ni coincidentes.

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r}=(0,1,1) \\ \overrightarrow{v_s}=(1,3,1) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{0}{1} \neq \frac{1}{3} \neq \frac{1}{1}$$

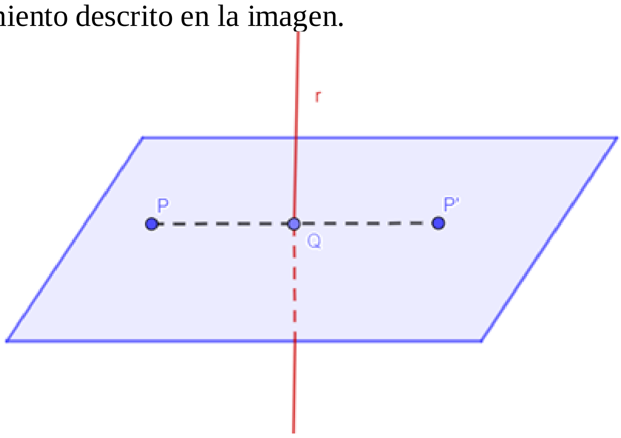
Las rectas se cortan o cruzan. Hallamos el valor del producto mixto $\left[\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{P_rQ_s}\right]$.

$$\left. \begin{array}{l} Q_s(3,4,0) \\ P_r(1,0,0) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{P_rQ_s}=(3,4,0)-(1,0,0)=(2,4,0)$$

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r}=(0,1,1) \\ \overrightarrow{v_s}=(1,3,1) \\ \overrightarrow{P_rQ_s}=(2,4,0) \end{array} \right\} \Rightarrow \left[\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{P_rQ_s}\right] = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 0+2+4-6=0$$

Como el producto mixto es nulo las rectas se cortan (están en un mismo plano y coinciden en un único punto).

b) Seguimos el procedimiento descrito en la imagen.



Hallamos el plano π perpendicular a la recta que pasa por el punto P. El vector normal del plano es el vector director de la recta.

$$\left.\begin{array}{l}\vec{n}=\overrightarrow{u_r}=(0,1,1)\\ P(1,0,1)\in\pi\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l}\pi: y+z+D=0\\ P(1,0,1)\in\pi\end{array}\right\}\Rightarrow 0+1+D=0\Rightarrow D=-1\Rightarrow \boxed{\pi: y+z-1=0}$$

Hallamos el punto Q de corte de recta y plano.

$$\left.\begin{array}{l}\pi: y+z-1=0\\ r=\begin{cases}x=1\\ y=\alpha\\ z=\alpha\end{cases}\end{array}\right\}\Rightarrow \alpha+\alpha-1=0\Rightarrow 2\alpha=1\Rightarrow \alpha=\frac{1}{2}\Rightarrow \begin{cases}x=1\\ y=\frac{1}{2}\\ z=\frac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow Q\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$$

Hallamos el punto P ´ sumando al punto Q el vector $\overrightarrow{PQ}$.

$$\overrightarrow{PQ}=\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)-(1,0,1)=\left(0,\frac{1}{2},\frac{-1}{2}\right)$$

$$P´=Q+\overrightarrow{PQ}=\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)+\left(0,\frac{1}{2},\frac{-1}{2}\right)=(1,1,0)$$

El punto P ´ simétrico a $P(1,0,1)$ respecto de la recta r tiene coordenadas $P´(1,1,0)$.

c) El plano que contiene a la recta s y al punto $P(1,0,1)$ tiene como vectores directores el vector director de la recta: $\overrightarrow{v_s}=(1,3,1)$ y el vector $\overrightarrow{PQ_s}$.

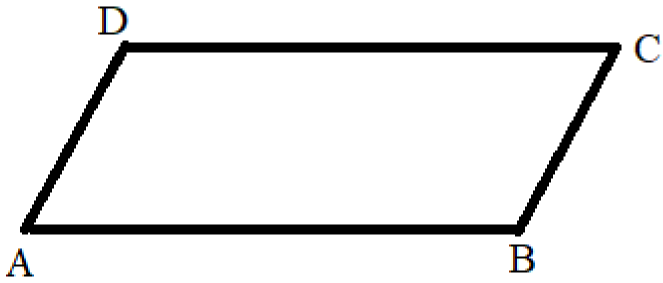
$$\overrightarrow{PQ_s}=(3,4,0)-(1,0,1)=(2,4,-1)$$

$$\left.\begin{array}{l}\vec{u}=\overrightarrow{PQ_s}=(2,4,-1)\\ \vec{v}=\overrightarrow{v_s}=(1,3,1)\\ P(1,0,1)\in\pi´\end{array}\right\}\Rightarrow \pi´:\begin{vmatrix}x-1 & y & z-1\\ 2 & 4 & -1\\ 1 & 3 & 1\end{vmatrix}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4x-4-y+6z-6-4z+4-2y+3x-3=0\Rightarrow \boxed{\pi´: 7x-3y+2z-9=0}$$

El plano que contiene a la recta s y al punto $P(1,0,1)$ tiene ecuación $\pi´: 7x-3y+2z-9=0$.

Problema 3B.
Los puntos $A(1,1,1)$, B (2,2,2) y $C(1,3,3)$ son vértices consecutivos del paralelogramo $ABCD$.
a) Calcular el área del paralelogramo. **(1 punto)**
b) Hallar la ecuación general del plano que contiene a dicho paralelogramo **(1 punto)**
c) Calcular las coordenadas del vértice D. **(0,5 puntos)**



a) El área del paralelogramo es el valor del módulo del producto vectorial $\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{BA}$.

$$\overrightarrow{BC}=(1,3,3)-(2,2,2)=(-1,1,1) \qquad \overrightarrow{BA}=(1,1,1)-(2,2,2)=(-1,-1,-1)$$

$$\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{BA}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix}=-i-j+k+k-j+i=-2j+2k=(0,-2,2)$$

$$Área\ \ ABCD=\left|\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{BA}\right|=\sqrt{0^2+(-2)^2+2^2}=\boxed{\sqrt{8}\ u^2}$$

b) El plano que contiene el paralelogramo es el plano que contiene los puntos A, B y C. Este plano tiene como vector normal el vector $\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{BA}$.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{n}=\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{BA}=(0,-2,2) \\ A(1,1,1)\in\pi \end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \pi:-2y+2z+D=0 \\ A(1,1,1)\in\pi \end{array}\right\}\Rightarrow -2+2+D=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow D=0\Rightarrow \pi:-2y+2z=0\Rightarrow \boxed{\pi: y-z=0}$$

c) El punto D se obtiene sumando al punto A(1,1,1) el vector $\overrightarrow{BC}=(-1,1,1)$.

$$D=A+\overrightarrow{BC}=(1,1,1)+(-1,1,1)=(0,2,2)$$

El cuarto vértice del paralelogramo tiene coordenadas $D(0,2,2)$.

Problema 4A.
En las pruebas de acceso a la universidad, las notas que se han obtenido por 1000 estudiantes han seguido una distribución normal de media 6,05 y desviación típica 2,5.
a) ¿Cuántos estudiantes han superado el 7? Razona la respuesta. **(1,25 puntos)**
b) Si tenemos que adjudicar 330 plazas, calcula razonadamente la nota de corte. **(1,25 puntos)**

X = La nota de un estudiante. X = N(6.05, 2.5)

a) Calculamos $P(X>7)$.

$$P(X>7)=\{Tipificamos\}=P\left(Z>\frac{7-6.05}{2.5}\right)=P(Z>0.38)=1-P(Z\leq 0.38)=$$

$$=\left\{\begin{array}{l}\text{Miramos en la}\\ \text{tabla N(0, 1)}\end{array}\right\}=1-0.648=\boxed{0.352}$$

	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844

La probabilidad de que un estudiante supere el 7 es de 0.352. De los 1000 estudiantes es de esperar que 1000 · 0.352 = 352 estudiantes superen el 7.

b) Nos piden hallar "n" tal que $P(X>n)=\frac{330}{1000}=0.33$.

$$P(X>n)=0.33\Rightarrow\{Tipificamos\}\Rightarrow P\left(Z>\frac{n-6.05}{2.5}\right)=0.33\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1-P\left(Z\leq\frac{n-6.05}{2.5}\right)=0.33\Rightarrow P\left(Z\leq\frac{n-6.05}{2.5}\right)=1-0.33=0.67\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\text{Buscamos en la}\\ \text{tabla N(0, 1)}\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{n-6.05}{2.5}=0.44\Rightarrow\boxed{n=6.05+0.44\cdot 2.5=7.15}$$

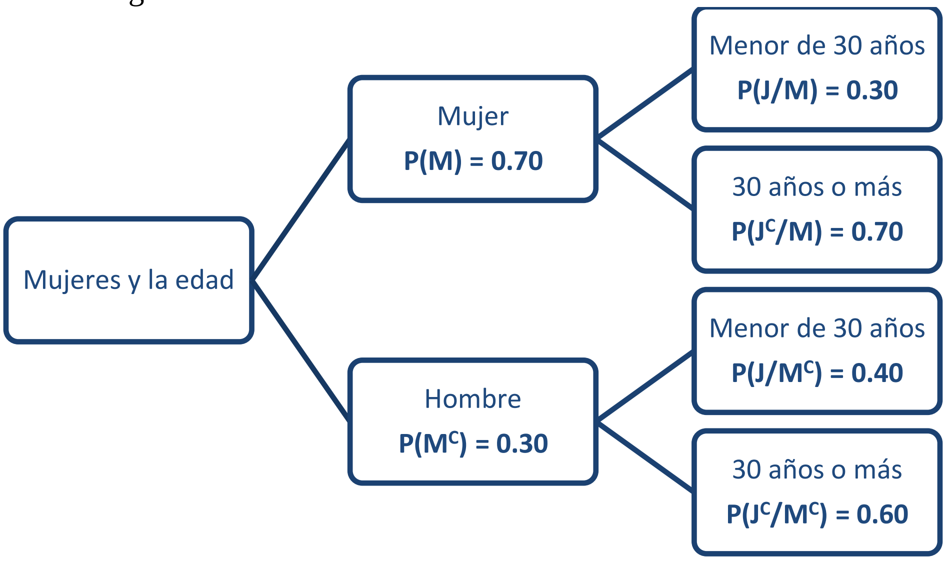
	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054

Si tenemos que adjudicar 330 plazas la nota de corte debe ser 7.15 puntos.

Problema 4B.
En una oficina del ayuntamiento se asigna un número a cada persona que entra. Se observa que el 70% de las personas que entran son mujeres y que el 40% de los hombres y el 30% de las mujeres que entran son menores de 30 años.
a) Indicar las probabilidades que aparecen en el enunciado utilizando una notación adecuada **(0,5 puntos)**
Si se escoge una persona al azar, calcula:
b) La probabilidad de que un número sea asignado a una persona menor de 30 años. **(0.5 puntos)**
c) La probabilidad de que un número sea asignado a un hombre que no tiene menos de 30 años. **(0.75 puntos)**
d) Si la persona a la que se le ha asignado un número no tiene menos de 30 años ¿cuál es la probabilidad de que sea hombre? **(0.75 puntos)**

a) Llamamos M= "Ser mujer", M^C = "ser hombre" y J = "Ser menor de 30 años".
Sabemos que $P(M)=0.70, P\left(M^C\right)=1-0.7=0.3, P(J/M)=0.30$ y $P\left(J/M^C\right)=0.40$.

b) Realizamos un diagrama de árbol.



Nos piden calcular P(J). Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(J)=P(M)P(J/M)+P\left(M^C\right)P\left(J/M^C\right)=0.7\cdot 0.3+0.3\cdot 0.4=\boxed{0.33}$$

c) Nos piden calcular $P\left(M^C\cap J^C\right)$.

$$P\left(M^C\cap J^C\right)=P\left(M^C\right)P\left(J^C/M^C\right)=0.3\cdot 0.6=\boxed{0.18}$$

d) Nos piden calcular $P\left(M^C/J^C\right)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P\left(M^C/J^C\right)=\frac{P\left(M^C\cap J^C\right)}{P\left(J^C\right)}=\frac{P\left(M^C\cap J^C\right)}{1-P(J)}=\frac{0.18}{1-0.33}=\boxed{\frac{18}{67}\simeq 0.2687}$$