Prueba de Acceso a la Universidad (PAU)

Universidad de Extremadura

Curso 2024-2025

Materia: MATEMÁTICAS II Tiempo máximo de la prueba: 1h 30 min

INSTRUCCIONES PARA REALIZAR EL EXAMEN: El estudiante deberá resolver cuatro ejercicios de los propuestos en este examen.

Este examen consta de 4 APARTADOS. Los apartados 1, 2, 3 con dos ejercicios A y B optativos cada uno. El apartado 4 con un único ejercicio obligatorio. En los apartados 1, 2 y 3 se deberá contestar solamente a UNO de los dos ejercicios (A ó B) propuestos. Si resuelve más de uno, se corregirá el que aparezca físicamente en primer lugar, salvo que aparezca tachado.

Cada ejercicio completo puntuará 2,5 puntos. Entre corchetes está la puntuación máxima por apartado.

Criterios generales: Las respuestas a las preguntas de los ejercicios deben realizarse expresando de forma razonada el proceso seguido en su resolución, con el rigor y la precisión necesarios, usando el lenguaje, la notación y los símbolos matemáticos adecuados, y utilizando argumentos, justificaciones, explicaciones y razonamientos explícitos y coherentes. La mera descripción del planteamiento, sin que se lleve a cabo la resolución de manera efectiva, no es suficiente para obtener una valoración completa de cada pregunta o ejercicio.

En las preguntas o tareas en los que se pida expresamente una deducción razonada, la mera aplicación de una fórmula no será suficiente para obtener una valoración completa de los mismos.

Los errores en las operaciones aritméticas elementales se penalizarán con un máximo de 0.25 puntos en cada pregunta o ejercicio.

Ortografía y redacción: Se valorará la corrección ortográfica (grafías, tildes y puntuación), así como la coherencia, la cohesión, la corrección gramatical y léxica, la presentación. Se podrá deducir hasta 1 punto. Además, en la puntuación máxima de cada pregunta o ejercicio están contemplados 0.25 puntos para valorar la expresión correcta de los procesos y métodos utilizados, sin sobrepasar el total de 1 punto antes referido.

Materiales: Se permitirá una calculadora no gráfica, no programable.

Este documento es un modelo de examen que tiene carácter orientativo y puede servir como referencia para el estudiante que realice las pruebas. No obstante, además de los problemas contenidos en este modelo de examen, podrán plantearse otros tipos de ejercicios que se encuadren en lo establecido en los saberes básicos que aparecen en el currículo de la materia publicados en el Real Decreto 243/2022, de 5 de abril por el que se establecen la ordenación y las enseñanzas mínimas del Bachillerato.

APARTADO 1 (Bloques A+D, SENTIDOS NUMÉRICO Y ALGEBRAICO)

EJERCICIO 1A. [2,5 puntos]

Considera el siguiente sistema de ecuaciones, donde $m \in \mathbb{R}$: $\begin{cases} mx + 2y + z = 1 \\ 2x + my + z = m \\ 5x + 2y + z = 1 \end{cases}$

a) Discute el sistema de ecuaciones según los valores del parámetro *m*. Indica el número de soluciones en cada caso. **[1,5 puntos]**

b) Resuelve, razonadamente, el sistema de ecuaciones para $m = 3$ **[1 puntos]**

EJERCICIO 1B. [2,5 puntos, planteamiento hasta 1 punto, cálculo de X hasta 1,5 puntos]

Consideramos las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -3 & -8 & 8 \\ 3 & 7 & -6 \\ 2 & 4 & -3 \end{pmatrix}$

Halla matriz X que verifica: $AX + B^t = 2A + X$

APARTADO 2 (Bloque B, SENTIDO DE LA MEDIDA)

EJERCICIO 2A. [2,5 puntos]
Dada la función $f(x)=(x+2)\cdot e^{-x}$.

a) Encuentra los extremos relativos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f [**1 punto]**
b) Determina la concavidad y convexidad y puntos de inflexión de la función f **[0,75 puntos]**
c) Estudia las asíntotas de f **[0,75 puntos]**

EJERCICIO 2B. [2,5 puntos]
Dadas las funciones $f(x)=2x+6$ y $g(x)=x^2-3x$

a) Calcula $\int \frac{f(x)}{g(x)}dx$ **[1,25 puntos]**

b) Halla el área de dicho recinto limitado por las gráficas de las funciones $f(x)$ y $g(x)$. **[1,25 puntos]**

APARTADO 3 (Bloque C, SENTIDO ESPACIAL)

EJERCICIO 3A. [2,5 puntos]
Sea el punto $P(1,0,-2)$ y la recta $r:\frac{x-5}{2}=\frac{y-3}{2}=\frac{z+3}{-3}$

Se pide:
a) La ecuación continua de la recta *s* que pasa por P y que corta a *r* perpendicularmente. **[1 punto]**
b) La ecuación del plano que contiene a las dos rectas *r* y *s*. **[0,75 puntos]**
c) La distancia del punto P a la recta *r*. **[0,75 puntos]**

EJERCICIO 3B. [2,5 puntos]
Sean P(−1, 2, 3), Q(−2, 1, 0) y R(0, 5, 1) los vértices de un triángulo:
a) Calcula el área y el perímetro de dicho triángulo. **[1,5 puntos]**
b) Calcula la ecuación de la recta que pasa por el origen de coordenadas y es perpendicular al plano que contiene a los puntos P, Q y R. **[1 punto]**

APARTADO 4 (Bloque E, SENTIDO ESTOCÁSTICO)

EJERCICIO 4. [2,5 puntos]
Una persona tiene que ser operada de la rodilla y para ello ha sido incluida en la lista de espera. Según los últimos datos publicados por el Servicio Extremeño de Salud (SES), el tiempo medio de espera en Extremadura para ser operado por el servicio de Traumatología es de 242 días. Sabiendo que dicho tiempo medio se distribuye normalmente con una desviación típica de 10 días:
a) ¿Qué probabilidad hay de que esa persona sea intervenida antes de 200 días? **[0,75 puntos]**
b) Por otra parte, se está estudiando la posibilidad de que un paciente sea intervenido en la sanidad privada siempre que no haya podido ser atendido antes de los 260 días. De ser así, ¿qué probabilidad hay de que sea atendida en la sanidad privada? **[0,75 puntos]**
c) Si finalmente el 70% de los pacientes en lista de espera fueron atendidos antes que esta persona, ¿cuántos días estuvo en lista de espera la persona en cuestión? **[1 punto]**

SOLUCIONES

EJERCICIO 1A. [2,5 puntos]

Considera el siguiente sistema de ecuaciones, donde $m \in \mathbb{R}$: $\begin{cases} mx + 2y + z = 1 \\ 2x + my + z = m \\ 5x + 2y + z = 1 \end{cases}$

a) Discute el sistema de ecuaciones según los valores del parámetro *m*. Indica el número de soluciones en cada caso. **[1,5 puntos]**
b) Resuelve, razonadamente, el sistema de ecuaciones para *m = 3* **[1 puntos]**

a) El sistema tiene como matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} m & 2 & 1 \\ 2 & m & 1 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ y como matriz ampliada

$$A/B = \begin{pmatrix} m & 2 & 1 & 1 \\ 2 & m & 1 & m \\ 5 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Averiguamos cuando se anula el determinante de A.

$$|A| = \begin{vmatrix} m & 2 & 1 \\ 2 & m & 1 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix} = m^2 + 10 + 4 - 5m - 4 - 2m = m^2 - 7m + 10$$

$$|A| = 0 \Rightarrow m^2 - 7m + 10 = 0 \Rightarrow m = \frac{7 \pm \sqrt{(-7)^2 - 40}}{2} = \frac{7 \pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{7+3}{2} = \boxed{5 = m} \\ \frac{7-3}{2} = \boxed{2 = m} \end{cases}$$

Nos surgen tres situaciones distintas que analizamos por separado.

CASO 1. $m \neq 2$ y $m \neq 5$.
En este caso el determinante de la matriz A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada A/B y el número de incógnitas.
El sistema es compatible determinado (una única solución)

CASO 2. $m = 2$
En este caso el determinante de la matriz A es nulo y su rango no es 3. Analizamos su rango y el de la matriz ampliada obteniendo una matriz triangular equivalente a la matriz ampliada.

$$A/B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^{a} - \text{Fila } 1^{a} \\ \begin{array}{cccc} 2 & 2 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & -1 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \to \text{Nueva fila } 2^{a} \end{array} \right\}$$

$$\left\{\begin{array}{cccc} \multicolumn{4}{l}{2\cdot \text{Fila } 3^{a} - 5\cdot \text{Fila } 1^{a}} \\ 10 & 4 & 2 & 2 \\ -10 & -10 & -5 & -5 \\ \hline 0 & -6 & -3 & -3 \rightarrow \text{Nueva fila } 3^{a} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -6 & -3 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{\text{Fila } 2^{a} \leftrightarrow \text{Fila } 3^{a}\} \Rightarrow \left(\overbrace{\begin{matrix} 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -6 & -3 & -3 \\ \underbrace{0 \quad 0 \quad 0}_{A} & & & 1 \end{matrix}}^{A/B}\right)$$

El rango de A es 2, pero el de A/B es 3. Tienen rangos distintos y el sistema es incompatible (sin solución).

CASO 3. $m = 5$

En este caso el determinante de la matriz A es nulo y su rango no es 3. Analizamos su rango y el de la matriz ampliada obteniendo una matriz triangular equivalente a la matriz ampliada.

$$A/B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 5 \\ 5 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{\begin{array}{cccc} \multicolumn{4}{l}{\text{Fila } 3^{a} - \text{Fila } 1^{a}} \\ 5 & 2 & 1 & 1 \\ -5 & -2 & -1 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \rightarrow \text{Nueva fila } 3^{a} \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{cccc} \multicolumn{4}{l}{2\cdot \text{Fila } 1^{a} - 5\cdot \text{Fila } 2^{a}} \\ 10 & 4 & 2 & 2 \\ -10 & -25 & -5 & -25 \\ \hline 0 & -21 & -3 & -23 \rightarrow \text{Nueva fila } 2^{a} \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\overbrace{\begin{matrix} 5 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -21 & -3 & -23 \\ \underbrace{0 \quad 0 \quad 0}_{A} & & & 0 \end{matrix}}^{A/B}\right)$$

El rango de A es 2, igual que el de A/B, pero menor que el número de incógnitas (3). El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

b) Para $m = 3$ el sistema es compatible determinado. Lo resolvemos.

$$\begin{cases} 3x+2y+z=1 \\ 2x+3y+z=3 \\ 5x+2y+z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=1-3x-2y \\ 2x+3y+z=3 \\ 5x+2y+z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+3y+1-3x-2y=3 \\ 5x+2y+1-3x-2y=1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -x+y=2 \\ 2x=0 \rightarrow \boxed{x=0} \end{cases} \Rightarrow \boxed{y=2} \Rightarrow \boxed{z=1-0-4=-3}$$

La solución es $x = 0$, $y = 2$, $z = -3$.

EJERCICIO 1B. [2,5 puntos, planteamiento hasta 1 punto, cálculo de X hasta 1,5 puntos]

Consideramos las matrices $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} -3 & -8 & 8 \\ 3 & 7 & -6 \\ 2 & 4 & -3 \end{pmatrix}$

Halla matriz X que verifica: $AX+B^t=2A+X$

Despejamos X en la ecuación matricial $AX+B^t=2A+X$.

$$AX+B^t=2A+X \Rightarrow AX-X=2A-B^t \Rightarrow (A-I)X=2A-B^t \Rightarrow X=(A-I)^{-1}(2A-B^t)$$

Comprobamos que la matriz $A-I$ tiene inversa y la calculamos.

$$A-I=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|A-I|=\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix}=-1+0+0+2-0-0=1\neq 0 \rightarrow \text{Existe la inversa}$$

$$(A-I)^{-1}=\frac{Adj\left((A-I)^t\right)}{|A-I|}=\frac{Adj\begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}{1}=\begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$(A-I)^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Hallamos la expresión de X.

$$2A-B^t=2\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -3 & 3 & 2 \\ -8 & 7 & 4 \\ 8 & -6 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 8 & -3 & -4 \\ -12 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$

$$X=(A-I)^{-1}(2A-B^t)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 8 & -3 & -4 \\ -12 & 8 & 7 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 3+12 & -1-8 & -7 \\ 8 & -3 & -4 \\ 6-8+12 & -2+3-8 & 4-7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 15 & -9 & -7 \\ 8 & -3 & -4 \\ 10 & -7 & -3 \end{pmatrix}$$

La matriz X solución de la ecuación matricial $AX+B^t=2A+X$ es $X=\begin{pmatrix} 15 & -9 & -7 \\ 8 & -3 & -4 \\ 10 & -7 & -3 \end{pmatrix}$.

EJERCICIO 2A. [2,5 puntos]
Dada la función $f(x)=(x+2)\cdot e^{-x}$.
a) Encuentra los extremos relativos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f **[1 punto]**
b) Determina la concavidad y convexidad y puntos de inflexión de la función f **[0,75 puntos]**
c) Estudia las asíntotas de f **[0,75 puntos]**

a) El dominio de la función es $\mathbb{R}$.
Averiguamos cuando se anula la derivada de la función (puntos críticos)

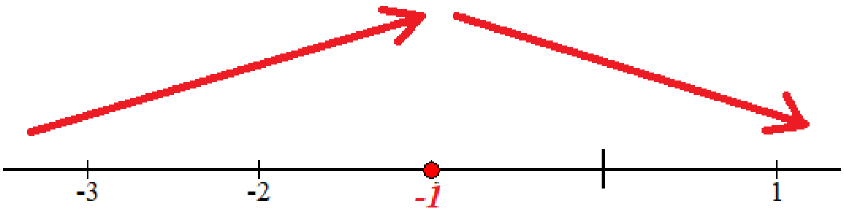
$$f(x)=(x+2)\cdot e^{-x} \Rightarrow f'(x)=1\cdot e^{-x}+(x+2)(-1)\cdot e^{-x}=(-x-2+1)e^{-x}=(-x-1)e^{-x}$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow (-x-1)e^{-x}=0 \Rightarrow -x-1=0 \Rightarrow \boxed{x=-1}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes y después del punto crítico $x=-1$.

- En el intervalo $(-\infty,-1)$ tomamos $x=-2$ y la derivada vale $f'(-2)=(-(-2)-1)e^{-(-2)}=e^2>0$. La función crece en $(-\infty,-1)$.
- En el intervalo $(-1,+\infty)$ tomamos $x=0$ y la derivada vale $f'(0)=(-0-1)e^{-0}=-1<0$. La función decrece en $(-1,+\infty)$.

La función sigue el esquema siguiente.



La función crece en $(-\infty,-1)$ y decrece en $(-1,+\infty)$.
La función tiene un máximo relativo en $x=-1$. Como $f(-1)=(-1+2)\cdot e^{-(-1)}=e$ el máximo relativo tiene coordenadas (–1, e).

b) Averiguamos cuando se anula la segunda derivada.

$$f'(x)=(-x-1)e^{-x} \Rightarrow f''(x)=(-1)e^{-x}+(-x-1)(-1)e^{-x}=(-1+x+1)e^{-x}=xe^{-x}$$

$$f''(x)=0 \Rightarrow xe^{-x}=0 \Rightarrow \boxed{x=0}$$

Estudiamos el signo de la segunda derivada antes y después de $x=0$.

- En el intervalo $(-\infty,0)$ tomamos $x=-1$ y la segunda derivada vale $f''(-1)=-e^1=-e<0$. La gráfica es cóncava (∩) en el intervalo $(-\infty,0)$.

- En el intervalo $(0,+\infty)$ tomamos $x=1$ y la segunda derivada vale $f''(1)=e^{-1}>0$. La gráfica es convexa (∪) en el intervalo $(0,+\infty)$.

La función es cóncava (∩) en el intervalo $(-\infty,0)$ y convexa (∪) en el intervalo $(0,+\infty)$.
La función presenta un punto de inflexión en $x=0$. Como $f(0)=(0+2)\cdot e^{-0}=2$ el punto de inflexión tiene coordenadas (0, 2).

c) **Asíntota vertical.** $x=a$
Al ser el dominio de la función todos los números reales no existe asíntota vertical.

Asíntota horizontal. $y=b$
Cuando *x* tiende a +∞.

$$b=\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}(x+2)\cdot e^{-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+2}{e^x}=\frac{+\infty}{+\infty}=\text{Indeterminación (L´Hôpital)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=\frac{1}{\infty}=0$$

La recta $y=0$ es asíntota horizontal cuando *x* tiende a +∞.

Cuando *x* tiende a –∞.

$$b=\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}(x+2)\cdot e^{-x}=(-\infty)e^{+\infty}=-\infty$$

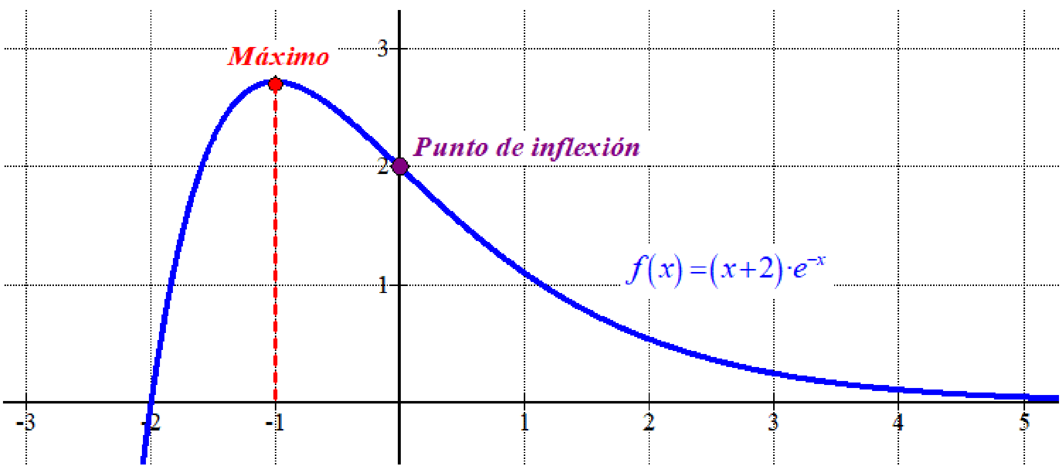
No existe asíntota horizontal cuando *x* tiende a –∞.

Asíntota oblicua. $y=mx+n$
Cuando *x* tiende a +∞ existe asíntota horizontal, por lo que no existe asíntota oblicua.
Cuando *x* tiende a –∞.

$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{(x+2)\cdot e^{-x}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x+2}{x}\right)e^{-x}=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x}{x}+\frac{2}{x}\right)e^{-x}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)e^{-x}=\left(1+\frac{2}{-\infty}\right)e^{+\infty}=+\infty$$

No existe asíntota oblicua.



EJERCICIO 2B. [2,5 puntos]
Dadas las funciones $f(x)=2x+6$ y $g(x)=x^2-3x$

a) Calcula $\int \frac{f(x)}{g(x)}dx$ **[1,25 puntos]**

b) Halla el área de dicho recinto limitado por las gráficas de las funciones $f(x)$ y $g(x)$. **[1,25 puntos]**

a) Calculamos la integral usando el método de descomposición en fracciones simples.

$$\int \frac{f(x)}{g(x)}dx=\int \frac{2x+6}{x^2-3x}dx=\ldots$$

$$\frac{2x+6}{x^2-3x}=\frac{2x+6}{x(x-3)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-3}=\frac{A(x-3)+Bx}{x(x-3)}$$

$$2x+6=A(x-3)+Bx \Rightarrow \begin{cases} x=0\rightarrow 6=-3A\rightarrow A=\frac{6}{-3}=-2 \\ x=3\rightarrow 12=3B\rightarrow B=\frac{12}{3}=4 \end{cases}$$

$$\frac{2x+6}{x^2-3x}=\frac{-2}{x}+\frac{4}{x-3}$$

$$\ldots=\int \frac{-2}{x}+\frac{4}{x-3}dx=\int \frac{-2}{x}dx+\int \frac{4}{x-3}dx=-2\int \frac{1}{x}dx+4\int \frac{1}{x-3}dx=$$

$$=-2\ln x+4\ln(x-3)=\boxed{-\ln x^2+\ln(x-3)^4+C}$$

Hemos obtenido que $\int \frac{f(x)}{g(x)}dx=-\ln x^2+\ln(x-3)^4+C$.

b) Hallamos los posibles puntos de corte de las gráficas de las dos funciones.

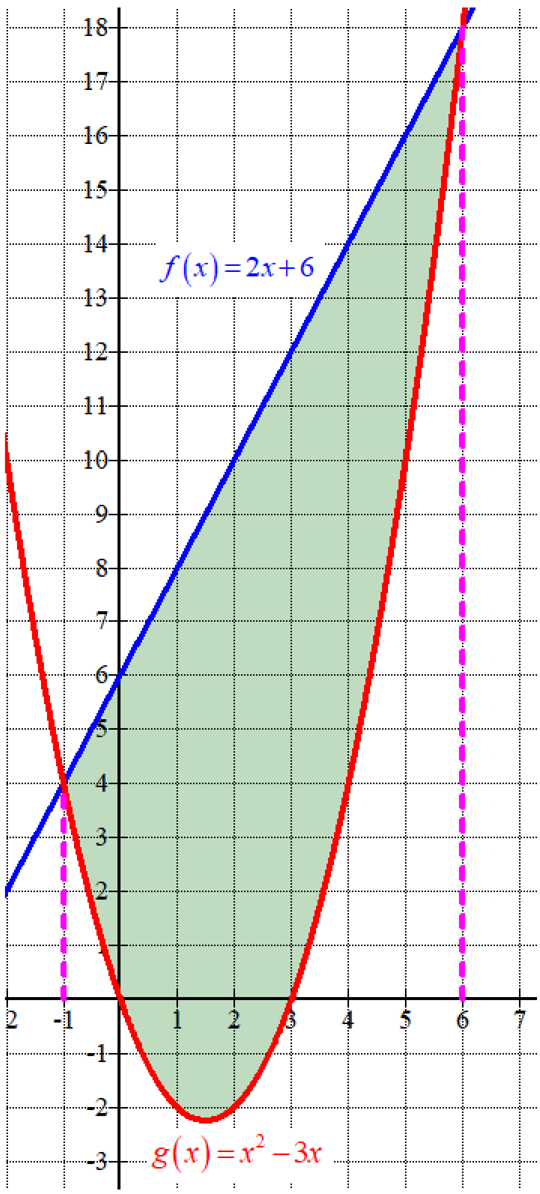
$$2x+6=x^2-3x\Rightarrow 0=x^2-5x-6\Rightarrow x=\frac{5\pm\sqrt{(-5)^2+24}}{2}=\frac{5\pm 7}{2}=\begin{cases} \frac{5+7}{2}=\boxed{6=x} \\ \frac{5-7}{2}=\boxed{-1=x} \end{cases}$$

El área del recinto encerrado entre las gráficas de las dos funciones es el valor absoluto de la integral definida entre –1 y 6 de la diferencia de las dos funciones.

$$\int_{-1}^{6} x^2-3x-(2x+6)\,dx=\int_{-1}^{6} x^2-5x-6dx=\left[\frac{x^3}{3}-5\frac{x^2}{2}-6x\right]_{-1}^{6}=$$

$$=\left[\frac{6^3}{3}-5\frac{6^2}{2}-6\cdot 6\right]-\left[\frac{(-1)^3}{3}-5\frac{(-1)^2}{2}-6(-1)\right]=72-90-36+\frac{1}{3}+\frac{5}{2}-6=\frac{-343}{6}$$

El área del recinto encerrado entre las gráficas de las dos funciones tiene un valor de $\frac{343}{6}\simeq 57.1667$ unidades cuadradas.



EJERCICIO 3A. [2,5 puntos]

Sea el punto $P(1,0,-2)$ y la recta $r:\frac{x-5}{2}=\frac{y-3}{2}=\frac{z+3}{-3}$

Se pide:

a) La ecuación continua de la recta *s* que pasa por P y que corta a *r* perpendicularmente. **[1 punto]**

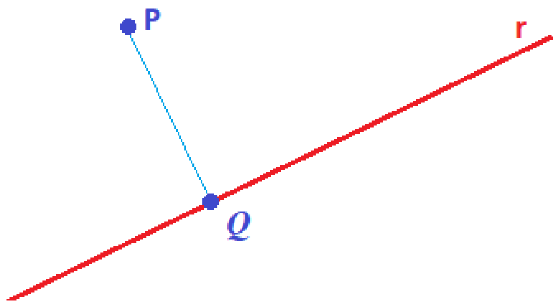
b) La ecuación del plano que contiene a las dos rectas *r* y *s*. **[0,75 puntos]**

c) La distancia del punto P a la recta *r*. **[0,75 puntos]**

a) Hallamos un vector director y un punto de la recta *r*.

$$r:\frac{x-5}{2}=\frac{y-3}{2}=\frac{z+3}{-3}\Rightarrow\begin{cases}\vec{v_r}=(2,2,-3)\\P_r(5,3,-3)\end{cases}\Rightarrow r:\begin{cases}x=5+2\alpha\\y=3+2\alpha\\z=-3-3\alpha\end{cases}$$

Hallamos el punto Q proyección ortogonal del punto P en la recta *r*.



Se debe cumplir que el punto Q pertenece a la recta *r*, por lo que sus coordenadas son $Q=(5+2\alpha,3+2\alpha,-3-3\alpha)$ y también que el vector director de la recta $\vec{v_r}=(2,2,-3)$ y el vector $\overrightarrow{PQ}$ deben ser ortogonales, por lo que su producto escalar debe ser nulo.

$$\overrightarrow{PQ}=(5+2\alpha,3+2\alpha,-3-3\alpha)-(1,0,-2)=(4+2\alpha,3+2\alpha,-1-3\alpha)$$

$$\left.\begin{array}{l}\vec{v_r}=(2,2,-3)\\\overrightarrow{PQ}=(4+2\alpha,3+2\alpha,-1-3\alpha)\\\vec{v_r}\cdot\overrightarrow{PQ}=0\end{array}\right\}\Rightarrow(2,2,-3)(4+2\alpha,3+2\alpha,-1-3\alpha)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8+4\alpha+6+4\alpha+3+9\alpha=0\Rightarrow 17\alpha=-17\Rightarrow\alpha=-1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow Q(5-2,3-2,-3+3)\Rightarrow Q(3,1,0)$$

La recta *s* que pasa por P y que corta a *r* perpendicularmente es la recta que pasa por los puntos P y Q.

$$\left.\begin{array}{r}P(1,0,-2)\in s\\\vec{u_s}=\overrightarrow{PQ}=(3,1,0)-(1,0,-2)=(2,1,2)\end{array}\right\}\Rightarrow\boxed{s:\frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z+2}{2}}$$

b) El plano π que contiene a las dos rectas *r* y *s* tiene como vectores directores los vectores directores de ambas rectas y contiene al punto $P(1,0,-2)$ de la recta *s*.

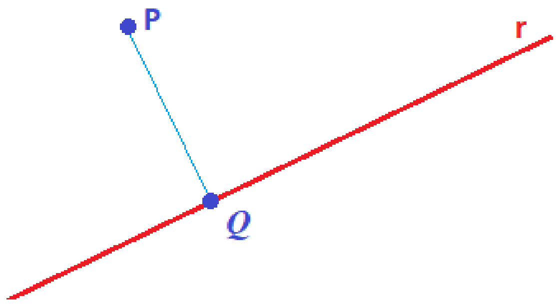
$$\left.\begin{array}{l}\vec{u}=\overrightarrow{u_s}=(2,1,2)\\ \vec{v}=\overrightarrow{v_r}=(2,2,-3)\\ P(1,0,-2)\in\pi\end{array}\right\}\Rightarrow \pi:\begin{vmatrix}x-1 & y & z+2\\ 2 & 1 & 2\\ 2 & 2 & -3\end{vmatrix}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -3(x-1)+4y+4(z+2)-2(z+2)+6y-4(x-1)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -3x+3+4y+4z+8-2z-4+6y-4x+4=0\Rightarrow \boxed{\pi:-7x+10y+2z+11=0}$$

El plano π que contiene a las dos rectas *r* y *s* tiene ecuación $\pi:-7x+10y+2z+11=0$.

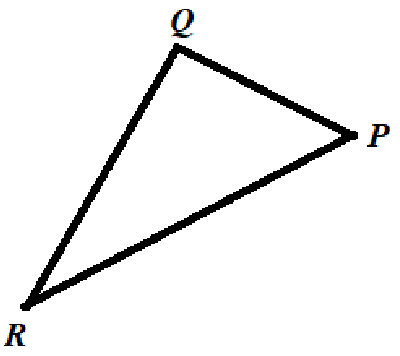
c) La distancia del punto P a la recta *r* es el módulo del vector $\overrightarrow{PQ}$.



$$\overrightarrow{PQ}=(2,1,2)\Rightarrow d(P,r)=d(P,Q)=\left|\overrightarrow{PQ}\right|=\sqrt{2^2+1^2+2^2}=\sqrt{9}=3\,unidades$$

La distancia del punto P a la recta *r* tiene un valor de 3 unidades.

EJERCICIO 3B. [2,5 puntos]
Sean P(−1, 2, 3), Q(−2, 1, 0) y R(0, 5, 1) los vértices de un triángulo:
a) Calcula el área y el perímetro de dicho triángulo. **[1,5 puntos]**
b) Calcula la ecuación de la recta que pasa por el origen de coordenadas y es perpendicular al plano que contiene a los puntos P, Q y R. **[1 punto]**



a) El área del triángulo PQR es la mitad del módulo del producto vectorial $\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}$.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{PQ}=(-2,1,0)-(-1,2,3)=(-1,-1,-3)\\ \overrightarrow{PR}=(0,5,1)-(-1,2,3)=(1,3,-2)\end{array}\right\}\Rightarrow \overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}=\begin{vmatrix} i & j & k\\ -1 & -1 & -3\\ 1 & 3 & -2\end{vmatrix}=$$

$$=2i-3j-3k+k-2j+9i=11i-5j-2k=(11,-5,-2)$$

$$\left|\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}\right|=\sqrt{11^2+(-5)^2+(-2)^2}=5\sqrt{6}$$

El área del triángulo PQR tiene un valor de $\frac{5\sqrt{6}}{2}\simeq 6.12$ unidades cuadradas.

El perímetro del triángulo es la suma de la longitud de sus lados, es decir, la suma del módulo de los vectores $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{PR}$ y $\overrightarrow{QR}$.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{PQ}=(-1,-1,-3)\\ \overrightarrow{PR}=(1,3,-2)\\ \overrightarrow{QR}=(0,5,1)-(-2,1,0)=(2,4,1)\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l}\left|\overrightarrow{PQ}\right|=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2+(-3)^2}=\sqrt{11}\\ \left|\overrightarrow{PR}\right|=\sqrt{1^2+3^2+(-2)^2}=\sqrt{14}\\ \left|\overrightarrow{QR}\right|=\sqrt{2^2+4^2+1^2}=\sqrt{21}\end{array}\right\}$$

El perímetro del triángulo PQR es $\sqrt{11}+\sqrt{14}+\sqrt{21}\simeq 11.64$ unidades.

b) Hallamos la ecuación del plano π que contiene a los puntos P, Q y R. Dicho plano tiene como vectores directores $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{PR}$ y contiene el punto R(0, 5, 1).

$$\left.\begin{array}{l}\vec{u}=\overrightarrow{PQ}=(-1,-1,-3)\\ \vec{v}=\overrightarrow{PR}=(1,3,-2)\\ R(0,5,1)\in\pi\end{array}\right\}\Rightarrow \pi:\begin{vmatrix} x & y-5 & z-1\\ -1 & -1 & -3\\ 1 & 3 & -2\end{vmatrix}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x-3(y-5)-3(z-1)+z-1-2(y-5)+9x=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x-3y+15-3z+3+z-1-2y+10+9x=0\Rightarrow \boxed{\pi:11x-5y-2z+27=0}$$

La recta s que es perpendicular al plano π que contiene a los puntos P, Q y R tiene como vector director el vector normal del plano.

$$\pi:11x-5y-2z+27=0\Rightarrow \vec{n}=(11,-5,-2)$$

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{v_s}=\vec{n}=(11,-5,-2)\\ O(0,0,0)\in s\end{array}\right\}\Rightarrow \boxed{s:\begin{cases}x=11\alpha\\ y=-5\alpha\,;\ \alpha\in\mathbb{R}\\ z=-2\alpha\end{cases}}$$

La recta que pasa por el origen de coordenadas y es perpendicular al plano que contiene a los puntos P, Q y R tiene las ecuaciones paramétricas $s:\begin{cases}x=11\alpha\\ y=-5\alpha\,;\ \alpha\in\mathbb{R}\\ z=-2\alpha\end{cases}$.

EJERCICIO 4. [2,5 puntos]
Una persona tiene que ser operada de la rodilla y para ello ha sido incluida en la lista de espera. Según los últimos datos publicados por el Servicio Extremeño de Salud (SES), el tiempo medio de espera en Extremadura para ser operado por el servicio de Traumatología es de 242 días. Sabiendo que dicho tiempo medio se distribuye normalmente con una desviación típica de 10 días:
a) ¿Qué probabilidad hay de que esa persona sea intervenida antes de 200 días? **[0,75 puntos]**
b) Por otra parte, se está estudiando la posibilidad de que un paciente sea intervenido en la sanidad privada siempre que no haya podido ser atendido antes de los 260 días. De ser así, ¿qué probabilidad hay de que sea atendida en la sanidad privada? **[0,75 puntos]**
c) Si finalmente el 70% de los pacientes en lista de espera fueron atendidos antes que esta persona, ¿cuántos días estuvo en lista de espera la persona en cuestión? **[1 punto]**

Consideramos la variable aleatoria X = el tiempo de espera (en días) en Extremadura para ser operado por el servicio de Traumatología. X = N(242, 10)

a) Nos piden calcular $P(X < 200)$.

$$P(X < 200) = \{Tipificamos\} = P\left(Z < \frac{200-242}{10}\right) = P(Z < -4.2) =$$

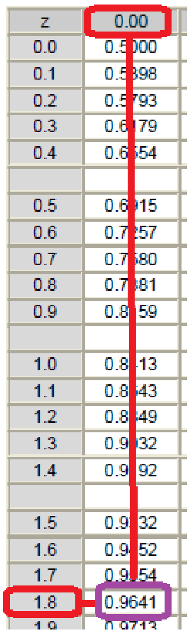
$$= P(Z > 4.2)) = 1 - P(Z \leq 4.2) = \left\{\begin{array}{l}\text{Miramos en la} \\ \text{tabla N(0, 1)}\end{array}\right\} = 1 - 1 = \boxed{0}$$

Es casi imposible que sea operado antes de los 200 días.

b) Nos piden calcular $P(X > 260)$.

$$P(X > 260) = \{Tipificamos\} = P\left(Z > \frac{260-242}{10}\right) = P(Z > 1.8) =$$

$$= 1 - P(Z \leq 1.8) = \left\{\begin{array}{l}\text{Miramos en la} \\ \text{tabla N(0, 1)}\end{array}\right\} = 1 - 0.9641 = \boxed{0.0359}$$



z	0.00
0.0	0.5000
0.1	0.5398
0.2	0.5793
0.3	0.6179
0.4	0.6554
0.5	0.6915
0.6	0.7257
0.7	0.7580
0.8	0.7881
0.9	0.8159
1.0	0.8413
1.1	0.8643
1.2	0.8849
1.3	0.9032
1.4	0.9192
1.5	0.9332
1.6	0.9452
1.7	0.9554
1.8	0.9641
1.9	0.9713

La probabilidad de ser atendido en la sanidad privada es de 0.0359.

c) Nos piden hallar "a" tal que $P(X<a)=0.7$.

$$P(X<a)=0.7 \Rightarrow \{Tipificamos\} \Rightarrow P\left(Z<\frac{a-242}{10}\right)=0.7 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{matrix}\text{Miramos en la}\\ \text{tabla N(0, 1)}\end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{a-242}{10}=\frac{0.52+0.53}{2}=0.525 \Rightarrow a-242=5.25 \Rightarrow \boxed{a=247.25\ días}$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03
0.0	0.5000	0.5040	0.5[illegible]80	0.51[illegible]20
0.1	0.5398	0.5438	0.5[illegible]78	0.55[illegible]7
0.2	0.5793	0.5832	0.5[illegible]71	0.59[illegible]0
0.3	0.6179	0.6217	0.6[illegible]55	0.62[illegible]3
0.4	0.6554	0.6591	0.6[illegible]28	0.66[illegible]4
0.5	[illegible]	[illegible]	0.6985	0.7019
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357

Estuvo en lista de espera aproximadamente 247 días.