



Proves d'accés a la universitat

Matemàtiques

Serie 1

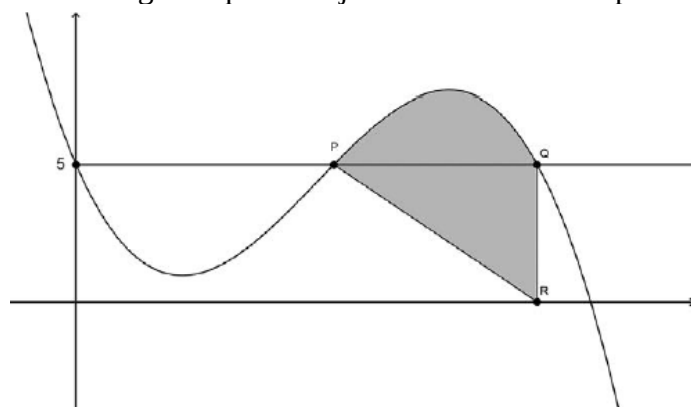
Responda a las CUATRO cuestiones siguientes. Observe que en la pregunta 4 debe elegir sólo una de las dos OPCIONES A o B. En las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué.

Cada cuestión vale 2,5 puntos. Es necesario que la redacción de la respuesta se haga de forma coherente, con corrección y claridad, utilizando la notación y el vocabulario matemático adecuados y expresando la solución de forma clara. En su defecto, se puede descontar hasta un máximo de 0,25 puntos del valor de la pregunta.

Puede utilizar calculadora, pero no se permite el uso de calculadoras u otros aparatos que puedan almacenar datos o que pueden transmitir o recibir información.

Puede utilizar las páginas en blanco (páginas 14 y 15) para realizar esquemas, borradores, etc., o para acabar de responder alguna cuestión si necesita más espacio. En este último caso, debe indicarlo claramente al final de la página de la cuestión correspondiente.

1. Joan encuentra entre los papeles de su abuelo un esbozo como el de la figura adjunta, donde se describe un terreno de regadío que ha dejado en herencia a su padre.



La curva de la gráfica es $y = f(x)$, con $f(x) = -x^3 + 7x^2 - 6x + 5$.

- A partir de la expresión de $f(x)$, calcule las coordenadas de los puntos P , Q y R indicados en la figura. Calcule también la ecuación de la recta PR . [1,25 puntos]
 - Calcule la superficie del terreno. [1,25 puntos]
2. Considere el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 4x + 2y - z = 4 \\ x - y + kz = 3 \\ 3x + 3y = 1 \end{cases}$$

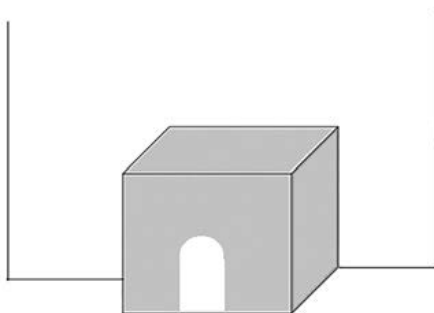
donde k es un parámetro real.

- Discuta el sistema para los diferentes valores del parámetro k , y resuélvalo para $k = 0$. [1 punto]
- Resuelva el sistema para $k = -1$. [0,75 puntos]
- Para $k = -1$, modifique la tercera ecuación de manera que el sistema resulte incompatible. Justifique la respuesta. [0,75 puntos]

3. Andreu pone las nueve bolas que se muestran a continuación dentro de una bolsa.



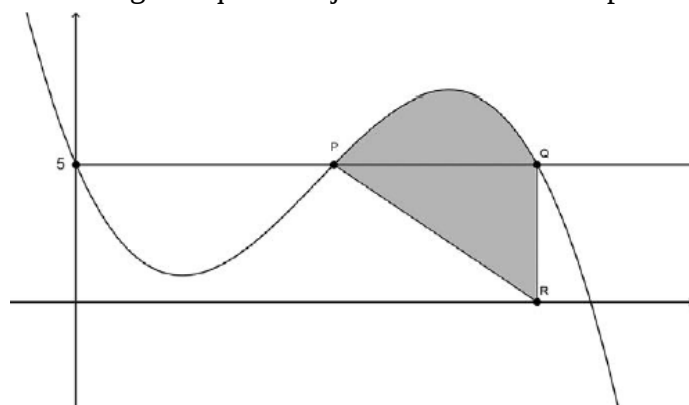
- a) A continuación, saca de la bolsa dos bolas al azar, una después de otra y sin reemplazo (es decir, no devuelve a la bolsa la primera bola antes de sacar la segunda). Calcule la probabilidad de que las dos bolas tengan letras diferentes. [0,75 puntos]
- b) Andreu vuelve a poner todas las bolas en la bolsa y saca cinco al azar, una detrás de otra, pero ahora con reemplazo (es decir, devolviendo a la bolsa cada bola extraída antes de sacar la siguiente). Calcule la probabilidad de que haya sacado al menos dos A. [0,75 puntos]
- c) Estudie los máximos y los mínimos, y las zonas de crecimiento y de decrecimiento, de la función $f(x) = 2 \frac{\ln x}{x}$, definida para $x > 0$. [1 punto]
4. **OPCIÓN A** Considere los puntos $A = (1, 2, 3)$ y $B = (-3, -2, 3)$.
- a) Calcule la ecuación del plano π que es perpendicular a la recta AB y que pasa por el punto medio entre A y B . Justifique que este plano está formado, precisamente, por los puntos $P = (x, y, z)$ que están a igual distancia de A que de B , es decir, $d(P, A) = d(P, B)$. [1 punto]
- b) Calcule las distancias de A y de B al plano π y compruebe que son iguales. ¿Es casualidad? Razone la respuesta. [0,75 puntos]
- c) Sea $C = (-7, 6, 3)$. ¿El triángulo ABC es isósceles? Calcule su área. [0,75 puntos]
4. **OPCIÓN B** Se quiere construir un pequeño cobertizo de madera de 6 m^3 de volumen, en forma de prisma rectangular, adosado a la pared lateral de una casa, para guardar leña. Solo hay que construir, por tanto, el techo y tres paredes (la pared del fondo del cobertizo es la de la casa a la que está adosado). Además, se quiere que el cobertizo mida el triple de anchura que de profundidad. Cada metro cuadrado de pared tiene un coste de construcción de 30 € y el techo cuesta 50 € por metro cuadrado. Una vez construido el cobertizo, añadir una puerta tiene un coste fijo de 35 €.



- a) Compruebe que el coste de construcción del cobertizo viene dado por la función $C(x) = \frac{300}{x} + 150x^2 + 35$, donde x es la profundidad del cobertizo en metros. [1,25 puntos]
- b) Calcule cuáles han de ser las dimensiones del cobertizo para que el coste de construcción sea mínimo y justifique la respuesta. ¿Cuál es este coste? [1,25 puntos]

SOLUCIONES

1. Joan encuentra entre los papeles de su abuelo un esbozo como el de la figura adjunta, donde se describe un terreno de regadío que ha dejado en herencia a su padre.



La curva de la gráfica es $y = f(x)$, con $f(x) = -x^3 + 7x^2 - 6x + 5$.

- a) A partir de la expresión de $f(x)$, calcule las coordenadas de los puntos P , Q y R indicados en la figura. Calcule también la ecuación de la recta PR . [1,25 puntos]
b) Calcule la superficie del terreno. [1,25 puntos]

- a) La recta horizontal que corta el terreno tiene ecuación $y = 5$, por lo que los puntos P y Q tienen coordenadas $P(p, 5)$ y $Q(q, 5)$.

Los puntos P y Q son los puntos de corte de la recta $y = 5$ con la curva.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = -x^3 + 7x^2 - 6x + 5 \\ y = 5 \end{array} \right\} \Rightarrow -x^3 + 7x^2 - 6x + 5 = 5 \Rightarrow -x^3 + 7x^2 - 6x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(-x^2 + 7x - 6) = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow A(0, 5) \\ -x^2 + 7x - 6 = 0 \rightarrow x = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4(-1)(-6)}}{2(-1)} = \\ = \frac{-7 \pm 5}{-2} = \begin{cases} \frac{-7+5}{-2} = 1 = x \rightarrow \boxed{P(1, 5)} \\ \frac{-7-5}{-2} = 6 = x \rightarrow \boxed{Q(6, 5)} \end{cases} \end{array} \right.$$

El punto P tiene coordenadas $P(1, 5)$ y el punto Q tiene coordenadas $Q(6, 5)$.

El punto R está en la misma vertical que el punto Q por lo que tiene coordenadas $R(6, 0)$.

Hallamos la ecuación de la recta PR .

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{PR} = (6, 0) - (1, 5) = (5, -5) \rightarrow m = \frac{-5}{5} = -1 \\ R(6, 0) \in \text{recta } PR \end{array} \right\} \Rightarrow y - 0 = -1(x - 6) \Rightarrow \boxed{y = -x + 6}$$

La ecuación de la recta PR es $y = -x + 6$.

- b) La superficie del terreno es el valor de la integral definida entre 1 y 6 de la diferencia entre la curva y la recta.

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_1^6 -x^3 + 7x^2 - 6x + 5 - (-x + 6) dx = \int_1^6 -x^3 + 7x^2 - 5x - 1 dx = \\ &= \left[-\frac{x^4}{4} + 7\frac{x^3}{3} - 5\frac{x^2}{2} - x \right]_1^6 = \left[-\frac{6^4}{4} + 7\frac{6^3}{3} - 5\frac{6^2}{2} - 6 \right] - \left[-\frac{1^4}{4} + 7\frac{1^3}{3} - 5\frac{1^2}{2} - 1 \right] = \\ &= -324 + 504 - 90 - 6 + \frac{1}{4} - \frac{7}{3} + \frac{5}{2} + 1 = \boxed{\frac{1025}{12} \approx 85.4167 \text{ u}^2} \end{aligned}$$

El terreno tiene una superficie de $\frac{1025}{12} \approx 85.4167 \text{ u}^2$.

2. Considere el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 4x + 2y - z = 4 \\ x - y + kz = 3 \\ 3x + 3y = 1 \end{cases}$$

donde k es un parámetro real.

a) Discuta el sistema para los diferentes valores del parámetro k , y resuélvalo para $k = 0$. [1 punto]

b) Resuelva el sistema para $k = -1$. [0,75 puntos]

c) Para $k = -1$, modifique la tercera ecuación de manera que el sistema resulte incompatible. Justifique la respuesta. [0,75 puntos]

a) Este sistema tiene la matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & k \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada

$$A/B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & k & 3 \\ 3 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vemos cuando se anula el determinante de la matriz de coeficientes.

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & k \\ 3 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 6k - 3 - 3 - 0 - 12k = -6k - 6$$

$$|A| = 0 \Rightarrow -6k - 6 = 0 \Rightarrow -6k = 6 \Rightarrow k = \frac{6}{-6} = -1$$

Estudiamos dos casos diferentes.

CASO 1. $k \neq -1$.

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada y el número de incógnitas. El sistema es **compatible determinado** (una única solución).

CASO 2. $k = -1$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

La matriz ampliada queda $A/B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \\ 3 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Estudiamos el rango de A y A/B usando el método de Gauss.

$$A/B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \\ 3 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila 3}^a - 3 \cdot \text{Fila 2}^a \\ 3 \quad 3 \quad 0 \quad 1 \\ -3 \quad 3 \quad 3 \quad -9 \\ \hline 0 \quad 6 \quad 3 \quad -8 \rightarrow \text{Nueva Fila 3}^a \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila 1}^a - 4 \cdot \text{Fila 2}^a \\ 4 \quad 2 \quad -1 \quad 4 \\ -4 \quad 4 \quad 4 \quad -12 \\ \hline 0 \quad 6 \quad 3 \quad -8 \rightarrow \text{Nueva Fila 2}^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 6 & 3 & -8 \\ 0 & 6 & 3 & -8 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila 3}^a - \text{Fila 2}^a \\ 0 \quad 6 \quad 3 \quad -8 \\ 0 \quad -6 \quad -3 \quad 8 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila 3}^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} \overbrace{4 \quad 2 \quad -1 \quad 4}^{A/B} \\ 0 \quad 6 \quad 3 \quad -8 \\ \underbrace{0 \quad 0 \quad 0 \quad 0}_A \end{pmatrix}$$

El rango de la matriz A es 2, al igual que el de la matriz A/B, pero menor que el número de incógnitas (3). El sistema es **compatible indeterminado** (infinitas soluciones).

Resumiendo: Para $k \neq -1$ el sistema es **compatible determinado** y para $k = -1$ el sistema es **compatible indeterminado**.

Resolvemos el sistema para $k = 0$.

$$\left\{ \begin{array}{l} 4x + 2y - z = 4 \\ x - y = 3 \\ 3x + 3y = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 4x + 2y - z = 4 \\ x = 3 + y \\ 3x + 3y = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 4(3 + y) + 2y - z = 4 \\ 3(3 + y) + 3y = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 12 + 4y + 2y - z = 4 \\ 9 + 3y + 3y = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 6y - z = -8 \\ 6y = -8 \rightarrow y = \frac{-8}{6} = \frac{-4}{3} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 6 \frac{-4}{3} - z = -8 \Rightarrow -8 - z = -8 \Rightarrow \boxed{z = 0} \\ \boxed{x = 3 - \frac{4}{3} = \frac{5}{3}} \end{array} \right.$$

Para $k = 0$ la solución del sistema es $x = \frac{5}{3}$, $y = \frac{-4}{3}$, $z = 0$.

b) Si $k = -1$ el sistema es compatible indeterminado (CASO 2).

Buscamos las soluciones a partir del sistema equivalente obtenido en el apartado anterior.

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 6 & 3 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 4x + 2y - z = 4 \\ 6y + 3z = -8 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 4x + 2y - z = 4 \\ 3z = -8 - 6y \rightarrow z = \frac{-8}{3} - 2y \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4x + 2y + \frac{8}{3} + 2y = 4 \Rightarrow 4x = 4 - \frac{8}{3} - 4y \Rightarrow 4x = \frac{4}{3} - 4y \Rightarrow x = \frac{1}{3} - y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3} - \lambda \\ y = \lambda \\ z = \frac{-8}{3} - 2\lambda \end{cases} ; \lambda \in \mathbb{R}$$

Las soluciones del sistema son $x = \frac{1}{3} - \lambda$; $y = \lambda$; $z = \frac{-8}{3} - 2\lambda$; para cualquier $\lambda \in \mathbb{R}$.

c) Para $k = -1$ el sistema queda
$$\begin{cases} 4x + 2y - z = 4 \\ x - y - z = 3 \\ 3x + 3y = 1 \end{cases}$$
. Cambiamos el término independiente de la

tercera ecuación por “a” y utilizamos el método de Gauss para triangular el sistema.

$$A/B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \\ 3 & 3 & 0 & a \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - 3 \cdot \text{Fila } 2^a \\ 3 \quad 3 \quad 0 \quad a \\ -3 \quad 3 \quad 3 \quad -9 \\ \hline 0 \quad 6 \quad 3 \quad a-9 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 1^a - 4 \cdot \text{Fila } 2^a \\ 4 \quad 2 \quad -1 \quad 4 \\ -4 \quad 4 \quad 4 \quad -12 \\ \hline 0 \quad 6 \quad 3 \quad -8 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 6 & 3 & -8 \\ 0 & 6 & 3 & a-9 \end{pmatrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 2^a \\ 0 \quad 6 \quad 3 \quad a-9 \\ 0 \quad -6 \quad -3 \quad 8 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad a-1 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} \overbrace{4 \quad 2 \quad -1 \quad 4}^{A/B} \\ 0 \quad 6 \quad 3 \quad -8 \\ \underbrace{0 \quad 0 \quad 0}_{A} \quad a-1 \end{pmatrix}$$

Para que sea un sistema incompatible “a” debe tomar cualquier valor distinto de 1, por ejemplo 2.

Un sistema incompatible sería
$$\begin{cases} 4x + 2y - z = 4 \\ x - y - z = 3 \\ 3x + 3y = 2 \end{cases}$$
.

3. Andreu pone las nueve bolas que se muestran a continuación dentro de una bolsa.



- a) A continuación, saca de la bolsa dos bolas al azar, una después de otra y sin reemplazo (es decir, no devuelve a la bolsa la primera bola antes de sacar la segunda). Calcule la probabilidad de que las dos bolas tengan letras diferentes. [0,75 puntos]
- b) Andreu vuelve a poner todas las bolas en la bolsa y saca cinco al azar, una detrás de otra, pero ahora con reemplazo (es decir, devolviendo a la bolsa cada bola extraída antes de sacar la siguiente). Calcule la probabilidad de que haya sacado al menos dos A. [0,75 puntos]
- c) Estudie los máximos y los mínimos, y las zonas de crecimiento y de decrecimiento, de la función $f(x) = 2 \frac{\ln x}{x}$, definida para $x > 0$. [1 punto]

- a) Las únicas bolas repetidas son la A y la S. Llamamos R al suceso “sacar dos bolas repetidas” = “sacar dos A o dos S”. Calculamos la probabilidad del suceso R.

$$P(R) = P(A1)P(A2/A1) + P(S1)P(S2/S1) = \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{8} + \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{8} = \boxed{\frac{1}{18}}$$

El suceso “sacar dos bolas diferentes” es el suceso complementario del suceso R. Calculamos su probabilidad como la probabilidad de R^C .

$$P(R^C) = 1 - P(R) = 1 - \frac{1}{18} = \boxed{\frac{17}{18}}$$

La probabilidad de que las dos bolas tengan letras diferentes tiene un valor de $\frac{17}{18} \approx 0.9444$.

- b) La probabilidad de sacar A en una extracción es $2/9$ y la de no sacar A es $7/9$. La probabilidad de no sacar ninguna A en 5 extracciones es:

$$\begin{aligned} P(\text{Ninguna A}) &= P(A1^C \cap A2^C \cap A3^C \cap A4^C \cap A5^C) = \\ &= P(A1^C) \cdot P(A2^C) \cdot P(A3^C) \cdot P(A4^C) \cdot P(A5^C) = \frac{7}{9} \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{7}{9} = \left(\frac{7}{9}\right)^5 \approx 0.2846 \end{aligned}$$

Para sacar solo una A en 5 extracciones debemos sacar A en la primera y no sacarla en la segunda, o bien sacar A en la segunda y no en el resto, o bien, sacarla en la tercera y no en el resto, o bien, sacarla en la cuarta y no en el resto, o bien, sacarla en la quinta y no en el resto, La probabilidad de sacar una A en 5 extracciones es:

$$\begin{aligned} P(\text{sacar 1 vez A}) &= P(A1 \cap A2^C \cap A3^C \cap A4^C \cap A5^C) + \\ &+ P(A1^C \cap A2 \cap A3^C \cap A4^C \cap A5^C) + P(A1^C \cap A2^C \cap A3 \cap A4^C \cap A5^C) + \\ &+ P(A1^C \cap A2^C \cap A3^C \cap A4 \cap A5^C) + P(A1^C \cap A2^C \cap A3^C \cap A4^C \cap A5) = \end{aligned}$$

$$= \frac{2}{9} \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{7}{9} + \frac{7}{9} \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{7}{9} + \frac{7}{9} \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{7}{9} + \frac{7}{9} \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{7}{9} + \frac{7}{9} \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{2}{9} = \boxed{5 \cdot \frac{2}{9} \cdot \left(\frac{7}{9}\right)^4}$$

El suceso complementario de B = “sacar al menos dos A en 5 extracciones” es B^C = “sacar 1 o ninguna A en 5 extracciones”.

Calculamos la probabilidad de B^C .

$$P(B^C) = P(\text{sacar 0 veces A}) + P(\text{sacar 1 vez A}) = \left(\frac{7}{9}\right)^5 + 5 \cdot \frac{2}{9} \cdot \left(\frac{7}{9}\right)^4 = \boxed{0.6912}$$

Aplicando la probabilidad del suceso complementario tenemos que la probabilidad de que haya sacado al menos dos A vale $1 - P(B^C) = 1 - 0.6912 = 0.3088$.

TAMBIEN SE PUEDE RESOLVER EL APARTADO b) UTILIZANDO LA DISTRIBUCIÓN BINOMIAL X = Número de A en 5 extracciones. $X \sim B(5, 2/9)$.

$$P(B) = 1 - P(X=0) - P(X=1) = 1 - \binom{5}{0} \left(\frac{2}{9}\right)^0 \left(1 - \frac{2}{9}\right)^5 - \binom{5}{1} \left(\frac{2}{9}\right)^1 \left(1 - \frac{2}{9}\right)^4 = \boxed{0.3088}$$

c) Utilizamos la derivada para encontrar los puntos críticos de la función.

$$f(x) = 2 \frac{\ln x}{x} \Rightarrow f'(x) = 2 \frac{\frac{1}{x} x - 1 \cdot \ln x}{x^2} = 2 \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 2 \frac{1 - \ln x}{x^2} = 0 \Rightarrow 1 - \ln x = 0 \Rightarrow \ln x = 1 \Rightarrow \boxed{x = e}$$

La función tiene un punto crítico en $x = e$.

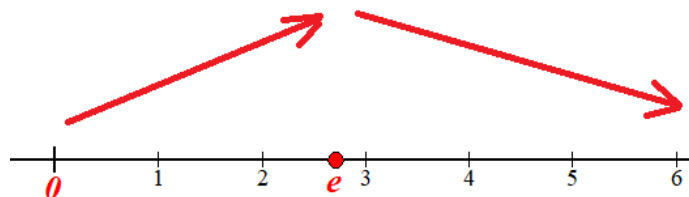
Estudiamos el signo de la derivada antes y después de este valor.

- En el intervalo $(0, e)$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale $f'(1) = 2 \frac{1 - \ln 1}{1^2} = 2 > 0$. La función crece en $(0, e)$.

- En el intervalo $(e, +\infty)$ tomamos $x = e^2$ y la derivada vale

$$f'(e^2) = 2 \frac{1 - \ln e^2}{(e^2)^2} = 2 \frac{-1}{e^4} = \frac{-2}{e^4} < 0. \text{ La función decrece en } (e, +\infty).$$

La función sigue el esquema siguiente.



La función crece en $(0, e)$ y decrece en $(e, +\infty)$.

La función tiene un máximo relativo en $x = e$.

4. OPCIÓN A Considere los puntos $A = (1, 2, 3)$ y $B = (-3, -2, 3)$.

- a) Calcule la ecuación del plano π que es perpendicular a la recta AB y que pasa por el punto medio entre A y B . Justifique que este plano está formado, precisamente, por los puntos $P = (x, y, z)$ que están a igual distancia de A que de B , es decir, $d(P, A) = d(P, B)$. [1 punto]
- b) Calcule las distancias de A y de B al plano π y compruebe que son iguales. ¿Es casualidad? Razone la respuesta. [0,75 puntos]
- c) Sea $C = (-7, 6, 3)$. ¿El triángulo ABC es isósceles? Calcule su área. [0,75 puntos]

- a) El plano π que es perpendicular a la recta AB tiene como vector normal el vector $\overrightarrow{AB} = (-3, -2, 3) - (1, 2, 3) = (-4, -4, 0)$. Tomamos como vector normal del plano este vector dividido entre -4 .
Hallamos del punto P punto medio del segmento AB .

$$P = \frac{(1, 2, 3) + (-3, -2, 3)}{2} = (-1, 0, 3)$$

Hallamos la ecuación del plano π como la ecuación del plano que pasa por $P(-1, 0, 3)$ y tiene como vector normal el vector $\frac{1}{-4}\overrightarrow{AB}$.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{n} = \frac{\overrightarrow{AB}}{-4} = (1, 1, 0) \\ P = (-1, 0, 3) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \pi : x + y + D = 0 \\ P = (-1, 0, 3) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow -1 + 0 + D = 0 \Rightarrow D = 1 \Rightarrow \boxed{\pi : x + y + 1 = 0}$$

El plano π que es perpendicular a la recta AB y que pasa por el punto medio entre A y B tiene ecuación $\pi : x + y + 1 = 0$.

Comprobamos que los puntos del plano $P = (x, y, z)$ están a igual distancia de A que de B , es decir, $d(P, A) = d(P, B)$.

$$\left. \begin{array}{l} P(x, y, z) \in \pi \\ \pi : x + y + 1 = 0 \Rightarrow \pi : y = -1 - x \end{array} \right\} \Rightarrow P(x, -1 - x, z)$$

$$\overrightarrow{AP} = (x, -1 - x, z) - (1, 2, 3) = (x - 1, -3 - x, z - 3)$$

$$\overrightarrow{BP} = (x, -1 - x, z) - (-3, -2, 3) = (x + 3, 1 - x, z - 3)$$

$$\left. \begin{array}{l} d(P, A) = |\overrightarrow{AP}| = \sqrt{(x-1)^2 + (-3-x)^2 + (z-3)^2} = \sqrt{(1-x)^2 + (3+x)^2 + (z-3)^2} \\ d(P, B) = |\overrightarrow{BP}| = \sqrt{(x+3)^2 + (1-x)^2 + (z-3)^2} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d(P, A) = d(P, B)$$

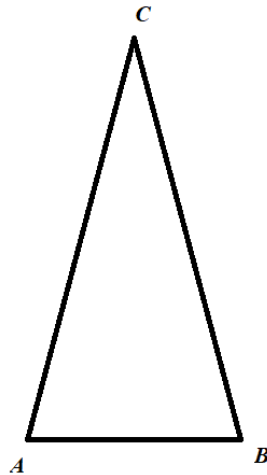
- b) Por lo visto en el apartado anterior todos los puntos del plano están a la misma distancia de los puntos A y B, por lo que el plano pasa por el punto medio del segmento AB y es perpendicular a la recta AB. Por ello la distancia de A y de B al plano es la misma. Comprobamos que $d(A, \pi) = d(B, \pi)$.

$$\left. \begin{array}{l} \pi : x + y + 1 = 0 \\ A(1, 2, 3) \end{array} \right\} \Rightarrow d(A, \pi) = \frac{|1 + 2 + 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{4}{\sqrt{2}}$$

$$\left. \begin{array}{l} \pi : x + y + 1 = 0 \\ B(-3, -2, 3) \end{array} \right\} \Rightarrow d(B, \pi) = \frac{|-3 - 2 + 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{4}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow d(A, \pi) = d(B, \pi) = 2\sqrt{2}$$

- c) Para que el triángulo ABC sea isósceles debe tener dos lados iguales y un tercero desigual.



Hallamos la longitud de los lados.

$$\overrightarrow{AC} = (-7, 6, 3) - (1, 2, 3) = (-8, 4, 0) \Rightarrow d(A, C) = |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(-8)^2 + 4^2} = 4\sqrt{5}$$

$$\overrightarrow{BC} = (-7, 6, 3) - (-3, -2, 3) = (-4, 8, 0) \Rightarrow d(B, C) = |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{4^2 + 8^2} = 4\sqrt{5}$$

$$\overrightarrow{AB} = (-3, -2, 3) - (1, 2, 3) = (-4, -4, 0) \Rightarrow d(A, B) = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-4)^2 + (-4)^2} = 4\sqrt{2}$$

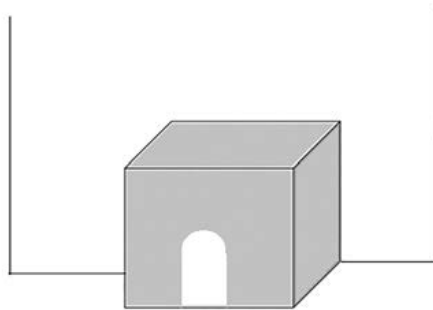
El triángulo ABC tiene dos lados iguales y uno desigual. El triángulo ABC es isósceles. Hallamos el área del triángulo ABC como la mitad del módulo del vector $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$.

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{AC} = (-8, 4, 0) \\ \overrightarrow{AB} = (-4, -4, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -8 & 4 & 0 \\ -4 & -4 & 0 \end{vmatrix} = 32k + 16k = 48k = (0, 0, 48)$$

$$\text{Área } ABC = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}{2} = \frac{48}{2} = 24$$

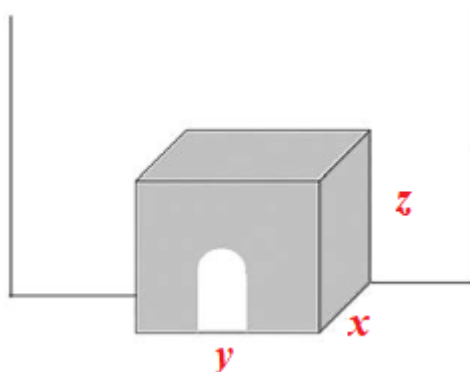
El triángulo ABC tiene un área de 24 unidades cuadradas.

- 4. OPCIÓN B** Se quiere construir un pequeño cobertizo de madera de 6 m^3 de volumen, en forma de prisma rectangular, adosado a la pared lateral de una casa, para guardar leña. Solo hay que construir, por tanto, el techo y tres paredes (la pared del fondo del cobertizo es la de la casa a la que está adosado). Además, se quiere que el cobertizo mida el triple de anchura que de profundidad. Cada metro cuadrado de pared tiene un coste de construcción de 30 € y el techo cuesta 50 € por metro cuadrado. Una vez construido el cobertizo, añadir una puerta tiene un coste fijo de 35 €.



- a) Compruebe que el coste de construcción del cobertizo viene dado por la función $C(x) = \frac{300}{x} + 150x^2 + 35$, donde x es la profundidad del cobertizo en metros. [1,25 puntos]
- b) Calcule cuáles han de ser las dimensiones del cobertizo para que el coste de construcción sea mínimo y justifique la respuesta. ¿Cuál es este coste? [1,25 puntos]

a) Llamamos “ x ” a la profundidad, “ y ” a la anchura y “ z ” a la altura del cobertizo.



El cobertizo mide el triple de anchura que de profundidad $\rightarrow y = 3x$.

El cobertizo de madera tiene 6 m^3 de volumen $\rightarrow xyz = 6 \Rightarrow z = \frac{6}{xy} = \frac{6}{x \cdot 3x} = \frac{2}{x^2}$.

Calculamos la superficie de las tres paredes.

$$\text{Paredes} = 2xz + yz = 2x \frac{2}{x^2} + 3x \frac{2}{x^2} = \frac{4}{x} + \frac{6}{x} = \frac{10}{x}$$

Calculamos la superficie del techo.

$$\text{Techo} = xy = x3x = 3x^2$$

Calculamos el coste total sumando el coste de las paredes más el coste del techo.

Cada metro cuadrado de pared tiene un coste de construcción de 30 € y el techo cuesta 50 € por metro cuadrado $\rightarrow C(x) = 30 \frac{10}{x} + 50 \cdot 3x^2 = \frac{300}{x} + 150x^2$.

Añadir una puerta tiene un coste fijo de 35 € $\rightarrow C(x) = \frac{300}{x} + 150x^2 + 35$.

El coste del cobertizo en función de la profundidad del cobertizo (x) tiene la expresión

$$C(x) = \frac{300}{x} + 150x^2 + 35.$$

b) Derivamos la función coste y buscamos cuando se anula.

$$C(x) = \frac{300}{x} + 150x^2 + 35 \Rightarrow C'(x) = -\frac{300}{x^2} + 300x$$

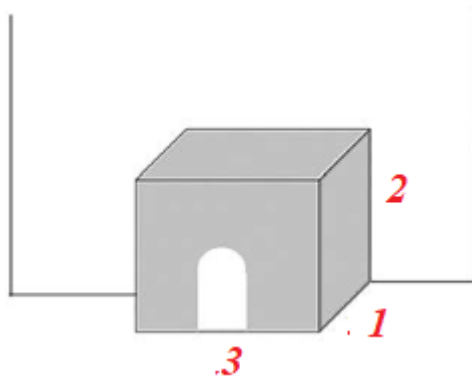
$$C'(x) = 0 \Rightarrow -\frac{300}{x^2} + 300x = 0 \Rightarrow 300x = \frac{300}{x^2} \Rightarrow 300x^3 = 300 \Rightarrow x^3 = 1 \Rightarrow \boxed{x = \sqrt[3]{1} = 1}$$

Sustituimos $x = 1$ en la segunda derivada para averiguar si en dicho valor la función tiene un máximo o un mínimo.

$$C'(x) = -\frac{300}{x^2} + 300x \Rightarrow C''(x) = 2\frac{300}{x^3} + 300 \Rightarrow C''(1) = 2\frac{300}{1^3} + 300 = 900 > 0$$

Al tener la segunda derivada un valor positivo podemos afirmar que la función coste tiene un mínimo relativo en $x = 1$.

Las medidas del cobertizo con coste mínimo son 1 metro de profundidad, 3 metros de anchura y $\frac{2}{1^2} = 2$ metros de altura.



Sustituimos $x = 1$ en la función coste y obtenemos el coste mínimo del cobertizo.

$$C(1) = \frac{300}{1} + 150 \cdot 1^2 + 35 = 485$$

El coste mínimo tiene un valor de 485 euros.